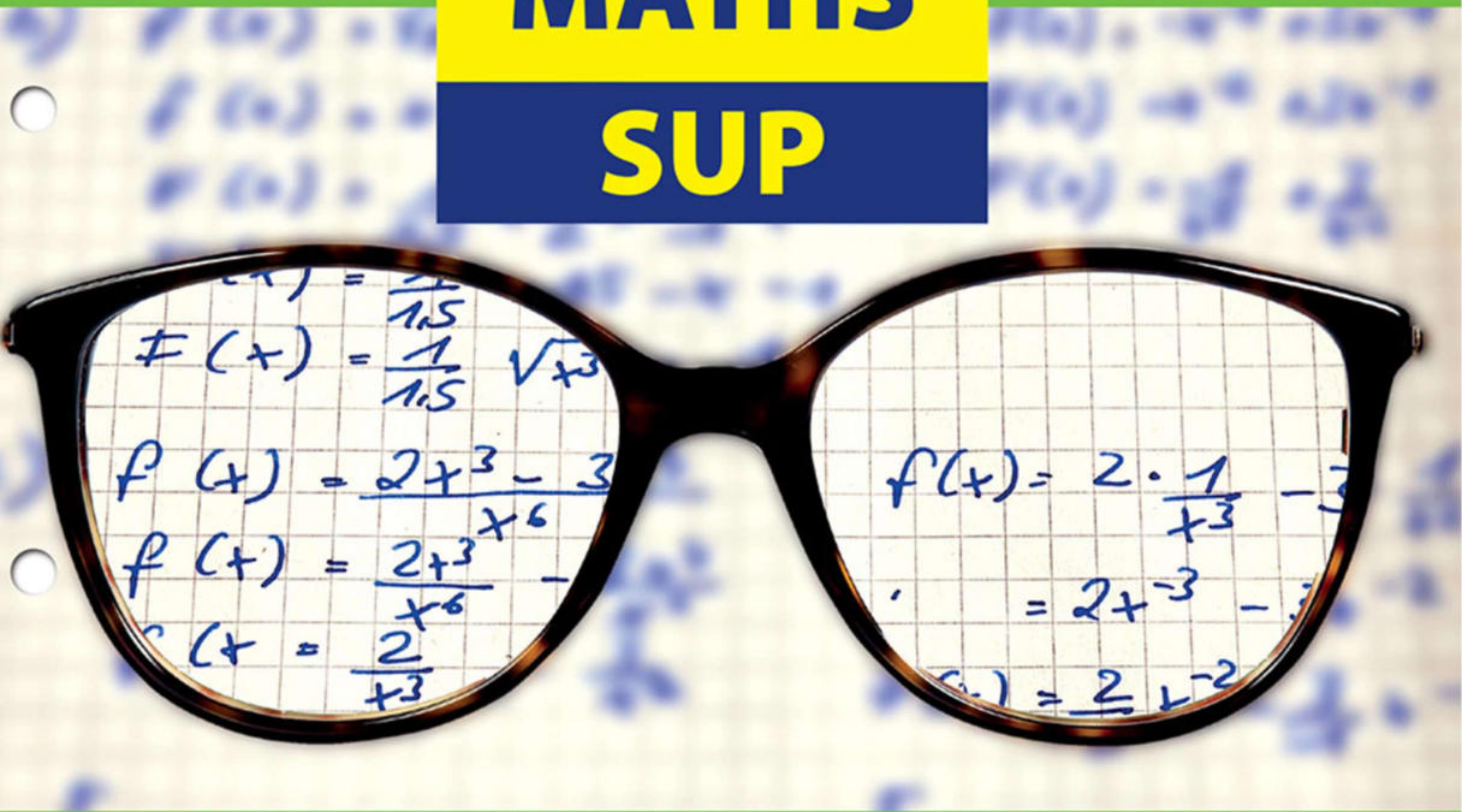
MATHS SUP



Sophie Dupuy-Touzet

20 FICHES TECHNIQUES
ET EXERCICES DE BASE

MPSI-PCSI-PTSI

ellipses

MATHS

SUP

20 FICHES TECHNIQUES
ET EXERCICES DE BASE

MPSI – PCSI – PTSI

Sophie Dupuy-Touzet

ellipses

Avant-propos

Chère lectrice, cher lecteur,

Depuis quelques années, la maîtrise des techniques n'est plus un attendu du secondaire.

Pour autant, le programme du supérieur laisse peu de temps à la pratique d'exercices techniques. Celle-ci relève d'un travail implicite, dont on ne mesure pas toujours l'ampleur. Dans l'ensemble des livres de classes préparatoires, la place faite aux exercices techniques est infime. Or s'il est une évidence, c'est que la compétence technique ne s'acquiert qu'avec la pratique.

Je propose dans ce livre des fiches thématiques sur les techniques et les connaissances de base, pour travailler en autonomie, en amont d'exercices qui couvrent un champ plus large, comme l'on peut trouver dans les livres de CPGE ou sur les sites d'annales de concours.

Chaque fiche se décline en 3 temps :

- **Le temps de l'appropriation des méthodes**

  La partie « Je vous montre comment » présente les méthodes travaillées dans la fiche, chacune étant illustrée par un exemple détaillé. Cette partie n'est évidemment pas exhaustive, et **elle fait délibérément l'impasse sur toutes les méthodes anecdotiques** qui ne servent que dans l'exemple qui les illustre ou dans de rares exercices !

- **Le temps de la pratique**

  La partie « À vous ! » propose d'enchaîner des exercices avec une **difficulté croissante**, sans sortir du cadre technique imposé par le thème. Ici encore, pas de singularité ou de problème qui nécessite une astuce. L'objectif est la **maîtrise des bases**, par la répétition. Le nécessaire, rien que le nécessaire !

- **Le temps de la correction**

  Chaque exercice qui a été donné est **corrigé en détail**. L'objectif n'est pas seulement de comprendre la correction, mais de parvenir à refaire seul les exercices. Alors, en cas d'erreur, même si vous comprenez la correction, refaites l'exercice !

Chacun sait qu'en mathématiques une grande partie de l'apprentissage relève de la pratique. C'est particulièrement vrai en ce qui concerne la technique. Avec ce livre, je vous propose un nombre important d'exercices pour **acquérir et**

consolider les notions de base, et vous mettre en situation de réussite tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. La maîtrise des exercices que je vous propose sera le ciment des connaissances que vous acquerrez par ailleurs. **Construisez sur du solide, vous n'en serez que plus efficace !**

Pour conclure, je tiens à remercier Corinne Baud, des éditions Ellipses, pour la confiance qu'elle m'a accordée, ainsi que mes amis relecteurs Sylvie, Gilles et Joachim.

Je dédie ce livre à mes trois filles, pour leur soutien inconditionnel.

Table des matières

Logique

Certaines notions de logique sont utilisées intuitivement dès les premiers apprentissages en mathématiques. Cette discipline n'est toutefois spécifiquement étudiée que dans le supérieur.
L'objet de cette fiche est de travailler les règles de logique qui servent dans les démonstrations, ainsi que de se familiariser avec le langage formel, omniprésent par la suite.

Une **assertion** est une affirmation à laquelle on peut attacher une valeur de vérité : soit vraie soit fausse.

Je vous montre comment

Démontrer qu'une propriété dépendant de plusieurs assertions est vraie

- À l'aide d'une table de vérité :

On envisage tous les cas pour les assertions (vraie ou fausse !), et on utilise les règles sur les opérateurs logiques.

Les **opérateurs logiques** permettent de combiner des assertions pour en obtenir de nouvelles :

- *Négation* : la négation d'une propriété P est notée $\rceil P$
- *Conjonction* : ' et ' notée $\wedge$
- *Disjonction inclusive* : ' ou ' notée $\vee$
- *Implication* : notée $\Rightarrow$
- *Équivalence* : notée $\Leftrightarrow$

.../...

…/…

Ils sont définis par la table de vérité :

P	Q	$\rceil P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Selon le **principe de non contradiction**, $\left(P \wedge \rceil P\right)$ est une assertion toujours fausse ; selon le **principe du tiers exclu**, $\left(P \vee \rceil P\right)$ est une assertion toujours vraie (appelée **tautologie**).

Exemple 1

P et Q désignent deux assertions. Montrer que : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\rceil Q \Rightarrow \rceil P\right)$.

Réponse

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\rceil P$	$\rceil Q$	$\rceil Q \Rightarrow \rceil P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

On voit que les assertions $(P \Rightarrow Q)$ et $\left(\rceil Q \Rightarrow \rceil P\right)$ sont simultanément vraies et simultanément fausses. Elles sont donc bien équivalentes.

Remarque : On dit que l'assertion $\left(\rceil Q \Rightarrow \rceil P\right)$ est la **contraposée** de l'assertion $(P \Rightarrow Q)$.

- En utilisant les **lois de Morgan** :

1. $\rceil(P \wedge Q) \Leftrightarrow \left(\rceil P \vee \rceil Q\right)$
2. $\rceil(P \vee Q) \Leftrightarrow \left(\rceil P \wedge \rceil Q\right)$
3. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
4. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Exemple 2

P et Q désignent deux assertions. Montrer que l'on a : $\left(\left(P \wedge \rceil Q\right) \vee (P \wedge Q)\right) \Leftrightarrow P$.

Remarque : Parfois, comme ici, un résultat a l'air « évident ». Bien sûr, quand on demande de démontrer un résultat de logique, on attend une argumentation basée sur les théorèmes du cours, pas la réponse : « c'est logique » !

Réponse

$$\left(\left(P\wedge \urcorner Q\right)\vee\left(P\wedge Q\right)\right)\underbrace{\Leftrightarrow}_{3^{e}\text{ loi de Morgan}}\left(P\wedge \underbrace{\left(Q\vee\urcorner Q\right)}_{\text{assertion toujours vraie}}\right)\Leftrightarrow P$$

■ Nier une phrase quantifiée

Concernant des éléments d'un ensemble, on définit trois opérateurs, appelés **quantificateurs** :

- $\forall$: se lit « *quel que soit* » ou « *pour tout* ».
- $\exists$: se lit « *il existe au moins un* ».
- $\exists\,!$: se lit « *il existe un unique* ».
- Si P désigne une propriété dépendant des éléments x d'un ensemble E, alors :
- $\left(\forall x\in E, P\right)$ signifie « *la propriété P est vérifiée pour tous les éléments de E* ».
- $\left(\exists x\in E, P\right)$ signifie « *la propriété P est vérifiée au moins pour un élément de E* ».
- $\left(\exists !\, x\in E, P\right)$ signifie « *la propriété P est vérifiée pour un seul élément de E* ».

⚠ On peut permuter deux quantificateurs identiques, mais on ne peut pas permuter deux quantificateurs de nature différente.

Par exemple : $\left(\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R}, y=x^2\right)$ est une assertion vraie (tout réel a un carré), par contre $\left(\exists y\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, y=x^2\right)$ est une assertion fausse (tous les carrés de réels ne sont pas égaux).

▶ En utilisant les résultats suivants :

Si P désigne une propriété dépendant d'un élément x d'un ensemble E, alors :

- $\urcorner\left(\forall x\in E, P\right)\Leftrightarrow\left(\exists x\in E, \urcorner P\right)$
- $\urcorner\left(\exists x\in E, P\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in E, \urcorner P\right)$

Exemple 3

Nier l'assertion : $\left(\forall x\in E, \exists y\in E, x.y=1\right)$.

Remarque : Cette assertion est fausse pour $E=\mathbb{R}$, et vraie pour $E=\mathbb{R}^*$, mais ce n'est pas la question !

Réponse

$$\urcorner\left(\forall x\in E, \exists y\in E, x.y=1\right)\Leftrightarrow\left(\exists x\in E, \urcorner\left(\exists y\in E, x.y=1\right)\right)\Leftrightarrow\left(\exists x\in E, \forall y\in E, x.y\neq 1\right).$$

Nier une implication

- En utilisant l'assertion : $\boxed{\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)}$

Exemple 4

Nier l'assertion : $(\forall x \in E, (x \in A \Rightarrow x \notin B))$.

Réponse

$$\neg(\forall x \in E, (x \in A \Rightarrow x \notin B)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg(x \in A \Rightarrow x \notin B))$$
$$\Leftrightarrow (\exists x \in E, (x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, x \in A \cap B).$$

Remarque : On a aussi : $(\exists x \in E, x \in A \cap B) \Leftrightarrow (A \cap B \neq \varnothing)$.

Traduire simplement une phrase quantifiée

Pour bien comprendre une phrase quantifiée, il ne suffit pas de la traduire littéralement, mais il faut être capable de l'exprimer simplement « en français ».

Exemple 5

Écrire littéralement l'assertion suivante, puis la traduire par une phrase concise : $(\forall x \in A, x \neq 0)$.

Réponse

L'expression littérale de cette phrase quantifiée est : « quel que soit *x* élément de *A*, *x* n'est pas nul ».

On peut la traduire simplement en disant : « *A* ne contient pas 0 ».

Remarque : Il existe bien sûr d'autres formulations, comme « 0 n'est pas un élément de *A* », ou « aucun des éléments de *A* n'est nul »… L'essentiel est de comprendre le sens de l'assertion, en se détachant du vocabulaire formel.

On s'échauffe

Dans les exercices, f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. P, Q et R désignent des assertions. Montrer que les équivalences suivantes sont vraies :

a. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil P \vee Q)$ (à l'aide d'une table de vérité)

b. $\rceil(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil Q)$ (à l'aide d'une table de vérité)

c. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R)$ (à l'aide d'une table de vérité)

d. $(P \wedge \rceil(Q \vee R)) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil Q \wedge \rceil R)$

e. $((P \wedge \rceil Q) \wedge \rceil(R \wedge \rceil Q)) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil(Q \vee R))$

2. Traduire les assertions suivantes à l'aide d'une phrase concise (comme dans **l'exemple 5**) :

a. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

c. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

d. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$.

e. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$.

3. Traduire à l'aide de phrases quantifiées les assertions suivantes :

a. f ne prend que des valeurs entières.

b. f prend toutes les valeurs entières.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

d. f est strictement décroissante.

e. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

4. Donner la négation des assertions suivantes :

a. $\exists a > 0, \exists b \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, na \leq b$.

b. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a > 0, b \geq 0) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, na > b)$.

c. $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in [0;1], f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

d. $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2, (x.y=x)\Rightarrow (y=1)$.

e. $\left(\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)\times f(y)\right)\Rightarrow (\forall x\in \mathbb{R}, f(x)\geq 0)$.

5. Parce que l'on peut s'amuser avec la logique :
On considère la tautologie (assertion toujours vraie) A suivante : « Quand je suis en cours, mon téléphone portable est éteint ».
On note C l'assertion « je suis en cours », et P l'assertion « mon téléphone portable est allumé ».

a. Donner un équivalent de A à l'aide de C, P et des opérateurs logiques.

b. On considère l'assertion S : « Mon téléphone portable sonne ». Si S est vraie, écrire des assertions vraies à l'aide de P et C (hormis les tautologies $P\vee \rceil P$ et $C\vee \rceil C$).

c. Exprimer à l'aide de P et C une assertion qui illustre : « Je suis mis à la porte, car mon téléphone a sonné ». Que peut-on en penser ?

d. Donner la contraposée de l'assertion A.

e. Donner la réciproque de l'assertion A.

On accélère

6. Traduire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

a. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

b. La fonction f n'est pas strictement décroissante.

c. La fonction f n'est pas de signe constant.

d. La fonction f n'admet pas d'extremum.

e. La suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

7. Après en avoir donné la signification, donner la négation des assertions suivantes :

a. $\exists M\in \mathbb{R}, \forall n\in \mathbb{N}, u_n\geq M$.

b. $\exists N\in \mathbb{N}, \forall n\in \mathbb{N}, (n\geq N)\Rightarrow (u_n>0)$.

c. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq a) \Rightarrow \big(f(x)f(a) > 0\big)$.

d. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \big(f(x) = f(y)\big) \Rightarrow (x = y)$.

e. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geq N) \Rightarrow \big(|u_n| < \varepsilon\big)$.

On finit au top

8. Après en avoir donné la signification, donner la négation des assertions suivantes :

a. $\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq A) \Rightarrow \big(|f(x) - L| < \varepsilon\big)$.

b. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \ \big(|x - a| < r\big) \Rightarrow \big(|f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$.

9. Traduire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

a. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

b. La fonction f n'est pas monotone.

c. Les fonctions f et g s'annulent simultanément.

d. Les fonctions f et g ont les mêmes variations.

10. Soient E un ensemble, A et B deux assertions dépendant des éléments x de E. Compléter par le symbole $\Rightarrow$, ou $\Leftarrow$ et justifier qu'il n'y a pas d'équivalence :

a. $(\exists x \in E, A \wedge B) \cdots \big((\exists x \in E, A) \wedge (\exists x \in E, B)\big)$

b. $(\forall x \in E, A \vee B) \cdots \big((\forall x \in E, A) \vee (\forall x \in E, A)\big)$

1. a.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

b.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

c. L'assertion $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$ est vraie si, et seulement si P, Q et R sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$R \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

d. $$\left(P \wedge \neg(Q \vee R)\right) \underbrace{\Leftrightarrow}_{2^e \text{ loi de Morgan}} \left(P \wedge (\neg Q \wedge \neg R)\right) \Leftrightarrow \left(P \wedge \neg Q \wedge \neg R\right).$$

e. $$\left((P \wedge \neg Q) \wedge \neg(R \wedge \neg Q)\right) \underbrace{\Leftrightarrow}_{1^{re} \text{ loi de Morgan}} \left((P \wedge \neg Q) \wedge (\neg R \vee Q)\right)$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{3^e \text{ loi de Morgan}} \left((P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee \underbrace{(P \wedge \neg Q \wedge Q)}_{\text{assertion fausse}} \right) \underbrace{\Leftrightarrow}_{2^e \text{ loi de Morgan}} \left(P \wedge \neg(Q \vee R)\right).$$

2. a. La fonction f est nulle. (Cela sous-entend « partout ».)

b. La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction *f* s'annule sur $\mathbb{R}$. (Cela sous-entend « au moins une fois ».)

d. La fonction *f* admet un minimum.

e. La fonction *f* n'admet pas de maximum.

3. a. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{Z}$.

b. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = n$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

d. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x < y) \Rightarrow (f(x) > f(y))$.

e. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

4. a. $\forall a > 0, \forall b \geq 0, \exists n \in \mathbb{N}, na > b$.

b. $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a > 0, b \geq 0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, na \leq b)$.
Avez-vous remarqué que les deux assertions précédentes sont la négation l'une de l'autre ?!

c. $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda \in [0;1], f(\lambda x + (1-\lambda) y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

d. $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x.y = x) \wedge (y \neq 1)$.

e. $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) \times f(y)\right) \wedge \left(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0\right)$.

⚠ Il s'agit ici de nier une implication. Contrairement au cas précédent, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ figure dans la première assertion, qui demeure la même dans la négation.

5. a. $A \Leftrightarrow (C \Rightarrow \neg P)$.

b. $S \Rightarrow P$; $S \Rightarrow \neg C$; $S \Rightarrow P \wedge \neg C$; $S \Rightarrow P \vee \neg C$; $S \Rightarrow C \vee P$.

c. $C \wedge P$; l'assertion *A* étant une tautologie, l'assertion $C \wedge P$ est fausse.

d. $P \Rightarrow \neg C$: quand mon portable est allumé, je ne suis pas en cours.

e. $\neg P \Rightarrow C$: quand mon portable est éteint, je suis en cours.

6. a. $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$.

b. ⚠ La négation de la décroissance n'est pas la croissance !!!
Il s'agit ici de nier la stricte décroissance (vue dans l'exercice **3.d**) :

$$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x < y) \wedge (f(x) \leq f(y)).$$

c. $\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x)f(y)<0$.

C'est la façon la plus concise de l'écrire, mais on peut aussi séparer x et y : $(\exists x\in\mathbb{R}, f(x)>0)\wedge(\exists y\in\mathbb{R}, f(y)<0)$.

d. $\forall a\in\mathbb{R}, \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x)<f(a)<f(y)$.

e. $\forall M\in\mathbb{R}, \exists N_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, (n\geq N_0)\Rightarrow(u_n\geq M)$.

7. a. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

Sa négation : $\forall M\in\mathbb{R}, \exists n\in\mathbb{N}, u_n<M$.

b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

Sa négation : $\forall N\in\mathbb{N}, \exists n\in\mathbb{N}, (n\geq N)\wedge(u_n\leq 0)$.

c. La fonction *f* est de signe constant et ne s'annule pas au-delà d'un certain réel (on peut aussi dire : $f(x)$ est non nul et de signe constant pour x suffisamment grand).

Sa négation : $\forall a\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R}, (x\geq a)\wedge(f(x)f(a)\leq 0)$.

d. La fonction *f* est injective, c'est-à-dire que deux réels distincts n'ont pas la même image.

Sa négation : $\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, (f(x)=f(y))\wedge(x\neq y)$.

e. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Sa négation : $\exists\varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\in\mathbb{N}\ (n\geq N)\wedge(|u_n|\geq\varepsilon)$.

8. a. La fonction f admet une limite finie en $+\infty$.

Sa négation : $\forall L\in\mathbb{R}, \exists\varepsilon>0, \forall A\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R}, (x\geq A)\wedge(|f(x)-L|\geq\varepsilon)$.

b. La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$.

Sa négation : $\exists a\in\mathbb{R}, \exists\varepsilon>0, \forall r>0, \exists x\in\mathbb{R}, (|x-a|<r)\wedge(|f(x)-f(a)|\geq\varepsilon)$.

9. a. $\forall n\in\mathbb{Z}, \exists N\in\mathbb{Z},\ n<N$.

b. $\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, (x<y<z)\wedge\big((f(y)-f(x))(f(z)-f(y))<0\big)$.

Remarque : On peut aussi écrire

$\big(\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, (x<y)\wedge(f(x)<f(y))\big)\wedge\big(\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, (x<y)\wedge(f(x)>f(y))\big)$.

Il faut bien comprendre que le couple (x,y) de la première assertion n'est pas le même que celui de la seconde.

c. $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x)=0) \Leftrightarrow (g(x)=0)$.

d. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$.

10. a. $(\exists x \in E, A \wedge B) \Rightarrow ((\exists x \in E, A) \wedge (\exists x \in E, B))$.

En effet, s'il existe $x \in E$ pour lequel A et B sont vérifiées, alors il existe $x \in E$ pour lequel A est vérifiée, et il existe $x \in E$ (le même en l'occurrence !) pour lequel B est vérifiée : c'est l'implication.

Avec $E = \mathbb{R}$, $A = (x > 0)$ et $B = (x < 0)$, on a bien :

$$(\exists x \in \mathbb{R}, (x > 0) \wedge (x < 0)) \Rightarrow ((\exists x \in \mathbb{R}, x > 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}, x < 0)).$$

En effet la première assertion étant fausse, l'implication est vraie…

Remarque : Arrêtons-nous sur ce qui peut sembler être une bizarrerie :
Dans la table de vérité qui permet de définir les opérateurs logiques, on a $(P \Rightarrow Q)$ vraie lorsque P est fausse. C'est ce qui permet de montrer que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ où l'on voit clairement que si l'on a $\neg P$, la deuxième assertion est vraie et, par équivalence, la première assertion (l'implication) est vraie.

Retournons à notre contre-exemple…

L'assertion $(\exists x \in \mathbb{R}, x > 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}, x < 0)$ est vraie (il y a bien des réels strictement positifs et des réels strictement négatifs), mais l'assertion $(\exists x \in \mathbb{R}, (x > 0) \wedge (x < 0))$ est fausse.

L'implication $((\exists x \in E, A) \wedge (\exists x \in E, B)) \Rightarrow (\exists x \in E, A \wedge B)$ est donc fausse.

b. $(\forall x \in E, A \vee B) \Leftarrow ((\forall x \in E, A) \vee (\forall x \in E, B))$.
En effet, considérons la contraposée :

$$\neg(\forall x \in E, A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg A \wedge \neg B)$$

et $$\neg((\forall x \in E, A) \vee (\forall x \in E, B)) \Leftrightarrow \neg(\forall x \in E, A) \wedge \neg(\forall x \in E, B)$$
$$\Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg A) \wedge (\exists x \in E, \neg B).$$

S'il existe $x \in E$ pour lequel ni A ni B n'est vraie, alors il existe $x \in E$ pour lequel A n'est pas vérifiée, et il existe $x \in E$ (le même en l'occurrence !) pour lequel B n'est pas vérifiée.

On a donc : $(\exists x \in E, \neg A \wedge \neg B) \Rightarrow (\exists x \in E, \neg A) \wedge (\exists x \in E, \neg B)$, d'où l'implication (par contraposée).

Avec $E=\mathbb{R}$, $A=(x>0)$ et $B=(x\leq 1)$, on a bien :

$\big((\forall x\in\mathbb{R},x>0)\vee(\forall x\in\mathbb{R},x\leq 1)\big)\Rightarrow\big(\forall x\in\mathbb{R},(x>0)\vee(x\leq 1)\big)$.

En effet la première assertion étant fausse, l'implication est donc vraie.

L'assertion $\big(\forall x\in\mathbb{R},(x>0)\vee(x\leq 1)\big)$ est vraie (un réel est bien soit strictement positif, soit inférieur ou égal à 1, cette disjonction n'étant pas exclusive), mais l'assertion $(\forall x\in\mathbb{R},x>0)\vee(\forall x\in\mathbb{R},x\leq 1)$ est fausse.

L'implication $(\forall x\in E,A\vee B)\Rightarrow\big((\forall x\in E,A)\vee(\forall x\in E,B)\big)$ est donc fausse.

Injectivité – Surjectivité

La question de l'injectivité et de la surjectivité d'une application est celle du lien qu'elle établit entre deux ensembles. La réponse est partiellement apportée avec les outils de terminale pour les fonctions définies et à valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$. Cette fiche permet de les récapituler, mais aussi d'explorer le cas plus théorique des applications non réelles.
E et F désignent des ensembles, f une application de E vers F.

Je vous montre comment

Démontrer qu'une application $f : E \to F$ est injective

f est **injective** si : $\forall (a,b) \in E^2, (a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$.

Remarque : Par définition d'une application, on a toujours $\forall (a,b) \in E^2$, $(a = b) \Rightarrow (f(a) = f(b))$ dont la contraposée est la réciproque de l'implication qui définit l'injectivité.
On peut donc également définir l'injectivité ainsi :

$$\boxed{\forall (a,b) \in E^2, (a = b) \Leftrightarrow (f(a) = f(b))}.$$

- Si E et F sont des parties de $\mathbb{R}$:

On établit l'injectivité de f en étudiant ses variations.

Exemple 1

Une fonction f strictement croissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est injective.

Réponse

La fonction f est strictement croissante sur I, donc :

$$\forall (a,b) \in I^2, (a \neq b) \Rightarrow ((a < b) \vee (a > b)) \Rightarrow ((f(a) < f(b)) \vee (f(a) > f(b)))$$
$$\Rightarrow (f(a) \neq f(b)).$$

Remarque : Ce sont en réalité des équivalences, mais seule l'implication suffit.

- En utilisant la contraposée de l'implication de définition :

On écrit pour a et b quelconques dans E : $f(a)=f(b)$ et on montre par équivalences que $a=b$.

Remarque : On peut raisonner par implications car, comme rappelé précédemment, l'implication $(a=b)\Rightarrow(f(a)=f(b))$ est toujours vraie.

Exemple 2

Établir l'injectivité de l'application $f:\begin{vmatrix}\mathbb{R}\to & \mathbb{C}\\ x\mapsto x+ix^2\end{vmatrix}$.

Réponse

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$(f(a)=f(b))\Leftrightarrow\left(a+ia^2=b+ib^2\right)\Leftrightarrow(a=b)\wedge\left(a^2=b^2\right)\Leftrightarrow(a=b)$.

En effet, deux nombres complexes sont égaux si, et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. f est donc injective.

Démontrer qu'une application $f:E\to F$ est surjective

f est **surjective** si : $\forall y\in F,\exists x\in E,f(x)=y$.

- Si E et F sont des parties de $\mathbb{R}$ et si f est continue :

On établit la surjectivité en étudiant les variations de f et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires.

Exemple 3

Déterminer le plus grand intervalle J de $\mathbb{R}$ (au sens de l'inclusion) pour lequel l'application $f:\begin{vmatrix}\mathbb{R}\to & J\\ x\mapsto x^2+2x-1\end{vmatrix}$ est surjective.

Réponse

L'étude des variations de f conduit (sans difficulté !) au tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction polynomiale f étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique, et tout réel de l'intervalle $[-2,+\infty[$ admet un antécédent dans $\mathbb{R}$.

-2 étant le minimum de la fonction f, les réels de l'intervalle $]-\infty,-2[$ n'ont pas d'antécédent par f. On en déduit que $J=[-2,+\infty[$.

- En utilisant la définition :

Pour $y \in F$ quelconque, on détermine x tel que $f(x) = y$.

Exemple 4

Établir la surjectivité de l'application $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \to [0,2\pi[\\ z \mapsto \arg(z) \end{array} \right.$.

⚠ Si on ne précise pas que f est à valeurs dans $[0, 2\pi[$ on ne définit pas une fonction car l'argument d'un nombre complexe est défini à 2π-près.

Réponse

Soit $y \in [0,2\pi[$. On a $f\left(e^{iy}\right) = y$; f est donc surjective.

Démontrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective

f est **bijective** si f est injective et surjective.

- Soit on montre séparément que f est injective et f est surjective.
- Soit on montre que : $\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y$:

Exemple 5

Établir la bijectivité de l'application $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x+1} \end{array} \right.$.

Réponse

Soit $y \in \mathbb{R}$. On a : $\left(y = \dfrac{x}{x+1}\right) \Leftrightarrow \left(\left(x(1-y) = y\right)\right)$.

- Si $y = 1$, la deuxième assertion est fausse.
- Si $y \neq 1$, la deuxième assertion équivaut à : $x = \dfrac{y}{1-y}$.

Dans chaque assertion on a nécessairement $x \neq -1$; ainsi tout réel de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par f, qui est donc bijective.

Remarque : L'étude des variations de f donne le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

f étant continue, le théorème de bijection successivement appliqué aux intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$ donne que f établit une bijection entre $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ et entre $]-1,+\infty[$ et $]-\infty,1[$.

Les intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$ étant disjoints (d'intersection vide), on en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Mais c'est plus long !

■ Démontrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas injective

▸ En proposant un contre-exemple :

On détermine deux éléments distincts de E qui ont la même image.

Exemple 6

Vérifier que l'application $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ n'est pas injective.

Réponse

$f(-1) = f(1)$, donc f n'est pas injective.

■ Démontrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas surjective

▸ En proposant un contre-exemple :

On détermine un élément de F qui n'a pas d'antécédent par f.

Exemple 7

Vérifier que l'application $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ n'est pas surjective.

Réponse

-1 n'a pas d'antécédent par f qui n'est donc pas surjective.

Remarque : Évidemment, aucun réel strictement négatif n'a d'antécédent, mais un seul suffit pour nier la surjectivité.

⚠ Une même expression littérale pour f peut générer tous les cas possibles suivant E et F, il faut donc prêter une grande attention aux ensembles concernés.

Exemple 8

Déterminer les plus grands intervalles E et F de $\mathbb{R}$ possibles (au sens de l'inclusion) pour lesquels $f : \left| \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ est successivement : ni injective, ni surjective ; puis injective et non surjective ; puis surjective et non injective ; puis bijective.

Réponse

Il suffit d'examiner le tableau de variations de f pour se convaincre des résultats :

- Avec $E = F = \mathbb{R}$, f n'est ni injective, ni surjective.
- Avec $E = \mathbb{R}^+$ (ou $E = \mathbb{R}^-$) et $F = \mathbb{R}$, f est injective, non surjective.
- Avec $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^+$, f est surjective, non injective.
- Avec $E = F = \mathbb{R}^+$, ou encore $E = \mathbb{R}^-$ et $F = \mathbb{R}^+$, f est bijective.

On s'échauffe

Pour les exercices **1** à **12,** étudier l'injectivité et la surjectivité de l'application f :

1. $f:\left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{sh}(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} \end{array}\right.$

2. $f:\left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow [-1,1] \\ x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}\right.$

3. $f:\left|\begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ z \mapsto (\operatorname{Re}(z),\operatorname{Im}(z)) \end{array}\right.$

4. $f:\left|\begin{array}{l} [0,\pi] \rightarrow [0,1] \\ x \mapsto \sin x \end{array}\right.$

5. $f:\left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto x(1+i) \end{array}\right.$

6. $f:\left|\begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \overline{z} \end{array}\right.$

7. $f:\left|\begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \\ z \mapsto |z| \end{array}\right.$

On accélère

8. $f:\left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow [0,1[\\ x \mapsto x-E(x) \end{array}\right.$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

9. $f:\left|\begin{array}{l} \mathbb{C}\setminus\{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z}{1+z} \end{array}\right.$

10. $f:\left|\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y,x-y) \end{array}\right.$

11. $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (xy,x+y)\end{array}\right.$

12. $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}\\ z\mapsto z^2\end{array}\right.$

On finit au top

13. On considère $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}\\ n\mapsto 2n\end{array}\right.$ et $g:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}\\ n & \mapsto & \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair}\\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}\end{array}\right.$

a. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.

b. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $g\circ f$ et $f\circ g$.

14. $C([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions réelles continues sur [0,1], et $D([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles dérivables sur [0,1].

Étudier l'injectivité et la surjectivité de l'application :

$$\varphi:\left|\begin{array}{ccc}C([0,1],\mathbb{R}) & \rightarrow & D([0,1],\mathbb{R})\\ f & \mapsto & F:\left|\begin{array}{l}[0,1]\rightarrow\mathbb{R}\\ x\mapsto\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\end{array}\right.\end{array}\right.$$

15. V désigne l'ensemble des vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Étudier l'injectivité et la surjectivité de l'application :

$f:\left|\begin{array}{ccc}V^2 & \rightarrow & \mathbb{R}\\ (\vec{u},\vec{v}) & \mapsto & \vec{u}.\vec{v}\end{array}\right.$ (où $\vec{u}.\vec{v}$ désigne le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.)

1. L'étude des variations de *f*, le calcul de ses limites en $-\infty$ et $+\infty$, et sa continuité permettent d'établir sa bijectivité, grâce au théorème de bijection.

2. L'étude des variations de *f* et le calcul de ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ donnent *f* strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans]–1,1[(ce qui justifie au passage que *f* a bien ses images dans [–1,1]), elle est donc injective mais non surjective, car 1 (par exemple) n'a pas d'antécédent par *f*.

3. *f* est une bijection, car un nombre complexe est entièrement déterminé par ses parties réelles et imaginaires : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \exists! z\in\mathbb{C}, z=x+iy$.

4. $f(0)=f(\pi)=0$; *f* n'est donc pas injective.

   $f(0)=0, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$; la fonction sinus étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires donne *f* surjective.

5. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a : $\left(f(x)=f(y)\right)\Leftrightarrow\left(x(1+i)=y(1+i)\right)\underset{1+i\neq 0}{\Leftrightarrow}(x=y)$; *f* est donc injective.

   $x(1+i)=1$ équivaut à $x=\dfrac{1-i}{2}$, qui n'est pas un nombre réel ; ainsi 1 n'a pas d'antécédent par *f*, qui n'est donc pas surjective.

6. Soit $y\in\mathbb{C}$. On a : $\left(f(z)=y\right)\Leftrightarrow\left(\overline{z}=y\right)\Leftrightarrow\left(z=\overline{y}\right)$; *f* est donc bijective.

7. $f(1)=f(i)=1$; *f* n'est donc pas injective.

   Soit $y\in\mathbb{R}^+$. $f(y)=y$, donc *f* est surjective.

8. On rappelle que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\mathrm{E}(x)\leq x<\mathrm{E}(x)+1$. Les images de *f* sont donc bien dans [0,1[.

   $f(0)=f(1)=0$; *f* n'est donc pas injective.

   Soit $y\in[0,1[$. $\mathrm{E}(y)=0$, d'où $f(y)=y$; *f* est donc surjective.

9. Soit $(z,z')\in\left(\mathbb{C}\setminus\{-1\}\right)^2$. On a :

   $\left(f(z)=f(z')\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{z}{1+z}=\dfrac{z'}{1+z'}\right)\Leftrightarrow\left(z+zz'=z'+zz'\right)\Leftrightarrow\left(z=z'\right)$;

   f est donc injective.

On a : $\left(f(z)=1\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{z}{1+z}=1\right)\Leftrightarrow\left(z=1+z\right)\Leftrightarrow\left(0=1\right)$; la dernière assertion étant fausse, il en est de même de la première et 1 n'a pas d'antécédent par *f*, qui n'est donc pas surjective.

Remarque : Si le contre-exemple avec $y=1$ n'apparaît pas de façon évidente, on le trouve, en cherchant à résoudre $f(z)=y$, pour *y* quelconque dans $\mathbb{C}$: $\left(f(z)=y\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{z}{1+z}=y\right)\Leftrightarrow\left(z(1-y)=y\right)$. A ce stade, on voit que si $y=1$ on a une assertion fausse… On tient donc notre contre-exemple.

10. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\left(f(x,y)=(a,b)\right)\Leftrightarrow\left((x+y,x-y)=(a,b)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=a\\x-y=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(a+b)\\y=\dfrac{1}{2}(a-b)\end{cases}.$$

(On obtient le dernier système en sommant puis en soustrayant les deux lignes du système précédent.)

On a montré : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\exists!(x,y)\in\mathbb{R}^2,f(x,y)=(a,b)$; *f* est donc bijective.

11. $f(1,-1)=f(-1,1)$; *f* n'est donc pas injective.

On a : $\left(f(x,y)=(1,0)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1\\x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\-x^2=1\end{cases}$; le système n'ayant pas de solution dans $\mathbb{R}^2$, (1,0) n'a pas d'antécédent par *f*, qui n'est donc pas surjective.

Remarque : Soit $(p,s)\in\mathbb{R}^2$. On a : $\left(f(x,y)=(p,s)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}xy=p\\x+y=s\end{cases}$; *x* et *y* sont donc les solutions de l'équation $X^2-sX+p=0$ (c'est un résultat à connaître !), dont on sait qu'elle n'admet pas toujours des solutions réelles. Le contre-exemple donné est l'un des plus simples !

12. $f(1)=f(-1)=1$; *f* n'est donc pas injective.

Soit $Z=x+iy\in\mathbb{C},(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On cherche $z=a+ib,(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(z)=Z$.

Remarque : L'existence de tels nombres complexes relève du cours sur les nombres complexes, mais nous allons le démontrer ici…

On a : $(a+ib)^2 = x+iy \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=x & (1) \\ 2ab=y & (2) \end{cases}$.

D'autre part : $|z|^2=|Z| \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{x^2+y^2}$ (3) (il fallait y penser !).

On a donc en sommant et en soustrayant (1) et (3) : $\begin{cases} a^2=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) \\ b^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right) \end{cases}$.

Comme pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$, le système a des solutions.

On prend $a=\sqrt{\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$ ou $a=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$ et, d'après (2) le signe de b étant celui de a si y est positif, le signe contraire sinon, on en déduit la valeur de b qui vaut : soit $\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}$, soit $-\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}$.

Finalement, tout nombre complexe admet des racines carrées, et f est surjective.

13. a. Soit $(a,b)\in\mathbb{N}^2$. On a : $\big(f(a)=f(b)\big)\Leftrightarrow(2a=2b)\Leftrightarrow(a=b)$; f est donc injective.

Toutes les images par f sont des nombres pairs ; on en déduit que 1 (par exemple) n'a pas d'antécédent par f qui n'est donc pas surjective.

$g(2)=g(3)=1$; g n'est donc pas injective.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $g(2n)=n$, g est donc surjective.

b. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g\circ f(n)=g(2n)=n$, donc $g\circ f$ est clairement bijective.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f\circ g(n)=\begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

$f\circ g(2)=f\circ g(3)$; $f\circ g$ n'est donc pas injective.

Si n est pair, $f\circ g(n)=n$ est pair, et si n est impair, $f\circ g(n)=n-1$ est pair. On en déduit que les entiers impairs n'ont pas d'antécédent par $f\circ g$, qui n'est donc pas surjective.

14. D'après le théorème fondamental d'intégration, l'application φ associe à toute fonction continue sur [0,1] son unique primitive (définie et dérivable sur [0,1]) qui s'annule en 0.

Soit $(u,v)\in\left(C([0,1],\mathbb{R})\right)^2$, tel que $\varphi(u)=\varphi(v)$; u et v ont les mêmes primitives donc (en les dérivant), on obtient $u=v$ et φ est injective.

Les images par φ sont des fonctions dérivables sur [0,1], s'annulant toutes en 0 ; φ n'est donc pas surjective.

15. $f(\vec{i},\vec{j})=f(\vec{0},\vec{0})=0$, donc f n'est pas injective.

Soit $k\in\mathbb{R}$. $f(k\vec{i},\vec{i})=k$, donc f est surjective.

Sommes et produits indexés dans $\mathbb{N}$

La manipulation des sommes finies est la première étape vers la notion de série, étudiée au cours de la première année et développée en seconde année. Pour évoluer plus aisément dans le contexte des sommes infinies que sont les séries, il faut déjà maitriser le cas fini ! C'est l'objectif de cette fiche.

Je vous montre comment

■ Reconnaître et utiliser les produits et sommes connues

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{1 \leq k \leq n} k = n!$ (**Factorielle**)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (**Somme arithmétique**)
3. $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \forall (n, n_0) \in \mathbb{N}^2, n \geq n_0, \sum_{k=n_0}^{n} a^k = a^{n_0} \frac{1-a^{n-n_0+1}}{1-a}$

   (**Somme géométrique**)

Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme des n premiers entiers impairs : $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$.

Réponse

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 2\frac{(n-1)n}{2} + n = n^2.$$

⚠ Quand le terme que l'on somme ne dépend pas de l'indice (comme ici $\sum_{k=0}^{n-1} 1$), il faut bien compter le nombre de termes présents dans la somme. Ici, la somme commence à 0 et se termine à $n-1$, on somme donc n fois le nombre 1.

■ Changer l'indice de sommation ou de produit

Pour $(n_0,n)\in\mathbb{N}^2$ avec $n_0\leq n$, on considère $S=\sum_{k=n_0}^{n}u_k$ et $P=\prod_{k=n_0}^{n}u_k$.

Étant donné $a\in\mathbb{Z}$ tel que $n_0-a\geq 0$, en prenant $i=k-a$, on a : $S=\sum_{i=n_0-a}^{n-a}u_{i+a}$ et $P=\prod_{i=n_0-a}^{n-a}u_{i+a}$.

Exemple 2

Soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Simplifier le quotient : $Q=\dfrac{\prod_{k=0}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}$.

Réponse

L'idée est de se ramener avec des facteurs identiques dans le produit du numérateur et dans celui du dénominateur, afin de simplifier le quotient.

Dans le produit du dénominateur, on effectue le changement d'indice $i=k-2$; on obtient :

$$Q=\frac{\prod_{k=0}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}=\frac{\prod_{k=0}^{n}(k+1)}{\prod_{i=0}^{n-2}(i+1)}.$$

La lettre de l'indice importe peu. Ainsi, on constate que les facteurs des deux produits sont les mêmes, le produit du numérateur ayant deux facteurs supplémentaires pour $k=n-1$ et $k=n$. On a donc : $Q=n(n+1)$.

■ Effectuer un télescopage

Soient $n\in\mathbb{N}, n_0\in[\![0,n]\!]$ et $\{u_k, k\in[\![n_0;n]\!]\}$ une famille de nombres.

S'il existe une famille $\{a_k, k\in[\![n_0;n+1]\!]\}$ telle que, pour tout $k\in[\![n_0,n]\!]$, $u_k=a_{k+1}-a_k$, alors on a : $\sum_{k=n_0}^{n}u_k=\sum_{k=n_0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_{n_0}$.

On parle de **somme télescopique**.

Exemple 3

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$, après avoir déterminé les réels a et b tels que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}$.

Réponse

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ (c'est une écriture qu'il faut connaître !).

Pour $k\in\mathbb{N}^*$ on pose : $a_k=-\frac{1}{k}$. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1=-\frac{1}{n+1}+1=\frac{n}{n+1}.$$

Utiliser la formule du binôme de Newton

$$\forall(a,b)\in\mathbb{C}^2,\forall n\in\mathbb{N},(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\text{, où }\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Lorsque, dans une somme, apparaissent les coefficients du binôme $\binom{n}{k}$, il est fort probable qu'il faille utiliser la formule du binôme de Newton pour la calculer !

Exemple 4

Soit $n\in\mathbb{N}$. Simplifier $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$.

Réponse

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k1^{n-k}=(2+1)^n=3^n.$$

À vous !

On s'échauffe

1. Calculer $\sum_{(i,j)\in A} 2^{i+j}$, avec $A=\left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j\leq 3\right\}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Simplifier : $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^k$ et $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^k$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier : $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

5. Soient $n\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{R}$. Simplifier : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^k$.

6. Soit $n\in\mathbb{N}$. Simplifier : $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

7. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer le produit des n premiers entiers pairs non nuls : $\prod_{1\leq k\leq n}(2k)$, puis le produit des n premiers entiers impairs : $\prod_{0\leq k\leq n-1}(2k+1)$.

On accélère

8. Soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1,1\}$: $\frac{1}{x^3-x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$.

b. En déduire une expression simplifiée de $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k}$, en fonction de n.

9. Soient $n\in\mathbb{N}^*, (a,b)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que : $a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Simplifier les sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

11. En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)$ (somme télescopique et développement), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}$.

On finit au top

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$.

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} 2^{i+j}$ avec $A = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i+j \leq n\right\}$.

15. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Simplifier : $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$.

1. ⚠ Dans une somme double, l'indice de la somme écrite en premier (dans le sens de lecture) ne peut pas dépendre de l'indice de la somme écrite en second.

$$\sum_{(i,j)\in A} 2^{i+j} = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3-i} 2^{i+j} = \underbrace{\left(\underbrace{2^0}_{j=0} + \underbrace{2^1}_{j=1} + \underbrace{2^2}_{j=2} + \underbrace{2^3}_{j=3}\right)}_{i=0} + \underbrace{\left(\underbrace{2^1}_{j=0} + \underbrace{2^2}_{j=1} + \underbrace{2^3}_{j=2}\right)}_{i=1}$$

$$+ \underbrace{\left(\underbrace{2^2}_{j=0} + \underbrace{2^3}_{j=1}\right)}_{i=2} + \underbrace{\left(\underbrace{2^3}_{j=0}\right)}_{i=3} = 49.$$

Remarque : On a fait ici un calcul exhaustif. On aurait pu faire un raisonnement général pour simplifier la somme double avant de la calculer (c'est l'objet de l'**exercice 14**).

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^k = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e})^k = \frac{1-\mathrm{e}^{n+1}}{1-\mathrm{e}}$ (c'est une somme géométrique).

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^k 1^{n-k} = (1+\mathrm{e})^n$ (on applique la formule du binôme du Newton).

3. $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\substack{k=0 \text{ dans la} \\ \text{première somme}}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{1}{n+k+1}}_{a_{k+1}} - \underbrace{\frac{1}{n+k}}_{a_k} \right)$$

$$\underbrace{=}_{\text{télescopage}} \frac{1}{n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{a_{n+1}} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_1} = \frac{1}{2n+1}.$$

4. $$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\ln(k+1)}_{a_{k+1}} - \underbrace{\ln(k)}_{a_k} \right)$$

$$\underbrace{=}_{\text{télescopage}} \underbrace{\ln(n+1)}_{a_{n+1}} - \underbrace{\ln(1)}_{a_1} = \ln(n+1).$$

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x(1-x)\right)^k 1^{n-k}=\left(x-x^2+1\right)^n.$

(avec $a=x-x^2$ et $b=1$ dans la formule du binôme de Newton).

6. Soit $n\in\mathbb{N}$. On note : $\displaystyle S_n=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}.$

Remarque : Ici, on ne peut manifestement pas utiliser la formule du binôme de Newton directement !

- Si $n=0$, $S_0=0$.
- Si $n\neq 0$, le terme pour $k=0$ étant nul on a :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\underset{i=k-1}{\underbrace{=}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n\times(n-1)!}{i!(n-1-i)!}=n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$$

$$=n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}1^i\times 1^{n-1-i}=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}$$

(avec $a=b=1$ dans la formule du binôme de Newton).

Remarque : La formule du binôme de Newton donne, pour tout réel x, et tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

En dérivant, on obtient : $\displaystyle n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$.

En prenant $x=1$, on retrouve $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$.

7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)=2^n\prod_{k=1}^{n}k=2^n n!$;

$$\underbrace{\prod_{k=1}^{n}(2k)}_{\text{les } n \text{ premiers pairs}}\times\underbrace{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}_{\text{les } n \text{ premiers impairs}}=\prod_{k=1}^{2n}k=(2n)!\ ;$$

d'où : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

8. a. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;-1;1\}$, on a :

$$\frac{1}{x^3-x}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}.$$

b. $$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{-1}{k}+\frac{1}{2(k-1)}+\frac{1}{2(k+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\underbrace{\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)}_{a_{k+1}}-\underbrace{\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right)}_{a_k}\right)$$

$$\underbrace{=}_{\text{télescopage}}\frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)}_{a_{n+1}}-\underbrace{\left(\frac{1}{2}-1\right)}_{a_2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}.$$

9. $$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}\underbrace{=}_{\text{on développe}}\sum_{k=0}^{n-1}a^{k+1}b^{n-1-k}-\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k}$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}a^ib^{n-i}}_{i=k+1}-\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}a^ib^{n-i}+\underbrace{a^nb^0}_{i=n}-\left(\underbrace{a^0b^n}_{k=0}+\sum_{k=1}^{n-1}a^kb^{n-k}\right)=a^n-b^n.$$

10. a. $$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\left(\underbrace{(\ln(k+1)-\ln(k))}_{a_{k+1}}-\underbrace{(\ln(k)-\ln(k-1))}_{a_k}\right)$$

$$\underbrace{=}_{\text{télescopage}}\underbrace{\ln(n+1)-\ln(n)}_{a_{n+1}}-\underbrace{\ln 2}_{a_2}=\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

b. $$\sum_{k=0}^{2n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{2n}\mathrm{Im}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)=\mathrm{Im}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{2n}\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^k}_{\text{somme géométrique}}\right)$$

$$=\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i\frac{(2n+1)\pi}{n}}}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{2\pi i}e^{\frac{i\pi}{n}}}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\right)=\mathrm{Im}(1)=0.$$

11. La somme télescopique donne : $\sum_{k=0}^{n}\left(\underbrace{(k+1)^3}_{a_{k+1}}-\underbrace{k^3}_{a_k}\right)=(n+1)^3$.

Le développement donne :

$$\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(3k^2+3k+1\right)=3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1$$
$$=3\sum_{k=0}^{n}k^2+\frac{3n(n+1)}{2}+(n+1).$$

On en déduit : $3\sum_{k=0}^{n}k^2+\frac{3n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)^3$ d'où :

$$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

12. $$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}\underbrace{=\sum_{0\le i\le k\le n}\binom{k}{i}=}_{\substack{\text{on va intervertir les sommes}\\ \text{en comprenant comment les}\\ \text{indices sont interdépendants}}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}1^i1^{k-i}\right)}_{\text{formule du binôme de Newton}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}2^k}_{\substack{\text{somme}\\ \text{géométrique}}}=2^{n+1}-1.$$

13. $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i \times \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} ij = \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} ij$

$= \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{j=2}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j-1} i\right) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{j=2}^{n} j\,\frac{j(j-1)}{2}$

$= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{j=2}^{n} j^3 - \sum_{j=2}^{n} j^2 = \underbrace{1}_{i=1} + \sum_{i=2}^{n} i^2 + \sum_{j=2}^{n} j^3 - \sum_{j=2}^{n} j^2 = 1 + \sum_{j=2}^{n} j^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 .$

14. $\sum_{(i,j)\in A} 2^{i+j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} 2^{i+j} = \sum_{i=0}^{n}\left(2^i\left(\sum_{j=0}^{n-i} 2^j\right)\right) = \sum_{i=0}^{n} 2^i\,\frac{1-2^{n-i+1}}{1-2} = \sum_{i=0}^{n}\left(2^{n+1}-2^i\right)$

$= \sum_{i=0}^{n} 2^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} 2^i = (n+1)2^{n+1} + 1 - 2^{n+1} = 2^{n+1}n + 1.$

15. On a, d'une part :

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} ni + \sum_{j=1}^{n} nj = 2n\sum_{i=1}^{n} i = n^2(n+1)$;

d'autre part :

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = \sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j) + \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{1\leq j<i\leq n}(i+j)$

$= 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j) + n(n+1).$

On en déduit que : $\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j) = \frac{1}{2}\left(n^2(n+1) - n(n+1)\right) = \frac{n(n+1)(n-1)}{2}.$

Résolution d'inéquations

Cette fiche ne fait pas référence à un chapitre précis. Elle permet de travailler sur des inégalités avec des valeurs absolues et des racines carrées, ce qui sera très utile pour les études de fonctions.
Elle propose également des résolutions d'inéquations avec un paramètre, ce qui, au-delà de la technique propre de leur résolution, permet de se familiariser avec le raisonnement par disjonction de cas.

On notera systématiquement S l'ensemble des solutions de l'inéquation que l'on résout.

Je vous montre comment

Résoudre une inéquation avec une valeur absolue

- En utilisant l'équivalence : $\boxed{\forall (x,a) \in \mathbb{R}^2,\ (|x| \leq a) \Leftrightarrow (a \geq 0) \wedge (-a \leq x \leq a)}$

Exemple 1

Résoudre l'inéquation : $|3x-2| \leq 2$.

Réponse

On a : $(|3x-2| \leq 2) \Leftrightarrow (-2 \leq 3x-2 \leq 2) \Leftrightarrow \left(0 \leq x \leq \dfrac{4}{3}\right)$.

Ainsi, $S = \left[0, \dfrac{4}{3}\right]$.

⚠ Il arrive que l'on ne puisse pas résoudre simultanément les deux inéquations. Il faut alors les résoudre séparément, et prendre l'intersection des ensembles de solutions.

Exemple 2

Résoudre l'inéquation : $\left|x^2+2x-1\right| \leq 2$.

Réponse

On a : $\left(\left|x^2+2x-1\right|\leq 2\right)\Leftrightarrow\left(-2\leq x^2+2x-1\leq 2\right)$

$\Leftrightarrow \underbrace{\left(0\leq x^2+2x+1\right)}_{\text{toujours vraie}}\wedge\left(x^2+2x-3\leq 0\right)\Leftrightarrow\left(x\in[-3,1]\right).$

Ainsi, $S=[-3,1]$.

- En utilisant l'équivalence : $\boxed{\forall(x,a)\in\mathbb{R}^2,\ \left(|x|\leq|a|\right)\Leftrightarrow\left(x^2\leq a^2\right)}$

Exemple 3

Résoudre l'inéquation : $|2x+3|<|4-x|$.

Réponse

On a : $\left(|2x+3|<|4-x|\right)\Leftrightarrow\left((2x+3)^2<(4-x)^2\right)$

$\Leftrightarrow\left(3x^2+20x-7<0\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left]-7;\frac{1}{3}\right[\right).$

Ainsi, $S=\left]-7;\frac{1}{3}\right[$.

Remarque : On aurait également pu raisonner par disjonction de cas, pour « lever » les valeurs absolues :

$$
\begin{aligned}
&|2x+3|<|4-x|\\
&\Leftrightarrow\left(\left(x\leq-\frac{3}{2}\right)\wedge\left(-(2x+3)<(4-x)\right)\right)\vee\left(\left(-\frac{3}{2}\leq x\leq 4\right)\wedge\left(2x+3<4-x\right)\right)\\
&\qquad\qquad\vee\underbrace{\left((x\geq 4)\wedge\left(2x+3<-(4-x)\right)\right)}_{\text{jamais vraie}}\\
&\Leftrightarrow\left(x\in\left]-7,-\frac{3}{2}\right]\right)\vee\left(x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{3}\right[\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left]-7,\frac{1}{3}\right[\right)
\end{aligned}
$$

■ Résoudre une inéquation avec une racine carrée

La première étape est l'étude du domaine de définition. Ensuite, on raisonne par disjonction de cas suivant les signes des membres de l'inégalité, puis (quand les deux membres sont de même signe), on applique la fonction carrée.

Exemple 4

Résoudre l'inéquation : $\sqrt{-x^2+2x+3}>2x-1$.

Réponse

Pour que l'inéquation soit définie, il faut $-x^2+2x+3\geq 0$, ce qui équivaut à $x\in[-1;3]$.

On a : $\left(\sqrt{-x^2+2x+3}>2x-1\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\underbrace{(-1\leq x\leq 3)}_{\text{domaine}}\wedge\underbrace{\left(x<\frac{1}{2}\right)}_{\substack{\text{membre de droite}\\ \text{strictement négatif}}}\wedge\underbrace{\left(\sqrt{-x^2+2x+3}>2x-1\right)}_{\substack{\text{toujours vraie avec les conditions précédentes}\\ \text{car un nombre positif est toujours strictement}\\ \text{supérieur à un nombre strictement négatif}}}\right)$$

$$\vee\left(\underbrace{(-1\leq x\leq 3)}_{\text{domaine}}\wedge\underbrace{\left(x\geq\frac{1}{2}\right)}_{\substack{\text{membre de droite}\\ \text{positif}}}\wedge\underbrace{\left(-x^2+2x+3>(2x-1)^2\right)}_{\substack{\text{avec les conditions précédentes, les deux membres}\\ \text{étant positifs, on peut les élever au carré sans}\\ \text{changer le sens de l'inégalité}}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(-1\leq x<\frac{1}{2}\right)\vee\left(\left(\frac{1}{2}\leq x\leq 3\right)\wedge\left(5x^2-6x-2<0\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(-1\leq x<\frac{1}{2}\right)\vee\left(\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3+\sqrt{19}}{5}\right)\Leftrightarrow\left(-1\leq x\leq\frac{3+\sqrt{19}}{5}\right).$$

Ainsi, $S=\left[-1,\frac{3+\sqrt{19}}{5}\right]$.

■ Résoudre une inéquation avec un paramètre

On fait apparaître des disjonctions de cas, *au fur et à mesure* de la résolution, en respectant les règles sur les inégalités.

Exemple 5

Résoudre l'inéquation : $\frac{x-m}{m-2}>3-x$, en fonction de la valeur du paramètre $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Réponse

On a : $\left(\frac{x-m}{m-2}>3-x\right)\Leftrightarrow\left(\frac{(m-1)x+6-4m}{m-2}>0\right)$ (1).

- Si $m-2>0$: $(1) \Leftrightarrow \left((m-1)x+6-4m>0\right) \underbrace{\Leftrightarrow}_{m>2>1} \left(x>\dfrac{4m-6}{m-1}\right)$.
- Si $m-2<0$: $(1) \Leftrightarrow \left((m-1)x+6-4m<0\right)$ (2).
  - Si $1<m<2$: $(2) \Leftrightarrow \left(x<\dfrac{4m-6}{m-1}\right)$.
  - Si $m=1$: (2) n'est jamais vérifiée.
  - Si $m<1$: $(2) \Leftrightarrow \left(x>\dfrac{4m-6}{m-1}\right)$.

$$\text{Finalement : } \begin{cases} \text{Si } m<1 \text{ ou } m>2, & S=\left]\dfrac{4m-6}{m-1},+\infty\right[\\ \text{Si } m=1, & S=\varnothing \\ \text{Si } 1<m<2, & S=\left]-\infty,\dfrac{4m-6}{m-1}\right[\end{cases}.$$

Résoudre les inéquations suivantes, en discutant éventuellement en fonction de la valeur du paramètre m :

On s'échauffe

1. $2|x| \leq |2+x|$
2. $|x^2+3x+2| \leq 2$
3. $x+1 \leq \sqrt{2-x}$
4. $\sqrt{x+1} > 2-\sqrt{x}$
5. $\sqrt{x^2+2x-3} \leq x$
6. $\sqrt{2x+2} \leq |3x-1|$
7. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$

On accélère

8. $|x^2-1| \leq |2-x|$
9. $|3x^2+x-2| \leq 3x+3$
10. $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}$
11. $\dfrac{x-m+1}{m+2} < 1+x$
12. $\dfrac{m}{x-1} > \dfrac{1}{x}$

À vous !

On finit au top

13. $\sqrt{x+m} < 3m - x$

14. $\sqrt{2x+m} \geq x+1$

15. $\dfrac{m}{x-3} > \dfrac{2}{x+1}$

1. On a :

$$\left(2|x|\leq|2+x|\right)\Leftrightarrow\left(4x^2\leq(2+x)^2\right)\Leftrightarrow\left(3x^2-4x-4\leq 0\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left[-\frac{2}{3},2\right]\right).$$

Ainsi, $S=\left[-\frac{2}{3},2\right]$.

2. On a :

$$\left(\left|x^2+3x+2\right|\leq 2\right)\Leftrightarrow\left(-2\leq x^2+3x+2\leq 2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\underbrace{\left(0\leq x^2+3x+4\right)}_{\text{toujours vraie}}\wedge\left(x^2+3x\leq 0\right)\right)\Leftrightarrow\left(x\in[-3;0]\right).$$

Ainsi, $S=[-3,0]$.

3. Il faut $x\leq 2$.

- Si $x+1\leq 0$, l'assertion $\left(x+1\leq\sqrt{2-x}\right)$ est vraie.
- Si $x+1>0$:

$$\left((x\leq 2)\wedge(x+1>0)\wedge\left(x+1\leq\sqrt{2-x}\right)\right)\Leftrightarrow\left((-1<x\leq 2)\wedge\left((x+1)^2\leq 2-x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(-1<x\leq\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right).$$

Finalement, $S=\left]-\infty,\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]$.

4. Il faut $x\geq 0$.

On a :

$$\left(\sqrt{x+1}>2-\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow(x\geq 0)\wedge\left(\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2>4\right)$$

$$\Leftrightarrow(x\geq 0)\wedge\left(\sqrt{x^2+x}>\frac{3}{2}-x\right).$$

- Si $\frac{3}{2}-x<0$, l'assertion $\left(\sqrt{x^2+x}>\frac{3}{2}-x\right)$ est vraie.

- Si $\frac{3}{2}-x\geq 0$:

$$\left(0\leq x\leq \frac{3}{2}\right)\wedge\left(\sqrt{x^2+x}>\frac{3}{2}-x\right)\Leftrightarrow\left(0\leq x\leq \frac{3}{2}\right)\wedge\left(x^2+x>\left(\frac{3}{2}-x\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(0\leq x\leq \frac{3}{2}\right)\wedge\left(x>\frac{9}{16}\right).$$

Finalement, $S=\left]\frac{9}{16},+\infty\right[$.

5. Il faut : $x\in\left]-\infty;-3\right]\cup\left[1;+\infty\right[$.

- Si $x<0$, l'assertion $\left(\sqrt{x^2+2x-3}\leq x\right)$ est fausse.
- Si $x\geq 0$:

$$\left((1\leq x)\wedge\left(\sqrt{x^2+2x-3}\leq x\right)\right)\Leftrightarrow\left((1\leq x)\wedge\left(x^2+2x-3\leq x^2\right)\right)\Leftrightarrow\left(1\leq x\leq \frac{3}{2}\right).$$

Finalement, $S=\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

6. Il faut $x\geq -1$.

On a :

$$\left(\sqrt{2x+2}\leq|3x-1|\right)\Leftrightarrow(x\geq -1)\wedge\left(2x+2\leq(3x-1)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow(x\geq -1)\wedge\left(\left(x\leq -\frac{1}{9}\right)\vee(x\geq 1)\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left[-1,-\frac{1}{9}\right]\cup\left[1,+\infty\right[\right).$$

Ainsi, $S=\left[-1,-\frac{1}{9}\right]\cup\left[1,+\infty\right[$.

7. Il faut : $-1\leq x\leq 3$.

On a :

$$\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3-x}>\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (-1 \leq x \leq 3) \wedge \left(3 - x > \left(\sqrt{x+1} + \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (-1 \leq x \leq 3) \wedge \left(\sqrt{x+1} < \frac{7}{4} - 2x\right).$$

- Si $\frac{7}{4} - 2x \leq 0$, l'assertion $\left(\sqrt{x+1} < \frac{7}{4} - 2x\right)$ est fausse.
- Si $\frac{7}{4} - 2x > 0$:

$$\left(-1 \leq x < \frac{7}{8}\right) \wedge \left(\sqrt{x+1} < \frac{7}{4} - 2x\right) \Leftrightarrow \left(-1 \leq x < \frac{7}{8}\right) \wedge \left(x+1 < \left(\frac{7}{4} - 2x\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(-1 \leq x < \frac{7}{8}\right) \wedge \left(\left(x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right) \vee \left(x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}\right)\right).$$

Finalement, $S = \left[-1, 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right[$.

8. Ici, en élevant les deux membres au carré, on obtient la recherche du signe d'un polynôme non pair de degré 4, sans racine évidente… On va plutôt faire une disjonction de cas suivant le signe des nombres dont on prend la valeur absolue :

x		-1		1		2	
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$2 - x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$

On a donc :

$$\left(\left|x^2 - 1\right| \leq |2 - x|\right) \Leftrightarrow \left((x \leq -1) \wedge \left(x^2 - 1 \leq 2 - x\right)\right) \vee \left((-1 \leq x \leq 1) \wedge \underbrace{\left(1 - x^2 \leq 2 - x\right)}_{\text{toujours vraie}}\right)$$

$$\vee \left((1 \leq x \leq 2) \wedge \left(x^2 - 1 \leq 2 - x\right)\right) \vee \left((2 \leq x) \wedge \underbrace{\left(x^2 - 1 \leq x - 2\right)}_{\text{toujours fausse}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \leq x \leq -1\right) \vee (-1 \leq x \leq 1) \vee \left(1 \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right).$$

Ainsi, $S=\left[\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

9. • Si $3x+3<0$, l'assertion $\left(\left|3x^2+x-2\right|\leq 3x+3\right)$ est fausse.

• Si $3x+3\geq 0$:

$$\left(\left|3x^2+x-2\right|\leq 3x+3\right)\Leftrightarrow\left(\left(-1\leq x\leq\frac{2}{3}\right)\wedge\left(-3x^2-x+2\leq 3x+3\right)\right)$$

$$\vee\left(\left(\frac{2}{3}\leq x\right)\wedge\left(3x^2+x-2\leq 3x+3\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{2}{3}\right)\vee\left(\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{5}{3}\right)$$

Finalement, $S=\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}\right]$.

10. Il faut $x\geq\dfrac{5}{2}$.

On a :

$$\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}>\sqrt{2x-5}\right)\Leftrightarrow\left(x\geq\frac{5}{2}\right)\wedge\left(x+6>\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x\geq\frac{5}{2}\right)\wedge\left(\sqrt{2x^2-3x-5}<5-x\right).$$

• Si $5-x<0$, l'assertion $\left(\sqrt{2x^2-3x-5}<5-x\right)$ est fausse.

• Si $5-x\geq 0$:

$$\left(\frac{5}{2}\leq x\leq 5\right)\wedge\left(\sqrt{2x^2-3x-5}<5-x\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\leq x\leq 5\right)\wedge\left(2x^2-3x-5<(5-x)^2\right)\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\leq x<3\right).$$

Finalement, $S=\left[\dfrac{5}{2},3\right[$.

Remarque : Sur $\left[-1,+\infty\right[$, $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}>0$, donc on aurait également pu écrire :

$$\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}>\sqrt{2x-5}\right)\Leftrightarrow\left(x\geq\frac{5}{2}\right)\wedge\left(\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}\right)^2>2x-5\right)\Leftrightarrow(...).$$

11. Il faut $m \neq -2$.

On a : $\left(\dfrac{x-m+1}{m+2} < 1+x\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{x(m+1)+2m+1}{m+2} > 0\right)$.

Finalement : $\begin{cases} \text{Si } m=-1, & S=\varnothing \\ \text{Si } -2<m<-1, & S=\left]-\infty;-\dfrac{2m+1}{m+1}\right[. \\ \text{Si } m<-2 \text{ ou } m>-1, & S=\left]-\dfrac{2m+1}{m+1};+\infty\right[\end{cases}$

12. On a : $\left(\dfrac{m}{x-1} > \dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{(m-1)x+1}{x(x-1)} > 0\right)$.

Il s'agit d'étudier le signe d'un quotient.

- Si $m=1$: $\left(\dfrac{1}{x(x-1)} > 0\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]1,+\infty\right[\right)$.
- Si $m \neq 1$: le numérateur (affine) s'annule pour $x=\dfrac{1}{1-m}$, le dénominateur (polynôme de degré 2), s'annule pour $x \in \{0,1\}$. Il faut donc positionner $\dfrac{1}{1-m}$ en fonction de 0 et 1, puis étudier les signes.
- Si $m>1$:

x		$\frac{1}{1-m}$		0		1	
$(m-1)x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x(x-1)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$\dfrac{(m-1)x+1}{x(x-1)}$	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$

• Si $0 \leq m < 1$:

x		0		1		$\frac{1}{1-m}$	
$(m-1)x+1$	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$
$x(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{(m-1)x+1}{x(x-1)}$	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$

Remarque : Si $m = 0$, $\frac{1}{1-m}$ et 1 sont confondus.

• Si $m < 0$:

x		0		$\frac{1}{1-m}$		1	
$(m-1)x+1$	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$
$x(x-1)$	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
$\frac{(m-1)x+1}{x(x-1)}$	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$

Finalement : $\begin{cases} \text{Si } m > 1, & S = \left]\frac{1}{1-m}, 0\right[\cup]1, +\infty[\\ \text{Si } m = 1, & S =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\\ \text{Si } 0 \leq m < 1, & S =]-\infty, 0[\cup \left]1, \frac{1}{1-m}\right[\\ \text{Si } m < 0, & S =]-\infty, 0[\cup \left]\frac{1}{1-m}, 1\right[\end{cases}$.

13. Il faut $x \geq -m$.

• Si $3m - x \leq 0$, l'assertion $\left(\sqrt{x+m} < 3m - x\right)$ est fausse.

Pour avoir $3m - x > 0$, la condition $x \geq -m$ impose $m > 0$.

• Si $m>0$:

$$(-m\leq x<3m)\wedge\left(\sqrt{x+m}<3m-x\right)\Leftrightarrow(-m\leq x<3m)\wedge\left(x+m<(3m-x)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow(-m\leq x<3m)\wedge\left(x^2-(6m+1)x+9m^2-m>0\right).$$

Notons $P_m(x)=x^2-(6m+1)x+9m^2-m$.

Comme $m>0$, $P_m(x)=\left(x-\dfrac{6m+1+\sqrt{1+16m}}{2}\right)\left(x-\dfrac{6m+1-\sqrt{1+16m}}{2}\right)$.

La question qu'il reste à se poser est le positionnement des racines de P_m par rapport à $-m$ et $3m$.

$P_m(-m)=m^2+(6m+1)m+9m^2-m=16m^2\geq 0$, donc $-m$ est à « l'extérieur des racines » de P_m (et négatif).

$P_m(3m)=9m^2-3m(6m+1)+9m^2-m=-4m\leq 0$, donc $3m$ est à « l'intérieur des racines » de P_m.

De plus, $\dfrac{6m+1+\sqrt{1+16m}}{2}>0$, on a donc :

x	$-m$	$\frac{6m+1-\sqrt{1+16m}}{2}$	$3m$	$\frac{6m+1+\sqrt{1+16m}}{2}$	
$P_m(x)$	$+$	$+$ 0 $-$		$-$ 0 $+$	

Finalement : $\begin{cases}\text{Si } m\leq 0, & S=\varnothing\\ \text{Si } m>0, & S=\left[-m,\dfrac{6m+1-\sqrt{1+16m}}{2}\right[\end{cases}$.

14. Il faut $x\geq\dfrac{-m}{2}$.

> **Remarque :** Le cas $x+1\leq 0$ ne peut se présenter que si $-1\geq\dfrac{-m}{2}$, ce qui équivaut à $m\geq 2$.

• Si $m\geq 2$:

— Si $x+1\leq 0$, l'assertion $\left(\sqrt{2x+m}\geq x+1\right)$ est vraie.

— Si $x+1>0$: $(-1<x)\wedge\left(\sqrt{2x+m}\geq x+1\right)\Leftrightarrow(-1<x)\wedge\left(m-1\geq x^2\right)$.

Comme $m\geq 2$, on a $-\sqrt{m-1}\leq -1$, c'est donc équivalent à $x\in\left]-1;\sqrt{m-1}\right]$.

- Si $m<2$: $\left(\sqrt{2x+m}\geq x+1\right)\Leftrightarrow\left(m-1\geq x^2\right)$.

Comme $m<2$, deux cas se présentent :

— Si $m<1$, il n'y a pas de solution.

— Si $m\geq 1$: $\left(\dfrac{-m}{2}\leq -\sqrt{m-1}\right)\Leftrightarrow\left(m^2\geq 4m-4\right)\Leftrightarrow\left((m-2)^2\geq 0\right)$.

La dernière assertion étant vraie, il en est de même de la première, donc $x\in\left[-\sqrt{m-1};\sqrt{m-1}\right]$.

Finalement : $\begin{cases}\text{Si } m<1, & S=\varnothing\\ \text{Si } 1\leq m\leq 2, & S=\left[-\sqrt{m-1};\sqrt{m-1}\right].\\ \text{Si } m\geq 2, & S=\left[-\dfrac{m}{2};\sqrt{m-1}\right]\end{cases}$

15. On a : $\left(\dfrac{m}{x-3}>\dfrac{2}{x+1}\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{x(m-2)+m+6}{(x-3)(x+1)}>0\right)$.

- Si $m=2$, alors $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]3;+\infty\right[$.
- Si $m\neq 2$: toute la difficulté réside dans le positionnement de $\dfrac{m+6}{2-m}$ par rapport à -1 et 3.

— 1[er] cas : $\dfrac{m+6}{2-m}<-1$.

On a : $\left(\dfrac{m+6}{2-m}<-1\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{8}{2-m}<0\right)\Leftrightarrow(m>2)$.

x		$\frac{m+6}{2-m}$		-1		3	
$(x-3)(x+1)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$(m-2)x+m+6$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{(m-2)x+m+6}{(x-3)(x+1)}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$

— 2^{e} cas : $\frac{m+6}{2-m}>3$.

On a : $\left(\frac{m+6}{2-m}>3\right)\Leftrightarrow\left(\frac{4m}{2-m}>0\right)\Leftrightarrow\left(m\in\,]0;2[\right)$.

x		-1		3		$\frac{m+6}{2-m}$	
$(x-3)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$(m-2)x+m+6$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\frac{(m-2)x+m+6}{(x-3)(x+1)}$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

— 3^{e} cas : $m\leq 0$.

x		-1		$\frac{m+6}{2-m}$		3	
$(x-3)(x+1)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(m-2)x+m+6$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\frac{(m-2)x+m+6}{(x-3)(x+1)}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

$$\text{Finalement : }\begin{cases}\text{Si } m \leq 0, & S = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]\dfrac{m+6}{2-m};3\right[\\ \text{Si } 0 < m < 2, & S = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]3;\dfrac{m+6}{2-m}\right[\\ \text{Si } m = 2, & S = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]3;+\infty\right[\\ \text{Si } m > 2, & S = \left]\dfrac{m+6}{2-m};-1\right[\cup \left]3;+\infty\right[\end{cases}.$$

Limites de fonctions réelles

Cette fiche permet de réactiver et de consolider les connaissances de terminale. Une nouvelle notion abordée en première année permettra de simplifier les calculs de limites. Il s'agit des comparaisons de fonctions et des développements limités, qui font l'objet d'une fiche ultérieure…

$\overline{\mathbb{R}}$ désigne $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Soient *I* un intervalle de $\mathbb{R}$, *f* une fonction définie sur *I*, et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une extrémité de *I*.

Je vous montre comment

Calculer des limites de fonctions polynômiales et de fonctions rationnelles

- Si *P* désigne un polynôme de degré *n* et de coefficient dominant a_n :

En factorisant, on obtient : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$.

Exemple 1

Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 + x$.

Réponse

$$\lim_{x \to +\infty} -3x^3 + x = \lim_{x \to +\infty} -3x^3\left(1 - \frac{1}{3x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} -3x^3 = -\infty.$$

- Si P désigne un polynôme de degré n de coefficient dominant a_n, et Q désigne un polynôme de degré m de coefficient dominant b_m :

En factorisant, on obtient : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Exemple 2

Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+2}{x^3+x^2}$.

Réponse

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2}{x^3+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2\left(1+\dfrac{2}{3x^2}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0.$$

Remarque : Il ne faut évidemment pas oublier de simplifier le quotient $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$ pour conclure !

- Avec les notations précédentes, si a est une racine de Q (c'est-à-dire $Q(a)=0$), et n'est pas une racine de P ($P(a)\neq 0$) :

Pour lever l'indéterminée de type « 1 sur 0 » dans le calcul de la limite en a de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, on étudie le signe de Q et, en faisant éventuellement une disjonction de cas (limite à gauche et limite à droite), on obtient $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 3

Calculer : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x^3}{x^3-3x+2}$.

Réponse

On pose : $P(x)=x^2-x^3$ et $Q(x)=x^3-3x+2$.

Remarque : Ici, $P(1)=Q(1)=0$. On n'est donc pas exactement dans les conditions énoncées. Mais il ne faut pas oublier que si $P(a)=0$, alors on peut écrire $P=(X-a)P_1$. Nous allons donc factoriser les deux polynômes, pour simplifier la fraction.

On a immédiatement : $P(x)=x^2(1-x)$.

On écrit : $Q(x)=x^3-3x+2=(x-1)\left(x^2+ax+b\right)$; par identification, on trouve : $Q(x)=x^3-3x+2=(x-1)\left(x^2+x-2\right)$.

On remarque que 1 est également racine du polynôme X^2+X-2, on a finalement : $Q(x)=(x-1)^2(x+2)$.

Ainsi, pour $x \notin \{1,-2\}$, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{-x^2}{(x-1)(x+2)}$.

On a :

x		-2		0		1	
$-x^2$	$-$		$-$	0	$-$		$-$
$(x-1)(x+2)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{-x^2}{(x-1)(x+2)}$	$-$	‖	$+$	0	$+$	‖	$-$

D'où : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{P(x)}{Q(x)}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{P(x)}{Q(x)}=-\infty$.

■ Lever une indéterminée avec des fonctions exponentielles, logarithmes, et puissances

▸ En factorisant pour faire apparaître des croissances comparées :

Pour $(\alpha,\beta)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^\beta\left|\ln x\right|^\alpha=0$,
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^\beta e^{-\alpha x}=0$.

Exemple 4

Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x}-e^x}$.

Réponse

$$\frac{e^{\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x}-e^x}=\frac{e^{\sqrt{x}}\left(1-xe^{-\sqrt{x}}\right)}{e^x\left(\sqrt{x}e^{-x}-1\right)}=e^{\sqrt{x}-x}\frac{1-xe^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}e^{-x}-1}.$$

Par composition et croissances comparées, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\right)^2e^{-\sqrt{x}}\underset{X=\sqrt{x}}{=}\lim_{X\to+\infty}X^2e^{-X}=0$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}=0$, donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x\,e^{-\sqrt{x}}\right)=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\,e^{-x}-1\right)=-1$, puis par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x\,e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\,e^{-x}-1}=-1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)=-\infty$

donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}-x}=0$.

Enfin, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}-x}\dfrac{1-x\,e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\,e^{-x}-1}=0$.

⚠ Avant de se lancer dans une factorisation, il faut s'assurer que la forme est indéterminée ! Penser systématiquement « l'exponentielle l'emporte sur les autres fonctions » n'est pas pertinent partout…

Exemple 5

Calculer : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\ln(x)}{x}$.

Réponse

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+\ln(x)\right)=-\infty$

Pour que le logarithme soit défini, il s'agit nécessairement d'une limite à droite, et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\ln(x)}{x}=-\infty$.

■ Lever une indéterminée du type « 0 sur 0 », pour une limite en un réel

On cherche $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(a)=v(a)=0$. On suppose u et v dérivables au voisinage de a.

En remarquant que, pour tout x dans le domaine de définition de $\dfrac{u}{v}$, si $x\neq a$, on a : $\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}\times\dfrac{x-a}{v(x)-v(a)}$, on fait apparaître des taux d'accroissement.

On en déduit que, **si elle existe**, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$.

Remarque : Cette propriété est appelée « **Règle de L'Hospital** ». Elle n'est pas explicitement au programme, mais peut être redémontrée à chaque utilisation !

Exemple 6

Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$.

Réponse

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x}\right) = \exp'(0) \times \frac{1}{\sin'(0)} = \exp(0) \times \frac{1}{\cos(0)} = 1.$$

■ Montrer qu'une fonction n'a pas de limite

- En utilisant la **caractérisation séquentielle de la limite** :

> Si f, définie sur $I \subset \mathbb{R}$, admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors quelle que soit la suite (x_n) de I convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

Cette proposition, surtout utilisée pour les limites de suites, sert également à montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en a, en utilisant sa contraposée.

Exemple 7

Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

Réponse

Considérons la suite $(2\pi n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui a pour limite $+\infty$; la suite $(\sin(2\pi n))_{n \in \mathbb{N}}$ (qui est constante) converge vers 0.

Considérons maintenant la suite $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui a également pour limite $+\infty$; la suite $\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ (qui est constante) converge vers 1.

Par contraposée de la proposition, on en déduit que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

À vous !

Étudier la limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions suivantes (on distinguera éventuellement limite à droite et à gauche).

On s'échauffe

1. $x \mapsto \dfrac{x^3+x-2}{x^3-1}$ pour $a \in \{1, +\infty, -\infty\}$.

2. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ pour $a \in \{3, +\infty\}$.

3. $x \mapsto \left(\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x|}\right)e^{\frac{1}{x}}$ pour $a \in \{0, +\infty, -\infty\}$.

4. $x \mapsto \dfrac{x+\cos(x)-1}{x}$ pour $a \in \{0, +\infty\}$.

5. $x \mapsto \dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$ pour $a \in \{0, +\infty\}$.

6. $x \mapsto \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ pour $a \in \{0, 1, -1, +\infty, -\infty\}$.

7. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}$ pour a aux bornes du domaine de définition (il y en a 4).

On accélère

8. $x \mapsto \dfrac{x^x-4}{x-2}$ (avec, pour $x > 0$, $x^x = e^{x\ln x}$) pour $a \in \{2, +\infty\}$.

9. $x \mapsto \dfrac{(\operatorname{ch}(x)-1)\operatorname{Arctan}(x)}{x\operatorname{sh}(x)}$ pour $a \in \{0, +\infty, -\infty\}$.

10. $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{e^{2x-1}-e^x}$ pour $a \in \{1;+\infty,-\infty\}$.

11. $x \mapsto \dfrac{x \sin x}{m-\cos x}$ pour $a=0$, avec $m=1$ et $a=+\infty$, avec $m=2$.

12. $x \mapsto \dfrac{(m+1)x^2+3x}{2x-1}$ pour a aux bornes du domaine de définition, en fonction du paramètre m.

On finit au top

13. $x \mapsto \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2 x}$ pour $a=0$.

14. $x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ pour $a \in \{0;+\infty;-\infty\}$.

15. $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ pour $a=0$.

1. • $a=1$:

Pour tout $x\neq 1$: $\dfrac{x^3+x-2}{x^3-1}=\dfrac{\left(x^2+x+2\right)(x-1)}{\left(x^2+x+1\right)(x-1)}=\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x+1}$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x+1}=\dfrac{4}{3}$.

Remarque : On pouvait également appliquer la règle de L'Hospital.

• $a=\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1$.

2. Pour $x\geq -1$ et $x\neq 3$, on a :

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}.$$

Remarque : Il est fréquent de recourir à une expression conjuguée pour lever une indéterminée avec des racines carrées.

• $a=3$: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\dfrac{1}{4}$.

• $a=+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}=0$.

3. • $a=\pm\infty$: On écrit

$$\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x|}=\frac{\left(\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x|}\right)\left(\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|x|}\right)}{\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|x|}}=\frac{|x+1|-|x|}{\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|x|}}.$$

Remarque : Comme dans l'exercice précédent, il fallait ici penser à l'expression conjuguée pour lever l'indéterminée.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x|}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|x|}}=0$$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x-1+x}{\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|x|}}=0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$.

Finalement : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x|}\right)e^{\frac{1}{x}}=0$.

- $a=0$: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x|}\right)=1$ et,

 par composition, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

Remarque : L'expression conjuguée est ici inutile car la limite n'est pas « problématique ».
Parfois, mal utilisée, elle peut même faire apparaître une forme indéterminée que l'on n'avait pas au départ !
En mathématiques, rien n'est systématique.

On a donc : $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x|}\right)e^{\frac{1}{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x|}\right)e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

4. • $a=0$: On note u la fonction $x\mapsto x+\cos(x)-1$. $u(0)=0$; u est dérivable en 0, et $u'(0)=1-\sin(0)=1$.

On calcule la limite d'un taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\cos(x)-1}{x}=u'(0)=1.$$

• $a=+\infty$: On écrit : $\dfrac{x+\cos(x)-1}{x}=1+\dfrac{\cos(x)}{x}-\dfrac{1}{x}$.

Pour tout $x\neq 0$, $\left|\dfrac{\cos(x)}{x}\right|\leq\dfrac{1}{|x|}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$, donc le théorème des gendarmes donne : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{\cos(x)}{x}\right|=0$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(x)}{x}=0$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos(x)-1}{x}=1$.

5. • $a=0$: On note u la fonction $x\mapsto e^x-1$ et v la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$. $u(0)=v(0)=0$.

u et v sont dérivables en 0, et $u'(0)=e^0=1, v'(0)=\dfrac{1}{1+0}=1$.

On peut appliquer la règle de L'Hospital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{u(x)-u(0)}{x}}{\dfrac{v(x)-v(0)}{x}}=\frac{u'(0)}{v'(0)}=1.$$

- $a=+\infty$: On écrit : $\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}=\dfrac{e^{x+1}\left(e^{-1}-e^{-(x+1)}\right)}{x+1}\times\dfrac{x+1}{\ln(x+1)}$.

  Par composition et croissances comparées, on a :

  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}}{x+1}\underset{X=x+1}{=}\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$$

  et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\ln(x+1)}\underset{X=x+1}{=}\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{\ln(X)}=+\infty.$

  De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-1}-e^{-(x+1)}\right)=e^{-1}>0$.

  Finalement, par produit, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{\ln(1+x)}=+\infty$.

6. On note f la fonction $x\mapsto\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$.

On remarque tout d'abord que pour tout $x\notin\{0;1,-1\}$,

$$f(x)=\frac{|x|(|x|+1)}{|x|(|x|-1)}=\frac{|x|+1}{|x|-1}.$$

On constate également que f est une fonction paire.

- $a=0$: $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|+1}{|x|-1}=-1.$
- $a=1$: $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=-\infty.$
- $a=-1$: Par parité, $\displaystyle\lim_{x\to -1^+}f(x)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1^-}f(x)=+\infty.$
- $a=\pm\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$, et par parité, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=1.$

7. On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}$.

Elle est définie sur $D=[-2,-1[\cup]-1,2[\cup]2,+\infty[$.

En effet :

— $(x+2\geq 0)\Leftrightarrow(x\geq -2)$.

— $\left(x^2+x+3\geq 0\right)$ est toujours vraie.

— $(2x+5\geq 0)\Leftrightarrow\left(x\geq -\dfrac{5}{2}\right)$ (l'inégalité est vraie dès lors que $x\geq -2$).

— $\left(\sqrt{x^2+x+3}\neq\sqrt{2x+5}\right)\Leftrightarrow\left(\left(x^2+x+3\neq 2x+5\right)\wedge\left(x\geq -\dfrac{5}{2}\right)\right)$

$\Leftrightarrow\left(\left(x\notin\{-1,2\}\right)\wedge\left(x\geq -\dfrac{5}{2}\right)\right)$.

- $a=-2$: La fonction f est définie et continue en -2, donc $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)=\dfrac{-2}{\sqrt{5}-1}$.

- $a=-1$: Pour tout $x\in D$, on a

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}{\left(x^2+x+3\right)-(2x+5)}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}{x^2-x-2}$$

$\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}\right)=-2\sqrt{3}$,

$\lim\limits_{x\to -1^-} x^2-x-2=0^+$, $\lim\limits_{x\to -1^+} x^2-x-2=0^-$

donc $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$, et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$.

- $a=2$: Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 2, il faut donc utiliser deux expressions conjuguées. Pour tout $x\in D$, on a :

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\frac{\left((x+2)-4\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}{\left(\left(x^2+x+3\right)-(2x+5)\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}{\left(x^2-x-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}{(x-2)(x+1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}.$$

On a donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\dfrac{1}{2}$.

- $a=+\infty$: Pour $x>2$, on écrit :

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)}.$$

Les règles usuelles sur les limites de sommes, produits et quotients donnent : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

8. • $a=2$: On note u la fonction $x\mapsto x^x$. $u(2)=4$; u est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$, $u'(x)=\left(\ln(x)+1\right)x^x$.

⚠ Quand la variable est en exposant, il faut revenir à la notation exponentielle (ici $x^x=e^{x\ln(x)}$) et surtout ne pas dériver comme une fonction puissance !!!

On calcule la limite d'un taux d'accroissement :

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^x - 4}{x-2} = u'(2) = 4(1+\ln 2)$.

- $a = +\infty$: Pour $x \geq 3$, on a : $\dfrac{x^x - 4}{x-2} \geq \dfrac{x^3 - 4}{x-2}$ (par croissance de la fonction exponentielle).

  $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 4}{x-2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$, donc par minoration : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^x - 4}{x-2} = +\infty$.

Remarque : On peut également utiliser les croissances comparées.

Pour $x > 2$, on écrit : $\dfrac{x^x - 4}{x-2} = \dfrac{e^{x\ln(x)}\left(1 - 4e^{-x\ln(x)}\right)}{x\ln(x)\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)} \times \ln(x)$.

On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(x) = +\infty$, donc par composition et croissances comparées : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x\ln(x)}}{x\ln(x)} \underset{X = x\ln x}{=} \lim\limits_{X\to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 - 4e^{-x\ln(x)}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Finalement, par produit : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^x - 4}{x-2} = +\infty$.

9. On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{(\mathrm{ch}(x) - 1)\mathrm{Arctan}(x)}{x\,\mathrm{sh}(x)}$.

- $a = 0$: On note u la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x) - 1$, v la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$, et g la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$.

  $u(0) = v(0) = 0$; u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u'(x) = \mathrm{sh}(x), v'(x) = \mathrm{ch}(x)$.

  En appliquant la règle de L'Hospital, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{\mathrm{sh}(0)}{\mathrm{ch}(0)} = 0$.

  La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

$g(x)$ est le taux d'accroissement de la fonction Arctan entre 0 et x, donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \text{Arctan}'(0) = 1$.

Par produit, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Remarque : On aurait pu « regrouper » les fonctions différemment.

- $a = +\infty$: Pour $x \neq 0$, on a :

$$f(x) = \frac{\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - 1\right)\text{Arctan}(x)}{x\,\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{e^x\left(1 + e^{-2x} - 2e^{-x}\right)\text{Arctan}(x)}{x e^x\left(1 - e^{-2x}\right)}$$

$$= \frac{\left(1 + e^{-2x} - 2e^{-x}\right)\text{Arctan}(x)}{x\left(1 - e^{-2x}\right)}.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + e^{-2x} - 2e^{-x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-2x}\right) = 1$,

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2}$, donc par produit et quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

- $a = -\infty$: La fonction f étant impaire, on a également $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

10. • $a = 1$: On note u la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ et v la fonction $x \mapsto e^{2x-1} - e^x$.
$u(1) = v(1) = 0$;
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2e^{2x-1} - e^x$.

La règle de L'Hospital donne : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{u'(1)}{v'(1)} = \dfrac{2}{e} = 2e^{-1}$.

- $a = +\infty$: Pour $x \neq 1$, on écrit : $\dfrac{x^2 - 1}{e^{2x-1} - e^x} = \left(\dfrac{x}{e^x}\right)^2 \dfrac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{e^{-1} - e^{-x}}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{e^x}\right)^2 = 0$; de plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-1} - e^{-x} = e^{-1}$.

Par produit et quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{e^{2x-1} - e^x} = 0$.

- $a=-\infty$: On a $\left(e^{2x-1}-e^x>0\right)\Leftrightarrow\left(e^{2x-1}>e^x\right)\Leftrightarrow(2x-1>x)\Leftrightarrow(x>1)$ (par croissance de la fonction ln). On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x-1}-e^x=0^-$ puis, par quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{e^{2x-1}-e^x}=-\infty$.

Remarque : La forme indéterminée « ∞ sur 0 » se lève uniquement avec une étude de signes. On sait que la limite de la valeur absolue du quotient est $+\infty$.

11. • $a=0$: On note f la fonction $x\mapsto\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$, u la fonction $x\mapsto x\sin x$, et v la fonction $x\mapsto 1-\cos x$. $u(0)=v(0)=0$;

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u'(x)=\sin x+x\cos x$ et $v'(x)=\sin x$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi\}$, on a : $\dfrac{u'(x)}{v'(x)}=\dfrac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=1+\dfrac{x\cos x}{\sin x}$.

On a par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\sin'(0)=\cos(0)=1$.

Ainsi, la règle de L'Hospital donne :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{u'(x)}{v'(x)}=\lim_{x\to 0}\left(1+\cos x\frac{x}{\sin x}\right)=2.$$

- $a=+\infty$: On note la fonction $x\mapsto\dfrac{x-\sin x}{2-\cos x}$. Considérons la suite $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui a pour limite $+\infty$.

  Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, donc la suite $\left(f\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.

  Considérons maintenant la suite $(2\pi n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui a également pour limite $+\infty$;

  Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(2\pi n)=0$, donc la suite $\left(f(2\pi n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 0 .

  La fonction f n'admet donc pas de limite en $+\infty$ (par contraposée de la caractérisation séquentielle de la limite).

12. On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{(m+1)x^2+3x}{2x-1}$; son domaine est $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

- $a = \pm\infty$:

  — Si $m = -1$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$.

  — Si $m < -1$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(m+1)x^2}{2x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(m+1)}{2} x = \mp\infty$.

  — Si $m > -1$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(m+1)x^2}{2x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(m+1)}{2} x = \pm\infty$.

- $a = \dfrac{1}{2}$: Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, on a : $f(x) = \dfrac{((m+1)x+3)x}{2x-1}$.

Il faut déterminer le signe du quotient au voisinage de $\dfrac{1}{2}$.

On a : $\left((m+1)\dfrac{1}{2}+3>0\right) \Leftrightarrow (m>-7)$; on en déduit la disjonction de cas suivante :

— Si $m = -7$: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{-3x(2x-1)}{2x-1} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (-3x) = -\dfrac{3}{2}$.

— Si $m < -7$: $(m+1)\dfrac{1}{2}+3<0$ donc :

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = -\infty.$$

— Si $m > -7$: $(m+1)\dfrac{1}{2}+3>0$ donc :

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty.$$

13. On note u la fonction $x \mapsto \ln(\cos(3x))$, et v la fonction $x \mapsto \sin^2 x$. $u(0) = v(0) = 0$.

u et v sont dérivables sur $\left]-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right[$, à dérivées continues, et pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right[$, $u'(x) = \dfrac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)}$ et $v'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right[$ et $x \neq 0$, on a :

$$\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{-3\sin(3x)}{2\cos(3x)\sin(x)\cos(x)} = \frac{-3\sin(2x)\cos(x) - 3\cos(2x)\sin(x)}{2\cos(3x)\sin(x)\cos(x)}$$

$$= \frac{-6\sin(x)\cos^2(x) - 3\cos(2x)\sin(x)}{2\cos(3x)\sin(x)\cos(x)} = -3\frac{\cos(x)}{\cos(3x)} - \frac{3\cos(2x)}{2\cos(3x)\cos(x)}.$$

La règle de L'Hospital donne :

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to 0}\left(-3\frac{\cos(x)}{\cos(3x)} - \frac{3\cos(2x)}{2\cos(3x)\cos(x)}\right) = -\frac{9}{2}.$$

Remarque : On aurait également pu appliquer la règle de L'Hospital pour déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)}$.

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos(3x)}{\cos(x)} = 3$ puis, par produit,

$$\lim_{x\to 0}\frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-3\sin(3x)}{2\cos(3x)\sin(x)\cos(x)} = \frac{-9}{2}.$$

14. Pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$, $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

Rappelons tout d'abord que $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ (car c'est la limite du taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0).

- $a = \pm\infty$: On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{X=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e.$
- $a = 0$: Pour que la fonction soit définie, il faut $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$. La limite en 0 est donc à droite.

  Pour $x > 0$, $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = x\ln(x+1) - x\ln(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x+1)=0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$.

On a donc $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$ puis, par composition :

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1.$$

15. On note f la fonction $x\mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\{2k\pi\}$, on écrit :

$$f(x)=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{2};$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}.$$

Remarque : On ne pouvait pas appliquer la règle de L'Hospital, car la fonction $x\mapsto\sqrt{1-\cos x}$ n'est pas dérivable en 0. En effet, en utilisant la même formule de trigonométrie que précédemment, et la limite usuelle $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X}=1$ on a :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dérivées

Le calcul de dérivées est une étape indispensable dans l'étude de fonctions. Introduite au lycée, la dérivation de fonctions composées se généralise dans le supérieur et sa pratique s'enrichit des nouvelles fonctions étudiées.
Le calcul de dérivées n-ièmes vient compléter les nouvelles compétences attendues.
Cette fiche permet de mettre en place les mécanismes de dérivation. Elle permet également de distinguer les études globales des études locales, en s'intéressant à des problèmes de dérivabilité aux bornes d'un domaine.

Je vous montre comment

■ Dériver une fonction composée

Si f est définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles, et g est définie sur $f(D)$, toutes deux dérivables sur leurs domaines respectifs, alors $g \circ f$ est dérivable sur D et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

Exemple 1

Dériver la fonction $f : x \mapsto \cos\left(\sqrt{1+x^2}\right)$.

Réponse

On a ici composé trois fonctions : $f = w \circ v \circ u$ où $u : x \mapsto 1+x^2, v : x \mapsto \sqrt{x}$, et $w : x \mapsto \cos(x)$.

u et w sont dérivables sur $\mathbb{R}$, v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, où u a bien ses images.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = (w \circ v \circ u)' = w' \circ (v \circ u) \times (v \circ u)'$ $= w' \circ (v \circ u) \times v' \circ u \times u'$, c'est-à-dire :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right) \times \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

■ Établir la dérivabilité d'une fonction en un réel particulier

Souvent, quand on doit faire une étude de dérivabilité en un réel, les résultats généraux sur les opérations, ou la composition ne s'appliquent pas. Il faut faire une étude locale spécifique.

- En utilisant la définition du nombre dérivé :

Exemple 2

Montrer que *f* définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $x \mapsto \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ est dérivable en 0.

⚠ Une erreur très grossière consiste à dire : « *f* est constante en 0, donc sa dérivée est nulle en 0 ». Avec un raisonnement pareil, les dérivées seraient nulles partout ! La dérivabilité est une notion locale, elle nous place au voisinage d'un réel. Il ne faut pas perdre de vue qu'un nombre dérivé est une limite.

Réponse

On calcule le taux d'accroissement de f entre 0 et x : pour tout $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = x\ln(x)$.

Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

Donc *f* est dérivable en 0, et $f'(0)=0$.

- En appliquant le théorème de prolongement de la dérivée :

> Soit *f* une fonction continue sur $[a,b]$ ($a<b$), dérivable sur $]a,b[$.
>
> Si f' admet une limite finie en a (resp. en b), alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$ (resp. *f* dérivable en *b* et $f'(b) = \lim\limits_{x\to b} f'(x)$).

⚠ Ce résultat donne une condition suffisante de dérivabilité. Si la limite en *a* (ou en *b*) n'existe pas, la fonction peut pourtant être dérivable en *a* (ou en *b*), par contre la dérivée ne sera pas continue…

Exemple 3

Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(1-x^3\right)$.

> **Remarque :** La fonction Arcsin étant continue mais non dérivable en 1, la question de la dérivabilité de *f* en 0 se pose, car on ne peut pas y appliquer le théorème sur la dérivabilité d'une fonction composée.

Réponse

La fonction Arcsin est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$.

La fonction $u : x \mapsto 1 - x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $\left(u(x) \in]-1,1[\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left]0, \sqrt[3]{2}\right[\right)$.

Ainsi f est dérivable sur $\left]0, \sqrt[3]{2}\right[$, comme composée de fonctions dérivables, et on a pour tout $x \in \left]0, \sqrt[3]{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{-3x^2}{\sqrt{1-\left(1-x^3\right)^2}} = \dfrac{-3x^2}{\sqrt{x^3\left(2-x^3\right)}} = \dfrac{-3\sqrt{x}}{\sqrt{2-x^3}}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-3\sqrt{x}}{\sqrt{2-x^3}} = 0$, donc d'après le théorème de prolongement de la dérivée, f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

■ Calculer une dérivée *n*-ième

- Après le calcul de plusieurs dérivées successives, en conjecturant la forme générale de la dérivée *n*-ième, puis en la démontrant par récurrence :

Exemple 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n-ième de $f_\alpha : \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha \end{vmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Réponse

f_α est une fonction puissance. Elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $A_n = \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\alpha{}^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\right)$ est vraie.

Initialisation : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha{}'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, donc l'assertion est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose A_n vraie, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha{}^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$f_\alpha{}^{(n+1)}(x) = \left(f_\alpha{}^{(n)}\right)'(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{\alpha-n-1}$.

A_{n+1} est donc vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, l'assertion A_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : Certaines dérivées sont à connaître. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\boxed{(\exp)^{(n)}(x) = \exp(x)\ ,\ (\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } (\cos)^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)}$

- Si la fonction à dériver est un produit de fonctions, en utilisant la **formule de Leibniz :**

Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur D ($n \in \mathbb{N}$).

Alors : fg est n fois dérivable sur D et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Exemple 5

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculer la dérivée n-ième de $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2+1)e^{2x} \end{array} \right.$.

Réponse

On constate tout d'abord que f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. On note u la fonction $x \mapsto x^2+1$ et v la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

u est une fonction polynomiale. Ses dérivées sont toutes nulles à partir de la dérivée 3-ième.

La formule de Leibniz donne :

$$f^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} u'' v^{(n-2)}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $A_n = \left(\forall x \in \mathbb{R}, v^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}\right)$ est vraie.

Initialisation : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = e^{2x} = 2^0 e^{2x}$, donc l'assertion est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose A_n vraie, c'est-à-dire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}, v^{(n+1)}(x) = \left(v^{(n)}\right)'(x) = 2^n \times 2e^{2x} = 2^{n+1}e^{2x}$. A_{n+1} est donc vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, l'assertion A_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = e^{2x}\left(\left(x^2+1\right)2^n + n \times 2x \times 2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times 2^{n-2}\right)$$

$$= 2^{n-2} e^{2x}\left(4x^2 + 4nx + n^2 - n + 4\right).$$

On s'échauffe

1. Donner la fonction dérivée des fonctions f suivantes sur le domaine D précisé, après en avoir justifié la dérivabilité :

a. $f : x \mapsto \cos(2x) + \cos\left(x^2\right) + \cos^2(x)$ sur $D = \mathbb{R}$.

b. $f : x \mapsto \ln\left(\left|x^3 - 1\right|\right)$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

c. $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ sur $D =]1, +\infty[$.

d. $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$ sur $D =]0,1[$.

e. $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\dfrac{1+x}{1-x}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

f. $f : x \mapsto 3^{x^2}$ sur $D = \mathbb{R}$.

g. $f : x \mapsto \ln\left(1 + \sin^2\left(e^{x^2}\right)\right)$ sur $D = \mathbb{R}$.

2. Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) sur le domaine D précisé :

a. $f_p : x \mapsto x^p, \; p \in \mathbb{N}^*$ sur $D = \mathbb{R}$.

b. $f : x \mapsto (1+x)^n x^2$ sur $D = \mathbb{R}$.

c. $f : x \mapsto \cos^2(x)$ sur $D = \mathbb{R}$.

On accélère

3. Les fonctions f suivantes dépendent de deux variables. Les dériver séparément en fonction de chaque variable (c'est-à-dire, fixer une variable et dériver par rapport à l'autre).

Remarque : On dit que l'on calcule les **dérivées partielles** de la fonction à deux variables.

a. $f : (x,y) \mapsto x\cos y + x^2 y$

b. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x}{(x+y)^2 + 1}$

c. $f:(x,y)\mapsto e^{-x^2+\frac{x}{y}}$

d. $f:(x,y)\mapsto \ln\left(x^2+e^{y^2}\right)$

e. $f:(x,y)\mapsto \operatorname{Arctan}\left(xy^2\right)$

f. $f:(x,y)\mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2y}{x^2+y^2+2}\right)$

4. Calculer la dérivée n-ième des fonctions f suivantes ($n\in\mathbb{N}^*$) sur le domaine D précisé :

a. $f:x\mapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b. $f:x\mapsto e^x\cos(x)$ sur $D=\mathbb{R}$.

c. $f:x\mapsto x^{n-1}\ln(x)$ sur $D=]0,+\infty[$.

5. Donner la fonction dérivée des fonctions f suivantes sur le domaine D précisé, après en avoir justifié la dérivabilité :

a. $f:x\mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ sur $D=]0,+\infty[$.

b. $f:x\mapsto \left(x^2-1\right)\operatorname{Arcsin}(x)$ sur $D=[-1,1]$.

c. $f:x\mapsto \dfrac{1}{\cos\sqrt{x}}$ sur $D=\left[0,\dfrac{\pi^2}{4}\right[$.

d. $f:x\mapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ sur $D=\mathbb{R}$.

e. $f:x\mapsto \sqrt{|x|^3}$ sur $D=\mathbb{R}$.

f. $f:x\mapsto \sqrt{x\operatorname{Arcsin}x}$ sur $D=]-1,0[\cup]0,1[$.

Cette dernière fonction est-elle dérivable en 0 ?

On finit au top

6. Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) sur le domaine D précisé :

a. $f_n : x \mapsto x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ sur $D = \mathbb{R}^*$.

b. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

7. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1. a. f est la somme de trois fonctions, elles-mêmes composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2\sin(2x) - 2x\sin\left(x^2\right) - 2\cos(x)\sin(x).$$

b. f est la composée des fonctions $u : x \mapsto x^3 - 1$ et $v : x \mapsto \ln(|x|)$.

v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors $u(x) \in \mathbb{R}^*$.

Ainsi, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 - 1}.$$

c. f est la composée de la fonction $u : x \mapsto \ln(x)$ avec elle-même. u est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Si $x \in]1,+\infty[$, alors $\ln(x) \in]0,+\infty[$.

Ainsi, par composition, f est dérivable sur $]1,+\infty[$, et pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}.$$

d. f est la composée des fonctions $u : x \mapsto 1 - x^2$, $v : x \mapsto \sqrt{x}$ et $w : x \mapsto \operatorname{Arccos}(x)$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$; v est dérivable sur $]0,+\infty[$ et w est dérivable sur $]-1,1[$.

si $x \in]0,1[$, alors $u(x) \in]0,1[$ et $v(u(x)) \in]0,1[$.

Ainsi, par composition, f est dérivable sur $]0,1[$, et pour tout $x \in]0,1[$:

$$f'(x) = \frac{-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\,|x|} \underset{x>0}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Remarque : f' admet une limite à droite en 0. f admet donc une dérivée à droite en 0.

On remarque également que sur [0,1[, les dérivées de f et de Arcsin coïncident. On en déduit que ces fonctions diffèrent d'une constante sur cet intervalle.

e. f est la composée des fonctions $u : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ et $v : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$.

v est dérivable sur $\mathbb{R}$; u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ainsi, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Remarque : La dérivée de f et celle de Arctan coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On en déduit que ces fonctions différent d'une constante sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

⚠ Comme on pourra le voir dans la fiche sur les fonctions circulaires réciproques, ces constantes ne sont pas égales !

f. f est la composée des fonctions $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto 3^x$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \ln(3) \times 2x \times 3^{x^2}$.

⚠ v n'est pas une fonction puissance mais une fonction exponentielle !

Pour éviter toute erreur, il est plus prudent de l'écrire $v : x \mapsto e^{x\ln(3)}$ et de la dériver comme une fonction de la forme e^u.

g. f est la composée des fonctions $u : x \mapsto x^2$, $v : x \mapsto e^x$, $w : x \mapsto \sin(x)$, à nouveau u, et $g : x \mapsto \ln(1+x)$.

u, v, et w sont dérivables sur $\mathbb{R}$; g est dérivable sur $]-1, +\infty[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2\left(e^{x^2}\right) \geq 0$ donc :

$u\Big(w\Big(v\big(u(x)\big)\Big)\Big) \in [0, +\infty[\subset]-1, +\infty[$.

Ainsi, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2\sin\left(e^{x^2}\right)\cos\left(e^{x^2}\right)2xe^{x^2}}{1+\sin^2\left(e^{x^2}\right)} = \frac{2xe^{x^2}\sin\left(2e^{x^2}\right)}{1+\sin^2\left(e^{x^2}\right)}.$$

2. **a.** Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, f_p est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynomiale.

Montrons par une récurrence (finie) que pour $0 \leq n \leq p$, l'assertion $A_n = \left(\forall x \in \mathbb{R}, f_p^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n}\right)$ est vraie.

Initialisation : Pour tout $x \in \mathbb{R}, f_p^{(0)}(x) = x^p = \frac{p!}{(p-0)!}x^{p-0}$; l'assertion est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $0 \leq n < p$; on suppose l'assertion A_n vraie, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}, f_p^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n}$.

Comme $n < p$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_p^{(n+1)}(x) = \left(f_p^{(n)}\right)'(x) = \frac{p!}{(p-n)!}(p-n)x^{p-n-1} = \frac{p!}{(p-n-1)!}x^{p-n-1},$$

donc l'assertion A_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, l'assertion A_n est vraie pour tout $0 \leq n \leq p$.

L'assertion A_p donne pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_p^{(p)}(x) = p!$

On en déduit que pour tout $n > p$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_p^{(n)}(x) = 0$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} \text{si } 0 \leq p \leq n & f^{(p)}(x) = \frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p} \\ \text{si } p > n & f^{(p)}(x) = 0 \end{cases}$.

b. On note u la fonction $x \mapsto x^2$, et v la fonction $x \mapsto (1+x)^n$.

u et v sont des fonctions polynomiales, elles sont donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Les dérivées successives de u sont nulles à partir de la troisième.

La formule de Leibniz donne :

$$f^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} u''v^{(n-2)}.$$

En utilisant le résultat démontré dans l'exercice précédent, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= x^2 n! + n \times 2x \times n!(1+x) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times \frac{n!}{2!}(1+x)^2 \\ &= \frac{n!}{2}\left(\left(n^2+3n+2\right)x^2 + 2n(n+1)x + n(n-1)\right). \end{aligned}$$

c. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $A_n = \left(\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)$ est vraie.

Initialisation : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, donc l'assertion est vérifiée pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose A_n vraie, c'est-à-dire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = 2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = 2 \times 2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2^n \cos\left(2x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

A_{n+1} est donc vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, l'assertion A_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a.
- Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction $f_y : x \mapsto x\cos y + x^2 y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_y'(x) = \cos y + 2xy$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : y \mapsto x\cos y + x^2 y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables, et pour tout $y \in \mathbb{R}$: $f_x'(y) = -x\sin y + x^2$.

Remarque : Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on note $f_y'(x)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $f_x'(y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

b. • Soit $y\in\mathbb{R}$. La fonction $f_y : x\mapsto \dfrac{x}{(x+y)^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f_y'(x)=\dfrac{-x^2+y^2+1}{\left((x+y)^2+1\right)^2}$.

• Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $f_x : y\mapsto \dfrac{x}{(x+y)^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction dérivable ne s'annulant pas, et pour tout $y\in\mathbb{R}$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_x'(y)=\dfrac{-2x(x+y)}{\left((x+y)^2+1\right)^2}$.

c. • Soit $y\in\mathbb{R}^*$. La fonction $f_y : x\mapsto e^{-x^2+\frac{x}{y}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f_y'(x)=\left(-2x+\dfrac{1}{y}\right)e^{-x^2+\frac{x}{y}}$.

• Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $f_x : y\mapsto e^{-x^2+\frac{x}{y}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $y\in\mathbb{R}^*$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_x'(y)=\dfrac{-x}{y^2}e^{-x^2+\frac{x}{y}}$.

d. • Soit $y\in\mathbb{R}$. La fonction $f_y : x\mapsto \ln\left(x^2+e^{y^2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f_y'(x)=\dfrac{2x}{x^2+e^{y^2}}$.

• Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $f_x : y\mapsto \ln\left(x^2+e^{y^2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $y\in\mathbb{R}$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_x'(y)=\dfrac{2ye^{y^2}}{x^2+e^{y^2}}$.

e. • Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction $f_y : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(xy^2\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_y{}'(x) = \dfrac{y^2}{1+x^2y^4}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : y \mapsto \operatorname{Arctan}\left(xy^2\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $y \in \mathbb{R}$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_x{}'(y) = \dfrac{2yx}{1+x^2y^4}$.

f. La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$.

On a :

$$\left(\left|\frac{2y}{x^2+y^2+2}\right| < 1\right) \Leftrightarrow \left(0 < x^2+y^2+2-2|y|\right) \Leftrightarrow \left(0 < (|y|-1)^2 + x^2 + 1\right).$$

La dernière assertion étant toujours vraie, il en est de même de la première.

On en déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $f_y : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2y}{x^2+y^2+2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : y \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2y}{x^2+y^2+2}\right)$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-4xy}{\left(x^2+y^2+2\right)\sqrt{\left(x^2+y^2+2\right)^2 - 4y^2}}$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^2-2y^2+4}{\left(x^2+y^2+2\right)\sqrt{\left(x^2+y^2+2\right)^2 - 4y^2}}$.

4. a. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, comme inverse d'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $A_n = \left(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)$ est vraie.

Initialisation : Pour $n = 0$, c'est vérifié.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose l'assertion A_n vraie, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \frac{-n!(n+1)\times(-1)}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}.$$

(On a utilisé : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{1}{u^k}\right)' = \dfrac{-ku'}{u^{k+1}}$ où u ne s'annule pas.)

L'assertion A_{n+1} est donc vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, l'assertion A_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{Re}\left(e^{x(1+i)}\right)$.

Une récurrence immédiate donne : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \mathrm{Re}\left((1+i)^n e^{x(1+i)}\right)$.

On a : $(1+i)^n e^{x(1+i)} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n e^{x(1+i)} = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{x+i\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$.

c. On note u la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ et v la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et v est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, donc f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ par produit.

Pour appliquer la formule de Leibniz, on va déterminer l'expression de la dérivée n-ième de v.

Le calcul des premières dérivées permet de dégager une formule de récurrence.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $A_n = \left(\forall x \in]0,+\infty[,\ v^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right)$ est vraie.

Initialisation : Pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$, $v'(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{(-1)^0 0!}{x}$, l'assertion est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose l'assertion A_n vraie, c'est-à-dire pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$, $v^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

On a pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$,

$$v^{(n+1)}(x) = \left(v^{(n)}\right)'(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(-n)}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},$$

donc l'assertion A_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, l'assertion A_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant le résultat démontré dans **l'exercice 2.a**, la formule de Leibniz donne pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$$

$$\underset{u^{(n)}(x)=0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{n-1-k} \times \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}}$$

$$= \frac{(n-1)!}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-1} = -\frac{(n-1)!}{x} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k (-1)^{n-k} - \underbrace{1}_{k=n} \right)$$

$$= -\frac{(n-1)!}{x} \left(\left(1 + (-1)\right)^n - 1 \right) = \frac{(n-1)!}{x}.$$

5. a. Chaque fonction intervenant dans l'expression de f (en composition ou en produit) étant dérivable sur son domaine de définition, il en est de même de f, et pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$:

$$f'(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \times \frac{\frac{-1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \right) e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

b. • Par produit, f est dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = 2x\text{Arc}\sin(x) + \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} = 2x\text{Arc}\sin(x) - \sqrt{1-x^2}.$$

• En 1 et -1 :

$$\lim_{x\to -1} 2x\text{Arc}\sin(x) - \sqrt{1-x^2} = \pi \text{ et } \lim_{x\to 1} 2x\text{Arc}\sin(x) - \sqrt{1-x^2} = \pi,$$

donc d'après le théorème de prolongement de la dérivée, f est dérivable en -1 et en 1, et $f'(-1) = f'(1) = \pi$.

c. • La fonction racine carrée est dérivable sur $]0,+\infty[$, la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'inverse d'une fonction est dérivable où la fonction est elle-même dérivable et ne s'annule pas.

Ainsi, par composition, la fonction f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi^2}{4}\right[$, et pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi^2}{4}\right[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}{\left(\cos\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\cos\sqrt{x}\right)^2}.$$

• En 0 :

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\cos\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{2}$, car $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$. Le théorème de prolongement de la dérivée donne f dérivable en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{2}$.

d. • La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, les fonctions sinus et carré sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composition et produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

• En 0 :

Remarque : On ne peut pas appliquer le théorème de prolongement de la dérivée, car la fonction cosinus n'a pas de limite en l'infini.
Ce théorème ne donnant qu'une condition suffisante, on ne peut pas non plus conclure à la non dérivabilité. On revient donc à la définition du nombre dérivé, avec le taux d'accroissement…

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $-x \leq x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x$, donc le théorème des gendarmes donne : $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Ainsi, *f* est dérivable en 0, et $f'(0)=0$.

e. • La fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction racine carrée sur $]0,+\infty[$. Par composition, *f* est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et on a :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\sqrt{x} & \text{si } x>0 \\ -\dfrac{3}{2}\sqrt{-x} & \text{si } x<0 \end{cases}.$$

• En 0 : Le théorème de prolongement de la dérivée donne *f* dérivable en 0, avec $f'(0)=0$.

f. • La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$; par produit, $x \mapsto x\,\mathrm{Arc}\sin x$ est dérivable sur $]-1,1[$, où elle est positive, s'annulant en 0. La fonction racine carrée est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc, par composition, *f* est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$, et pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,1[$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{Arc}\sin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{x\,\mathrm{Arc}\sin x}}.$$

• En 0 : Pour tout $x \in]-1,1[$, $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x\,\mathrm{Arc}\sin x}}{x} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\mathrm{Arc}\sin x}{x}} & \text{si } x>0 \\ -\sqrt{\dfrac{\mathrm{Arc}\sin x}{x}} & \text{si } x<0 \end{cases}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{Arc}\sin x}{x} = \mathrm{Arc}\sin'(0) = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ donc *f* n'est pas dérivable en 0.

6. a. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, comme produit d'un polynôme, et de la composée d'une exponentielle avec la fonction inverse, toutes de classe C^∞ sur leurs domaines.

Montrons pas récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'assertion $A_n=\left(\forall x\in\mathbb{R}^*, f_n^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}\right)$ est vraie.

Initialisation : On a : $f_1 : x\mapsto e^{\frac{1}{x}}$; pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f_1'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, donc A_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; on suppose que A_n est vraie, c'est-à-dire que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f_n^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f_{n+1}(x)=x^ne^{\frac{1}{x}}=xf_n(x)$. On applique la formule de Leibniz, les fonctions étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}^{(n+1)}(x)&=\binom{n+1}{0}xf_n^{(n+1)}(x)+\binom{n+1}{1}f_n^{(n)}(x)\\
&=x\left(f_n^{(n)}\right)'(x)+(n+1)f_n^{(n)}(x)\\
&=x(-1)^n e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-(n+1)}{x^{n+2}}-\frac{1}{x^{n+1+2}}\right)+(n+1)(-1)^n\frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}\\
&=(-1)^{n+1}e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^{n+2}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que l'assertion A_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, l'assertion A_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, on a : $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$.

On note *u* la fonction $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, et *v* la fonction $x\mapsto\frac{1}{1+x}$.

On a déterminé dans l'**exercice 4.a)** la dérivée n-ième de u : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $u^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $v(x) = u(-x)$, on a (avec une récurrence immédiate) que pout tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $v^{(n)}(x) = (-1)^n u^{(n)}(-x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right).$$

7. • $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

• En 0 : Montrons pas récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion

$$A_n = \left(\exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}\right) \text{ est vraie.}$$

Initialisation : Par définition de f, A_0 est vraie, avec $P_0 = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que A_n est vraie, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left(\frac{x^{3n} \times P_n'(x) - 3nx^{3n-1}P_n(x)}{x^{6n}} + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \times \frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

L'assertion A_{n+1} est donc vraie, avec $P_{n+1} = X^3 P_n' - 3nX^2 P_n + 2P_n \in \mathbb{R}[X]$.

Conclusion : Par principe de récurrence, l'assertion A_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par croissances comparées, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0} \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 .$$

Ainsi, le théorème de prolongement de la dérivée permet de conclure à la dérivabilité de $f^{(n)}$ en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par suite au caractère C^{∞} de f sur $\mathbb{R}$.

Équations dans l'ensemble des nombres complexes

L'introduction des racines carrées dans $\mathbb{C}$, et plus généralement des racines n-ièmes d'un nombre complexe, ouvre de nouvelles perspectives dans la résolution des équations.
Une question exclusivement technique, qui se maîtrise par la pratique !

Je vous montre comment

Déterminer les racines *n*-ièmes d'un nombre complexe ($n \in \mathbb{N}^*$)

- En le mettant sous forme exponentielle, et en appliquant le résultat suivant :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un nombre complexe non nul $a = \rho e^{i\theta}$ $(\rho > 0)$ admet n racines n-ièmes : $z_k = \sqrt[n]{\rho}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in [\![0;n-1]\!]$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z^n = 1$ possède n solutions complexes : $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in [\![0;n-1]\!]$, appelées **racines *n*-ièmes de l'unité.**

Exemple 1

Résoudre l'équation : $z^5 = i$.

Réponse

$i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$; on a donc : $\left(z^5 = i\right) \Leftrightarrow \left(z \in \left\{ e^{i\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right)},\ k \in [\![0;4]\!] \right\}\right)$.

Pour $k=0, z=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{10}}$; pour $k=1, z=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}=i$; pour $k=2, z=\mathrm{e}^{i\frac{9\pi}{10}}$; pour $k=3, z=\mathrm{e}^{i\frac{13\pi}{10}}=\mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{10}}$; pour $k=4, z=\mathrm{e}^{i\frac{17\pi}{10}}=\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{10}}$.

■ Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe *Z*

- Si on peut mettre simplement *Z* sous forme exponentielle, en appliquant la méthode précédente, avec $n=2$:

Exemple 2

Déterminer les racines carrées de $-4i$.

Réponse

$-4i=4\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}}$; les racines carrées sont $2\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}(-1+i)$ et $2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(1-i)$.

- Sinon, en résolvant un système :

Étant donné $Z=x+iy, (x,y)\in\mathbb{R}^2$, on cherche $z=a+ib, (a,b)\in\mathbb{R}^2$, tel que $z^2=Z$. On a :

$$\left(z^2=Z\right)\Leftrightarrow\left(a^2-b^2+2abi=x+iy\right)\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=x & (1)\\ 2ab=y & (2)\\ a^2+b^2=\sqrt{x^2+y^2} & (3)\end{cases}.$$

L'égalité (1) vient de l'identification des parties réelles ;

L'égalité (2) vient de l'identification des parties imaginaires ;

L'égalité (3) vient de l'égalité des modules : $|z|^2=\left|z^2\right|=|Z|$.

Remarque : L'égalité (3) n'est pas nécessaire dans l'équivalence, mais elle permet de calculer simplement *a*.

On détermine a^2 en sommant (1) et (3) (on obtient ainsi deux valeurs opposées pour *a*), puis on détermine *b* avec (2).

Exemple 3

Déterminer les racines carrées de $-3-4i$.

Réponse

Soit $z = a + ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z^2 = -3 - 4i$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 & (1) \\ 2ab = -4 & (2). \\ a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5 & (3) \end{cases}$$

(1) + (3) donne $2a^2 = 2$ donc $a \in \{1, -1\}$; (2) donne $b = \dfrac{-2}{a}$.

On conclut : Les racines carrées de $-3 - 4i$ sont $1 - 2i$ et $-1 + 2i$.

⚠ Dans $\mathbb{C}$, le symbole $\sqrt{\ }$ n'a aucun sens. En effet, dans $\mathbb{R}^+$ on a défini $\sqrt{x}$ comme « le réel **positif** dont le carré est *x* ». Dans $\mathbb{C}$, nous n'avons pas établi de relation d'ordre. Dès lors, comment faire le choix de l'une des deux racines carrées qui pourrait être notée avec le symbole $\sqrt{\ }$?

■ Résoudre une équation polynomiale dans $\mathbb{C}$

- Si l'équation est du second degré, en utilisant les formules du cours :

Remarque : Si le discriminant n'est pas réel, on applique la méthode précédente pour déterminer ses racines carrées.

Exemple 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z + 1 + i = 0$.

Réponse

Le discriminant de l'équation est $\Delta = -3 - 4i$.

Dans l'exemple précédent, on a montré que les racines carrées de Δ sont $1 - 2i$ et $-1 + 2i$.

Les solutions de l'équation sont : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = i$.

- Si l'équation est de degré au moins 3, en cherchant des racines « évidentes » afin de factoriser le premier membre, et de se ramener au cas précédent avec une équation produit :

Exemple 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 + (2 - i)z^2 + (5 - 2i)z - 5i = 0$.

Réponse

i est une racine « évidente » (dans $\mathbb{C}$, il faut l'envisager comme tel !).

On a donc : $z^3+(2-i)z^2+(5-2i)z-5i=(z-i)\left(z^2+az+b\right)$; en identifiant, on obtient : $z^3+(2-i)z^2+(5-2i)z-5i=(z-i)\left(z^2+2z+5\right)$.
On en déduit que :

$$\left(z^3+(2-i)z^2+(5-2i)z-5i=0\right)\Leftrightarrow(z=i)\vee\left(z^2+2z+5=0\right).$$

L'équation $z^2+2z+5=0$ a pour discriminant $\Delta=-16$;
ses solutions sont $z_1=\dfrac{-2+4i}{2}=-1+2i$, et $z_2=\dfrac{-2-4i}{2}=-1-2i$.
Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation initiale est :
$S=\{i,-1+2i,-1-2i\}$.

■ Donner la forme exponentielle de $e^{i\theta}+e^{i\theta'},(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$

▸ En utilisant la méthode de « **l'arc moitié** » avec les **formules d'Euler** :

$$\forall(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2:\begin{cases}e^{i\theta}+e^{i\theta'}=e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}\right)=2\cos\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\\[2ex] e^{i\theta}-e^{i\theta'}=e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}\right)=2i\sin\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\end{cases}$$

Exemple 6

Donner la forme exponentielle du nombre complexe $z=1+e^{i\theta}$, où $\theta\in\,]-\pi,\pi[$.

Réponse

$$1+e^{i\theta}=e^{i0}+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Comme $\theta\in\,]-\pi,\pi[$, $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)>0$, et on a bien la forme exponentielle de $1+e^{i\theta}$.

Dans l'ensemble des exercices, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation proposée :

On s'échauffe

1. $z^5 = \sqrt{3} + i$
2. $z^4 + 1 - i = 0$
3. $z^2 + 9i = 0$
4. $z^2 - 3z + 6 - 2i = 0$
5. $4z^2 + (8 - 4i)z + 6 - 8i = 0$
6. $(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$
7. $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

On accélère

8. $(z-2)^8 = z^8$ (on donnera les solutions sous forme exponentielle.)
9. $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$
10. $z^3 - (5+i)z^2 + (9+4i)z - 3(3+i) = 0$ (on montrera qu'il y a une solution réelle.)
11. $2z^3 + (-3+8i)z^2 - (5+10i)z + 3(1+i) = 0$ (on montrera qu'il y a une solution réelle.)
12. $\left(2z^2 - 3z + 2\right)^2 + \left(z^2 - 3z + 2\right)^2 = 0$

On finit au top

13. $z^4 = 28 + 96i$
14. $z^2 = i + e^{i\theta}$, où $\theta \in [0, 2\pi[$.
15. $(z+i)^n = (z-i)^n$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

On notera S l'ensemble des solutions des équations que l'on veut résoudre.

1. Il s'agit de déterminer les racines cinquièmes de $\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

On a donc :

$$S=\left\{2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{\pi}{30}},2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{13\pi}{30}},2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{5\pi}{6}},2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{37\pi}{30}},2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{49\pi}{30}}\right\}$$

$$=\left\{2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{\pi}{30}},2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{13\pi}{30}},2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{5\pi}{6}},2^{\frac{1}{5}}e^{-i\frac{23\pi}{30}},2^{\frac{1}{5}}e^{-i\frac{11\pi}{30}}\right\}.$$

2. On cherche les racines quatrièmes de $-1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

On a donc :

$$S=\left\{2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{3\pi}{16}},2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{11\pi}{16}},2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{19\pi}{16}},2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{27\pi}{16}}\right\}$$

$$=\left\{2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{3\pi}{16}},2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{11\pi}{16}},2^{\frac{1}{8}}e^{-i\frac{13\pi}{16}},2^{\frac{1}{8}}e^{-i\frac{5\pi}{16}}\right\}.$$

3. On cherche les racines carrées de $-9i=9e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

On a donc : $S=\left\{3e^{i\frac{3\pi}{4}},3e^{-i\frac{\pi}{4}}\right\}=\left\{\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i),\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)\right\}$.

4. Le discriminant de cette équation est $\Delta=-15+8i$.

On cherche $a+ib$ tel que $(a+ib)^2=-15+8i$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases}a^2-b^2=-15\\2ab=8\\a^2+b^2=\sqrt{289}=17\end{cases}.$$

On trouve $a+ib\in\{1+4i,-1-4i\}$, puis : $S=\{2+2i,1-2i\}$.

5. Le discriminant de cette équation est $\Delta=(8-4i)^2-16(6-8i)=16(-3+4i)$.

Remarque : Il faut factoriser au maximum le discriminant pour simplifier la recherche de ses racines carrées.

On cherche $a+ib$ tel que $(a+ib)^2=-3+4i$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} a^2-b^2=-3 \\ 2ab=4 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}.$$

On trouve $a+ib\in\{1+2i,-1-2i\}$.

On en déduit que les racines carrées de Δ sont $4+8i$ et $-4-8i$, puis : $S=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i,-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$.

6. Le discriminant de cette équation est $\Delta=-2i=2e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

On a donc $\Delta=(-1+i)^2=(1-i)^2$, puis : $S=\left\{\frac{4}{4+2i},\frac{6-2i}{4+2i}\right\}=\left\{\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i,1-i\right\}$.

7. Le discriminant de cette équation est $\Delta=4\cos^2\theta-4=-4\sin^2\theta$. On en déduit :

$S=\left\{e^{i\theta},e^{-i\theta}\right\}$.

8. $z=0$ n'est pas solution de l'équation, qui est donc équivalente à : $\left(\frac{z-2}{z}\right)^8=1$.

Les racines huitièmes de l'unité sont : $\left\{\omega_k=e^{i\frac{k\pi}{4}},k\in[\![0,7]\!]\right\}$. On a :

$$\left(\left(\frac{z-2}{z}\right)^8=1\right)\Leftrightarrow\left(\exists k\in[\![0,7]\!],\frac{z-2}{z}=e^{i\frac{k\pi}{4}}\right)\Leftrightarrow\left(\exists k\in[\![0,7]\!],\left(1-e^{i\frac{k\pi}{4}}\right)z=2\right).$$

Le cas $k=0$ est impossible. On a : $S=\left\{\frac{2}{1-e^{i\frac{k\pi}{4}}},k\in[\![1,7]\!]\right\}$.

Déterminons les formes exponentielles des solutions :

$$1-e^{i\frac{k\pi}{4}}=e^{i0}-e^{i\frac{k\pi}{4}}=e^{i\frac{k\pi}{8}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{8}}-e^{i\frac{k\pi}{8}}\right)$$

$$=-2i\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)e^{i\frac{k\pi}{8}}=2\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)e^{i\left(\frac{k\pi}{8}-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Comme $k\in[\![1,7]\!]$, $\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)>0$ donc $\dfrac{2}{1-e^{i\frac{k\pi}{4}}}=\dfrac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{8}\right)}$.

Finalement,

$$S=\left\{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}e^{i\frac{3\pi}{8}},\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)}e^{i\frac{\pi}{8}},1,\frac{1}{\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)}e^{-i\frac{\pi}{8}},\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},\frac{1}{\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)}e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right\}.$$

Remarque : Si on veut faire du zèle, on peut calculer les sinus avec les formules de trigonométrie :

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$, comme $\frac{\pi}{8}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ d'où :

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

De plus, $\frac{\pi}{8}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

On en déduit :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

9. En posant $Z=z^2$, on doit résoudre $Z^2+4Z+16=0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta=-3\times 16$; les solutions sont donc $Z=-2+2i\sqrt{3}$ et $Z=-2-2i\sqrt{3}$.

Il faut en déterminer les racines carrées pour résoudre l'équation initiale.

On a : $-2+2i\sqrt{3}=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$; les racines carrées de $-2+2i\sqrt{3}$ sont donc $\pm 2e^{i\frac{\pi}{3}}=\pm\left(1+\sqrt{3}\,i\right)$.

Comme $\left(z^2=Z\right)\Leftrightarrow\left(\left(\bar{z}\right)^2=\bar{Z}\right)$, les racines carrées de $-2-2i\sqrt{3}$ sont les nombres conjugués des racines carrées de $-2+2i\sqrt{3}$.

Finalement : $S=\left\{1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3};-1+i\sqrt{3};-1-i\sqrt{3}\right\}$.

10. $x\in\mathbb{R}$ est solution si, et seulement si : $\begin{cases} x^3-5x^2+9x-9=0 & (1) \\ -x^2+4x-3=0 & (2) \end{cases}$.

Remarque : (1) et (2) sont obtenues en isolant la partie réelle et la partie imaginaire de $x^3-(5+i)x^2+(9+4i)x-3(3+i)$, sachant que $x\in\mathbb{R}$.

L'équation (2) a pour solutions 1 et 3, mais seul 3 est aussi solution de (1).

On en déduit que c'est la solution réelle de l'équation initiale.

On a donc : $z^3-(5+i)z^2+(9+4i)z-3(3+i)=(z-3)\left(z^2+a\,z+b\right)$, avec $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

En identifiant, on obtient :

$z^3-(5+i)z^2+(9+4i)z-3(3+i)=(z-3)\left(z^2-(2+i)z+3+i\right)$.

L'équation $z^2-(2+i)z+3+i=0$ a pour discriminant $\Delta=-9$; ses solutions sont $1+2i$ et $1-i$.

Finalement $S=\left\{3,1+2i,1-i\right\}$.

11. $x \in \mathbb{R}$ est solution si, et seulement si : $\begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 5z + 3 = 0 & (1) \\ 8x^2 - 10x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$.

L'équation (2) admet pour solutions $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$, mais seul $\frac{1}{2}$ est aussi solution de (1).

On en déduit que c'est la solution réelle de l'équation initiale.

On a donc : $2z^3 + (-3+8i)z^2 - (5+10i)z + 3(1+i) = 2\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z^2 + a\,z + b\right)$, avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

Remarque : Le coefficient dominant est 2, il ne faut pas oublier de le mettre en facteur.

En identifiant, on obtient :

$2z^3 + (-3+8i)z^2 - (5+10i)z + 3(1+i) = (2z-1)\left(z^2 + (-1+4i)z - 3 - 3i\right)$.

L'équation $z^2 + (-1+4i)z - 3 - 3i = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3+4i$ (dont on a déterminé les racines carrées dans **l'exercice 5** : $1+2i$ et $-1-2i$) ; ses solutions sont $1-i$ et $-3i$.

Finalement, $S = \left\{\frac{1}{2}; 1-i; -3i\right\}$.

12. On a :

$\left[\left(2z^2 - 3z + 2\right)^2 + \left(z^2 - 3z + 2\right)^2 = 0\right] \Leftrightarrow \left[\left(2z^2 - 3z + 2\right)^2 = i^2\left(z^2 - 3z + 2\right)^2\right]$.

Deux nombres ayant le même carré sont soit égaux, soit opposés. On est donc ramené à résoudre les deux équations : $2z^2 - 3z + 2 = i\left(z^2 - 3z + 2\right)$ et $2z^2 - 3z + 2 = -i\left(z^2 - 3z + 2\right)$.

Considérons la première : $2z^2 - 3z + 2 = i\left(z^2 - 3z + 2\right)$, qui équivaut à $(2-i)z^2 - 3(1-i)z + 2(1-i) = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = -8 + 6i$.

On cherche $a+ib$ tel que $(a+ib)^2=-8+6i$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} a^2-b^2=-8 \\ 2ab=6 \\ a^2+b^2=10 \end{cases}.$$

On trouve $a+ib\in\{1+3i,-1-3i\}$, puis les solutions de la première équation qui sont : $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i$ et $1-i$.

On peut bien sûr procéder de même pour résoudre la deuxième équation, mais on va être plus malin !

En effet, l'équation initiale est à coefficients réels, ainsi si un nombre complexe z est solution, il en est de même de son conjugué. Les solutions de la seconde équation sont donc les nombres conjugués des solutions de la première.

On en déduit : $S=\left\{\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i,\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i,1+i,1-i\right\}$.

13. On doit ici déterminer les racines quatrièmes d'un nombre complexe dont on ne connait pas une expression simple de l'argument…

On peut toujours utiliser les fonctions circulaires réciproques, mais la simplification des solutions promet quelques difficultés !

Le plus simple est de considérer que les racines quatrièmes d'un nombre complexe sont les racines carrées de ses racines carrées.

- Déterminons les racines carrées de $28+96i=4(7+24i)$:

  On cherche $a+ib$ tel que $(a+ib)^2=7+24i$, ce qui équivaut à : $\begin{cases} a^2-b^2=7 \\ 2ab=24 \\ a^2+b^2=25 \end{cases}$. On trouve $a+ib\in\{4+3i,-4-3i\}$;

  On en déduit que les racines carrées de $28+96i$ sont : $8+6i$ et $-8-6i$.

- Déterminons maintenant les racines carrées de $8+6i$:

  On cherche $a+ib$ tel que $(a+ib)^2=8+6i$, ce qui équivaut à : $\begin{cases} a^2-b^2=8 \\ 2ab=6 \\ a^2+b^2=10 \end{cases}$.

  On trouve $a+ib \in \{3+i, -3-i\}$.

- Pour déterminer les racines carrées de $-8-6i$ remarquons que, comme $i^2=-1$, les racines carrées de $-8-6i$ sont obtenues en multipliant celles de $8+6i$ par i.

Finalement, $S=\{3+i, -3-i, -1+3i, 1-3i\}$.

14. Pour déterminer les racines carrées de $i+e^{i\theta}$ on va mettre ce nombre complexe sous forme exponentielle, en utilisant l'arc moitié :

$$i+e^{i\theta}=e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{i\theta}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}.$$

- Si $\theta \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right[$: $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)>0$, et on a bien la forme exponentielle de $i+e^{i\theta}$.

Remarque : Cette précision est indispensable car on va prendre la racine carrée du module !

On a donc : $S=\left\{\sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}, \sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(\frac{9\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}\right\}$.

- Si $\theta=\frac{3\pi}{2}$: $i+e^{i\theta}=0$, et $S=\{0\}$.
- Si $\theta \in \left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$: $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)<0$; la forme exponentielle de $i+e^{i\theta}$ est donc

$$-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}+\pi\right)}=2\cos\left(\pi-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$=2\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}.$$

On a donc : $S=\left\{\sqrt{2\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(\frac{5\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)},\sqrt{2\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(-\frac{3\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}\right\}$.

15. $z=i$ n'est pas solution de l'équation qui est donc équivalente à $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n=1$.

Les racines n-ièmes de l'unité sont : $\left\{\omega_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}},k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$. On a :

$$\left(\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n=1\right)\Leftrightarrow\left(\exists k\in[\![0,n-1]\!],\frac{z+i}{z-i}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in[\![0,n-1]\!],z\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1\right)=i\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1\right)\right).$$

Le cas $k=0$ est impossible. Pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$ on a :

$$z=\frac{i\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1\right)}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1}=\frac{ie^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)}=\frac{2i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$$

Finalement : $S=\left\{\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)},k\in[\![1,n-1]\!]\right\}$.

Trigonométrie

La trigonométrie est omniprésente en mathématiques. On la retrouve en analyse, en algèbre comme en géométrie. Ne pas maîtriser les techniques de base peut se révéler très pénalisant.
Cette fiche permet de mémoriser les formules et leurs utilisations à travers la résolution d'équations.

Je vous montre comment

Résoudre des équations trigonométriques

- Si l'équation est de la forme $a\cos x + b\sin x = c$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, (a,b)\neq(0,0)$:

On l'écrit : $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

On cherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

On a alors l'équivalence :

$$(a\cos x + b\sin x = c) \Leftrightarrow \left(\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos(x-\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Si $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$, l'équation n'a pas de solution ; sinon on conclut en utilisant le résultat suivant :

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases}(\cos x = \cos y) \Leftrightarrow \left(\exists k\in\mathbb{Z}, (x = y+2k\pi)\vee(x=-y+2k\pi)\right)\\ (\sin x = \sin y) \Leftrightarrow \left(\exists k\in\mathbb{Z}, (x = y+2k\pi)\vee(x=\pi-y+2k\pi)\right)\end{cases}}$$

Exemple 1

Résoudre l'équation : $\cos x+\sin x=0$.

Réponse

$$(\cos x+\sin x=0)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=0\right)\Leftrightarrow\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\right).$$

L'ensemble des solutions est : $\left\{\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Remarque : Dans ce cas, on peut aussi écrire :

$$(\cos x+\sin x=0)\Leftrightarrow(\cos x=-\sin x)\Leftrightarrow\left(\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},\underbrace{\left(x=x+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}_{\text{jamais vraie}}\vee\left(x=-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$$

⚠ Il ne faut pas oublier de diviser $2k\pi$ par 2 à la dernière étape (c'est pour éviter ce type d'erreur que la notation avec une congruence est à éviter...).

- Sinon, en utilisant les formules de trigonométrie (rappelées dans le formulaire 3) pour factoriser l'expression, et se ramener à des équations plus simples :

Exemple 2

Résoudre l'équation : $\cos(2x)+\cos(4x)=2\cos(x)$.

Réponse

$$(\cos(2x)+\cos(4x)=2\cos(x))\Leftrightarrow\left(2\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\cos(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow(2\cos(3x)\cos(x)=2\cos(x))\Leftrightarrow(\cos(x)(\cos(3x)-1)=0)$$

$$\Leftrightarrow((\cos(x)=0)\vee(\cos(3x)=1))\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},\left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\vee(3x=2k\pi)\right).$$

Finalement l'ensemble des solutions est : $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{2k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Résoudre les équations suivantes :

On s'échauffe

1. $\cos(x)+\sin(x)=-1$
2. $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=-1$
3. $\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x)=1$
4. $\cos(3x)-\sin(3x)=\sqrt{2}$
5. $4\cos x+3\sin x=6$
6. $\sin(3x)+\sin(5x)=2\sin(4x)$
7. $\cos(3x)-\cos(5x)=\sin(6x)+\sin(2x)$

On accélère

8. $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)+\sqrt{2}\cos(2x)-\sqrt{2}\sin(2x)=0$
9. $2\cos(2x)=\sqrt{6}\left(\cos(x)-\sin(x)\right)$
10. $\cos(x)-\sin(2x)=\cos(5x)+\sin(4x)$
11. $\dfrac{1+\cos(x)}{1-\cos(2x)}=1$ (Attention au domaine de définition !)
12. $1+\cos(2x)+\cos(4x)=0$

On finit au top

13. $\dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)}=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ (Attention au domaine de définition !)
14. $\sin(2x)+\sin(4x)+\sin(6x)=0$
15. $\cos(5x)+2\cos(3x)+3\cos(x)=0$

On notera S l'ensemble des solutions des équations que l'on veut résoudre.

1. $$\left(\cos(x)+\sin(x)=-1\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},\left(x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\vee\left(x-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},(x=\pi+2k\pi)\vee\left(x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)$$
$$S=\{\pi+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\}\bigcup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

2. $$\left(\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=-1\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)=-\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},\left(x+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\vee\left(x+\frac{\pi}{6}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},\left(x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\vee\left(x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)\right)$$
$$S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

3. $$\left(\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x)=1\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x)=\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},\left(2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\vee\left(2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},\left(x=\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\vee(x=k\pi)\right)$$
$$S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}.$$

4. $\left(\cos(3x)-\sin(3x)=\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(3x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(3x)=1\right)$

$\Leftrightarrow\left(\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(0)\right)\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},3x+\frac{\pi}{4}=2k\pi\right)$

$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right).$

$S=\left\{-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}$.

5. $(4\cos x+3\sin x=6)\Leftrightarrow\left(\frac{4}{5}\cos x+\frac{3}{5}\sin x=\frac{6}{5}\right)\Leftrightarrow\left(\cos(x-\theta)=\frac{6}{5}\right)$

où $\theta\in\mathbb{R}$ est tel que $\cos\theta=\frac{4}{5}$ et $\sin\theta=\frac{3}{5}$, par exemple $\theta=\operatorname{Arccos}\frac{4}{5}$.

Comme $\frac{6}{5}>1$, l'équation n'a pas de solution : $S=\varnothing$.

6. $(\sin(3x)+\sin(5x)=2\sin(4x))\Leftrightarrow\left(2\sin\left(\frac{3x+5x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-5x}{2}\right)=2\sin(4x)\right)$

$\Leftrightarrow(\sin(4x)\cos(x)=\sin(4x))\Leftrightarrow(\sin(4x)(\cos(x)-1)=0)$

$\Leftrightarrow((\sin(4x)=0)\vee(\cos(x)=1))\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z},(4x=k\pi)\vee(x=2k\pi)).$

$S=\left\{\frac{k\pi}{4};k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Remarque : Le cas $(x=2k\pi)$ est bien dans l'ensemble des solutions annoncé car $2k\pi=\frac{8k\pi}{4}$!

7. $(\cos(3x)-\cos(5x)=\sin(6x)+\sin(2x))$

$\Leftrightarrow\left(-2\sin\left(\frac{3x+5x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-5x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{6x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{6x-2x}{2}\right)\right)$

$\Leftrightarrow(-2\sin(4x)\sin(-x)=2\sin(4x)\cos(2x))\Leftrightarrow(\sin(4x)(\sin(x)-\cos(2x))=0)$

$\Leftrightarrow\left(\sin(4x)\left(\sin(x)-\left(1-2\sin^2(x)\right)\right)=0\right)\Leftrightarrow\left(\sin(4x)\left(2\sin^2(x)+\sin(x)-1\right)=0\right)$

$\Leftrightarrow\left((\sin(4x)=0)\vee(\sin(x)=-1)\vee\left(\sin(x)=\frac{1}{2}\right)\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},(4x=k\pi)\vee\left(x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\vee\left(x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\vee\left(x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right).$$

$$S=\left\{\frac{k\pi}{4};k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{3\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

8. $\left(\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)+\sqrt{2}\cos(2x)-\sqrt{2}\sin(2x)=0\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\cos\left(\frac{1}{2}\left(3x-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},\left(\frac{1}{2}\left(3x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\vee\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right).$$

$$S=\left\{\frac{13\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

9. $\left(2\cos(2x)=\sqrt{6}\left(\cos(x)-\sin(x)\right)\right)$

$$\Leftrightarrow\left(2\cos^2(x)-2\sin^2(x)=\sqrt{6}\left(\cos(x)-\sin(x)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\cos(x)-\sin(x)\right)\left(2\left(\cos(x)+\sin(x)\right)-\sqrt{6}\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)=0\right)\vee\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\right)\vee\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},\left(x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\vee\left(x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\vee\left(x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right).$$

$$S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

10. $\left(\cos(x)-\sin(2x)=\cos(5x)+\sin(4x)\right)\Leftrightarrow\left(\cos(x)-\cos(5x)=\sin(4x)+\sin(2x)\right)$

$$\Leftrightarrow\left(-2\sin\left(\frac{x+5x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-5x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin(3x)\sin(2x)=\sin(3x)\cos(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin(3x)\left(2\sin(x)\cos(x)-\cos(x)\right)=0\right)\Leftrightarrow\left(\sin(3x)\cos(x)\left(2\sin(x)-1\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\sin(3x)=0\right)\vee\left(\cos(x)=0\right)\vee\left(\sin(x)=\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},(3x=k\pi)\vee\left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\vee\left(x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\vee\left(x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)\right).$$

$$S=\left\{\frac{k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

11. Le domaine de définition est $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi\}$.

$$\left(\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(2x)}=1\right)\Leftrightarrow\left(x\in\mathrm{D},\ 1+\cos(x)=1-\cos(2x)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x\in\mathrm{D},\ \cos(x)=1-2\cos^2(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x\in\mathrm{D},\ 2\cos^2(x)+\cos(x)-1=0\right)\Leftrightarrow\left(x\in\mathrm{D},\ \left(\cos(x)=\frac{1}{2}\right)\vee\left(\cos(x)=-1\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x\in\mathrm{D},\exists k\in\mathbb{Z},\ \left(x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\vee\left(x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\vee\left(x=\pi+2k\pi\right)\right)\ ;$$

$(x=\pi+2k\pi)$ est incompatible avec $(x\in\mathrm{D})$.

$$S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

12. $\left(1+\cos(2x)+\cos(4x)=0\right)\Leftrightarrow\left(1+\cos(2x)+2\cos^2(2x)-1=0\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\cos(2x)\left(1+2\cos(2x)\right)=0\right)\Leftrightarrow\left(\left(\cos(2x)=0\right)\vee\left(\cos(2x)\right)=-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z},\left(2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\vee\left(2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\vee\left(2x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right).$$

$$S=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{-\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

13. Le domaine de définition est $D=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\pi\right\}$.

$$\left(\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)\Leftrightarrow\left(x\in D,\sin(2x)\sin(x)=\cos(2x)\cos(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x\in D,\ \cos(2x)\cos(x)-\sin(2x)\sin(x)=0\right)\Leftrightarrow\left(x\in D,\ \cos(3x)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x\in D,\exists k\in\mathbb{Z},3x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\Leftrightarrow\left(x\in D,\exists k\in\mathbb{Z},x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right).$$

- Si $k=3n$: $x=\frac{\pi}{6}+n\pi\in D$; en effet :
  - — S'il existe des entiers n et k tels que $\frac{\pi}{6}+n\pi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, alors $12n-6k=1$ et 6 divise 1, ce qui est impossible.
  - — S'il existe des entiers n et k tels que $\frac{\pi}{6}+n\pi=k\pi$, alors $6k-6n=1$, et 6 divise 1, ce qui est impossible.
- Si $k=3n+1$: $x=\frac{\pi}{2}+n\pi\in D$; en effet :
  - — S'il existe des entiers n et k tels que $\frac{\pi}{2}+n\pi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, alors $2k-4n=1$ et 2 divise 1, ce qui est impossible.
  - — S'il existe des entiers n et k tels que $\frac{\pi}{2}+n\pi=k\pi$, alors $2k-2n=1$, et 2 divise 1, ce qui est impossible.
- Si $k=3n+2$: $x=\frac{5\pi}{6}+n\pi\in D$; en effet :
  - — S'il existe des entiers n et k tels que $\frac{5\pi}{6}+n\pi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, alors $6k-12n=7$ et 6 divise 7, ce qui est impossible.
  - — S'il existe des entiers n et k tels que $\frac{5\pi}{6}+n\pi=k\pi$, alors $6k-6n=5$, et 6 divise 5, ce qui est impossible.

Finalement, $S=\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}$.

14. $\left(\sin(2x)+\sin(4x)+\sin(6x)=0\right)$

$$\Leftrightarrow\left(2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)+\sin(2\times 3x)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(2\sin(3x)\cos(x)+2\sin(3x)\cos(3x)=0\right)\Leftrightarrow\left(\sin(3x)\left(\cos(x)+\cos(3x)\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin(3x)2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\sin(3x)=0\right)\vee\left(\cos(2x)=0\right)\vee\left(\cos(x)=0\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists k\in\mathbb{Z},(3x=k\pi)\vee\left(2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\vee\left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right).$$

$$S=\left\{\frac{k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

15. $\left(\cos(5x)\ +\ 2\cos(3x)\ +\ 3\cos(x)\ =\ 0\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\cos(5x)+\cos(x)+2\left(\cos(3x)+\cos(x)\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\left(\frac{5x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-x}{2}\right)+4\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos(3x)\cos(2x)+2\cos(2x)\cos(x)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos(2x)\left(\cos(3x)+2\cos(x)\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos(2x)\left(\cos(2x)\cos(x)-\sin(2x)\sin(x)+2\cos(x)\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos(2x)\cos(x)\left(\cos(2x)-2\sin^2(x)+2\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos(2x)\cos(x)\left(3-4\sin^2(x)\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\cos(2x)=0\right)\vee\left(\cos(x)=0\right)\vee\left(\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vee\left(\sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists k\in\mathbb{Z},\left(2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\vee\left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\vee\left(x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\vee\left(x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right.$$

$$\left.\vee\left(x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)\vee\left(x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)\right).$$

$$S=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{-\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Fonctions circulaires réciproques

La notion de bijectivité permet d'introduire de nouvelles fonctions comme réciproques des fonctions circulaires sur certains intervalles. Un nouveau champ des possibles s'ouvre sur l'étude des applications. Encore faut-il maîtriser les notions de base concernant ces nouvelles fonctions ! C'est l'objectif de cette fiche.

Je vous montre comment

Déterminer l'image d'un réel par une fonction circulaire réciproque

⚠ Arcsin, Arccos et Artan sont des applications. Pour chacune d'elles, un réel de leur domaine de définition a une et une seule image. Elles ne sont certainement pas définies « à 2π -près » !!!

- Pour déterminer l'image de $x \in [-1,1]$ par la fonction $\mathrm{Arc}\cos$ on doit se poser la question suivante : « quel angle de $[0,\pi]$ a pour cosinus x ? »

Exemple 1

Déterminer $\mathrm{Arc}\cos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

Réponse

⚠ Si $x \notin [0,\pi], \mathrm{Arc}\cos(\cos x) \neq x$!!!

$-\frac{\pi}{5} \notin [0,\pi]$, donc ce n'est pas la réponse !

$\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\frac{\pi}{5} \in [0,\pi]$, donc $\mathrm{Arc}\cos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$.

- Pour déterminer l'image de $x \in [-1,1]$ par la fonction Arcsin on doit se poser la question suivante : « quel angle de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ a pour sinus x ? »

Exemple 2

Déterminer $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$.

Réponse

⚠ Si $x \notin \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{Arcsin}(\sin x) \neq x$!!!

$\frac{7\pi}{12} \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, donc ce n'est pas la réponse !

$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\frac{5\pi}{12} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) = \frac{5\pi}{12}$.

- Pour déterminer l'image de $x \in \mathbb{R}$ par la fonction Arctan on doit se poser la question suivante : « quel angle de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ a pour tangente x ? »

Exemple 3

Déterminer $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right)$.

Réponse

⚠ Si $x \notin \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{Arctan}(\tan x) \neq x$!!!

$\frac{9\pi}{8} \notin \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc ce n'est pas la réponse !

$\tan\left(\frac{9\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{9\pi}{8} - \pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\frac{\pi}{8} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right) = \frac{\pi}{8}$.

■ Représenter un graphe de fonction définie à l'aide de fonctions circulaires réciproques

On commence par étudier le domaine de définition, puis on cherche à réduire le domaine d'étude en utilisant les propriétés des fonctions circulaires et circulaires réciproques.

Exemple 4

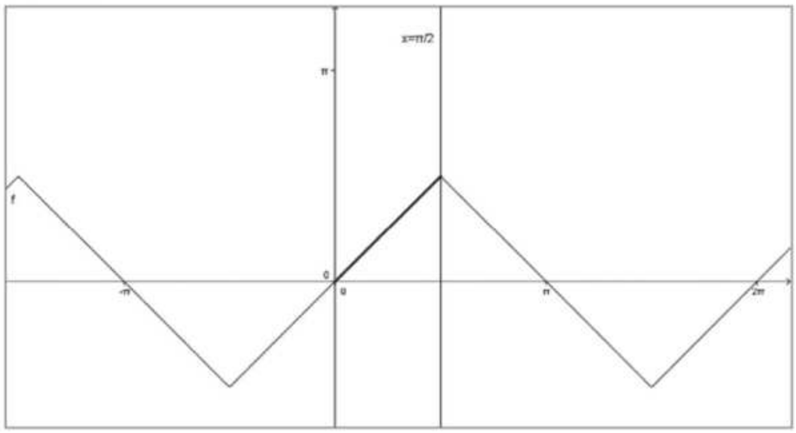
Représenter la courbe de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Réponse

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \in [-1,1]$, donc la fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$.

- La fonction sin étant 2π périodique, on peut étudier la fonction *f* sur $[-\pi,\pi]$, puis obtenir le reste de la courbe par des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$.
- Les fonctions sin et Arcsin étant impaires, la fonction *f* est impaire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arcsin}(\sin(-x)) = \operatorname{Arcsin}(-\sin x) = -\operatorname{Arcsin}(\sin x)$.
- On peut étudier *f* sur $[0,\pi]$ puis obtenir la courbe sur $[-\pi,\pi]$ par symétrie par rapport à *O*.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arcsin}(\sin(\pi - x)) = \operatorname{Arcsin}(\sin x)$. On peut donc étudier *f* sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ puis obtenir la courbe sur $[0,\pi]$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

Pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{Arcsin}(\sin(x)) = x$, on peut donc tracer le graphe de *f* :



Simplifier des expressions avec des fonctions circulaires réciproques

▸ À l'aide des formules de trigonométrie (méthode « algébrique ») :

Exemple 5

Simplifier : $\cos(2\operatorname{Arccos} x)$.

Réponse

Remarquons tout d'abord que l'expression n'est définie que pour $x \in [-1,1]$.

$\forall x \in [-1,1], \cos(2\operatorname{Arccos} x) = 2\cos^2(\operatorname{Arccos} x) - 1 = 2x^2 - 1$.

▸ À l'aide d'une étude de fonction (méthode « analytique ») :

Exemple 5 bis

Simplifier : $\cos(2\operatorname{Arccos} x)$.

Réponse

On considère la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=\cos(2\operatorname{Arccos} x)$.

Par composition, f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x\in]-1,1[$:
$f'(x)=-\sin(2\operatorname{Arccos} x)\times\dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$;

Comme pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$, on a, pour tout $x\in]-1,1[$:

$$f'(x)=\frac{4\sin(\operatorname{Arccos} x)\cos(\operatorname{Arccos} x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{4\sqrt{1-x^2}\times x}{\sqrt{1-x^2}}=4x.$$

Remarque : On a utilisé le résultat suivant : $\boxed{\forall x\in[-1,1],\sin(\operatorname{Arccos} x)=\sqrt{1-x^2}}$.

On en déduit, par continuité de f sur $[-1,1]$ que pour tout $x\in[-1,1]$:

$$f(x)=2x^2+f(0)=2x^2+\cos(2\operatorname{Arccos}0)=2x^2+\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)=2x^2-1.$$

Remarque : Sur cet exemple, la méthode algébrique est plus « performante », car elle fait appel à une relation de trigonométrie très simple. Ce n'est pas toujours le cas, comme nous le verrons dans les exercices.

■ Résoudre des équations avec des fonctions circulaires réciproques

Après avoir donné le domaine de définition, on raisonne par analyse-synthèse, en appliquant une fonction trigonométrique pour simplifier l'équation.

⚠ On ne peut pas raisonner par équivalences car les fonctions trigonométriques ne sont pas bijectives sur $\mathbb{R}$. Il faut impérativement faire la synthèse après avoir fait l'analyse !

Exemple 6

Résoudre l'équation : $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(2x)=\dfrac{\pi}{4}$.

Réponse

Remarquons tout d'abord que cette expression est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$.

ANALYSE : on applique la fonction tangente, et on utilise (sous couvert d'existence) l'égalité :

$\boxed{\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}}$; on obtient :

$$\left(\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(2x)=\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\left(\frac{x+2x}{1-x\times(2x)}=1\right).$$

On a :

$$\left(\frac{x+2x}{1-x\times(2x)}=1\right)\Leftrightarrow\left(2x^2+3x-1=0\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4},\frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right\}\right).$$

SYNTHÈSE : La fonction $x\mapsto\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(2x)$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(2x)\right)=-\pi$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(2x)\right)=\pi$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation n'admet donc qu'une seule solution.

De plus, $\forall x<0, \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(2x)<0$, la solution de l'équation est donc un réel positif.

Finalement, la solution de l'équation est $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

On s'échauffe

1. Déterminer les valeurs suivantes :

a. $\operatorname{Arccos}(0)$, $\operatorname{Arcsin}(0)$, $\operatorname{Arccos}(1)$, $\operatorname{Arcsin}(1)$, $\operatorname{Arccos}(-1)$, $\operatorname{Arcsin}(-1)$,

$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{Arccos}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\operatorname{Arccos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\operatorname{Arccos}\left(\frac{-1}{2}\right)$,

$\operatorname{Arctan}(0)$, $\operatorname{Arctan}(1)$, $\operatorname{Arctan}(-1)$, $\operatorname{Arctan}(\sqrt{3})$, $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

b. $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$, $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$,

$\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right)$, $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{8}\right)\right)$,

$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$, $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$, $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right)$,

$\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{-3\pi}{5}\right)\right)$, $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$, $\operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)$,

$\operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$, $\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$, $\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)$.

2. Donner les domaines de définition des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)$

b. $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

c. $x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+3x+4}\right)$

3. Simplifier les expressions suivantes :

a. $\sin(2\operatorname{Arcsin} x)$

b. $\cos^2\left(\frac{1}{2}\text{Arc}\sin x\right)$

c. $\sin^2(\text{Arc}\tan x)$

d. $\cos(2\,\text{Arc}\tan x)$

4. Représenter la courbe des fonctions suivantes, dans un repère orthonormé :

a. $x \mapsto \text{Arc}\cos(\cos(x))$

b. $x \mapsto \text{Arc}\sin(\cos(x))$

5. Résoudre les équations suivantes :

a. $\text{Arc}\cos(x) = \text{Arc}\sin(2x)$

b. $\text{Arc}\sin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \text{Arc}\tan(x)$

c. $\text{Arc}\sin(x) = \text{Arc}\tan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

On accélère

6. Simplifier les expressions suivantes :

a. $\cos(\text{Arc}\tan(x))$

b. $\text{Arc}\tan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

7. Montrer que : $\forall x \in \left]0;1\right],\ 2\text{Arc}\tan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) + \text{Arc}\sin(2x-1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Remarque : Trois méthodes différentes sont proposées en correction… Essayez d'en trouver au moins deux !

8. Soit $f : x \mapsto \text{Arc}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

a. Déterminer le domaine de définition de *f*, et son domaine de dérivabilité.

b. Exprimer simplement $f\left(\tan(u)\right)$ pour $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et en déduire une expression simplifiée de *f*.

c. Retrouver ce résultat par une méthode analytique.

On finit au top

9. Mêmes questions qu'à l'exercice précédent pour la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}\right)$.

10. a. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement sur $[-\pi, \pi]$ la fonction *h* définie par $h(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sin(x)\right)$.

b. On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

Donner le domaine de définition de *f*, ainsi que son domaine de dérivabilité.

c. Exprimer simplement $f\left(\tan(u)\right)$ pour $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et en déduire une expression simplifiée de *f*.

d. Retrouver ce résultat par une méthode analytique.

1. **Remarque :** Pour cet exercice, il faut IMPÉRATIVEMENT s'appuyer sur un cercle trigonométrique.

a. $\mathrm{Arccos}(0)=\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arcsin}(0)=0$, $\mathrm{Arccos}(1)=0$, $\mathrm{Arcsin}(1)=\frac{\pi}{2}$,

$\mathrm{Arccos}(-1)=\pi$, $\mathrm{Arcsin}(-1)=-\frac{\pi}{2}$,

$\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$, $\mathrm{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$,

$\mathrm{Arcsin}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$, $\mathrm{Arccos}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$,

$\mathrm{Arccos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$, $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$,

$\mathrm{Arcsin}\left(\frac{-1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{Arccos}\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, $\mathrm{Arctan}(0)=0$,

$\mathrm{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{Arctan}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right)=\mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right)=\frac{\pi}{3}$,

$\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\mathrm{Arctan}\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right)=\frac{\pi}{6}$.

b. $\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)=\frac{\pi}{7}$, $\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)=\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\frac{\pi}{12}$,

$\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right)=\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(2\pi-\frac{6\pi}{5}\right)\right)=\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)=\frac{4\pi}{5}$,

$\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{8}\right)\right)=\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{8}-2\pi\right)\right)=\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=\frac{\pi}{8}$,

$\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)=-\frac{\pi}{12}$,

$\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)=\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)\right)=\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)=\frac{\pi}{5}$,

$$\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right)=\mathrm{Arcsin}\left(-\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)=-\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

$$=-\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\pi-\frac{11\pi}{12}\right)\right)=-\frac{\pi}{12},$$

$$\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{-3\pi}{5}\right)\right)=\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)\right)=\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)=\frac{2\pi}{5},$$

$$\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)=\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{4\pi}{5}-\pi\right)\right)=\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)=-\frac{\pi}{5},$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)=\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}\right)\right)=\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right)=-\frac{\pi}{10},$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)=\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)=\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)=\frac{5\pi}{12},$$

$$\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)=\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right)=\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)=\frac{7\pi}{12},$$

$$\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)=\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)=\frac{\pi}{10}.$$

2. Le domaine de définition des fonctions Arcsin et Arccos est $[-1,1]$.

a. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$ (car le discriminant est strictement négatif).

On a : $\left(\sqrt{x^2+x+1}\le 1\right)\Leftrightarrow\left(x^2+x+1\le 1\right)\Leftrightarrow\left(x(x+1)\le 0\right)\Leftrightarrow\left(x\in[-1,0]\right)$.

La fonction est donc définie sur $[-1,0]$.

b. On a :

$$\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\le 1\right)\Leftrightarrow\left((x\ne 1)\wedge(|1+x|\le|1-x|)\right)\Leftrightarrow\left((1+x)^2\le(1-x)^2\right)\Leftrightarrow(x\le 0).$$

La fonction est donc définie sur $]-\infty,0]$.

c. On a : $\left(-x^2+3x+4\ge 0\right)\Leftrightarrow\left(x\in[-1,4]\right)$. On a donc :

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+3x+4}\le 1\right)\Leftrightarrow\left(\left(x\in[-1,4]\right)\wedge\left(\frac{1}{4}\left(-x^2+3x+4\right)\le 1\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(x\in[-1,4]\right)\wedge\left(x\in\,]-\infty,0]\cup[3,+\infty[\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x\in[-1,0]\cup[3,4]\right).$$

La fonction est donc définie sur $[-1,0]\cup[3,4]$.

3. a. Pour tout $x\in[-1,1]$, on a :

$$\sin(2\operatorname{Arcsin}x)=2\sin(\operatorname{Arcsin}(x))\cos(\operatorname{Arcsin}(x))=2x\sqrt{1-x^2}.$$

(On a utilisé : pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$.)

b. Pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\text{Arc}\sin x\right) = \frac{1+\cos(\text{Arc}\sin x)}{2} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

(On a utilisé : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(t) = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$.)

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin^2(\text{Arc}\tan x) = 1-\cos^2(\text{Arc}\tan x) = 1-\frac{1}{1+\tan^2(\text{Arc}\tan x)}$$

$$= 1-\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

(On a utilisé : pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$, $\cos^2(t) = \dfrac{1}{1+\tan^2(t)}$.)

d. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(2\,\text{Arc}\tan x) = 2\cos^2(\text{Arc}\tan x) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(\text{Arc}\tan x)} - 1$$

$$= \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

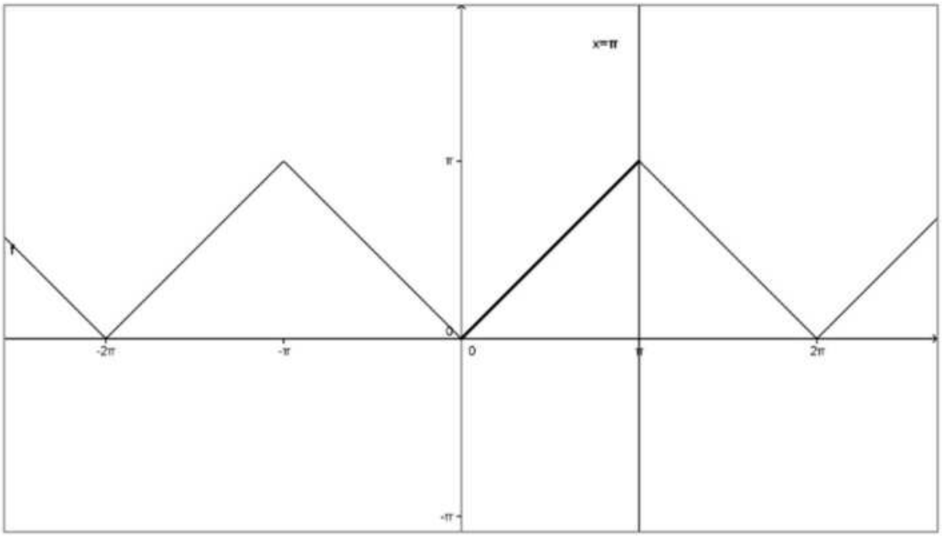
4. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \in [-1,1]$ donc la fonction $f : x \mapsto \text{Arc}\cos(\cos(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$.

On va représenter sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, après avoir réduit le domaine d'étude :

La fonction cos étant 2π périodique, on peut étudier la fonction f sur $[-\pi,\pi]$, puis obtenir le reste de la courbe par des translations de vecteurs $2k\pi\,\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$.

La fonction cos étant paire, la fonction f est paire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arc}\cos(\cos(-x)) = \text{Arc}\cos(\cos x)$; on peut étudier f sur $[0,\pi]$ puis obtenir la courbe sur $[-\pi,\pi]$ par symétrie par rapport à (Oy).

Pour tout $x \in [0,\pi]$, $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$, on peut donc tracer le graphe de f :



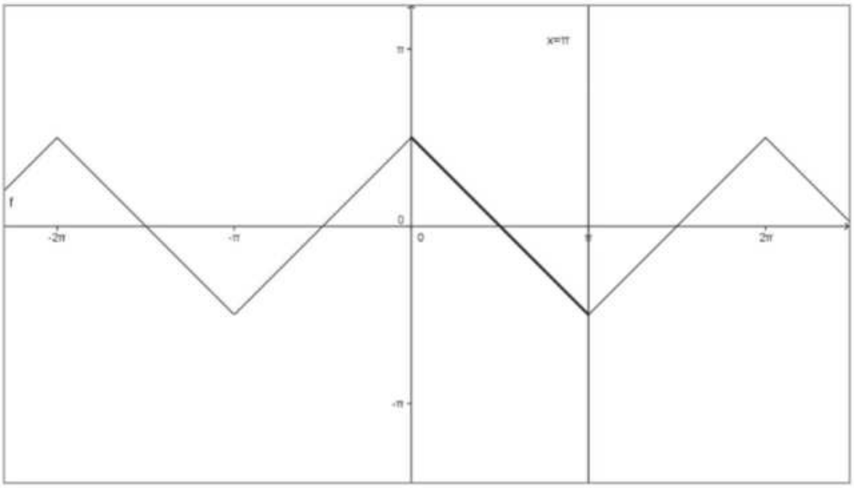
b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \in [-1,1]$ donc la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\cos(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$.

On va représenter sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, après avoir réduit le domaine d'étude :

La fonction cos étant 2π périodique, on peut étudier la fonction f sur $[-\pi,\pi]$, puis obtenir le reste de la courbe par des translations de vecteurs $2k\pi\,\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$.

La fonction cos étant paire, la fonction f est paire : pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{Arcsin}(\cos(-x)) = \operatorname{Arcsin}(\cos x)$; on peut étudier f sur $[0,\pi]$ puis obtenir la courbe sur $[-\pi,\pi]$ par symétrie par rapport à (O*y*).

Pour tout $x \in [0,\pi]$, $\operatorname{Arcsin}(\cos(x)) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$, car $(x \in [0,\pi]) \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$; on peut donc tracer le graphe de f :



5. **a.** Le domaine de définition de l'équation est $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Remarque : Considérons la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arccos}(x)$ qui est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, car $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(2x)$ et $x \mapsto -\operatorname{Arccos}(x)$ le sont.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{7\pi}{6} < 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} > 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation $f(x) - 0$.

ANALYSE : Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, si x est solution de l'équation $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}(2x)$, alors :

$$\left(\sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sin(\operatorname{Arcsin}(2x))\right) \Leftrightarrow \left(\left(x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) \wedge \left(\sqrt{1-x^2} = 2x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]\right) \wedge \left(1-x^2 = 4x^2\right)\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

SYNTHÈSE (inutile si on considère la remarque !) : Pour $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, on a :

$$\sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sin(\operatorname{Arcsin}(2x)) \text{ et } (\operatorname{Arccos}(x), \operatorname{Arcsin}(2x)) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]^2,$$

d'où $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}(2x)$.

Finalement l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$.

b. ⚠ Il n'existe pas de relation simple qui relie Arctan avec Arccos et Arcsin. En particulier, $\dfrac{\operatorname{Arcsin}(x)}{\operatorname{Arccos}(x)} \neq \operatorname{Arctan}(x)$, elles n'ont même pas le même domaine de définition !!!

On a :

$$\left(\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1\right) \Leftrightarrow \left(2|x| \leq 1+x^2\right) \Leftrightarrow \left(x^2-2|x|+1 \geq 0\right) \Leftrightarrow \underbrace{\left(\left(1-|x|\right)^2 \geq 0\right)}_{\text{assertion toujours vraie}}.$$

Le domaine de définition de l'équation est donc $\mathbb{R}$.

ANALYSE : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si x est solution de l'équation $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \operatorname{Arctan}(x)$, alors :

$$\left(\sin^2\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right) = \sin^2\left(\operatorname{Arctan}(x)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 = 1-\cos^2\left(\operatorname{Arctan}(x)\right)\right) \Leftrightarrow \left(\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 1-\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2 = \left(1+x^2\right)\left(\left(1+x^2\right)-1\right)\right) \Leftrightarrow \left(4x^2 = x^2\left(1+x^2\right)\right) \Leftrightarrow \left(x^2\left(x^2-3\right)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x \in \left\{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}\right).$$

SYNTHÈSE : On a bien $\operatorname{Arcsin}(0) = \operatorname{Arctan}(0)$,

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) \text{ et } \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} = \operatorname{Arctan}\left(-\sqrt{3}\right)$$

(ce qui était prévisible car sin et Arcsin sont impaires !).

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left\{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$.

c. Le domaine de définition de l'équation est $]-1,1[$.

ANALYSE : Pour tout $x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arcsin} x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc si x est solution de l'équation $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$, alors :

$$\left(\tan(\operatorname{Arcsin}(x))=\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left((x\in]-1,1[)\wedge\left(\frac{\sin(\operatorname{Arcsin}(x))}{\cos(\operatorname{Arcsin}(x))}=\frac{2x}{1-x^2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left((x\in]-1,1[)\wedge\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x}{1-x^2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left((x\in]-1,1[)\wedge\left(x\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}-2\right)=0\right)\right)\Leftrightarrow(x=0).$$

Remarque : Avant d'appliquer la fonction tangente, il faut toujours s'assurer que le réel auquel on l'applique n'est pas congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π !

SYNTHÈSE : On a bien $\operatorname{Arcsin}(0)=\operatorname{Arctan}(0)$.

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{0\}$.

6. **a.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}(x)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(\operatorname{Arctan}(x))>0$; on en déduit :

$$\cos(\operatorname{Arctan}(x))=\sqrt{\cos^2(\operatorname{Arctan}(x))}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\operatorname{Arctan}(x))}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\underbrace{=}_{x=\tan t}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan t}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan t}\right)=\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\right).$$

On a :

$$(x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[)\Leftrightarrow\left(t\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(t+\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[\right).$$

Lorsque $t+\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)=t+\frac{\pi}{4}$.

Lorsque $t+\frac{\pi}{4}\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[$, $\mathrm{Arctan}\left(\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\pi=t-\frac{3\pi}{4}$.

Finalement : $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\begin{cases}\mathrm{Arctan}\,x+\frac{\pi}{4}, & \text{si } x\in\left]-\infty,1\right[\\ \mathrm{Arctan}\,x-\frac{3\pi}{4}, & \text{si } x\in\left]1,+\infty\right[\end{cases}$.

7. On constate tout d'abord que le domaine de définition est bien $\left]0;1\right]$, car il faut :

$(x\neq 0)\wedge\left(\frac{1-x}{x}\geq 0\right)\wedge(-1\leq 2x-1\leq 1)$ ce qui équivaut à $x\in\left]0;1\right]$.

Méthode 1 (analytique) :

On considère la fonction définie sur $\left]0;1\right]$ par :

$f(x)=2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)+\mathrm{Arcsin}(2x-1)$.

La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction racine carrée est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$, et la fonction Arcsin est dérivable sur $\left]-1;1\right[$, *f* est donc dérivable sur $\left]0;1\right[$, et pour tout $x\in\left]0;1\right[$:

$$f'(x)=2\times\frac{\dfrac{-1}{2x^2\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}}}{1+\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)^2}+\frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$$

$$=\frac{-1}{x^2\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\times\dfrac{1}{x}}+\frac{2}{2\sqrt{-x^2+x}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}=0.$$

On en déduit que la fonction *f* est constante sur]0 ; 1[et, par continuité, sur]0 ; 1].

Ainsi, pour tout $x\in\left]0;1\right]$, $f(x)=f(1)=\frac{\pi}{2}$.

Méthode 2 (algébrique) :

Pour tout $x \in]0;1]$, on a :

$$\cos\left(2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right) = 2\cos^2\left(\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right) - 1 = \frac{2}{1+\frac{1-x}{x}} - 1 = 2x-1 \text{ et}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(2x-1)\right) = \sin(\mathrm{Arcsin}(2x-1)) = 2x-1.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0;1]$: $\cos\left(2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(2x-1)\right)$.

De plus, pour tout $x \in]0;1]$, $2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) \in [0;\pi[$ et $\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(2x-1) \in [0;\pi]$, on en déduit que pour tout $x \in]0;1]$, $2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(2x-1)$.

Méthode 3 (avec changement de variable) :

Pour $x \in]0;1]$, on pose $x = \cos^2 t$ avec $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, et on note encore pour tout $x \in]0;1]$, $f(x) = 2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \mathrm{Arcsin}(2x-1)$.

$$\begin{aligned} f(\cos^2 t) &= 2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}\right) + \mathrm{Arcsin}\left(2\cos^2 t - 1\right) \\ &= 2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\right) + \mathrm{Arcsin}(\cos 2t) \\ &= 2\mathrm{Arctan}(|\tan t|) + \mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)\right). \end{aligned}$$

$t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $|\tan t| = \tan t$ et $2\mathrm{Arctan}(\tan t) = 2t$;

de plus, $\frac{\pi}{2} - 2t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 2t$.

Finalement, pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $f(\cos^2 t) = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x \in]0;1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

8. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$, et l'égalité $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1$ étant vérifiée si, et seulement si $x = 0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

b. On remarque que l'on peut effectuer le changement suggéré car la fonction tan est bijective de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $u \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos u > 0$, donc $\sqrt{1+\tan^2(u)} = \dfrac{1}{\cos(u)}$; on en déduit :

$$f(\tan(u)) = \operatorname{Arccos}(\cos(u)) = \begin{cases} u & \text{si } u \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ -u & \text{si } u \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right] \end{cases},$$

puis : $f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctan} x & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ -\operatorname{Arctan} x & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{-x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{1+x^2}}} = \frac{x}{\left(1+x^2\right)|x|} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ \dfrac{-1}{1+x^2} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}.$$

On en déduit qu'il existe deux constantes $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \operatorname{Arctan} x + C_1$ et pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = -\operatorname{Arctan} x + C_2$.

La continuité de f en 0 permet de trouver $f(0) = C_1 = C_2 = 0$.

9. a. $\left(\left|\dfrac{1+x}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}\right| \leq 1\right) \Leftrightarrow \left((1+x)^2 \leq 2\left(1+x^2\right)\right) \Leftrightarrow \left(0 \leq (x-1)^2\right)$.

On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$; l'égalité étant vérifiée si, et seulement si $x = 1$, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b. Pour tout $u\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $f(\tan(u))=\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1+\tan(u)}{\sqrt{2}\sqrt{1+\tan^2(u)}}\right)$.

$u\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\sqrt{1+\tan^2(u)}=\dfrac{1}{\cos(u)}$

et $f(\tan(u))=\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos(u)+\sin(u))\right)=\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(u+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

$\left(u\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\Leftrightarrow\left(u+\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[\right)$

d'où : $f(\tan(u))=\begin{cases} u+\dfrac{\pi}{4} & \text{si } u\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right] \\ \pi-\left(u+\dfrac{\pi}{4}\right) & \text{si } u\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$.

On en déduit : $f(x)=\begin{cases} \operatorname{Arctan}(x)+\dfrac{\pi}{4} & \text{si } x\in\left]-\infty,1\right] \\ \dfrac{3\pi}{4}-\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x\in\left[1,+\infty\right[\end{cases}$.

c. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x(x+1)}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{2}\left(1+x^2\right)}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(1+x)^2}{2\left(1+x^2\right)}}}=\frac{1-x}{\left(1+x^2\right)|1-x|}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x\in\left]-\infty,1\right[\\ \dfrac{-1}{1+x^2} & \text{si } x\in\left]1,+\infty\right[\end{cases}.$$

On en déduit qu'il existe deux constantes $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$ telles que pour tout $x\in\left]-\infty,1\right[$, $f(x)=\operatorname{Arctan}x+C_1$ et pour tout $x\in\left]1,+\infty\right[$, $f(x)=-\operatorname{Arctan}x+C_2$;

La continuité de f en 1 permet de trouver : $f(1)=\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}+C_1=-\dfrac{\pi}{4}+C_2$

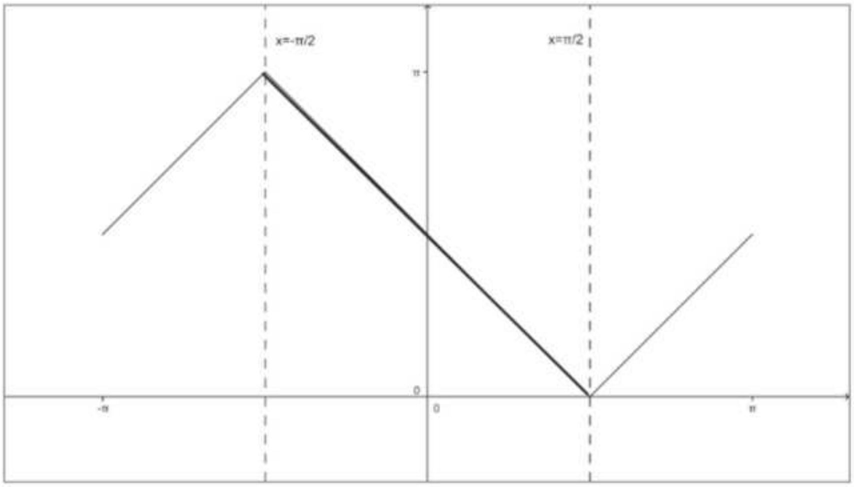
d'où : $C_1=\dfrac{\pi}{4}$ et $C_2=\dfrac{3\pi}{4}$.

10. a. $\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1,1],\ \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\sin(x))$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(\pi - x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\sin(\pi - x)) = h(x)$, la courbe représentative de h admet donc la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(-\pi - x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\sin(-\pi - x)) = h(x)$, la courbe représentative de h admet donc la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

De plus, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $h(x) = \frac{\pi}{2} - x$.



Remarque : On aurait aussi pu voir que pour $x \in [-\pi, \pi]$

$$\operatorname{Arcsin}(\sin(x)) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x, & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \\ -\pi - x, & \text{si } x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \end{cases},$$

$$\text{d'où : } h(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-x, & \text{si } x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & \text{si } x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]\\ x+\dfrac{3\pi}{2}, & \text{si } x\in\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}.$$

b. La fonction $x\mapsto\dfrac{2x}{1+x^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction Arccos est définie sur $[-1;1]$ dérivable sur $]-1;1[$.

$$\left(\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leq 1\right)\Leftrightarrow\left(0\leq x^2-2|x|+1\right)\Leftrightarrow\left(0\leq(|x|-1)^2\right)$$

On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.

L'égalité étant vérifiée si, et seulement si $|x|=1$, f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

c. Pour tout $u\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f(\tan(u))=\operatorname{Arccos}(\sin(2u))$, (en utilisant les formules de trigonométrie).

$$\text{Donc, d'après la question } \mathbf{a} : f(\tan(u))=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-2u, & \text{si } u\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]\\ 2u-\dfrac{\pi}{2}, & \text{si } u\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[\\ 2u+\dfrac{3\pi}{2}, & \text{si } u\in\left]-\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{4}\right]\end{cases}.$$

$$\text{On en déduit : } f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-2\operatorname{Arctan}(x), & \text{si } x\in[-1;1]\\ 2\operatorname{Arctan}(x)-\dfrac{\pi}{2}, & \text{si } x\in[1;+\infty[\\ 2\operatorname{Arctan}(x)+\dfrac{3\pi}{2}, & \text{si } x\in]-\infty;-1]\end{cases}.$$

d. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$,

$$f'(x) = \frac{-\left(2-2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2 \sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2\left(x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-2x^2+x^4}} = \frac{2\left(x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)\left|x^2-1\right|}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}, & \text{si } x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\\ \dfrac{-2}{1+x^2}, & \text{si } x \in \left]-1;1\right[\end{cases}.$$

On en déduit qu'il existe trois réels C_1, C_2 et C_3 tels que :

$$f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(x) + C_1, & \text{si } x \in \left]-\infty;-1\right[\\ 2\operatorname{Arctan}(x) + C_2, & \text{si } x \in \left]1;+\infty\right[\\ -2\operatorname{Arctan}(x) + C_3, & \text{si } x \in \left]-1;1\right[\end{cases}.$$

La continuité de f sur son domaine de définition (comme composée de fonctions continues), permet de déterminer les constantes à l'aide des valeurs de f en -1 et 1 :

$f(1) = 0$ donne $C_2 = -\dfrac{\pi}{2}$ et $C_3 = \dfrac{\pi}{2}$; $f(-1) = \pi$ donne $C_1 = \dfrac{3\pi}{2}$ (et confirme $C_3 = \dfrac{\pi}{2}$).

Développement – linéarisation

Cette fiche a pour objectif de se familiariser avec les techniques de développement et de linéarisation qui permettent de transformer des expressions trigonométriques (en vue d'une intégration par exemple).

Je vous montre comment

■ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$, développer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$, c'est-à-dire les exprimer comme sommes et produits de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

On applique la **formule de Moivre** :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \mathrm{e}^{in\theta} = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n},$$

suivie de la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}},$$

puis on identifie parties réelles et imaginaires.

Remarque : Il n'y a pas unicité du développement. Dans certains cas, on peut ne conserver que des puissances de $\cos\theta$ ou que des puissances de $\sin\theta$ en utilisant : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Exemple 1

Développer : $\cos(3\theta)$.

Réponse

$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$

$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta.$

D'où : $\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right),$

puis, par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\ \sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\ \sin\theta - \sin^3\theta = 3\left(1-\sin^2\theta\right)\sin\theta - \sin^3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta \end{cases}.$$

Remarque : On a le développement de $\sin(3\theta)$ en prime !

■ **Pour $(n,p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2, \theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^n\theta$, $\sin^n\theta$, $\cos^n\theta\sin^p\theta$ c'est-à-dire les exprimer comme somme (et pas produit !) de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$**

On applique les formules d'Euler : $\boxed{\forall\theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \end{cases}}$, puis la formule du binôme de Newton ; on regroupe ensuite les termes appropriés (de la forme $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$) pour appliquer à nouveau les formules d'Euler.

Exemple 2

Linéariser : $\cos^3\theta$.

Réponse

$$\cos^3\theta = \frac{1}{2^3}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\left(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2^3}\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2^3}\left(2\cos(3\theta) + 3 \times 2\cos(\theta)\right) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta).$$

On s'échauffe

1. Développer les expressions suivantes :

a. $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$

b. $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$

c. $\sin(4\theta)\sin(\theta)$ (donner le résultat en fonction des puissances de $\cos\theta$.)

d. $\cos(3\theta)\sin(2\theta)$ (donner le résultat en fonction des puissances de $\sin\theta$.)

2. Linéariser les expressions suivantes :

a. $\cos^4\theta$

b. $\sin^5\theta$

c. $\cos^2\theta\ \sin\theta$

d. $\cos^2\theta\ \sin^3\theta$

On accélère

3. Développer les expressions suivantes :

a. $\cos^3(3\theta)$ (donner le résultat en fonction des puissances de $\cos\theta$.)

b. $\sin(3\theta)\cos^2(2\theta)$ (donner le résultat en fonction des puissances de $\sin\theta$.)

c. $\sin(4\theta)\cos(2\theta)\sin(\theta)$ (donner le résultat en fonction des puissances de $\cos\theta$.)

4. Linéariser les expressions suivantes :

a. $\sin^4\theta\cos^2\theta$

b. $\cos^3(3\theta)\cos(\theta)$

c. $\sin^3(3\theta)\cos^2(2\theta)$

On finit au top

5. Linéariser : $\sin^3(2\theta)\left(\cos^2(2\theta)+\sin^3(3\theta)\right)$

1. a. $\cos(4\theta)+i\sin(4\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^4$

$$=\left(\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta\right)+i\left(4\cos^3\theta\,\sin\theta-4\cos\theta\sin^3\theta\right).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient :

$$\begin{cases}\cos(4\theta)=\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta\\ \qquad\quad=\cos^4\theta-6\cos^2\theta\left(1-\cos^2\theta\right)+\left(1-\cos^2\theta\right)^2\\ \sin(4\theta)=4\cos^3\theta\,\sin\theta-4\cos\theta\sin^3\theta\\ \qquad\quad=4\cos^3\theta\,\sin\theta-4\cos\theta\sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\end{cases}.$$

D'où : $\begin{cases}\cos(4\theta)=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1\\ \sin(4\theta)=8\cos^3\theta\,\sin\theta-4\cos\theta\sin\theta\end{cases}.$

b. $\cos(5\theta)+i\sin(5\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^5$

$$=\left(\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta\right)$$
$$+i\left(5\cos^4\theta\,\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta\right).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient :

$$\begin{cases}\cos(5\theta)=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta\\ \qquad\quad=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\left(1-\cos^2\theta\right)+5\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^2\\ \sin(5\theta)=5\cos^4\theta\,\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta\\ \qquad\quad=5\left(1-\sin^2\theta\right)^2\sin\theta-10\left(1-\sin^2\theta\right)\sin^3\theta+\sin^5\theta\end{cases}.$$

D'où : $\begin{cases}\cos(5\theta)=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta\\ \sin(5\theta)=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta\end{cases}.$

c. On a montré dans l'**exercice 1.a)** que :

$\sin(4\theta)=8\cos^3\theta\,\sin\theta-4\cos\theta\sin\theta$; on a donc :

$$\sin(4\theta)\sin(\theta)=8\cos^3\theta\,\sin^2\theta-4\cos\theta\sin^2\theta$$
$$=8\cos^3\theta\left(1-\cos^2\theta\right)-4\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right).$$

Finalement, $\sin(4\theta)\sin(\theta)=-8\cos^5\theta+12\cos^3\theta-4\cos\theta$.

d. On a montré dans l'**exemple 1** que : $\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$;

De plus, une formule classique de trigonométrie donne :

$\sin(2\theta)=2\cos\theta\sin\theta$.

Remarque : Ce résultat peut se redémontrer avec la formule de Moivre !

On a donc :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta)\sin(2\theta)&=8\cos^4\theta\sin\theta-6\cos^2\theta\sin\theta\\&=8\left(1-\sin^2\theta\right)^2\sin\theta-6\left(1-\sin^2\theta\right)\sin\theta\,.\end{aligned}$$

Finalement, $\cos(3\theta)\sin(2\theta)=8\sin^5\theta-10\sin^3\theta+2\sin\theta$.

2. **a.** $\cos^4\theta=\dfrac{1}{2^4}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^4$

$$=\frac{1}{2^4}\left(e^{4i\theta}+4e^{3i\theta}e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}e^{-2i\theta}+4e^{i\theta}e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}.$$

b. $\sin^5\theta=\dfrac{1}{2^5i^5}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^5$

$$=\frac{1}{2^5i}\left(e^{5i\theta}-5e^{4i\theta}e^{-i\theta}+10e^{3i\theta}e^{-2i\theta}-10e^{2i\theta}e^{-3i\theta}+5e^{i\theta}e^{-4i\theta}-e^{-5i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2^5i}\left(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}-5\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)+10\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\sin(5\theta)-5\sin(3\theta)+10\sin(\theta)\right).$$

c. $\cos^2\theta\ \sin\theta=\dfrac{1}{2^2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$

$$=\frac{1}{2^3i}\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2^3i}\left(e^{3i\theta}-e^{i\theta}+e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}+2e^{i\theta}-2e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{4}\left(\sin(3\theta)+\sin(\theta)\right).$$

d. $\cos^2\theta\,\sin^3\theta = \dfrac{1}{2^2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2 \dfrac{1}{2^3 i^3}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3$

$= \dfrac{-1}{2^5 i}\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2\right)\left(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}\right)$

$= \dfrac{-1}{2^5 i}\left(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}-\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)-2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$

$= \dfrac{-1}{16}\left(\sin(5\theta)-\sin(3\theta)-2\sin(\theta)\right).$

3. a. On a montré dans l'**exemple 1** que : $\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

On a donc :

$\cos^3(3\theta)=\left(4\cos^3\theta-3\cos\theta\right)^3$

$=64\cos^9\theta-144\cos^7\theta+108\cos^5\theta-27\cos^3\theta.$

b. On a montré dans l'**exemple 1** que : $\sin(3\theta)=-4\sin^3\theta+3\sin\theta$.

De plus, une formule classique de trigonométrie donne :

$\cos(2\theta)=1-2\sin^2(\theta)$.

Remarque : Ce résultat peut se redémontrer avec la formule de Moivre !

On a donc :

$\sin(3\theta)\cos^2(2\theta)=\left(-4\sin^3\theta+3\sin\theta\right)\left(1-2\sin^2\theta\right)^2$

$=-16\sin^7\theta+28\sin^5\theta-16\sin^3\theta+3\sin\theta$.

c. On a montré dans l'**exercice 1.a**) que : $\sin(4\theta)=8\cos^3\theta\,\sin\theta-4\cos\theta\sin\theta$.

De plus, $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$.

On a donc :

$\sin(4\theta)\cos(2\theta)\sin(\theta)=\left(8\cos^3\theta\,\sin\theta-4\cos\theta\,\sin\theta\right)\left(2\cos^2\theta-1\right)\sin(\theta)$

$=16\cos^5\theta\,\sin^2\theta-16\cos^3\theta\,\sin^2\theta+4\cos\theta\,\sin^2\theta$

$=16\cos^5\theta\left(1-\cos^2\theta\right)-16\cos^3\theta\left(1-\cos^2\theta\right)+4\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)$

$=-16\cos^7\theta+32\cos^5\theta-20\cos^3\theta+4\cos\theta$.

4. a. $\sin^4\theta\cos^2\theta = \dfrac{1}{2^4 i^4}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^4 \dfrac{1}{2^2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^2$

$$= \frac{1}{2^6}\left(e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right)\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{2^6}\left(e^{6i\theta} + e^{-6i\theta} - 2\left(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}\right) - \left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right) + 4\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(\cos(6\theta) - 2\cos(4\theta) - \cos(2\theta) + 2\right)$$

$$= \frac{1}{32}\cos(6\theta) - \frac{1}{16}\cos(4\theta) - \frac{1}{32}\cos(2\theta) + \frac{1}{16}.$$

b. $\cos^3(3\theta)\cos(\theta) = \dfrac{1}{2^3}\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}\right)^3 \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

$$= \frac{1}{2^4}\left(e^{9i\theta} + 3e^{3i\theta} + 3e^{-3i\theta} + e^{-9i\theta}\right)\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$

$$\frac{1}{2^4}\left(e^{10i\theta} + e^{-10i\theta} + e^{8i\theta} + e^{-8i\theta} + 3\left(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}\right) + 3\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos(10\theta) + \cos(8\theta) + 3\cos(4\theta) + 3\cos(2\theta)\right).$$

c. $\sin^3(3\theta)\cos^2(2\theta) = \dfrac{1}{2^3 i^3}\left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}\right)^3 \dfrac{1}{2^2}\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right)^2$

$$= \frac{-1}{2^5 i}\left(e^{9i\theta} - 3e^{3i\theta} + 3e^{-3i\theta} - e^{-9i\theta}\right)\left(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 2\right)$$

$$= \frac{-1}{2^5 i}\left(e^{13i\theta} - e^{-13i\theta} + 2\left(e^{9i\theta} - e^{-9i\theta}\right) - 3\left(e^{7i\theta} - e^{-7i\theta}\right)\right.$$

$$\left. + e^{5i\theta} - e^{-5i\theta} - 6\left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}\right) + 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{16}\sin(13\theta) - \frac{1}{8}\sin(9\theta) + \frac{3}{16}\sin(7\theta) - \frac{1}{16}\sin(5\theta) + \frac{3}{8}\sin(3\theta) - \frac{3}{16}\sin(\theta).$$

5. $\sin^3(2\theta)\left(\cos^2(2\theta)+\sin^3(3\theta)\right)=\frac{1}{2^3 i^3}\left(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}\right)^3\left(\frac{1}{2^2}\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)^2\right.$

$\left.+\frac{1}{2^3 i^3}\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)^3\right)$

$=\frac{-1}{2^5 i}\left(e^{6i\theta}-3e^{2i\theta}+3e^{-2i\theta}-e^{-6i\theta}\right)\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}+2\right)$

$-\frac{1}{2^6}\left(e^{6i\theta}-3e^{2i\theta}+3e^{-2i\theta}-e^{-6i\theta}\right)\left(e^{9i\theta}-3e^{3i\theta}+3e^{-3i\theta}-e^{-9i\theta}\right)$

$=\frac{-1}{16}\sin(10\theta)+\frac{1}{16}\sin(6\theta)+\frac{1}{8}\sin(2\theta)-\frac{1}{32}\cos(15\theta)+\frac{3}{32}\cos(11\theta)$

$+\frac{3}{32}\cos(9\theta)-\frac{3}{32}\cos(7\theta)-\frac{9}{32}\cos(5\theta)-\frac{1}{16}\cos(3\theta)+\frac{9}{32}\cos(\theta).$

Polynômes – Décomposition en éléments simples

La maîtrise de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples est indispensable, particulièrement pour le calcul intégral. Il faut connaître les différentes techniques qui permettent d'être efficace dans la réalisation. Cette fiche vise à les décliner, et à les mettre en pratique.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Je vous montre comment

■ Effectuer une division euclidienne de polynômes

> Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
> Il existe un unique couple $(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec deg (R) < deg (B) tel que : $A = BQ + R$.

Une division euclidienne de polynômes se pose comme une division euclidienne d'entiers, en écrivant les polynômes dans le sens des degrés décroissants.

Exemple 1

Effectuer la division euclidienne de X^3+1 par $X+1$

Réponse

$$\begin{array}{rr|l}
\ominus & X^3+1 & X+1 \\ \cline{3-3}
 & X^3+X^2 & X^2 \\ \cline{2-2}
 & -X^2+1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
\ominus & X^3+1 & X+1 \\ \cline{3-3}
 & X^3+X^2 & X^2-X \\ \cline{2-2}
 & -X^2+1 & \\
\ominus & -X^2-X & \\ \cline{2-2}
 & X+1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
\ominus & X^3+1 & X+1 \\ \cline{3-3}
 & X^3+X^2 & X^2-X+1 \\ \cline{2-2}
 & -X^2+1 & \\
\ominus & -X^2-X & \\ \cline{2-2}
 & X+1 & \\
\ominus & X+1 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Finalement, $X^3+1=\left(X^2-X+1\right)(X+1)+0$.

■ Factoriser un polynôme *P* (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) lorsque l'on connait une racine *a*

On cherche la multiplicité m de la racine en calculant successivement $P^{(k)}(a)$ jusqu'à en obtenir un non nul. Puis on cherche le polynôme Q tel que $P=(X-a)^m Q$:

- Soit en effectuant la division euclidienne de P par $(X-a)^m$.
- Soit en écrivant formellement la factorisation et en identifiant les coefficients.

Exemple 2

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P=-2X^3+X^2+2X-1$.

Réponse

On constate que 1 est une racine simple de P $(P(1)=0, P'(1)\neq 0)$. Ainsi,
$-2X^3+X^2+2X-1=(X-1)\left(-2X^2+\alpha X+1\right)$.

> **Remarque :** On peut toujours directement écrire le coefficient dominant et le coefficient constant du polynôme Q à la lecture de ceux de P et de la racine a.

Par identification (du coefficient de X^2 par exemple) , on trouve $\alpha=-1$. D'où :
$P=(X-1)\left(-2X^2-X+1\right)$.
Une recherche des racines du polynôme du second degré $-2X^2-X+1$ permet d'obtenir : $P=(X-1)(X+1)(-2X+1)$.

■ Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples

1. On met la fraction sous forme irréductible : $F=\dfrac{A}{B}\in\mathbb{K}(X)$.

> Il existe un unique couple $(Q,R)\in\left(\mathbb{K}[X]\right)^2$ avec deg $(R)<$ deg (B) tel que : $F=Q+\dfrac{R}{B}$.
>
> Q est la **partie entière** de F ; $P=\dfrac{R}{B}$ est la **partie fractionnaire** de F.

2. À l'aide de la division euclidienne on détermine la partie entière et la partie fractionnaire.

3. On factorise le dénominateur de la partie fractionnaire :

- Dans $\mathbb{R}$: $P = \dfrac{R}{\alpha \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{n_i} \prod_{j=1}^{m} (X^2 + \alpha_j X + \beta_j)^{m_j}}$,

  avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(m,n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$, pour $i \in [\![1,n]\!], n_i \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{R}$ et, pour $j \in [\![1,m]\!]$, $m_j \in \mathbb{N}^*, \left(\alpha_j, \beta_j\right) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha_j^{\,2} - 4\beta_j < 0$.

- Dans $\mathbb{C}$: $P = \dfrac{R}{\alpha \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{n_i}}$,

  avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $i \in [\![1,n]\!], n_i \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{C}$.

4. On écrit la décomposition sous forme littérale :

- Dans $\mathbb{R}$: $F = Q + \sum_{1 \le i \le n} \left(\sum_{1 \le j \le n_i} \dfrac{r_{ij}}{(X - a_i)^j} \right) + \sum_{1 \le i \le m} \left(\sum_{1 \le j \le m_i} \dfrac{a_{ij} X + b_{ij}}{(X + \alpha_i X + \beta_i)^j} \right)$,

  avec $\left(r_{ij}, a_{ij}, b_{ij}\right) \in \mathbb{R}^3$.

- Dans $\mathbb{C}$: $F = Q + \sum_{1 \le i \le n} \left(\sum_{1 \le j \le n_i} \dfrac{r_{ij}}{(X - a_i)^j} \right)$, avec $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{1 \le j \le n_i} \dfrac{r_{ij}}{(X - a_i)^j}$ s'appelle la **partie polaire** de F relative au **pôle** a_i.

Remarque : Pour décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ on peut aussi effectuer d'abord la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ puis « regrouper » les pôles conjugués.

5. On calcule alors les coefficients par des méthodes diverses :

  - Cas d'un pôle simple ($n_i = 1$) :

Soit $\dfrac{c}{X - a}$ la partie polaire de F relative au pôle simple a ; alors $c = \left((X - a)F\right)(a) = \dfrac{R(a)}{B'(a)}$.

Exemple 3

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F=\dfrac{1}{X(X+1)}$.

Réponse

On écrit : $F=\dfrac{\alpha}{X}+\dfrac{\beta}{X+1}$.

On a : $\alpha=(XF)(0)=\dfrac{1}{0+1}=1$ et $\beta=\big((X+1)F\big)(-1)=\dfrac{1}{-1}=-1$, donc $F=\dfrac{1}{X}-\dfrac{1}{X+1}$.

▸ Cas d'un pôle multiple d'ordre n :

1. Le coefficient de $\dfrac{1}{(X-a)^n}$ est donné par $\big((X-a)^n F\big)(a)$.
2. Pour les autres, on peut :
   - — Utiliser la formule de Taylor :

     Pour $a\in\mathbb{K}$ et $P\in\mathbb{K}_n[X]$, $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.
   - — Utiliser une éventuelle parité, et l'unicité de la décomposition.
   - — Multiplier $F(x)$ par x et faire tendre ensuite x vers l'infini.
   - — Donner à X des valeurs et résoudre le système obtenu.
   - — Réduire au même dénominateur et déterminer les coefficients par identification (en dernier recours !).

Exemple 4

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $F=\dfrac{X^2}{(X-i)^3}$.

Réponse

Soit $P=X^2$; la formule de Taylor donne : $P=i^2+2i(X-i)+\dfrac{2}{2}(X-i)^2$.

On a donc : $F=\dfrac{-1+2i(X-i)+(X-i)^2}{(X-i)^3}=\dfrac{-1}{(X-i)^3}+\dfrac{2i}{(X-i)^2}+\dfrac{1}{X-i}$.

Autre méthode :

On écrit : $F=\dfrac{\alpha}{X-i}+\dfrac{\beta}{(X-i)^2}+\dfrac{\gamma}{(X-i)^3}$.

On a : $\gamma=\big((X-i)^3F\big)(i)=\dfrac{i^2}{1}=-1$, $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\big(xF(x)\big)=1$, et $F(0)=0$ donc $\beta=2i$.

On retrouve $F=\frac{1}{X-i}+\frac{2i}{(X-i)^2}+\frac{-1}{(X-i)^3}$.

Exemple 5

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F=\frac{X^3}{(X^2+1)^2}$.

Réponse

On écrit : $F=\frac{aX+b}{X^2+1}+\frac{cX+d}{(X^2+1)^2}$.

F étant impaire, on a immédiatement $b=d=0$; de plus, $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xF(x)\right)=1$.

Enfin, $F(1)=\frac{1}{4}$ donne $c=-1$. Finalement, $F=\frac{X}{X^2+1}-\frac{X}{(X^2+1)^2}$.

À vous !

On s'échauffe

1. Effectuer la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q dans les cas suivants :

   a. $P = X^3 + X^2 + X + 1$ et $Q = X - 2$

   b. $P = -2X^4 + X^3 - 3X^2 + X - 1$ et $Q = X^2 + X + 1$

   c. $P = 2X^4 + 7X^3 + 11X^2 + 9X - 2$ et $Q = X^2 + 2X + 3$

   d. $P = X^6$ et $Q = X^2 + X$

   e. $P = 2X^5 - X^2 + 1$ et $Q = 3X^2 + X + 1$

2. Donner une factorisation en produit de polynômes irréductibles des polynômes P suivants :

   a. $P = X^3 - X^2 + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

   b. $P = X^4 + 5X^3 + 9X^2 + 7X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

   c. $P = X^6 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

   d. $P = X^6 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

   e. $P = X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles F suivantes :

   a. $F = \dfrac{X^2 - 5X + 4}{X - 2}$

   b. $F = \dfrac{X^3}{X^2 - 4}$

   c. $F = \dfrac{1}{X\left(X^2 - 1\right)(X + 2)}$

   d. $F = \dfrac{X^4 + 2X^2 + X + 1}{X\left(X^2 + 1\right)}$

   e. $F = \dfrac{X^5 - 2X^3 + 2}{X^4 - 1}$

On accélère

4. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles F suivantes :

a. $F=\dfrac{X^3}{\left(X^2+1\right)^2}$

b. $F=\dfrac{X^2+2}{X^3(X-1)}$

c. $F=\dfrac{4X^2+1}{X^2\left(X^2+1\right)\left(2X^2+1\right)}$

d. $F=\dfrac{2X^3+X}{X^2\left(X^2+1\right)\left(2X^2+1\right)^2}$

e. $F=\dfrac{2X^4-4X^3+5X^2-X+1}{X^2(X-1)^2}$

f. $F=\dfrac{1}{X^2\left(X^2+2\right)^2}$

g. $F=\dfrac{X}{\left(X^4-1\right)^2}$

On finit au top

5. Soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

a. $\dfrac{X^n}{(X-1)^3}$

b. $\dfrac{1}{X^n-1}$ (On commencera par décomposer la fraction dans $\mathbb{C}(X)$.)

c. $\dfrac{1}{X}+\dfrac{1!}{X(X+1)}+\dfrac{2!}{X(X+1)(X+2)}+...+\dfrac{n!}{X(X+1)(X+2)...(X+n)}$

1. Dans cet exercice, il faut poser les divisions euclidiennes comme montré dans l'**exemple 1**.

Les seules erreurs que l'on peut commettre sont des erreurs de calcul. Il faut les recommencer jusqu'à avoir le bon résultat ! Plus on pratique, moins on fait d'erreurs de calcul…

a. $X^3+X^2+X+1=\left(X^2+3X+7\right)(X-2)+15$.

b. $-2X^4+X^3-3X^2+X-1=\left(-2X^2+3X-4\right)\left(X^2+X+1\right)+2X+3$.

c. $2X^4+7X^3+11X^2+9X-2=\left(2X^2+3X-1\right)\left(X^2+2X+3\right)+2X+1$.

d. $X^6=\left(X^4-X^3+X^2-X+1\right)\left(X^2+X\right)-X$.

e. $2X^5-X^2+1=\left(\dfrac{2}{3}X^3-\dfrac{2}{9}X^2-\dfrac{4}{27}X-\dfrac{17}{81}\right)\left(3X^2+X+1\right)+\dfrac{29}{81}X+\dfrac{98}{81}$.

2. a. -1 est une racine « évidente » et $P'(-1)\neq 0$, elle est donc simple.

Par une division euclidienne de X^3-X^2+2 par $X+1$ (ou par une identification), on trouve : $X^3-X^2+2=(X+1)\left(X^2-2X+2\right)$.

Le polynôme X^2-2X+2 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (le discriminant est strictement négatif).

On a donc la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$: $X^3-X^2+2=(X+1)\left(X^2-2X+2\right)$.

La recherche des racines du polynôme X^2-2X+2 dans $\mathbb{C}$ permet d'obtenir la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$: $X^3-X^2+2=(X+1)(X-1-i)(X-1+i)$.

b. -1 est une racine « évidente » ; on trouve : $P(-1)=P'(-1)=P''(-1)=0$ et $P^{(3)}(-1)\neq 0$.

-1 est donc racine triple, et l'on a : $P=(X+1)^3(X+2)$.

Remarque : Le coefficient dominant et la constante du polynôme Q tel que $P=(X+1)^3Q$ s'obtiennent immédiatement par identification du coefficient dominant et de la constante de P.

c. On a : $P=\left(X^3\right)^2-1=\left(X^3-1\right)\left(X^3+1\right)$, en utilisant une identité remarquable bien connue…

1 est une racine évidente de X^3-1, et l'on a : $X^3-1=(X-1)\left(X^2+X+1\right)$ que l'on ne peut plus factoriser dans $\mathbb{R}[X]$.

-1 est une racine évidente de X^3+1, et l'on a : $X^3+1=(X+1)\left(X^2-X+1\right)$ que l'on ne peut plus factoriser dans $\mathbb{R}[X]$.

Finalement, $X^6-1=(X-1)\left(X^2+X+1\right)(X+1)\left(X^2-X+1\right)$

Remarque : On aurait également pu factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, en remarquant que ses racines complexes sont les racines sixièmes de l'unité, puis obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, en regroupant les racines conjuguées.

d. Les racines complexes du polynôme X^6+1 sont les racines sixièmes de -1 à savoir :

$$\left\{e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)},k\in[\![0,5]\!]\right\}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,i,-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,-i,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\}.$$

Ainsi, dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^6+1=(X-i)(X+i)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right).$$

En regroupant les racines conjuguées, on a dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^6+1=\left(X^2+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right).$$

e. On va se placer dans $\mathbb{C}[X]$.

Remarquons tout d'abord que : $X^4+X^2+1=\left(X^2\right)^2+X^2+1$.

Une étude classique des équations du second degré donne :

$$X^2+X+1=\left(X-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right),$$

d'où l'on déduit : $X^4+X^2+1=\left(X^2-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X^2-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)$.

Les racines carrées (dans $\mathbb{C}$) de $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ sont : $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}$; celles de $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ sont : $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\left(\frac{-\pi}{3}+\pi\right)}$.

On a donc : $X^4+X^2+1=\left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$.

Enfin, en regroupant les racines conjuguées, on obtient la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$: $X^4+X^2+1=\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X+1\right)$.

3. Avant chaque décomposition en éléments simples, on regarde si le degré du polynôme du numérateur est supérieur à celui de dénominateur. Si c'est le cas, il ne faut pas oublier de faire une division euclidienne pour déterminer la partie entière et la partie fractionnaire…

a. La division euclidienne de X^2-5X+4 par $X-2$ donne :

$X^2-5X+4=(X-3)(X-2)-2$.

On obtient donc directement : $\dfrac{X^2-5X+4}{X-2}=X-3-\dfrac{2}{X-2}$.

b. La division euclidienne de X^3 par X^2-4 donne : $X^3=X\left(X^2-4\right)+4X$.

On écrit : $F=\dfrac{X^3}{X^2-4}=X+\dfrac{a}{X-2}+\dfrac{b}{X+2}$.

Tous les pôles sont simples. On a :

$a=\left((X-2)F\right)(2)=2; b=\left((X+2)F\right)(-2)=2.$

Finalement, $F=X+\dfrac{2}{X-2}+\dfrac{2}{X+2}$.

c. On écrit : $F=\dfrac{1}{X\left(X^2-1\right)(X+2)}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X-1}+\dfrac{c}{X+1}+\dfrac{d}{X+2}$.

Tous les pôles sont simples. On a :

$a=(XF)(0)=-\dfrac{1}{2}; b=\left((X-1)F\right)(1)=\dfrac{1}{6}; c=\left((X+1)F\right)(-1)=\dfrac{1}{2};$

$d=\left((X+2)F\right)(-2)=-\dfrac{1}{6}$.

Finalement, $F=-\dfrac{1}{2X}+\dfrac{1}{6(X-1)}+\dfrac{1}{2(X+1)}-\dfrac{1}{6(X+2)}$.

d. La division euclidienne de X^4+2X^2+X+1 par X^3+X donne :

$$X^4+2X^2+X+1=X\left(X^3+X\right)+X^2+X+1.$$

On écrit : $F=\dfrac{X^4+2X^2+X+1}{X\left(X^2+1\right)}=X+\dfrac{X^2+X+1}{X\left(X^2+1\right)}=X+\dfrac{a}{X}+\dfrac{bX+c}{X^2+1}$.

On a : $a=(XF)(0)=1; a+b=\lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)}=1$, donc $b=0$, et

$F(1)=\dfrac{5}{2}=1+a+\dfrac{c}{2}$, donc $c=1$.

Finalement, $F=X+\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{X^2+1}$.

Remarque : On pouvait également décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ avec $X^2+1=(X-i)(X+i)$; on n'avait alors que des pôles simples…

e. La division euclidienne de X^5-2X^3+2 par X^4-1 donne :

$$X^5-2X^3+2=X\left(X^4-1\right)-2X^3+X+2.$$

On écrit :

$$F=\frac{X^5-2X^3+2}{X^4-1}=X+\frac{-2X^3+X+2}{(X-1)(X+1)\left(X^2+1\right)}=X+\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2+1}.$$

On a :

$a=\left((X-1)F\right)(1)=\dfrac{1}{4}; b=\left((X+1)F\right)(-1)=-\dfrac{3}{4};$

$a+b+c=\lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{-2x^3+x+2}{x^4-1}=-2$, donc $c=-\dfrac{3}{2}$;

enfin, $F(0)=-2=-a+b+d$, donc $d=-1$.

Finalement, $F=X+\dfrac{1}{4(X-1)}-\dfrac{3}{4(X+1)}-\dfrac{3X+2}{2\left(X^2+1\right)}$.

4. a. On écrit : $F=\dfrac{X^3}{\left(X^2+1\right)^2}=\dfrac{aX+b}{X^2+1}+\dfrac{cX+d}{\left(X^2+1\right)^2}$.

F est impaire, donc $b=d=0$; $a=\lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=1$; $F(1)=\dfrac{1}{4}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{c}{4}$, donc $c=-1$.

Finalement, $F=\dfrac{X}{X^2+1}-\dfrac{X}{\left(X^2+1\right)^2}$.

b. On écrit : $F=\dfrac{X^2+2}{X^3(X-1)}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X^2}+\dfrac{c}{X^3}+\dfrac{d}{X-1}$.

On a :

$d=\left((X-1)F\right)(1)=3; c=\left(X^3F\right)(0)=-2; a+d=\lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{x^2+2}{x^3(x-1)}=0$,

donc $a=-3$, et $F(-1)=\dfrac{3}{2}=-a+b-c-\dfrac{d}{2}$, donc $b=-2$.

Finalement, $F=-\dfrac{3}{X}-\dfrac{2}{X^2}-\dfrac{2}{X^3}+\dfrac{3}{X-1}$.

c. On écrit : $F=\dfrac{4X^2+1}{X^2\left(X^2+1\right)\left(2X^2+1\right)}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X^2}+\dfrac{cX+d}{X^2+1}+\dfrac{eX+f}{2X^2+1}$.

F est paire donc $a=c=e=0$; $b=\left(X^2F\right)(0)=1$;

$b+d+\dfrac{f}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2F(x)=0$; $F(1)=\dfrac{5}{6}=b+\dfrac{d}{2}+\dfrac{f}{3}$.

On a donc : $\begin{cases}2d+f=-2\\3d+2f=-1\end{cases}$, ce qui équivaut à : $\begin{cases}d=-3\\f=4\end{cases}$.

Finalement, $F=\dfrac{4X^2+1}{X^2\left(X^2+1\right)\left(2X^2+1\right)}=\dfrac{1}{X^2}-\dfrac{3}{X^2+1}+\dfrac{4}{2X^2+1}$.

d. ⚠ Il ne faut pas oublier de mettre la fraction sous forme irréductible !!

On a :

$$F=\frac{2X^3+X}{X^2\left(X^2+1\right)\left(2X^2+1\right)^2}=\frac{X\left(2X^2+1\right)}{X^2\left(X^2+1\right)\left(2X^2+1\right)^2}=\frac{1}{X\left(X^2+1\right)\left(2X^2+1\right)}.$$

On écrit : $F_1 = \dfrac{1}{X\left(X^2+1\right)\left(2X^2+1\right)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{bX+c}{X^2+1} + \dfrac{dX+e}{2X^2+1}$

F_1 est impaire donc $c = e = 0$;

$a = (XF_1)(0) = 1 ; a + b + \dfrac{d}{2} = \lim\limits_{x \to +\infty} xF_1(x) = 0 ; F_1(1) = \dfrac{1}{6} = a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{d}{3}$.

On a donc : $\begin{cases} 2b+d=-2 \\ 3b+2d=-5 \end{cases}$, ce qui équivaut à : $\begin{cases} b=1 \\ d=-4 \end{cases}$.

Finalement, $F = \dfrac{1}{X} + \dfrac{X}{X^2+1} - \dfrac{4X}{2X^2+1}$.

e. La division euclidienne de $2X^4 - 4X^3 + 5X^2 - X + 1$ par $X^2(X-1)^2$ donne:

$2X^4 - 4X^3 + 5X^2 - X + 1 = 2X^2(X-1)^2 + 3X^2 - X + 1$.

On écrit :

$$F = \frac{2X^4 - 4X^3 + 5X^2 - X + 1}{X^2(X-1)^2} = 2 + \frac{3X^2 - X + 1}{X^2(X-1)^2}$$

$$= 2 + \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2}.$$

On a :

$$b = \left(X^2F\right)(0) = 1 ; d = \left((X-1)^2F\right)(1) = 3 ; a + c = \lim_{x \to +\infty} x\frac{3x^2 - x + 1}{x^2(x-1)^2} = 0,$$

et $F(-1) = \dfrac{13}{4} = 2 - a + b - \dfrac{c}{2} + \dfrac{d}{4}$. On a donc : $\begin{cases} a+c=0 \\ 2a+c=1 \end{cases}$,

ce qui équivaut à $\begin{cases} a=1 \\ c=-1 \end{cases}$.

Finalement, $F = 2 + \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{X^2} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{3}{(X-1)^2}$.

f. On écrit : $F = \dfrac{1}{X^2\left(X^2+2\right)^2} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{cX+d}{X^2+2} + \dfrac{eX+f}{\left(X^2+2\right)^2}$.

F est paire donc $a = c = e = 0$;

$b=\left(X^2F\right)(0)=\dfrac{1}{4}; b+d=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\dfrac{1}{x^2\left(x^2+2\right)^2}=0$, donc $d=-\dfrac{1}{4}$, et

$F(1)=\dfrac{1}{9}=b+\dfrac{d}{3}+\dfrac{f}{9}$, donc $f=-\dfrac{1}{2}$.

Finalement, $F=\dfrac{1}{4X^2}-\dfrac{1}{4\left(X^2+2\right)}-\dfrac{1}{2\left(X^2+2\right)^2}$.

g. On écrit :

$$F=\frac{X}{\left(X^4-1\right)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X+1}+\frac{d}{(X+1)^2}+\frac{eX+f}{X^2+1}+\frac{gX+h}{\left(X^2+1\right)^2}.$$

F est impaire, donc $a=c, b=-d, f=h=0$.

On a donc :

$$F=\frac{X}{\left(X^4-1\right)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{a}{X+1}-\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{eX}{X^2+1}+\frac{gX}{\left(X^2+1\right)^2}.$$

De plus, $b=\left((X-1)^2F\right)(1)=\dfrac{1}{16}$; $gi=\left(\left(X^2+1\right)^2F\right)(i)=\dfrac{i}{4}$, donc $g=\dfrac{1}{4}$;

$2a+e=\lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{x}{x^4-1}=0$, et $F(2)=\dfrac{2}{225}=a+b+\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{9}+\dfrac{2e}{5}+\dfrac{2g}{25}$,

donc $e=-2a$ et $a=-\dfrac{1}{8}$.

Finalement,

$$F=-\frac{1}{8(X-1)}+\frac{1}{16(X-1)^2}-\frac{1}{8(X+1)}-\frac{1}{16(X+1)^2}+\frac{X}{4\left(X^2+1\right)}+\frac{X}{4\left(X^2+1\right)^2}.$$

5. a. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, la dérivée k-ième de X^n est $\dfrac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}$.

La formule de Taylor donne :

$$X^n=1+n(X-1)+\frac{n(n-1)}{2}(X-1)^2+\sum_{k=3}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}(X-1)^k.$$

On a donc : $\dfrac{X^n}{(X-1)^3}=\sum\limits_{k=3}^{n}\dbinom{n}{k}(X-1)^{k-3}+\dfrac{n(n-1)}{2(X-1)}+\dfrac{n}{(X-1)^2}+\dfrac{1}{(X-1)^3}$.

b. Dans $\mathbb{C}$, les racines (simples) de $X^n - 1$ sont les racines n-ièmes de l'unité :

$$\left\{\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

On a : $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{1}{X^n - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{X - \omega_k}$, avec pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$a_k = \frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n} \text{ (car } \omega_k^n = 1).$$

Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$, il faut regrouper les racines conjuguées.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$; il apparaît donc une disjonction de cas, suivant la parité de n :

- Si n est impair, en notant $n = 2p + 1$:

$$F = \underbrace{\frac{1}{n(X-1)}}_{k=0} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\omega_k}{X - \omega_k} + \frac{\omega_{n-k}}{X - \omega_{n-k}}\right)$$

$$= \frac{1}{n(X-1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X - 2}{X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1}\right).$$

- Si n est pair, en notant $n = 2p$:

$$F = \underbrace{\frac{1}{n(X-1)}}_{k=0} + \underbrace{\frac{-1}{n(X+1)}}_{k=p} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{\omega_k}{X - \omega_k} + \frac{\omega_{n-k}}{X - \omega_{n-k}}\right)$$

$$= \frac{1}{n(X-1)} - \frac{1}{n(X+1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X - 2}{X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1}\right).$$

c. On note :

$$F = \frac{1}{X} + \frac{1!}{X(X+1)} + \frac{2!}{X(X+1)(X+2)} + \ldots + \frac{n!}{X(X+1)(X+2)\ldots(X+n)}.$$

L'écriture formelle de la décomposition est : $F=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{X+k}$, avec pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}a_k&=\big((X+k)F\big)(-k)\\&=\frac{k!}{-k...(-k+k-1)}+\frac{(k+1)!}{-k...(-k+k-1)(-k+k+1)}+...\\&\qquad+\frac{n!}{-k...(-k+k-1)(-k+k+1)...(-k+n)}\\&=\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(k+j)!}{(-1)^k\,k!\,j!}=(-1)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{k+j}{k}.\end{aligned}$$

Systèmes linéaires

Avec la méthode du pivot de Gauss, on dispose d'une méthode infaillible pour la résolution de systèmes linéaires. Encore faut-il maitriser le calcul mental… Pour cela, un seul moyen : la répétition d'exercices ! C'est l'objectif de cette fiche.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notations :

- S désigne le système linéaire de n équations à p inconnues :

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1p}x_p=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2p}x_p=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{np}x_p=b_n \end{cases}$$

  où les coefficients a_{ij} et b_i $(1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p)$ sont dans $\mathbb{K}$.

- $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ désigne la matrice du système S.
- $(A|B)$, avec $B={}^t(b_1 \quad \cdots \quad b_n)$, désigne la matrice augmentée du système S.
- Pour les **opérations élémentaires** :

  $L_i \leftrightarrow L_j$ désigne la permutation des lignes L_i et L_j;

  $L_i \leftarrow \lambda L_i$ désigne le produit de la ligne L_i par $\lambda\in\mathbb{K}^*$;

  $L_i \leftarrow L_i+\lambda L_j$ désigne l'addition à la ligne L_i de la ligne L_j multipliée par $\lambda\in\mathbb{K}$.

Reconnaître des matrices échelonnées (réduites)

Une **matrice échelonnée en lignes** vérifie les conditions suivantes :

Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;

Si le premier coefficient non nul de la i-ème ligne (appelé **pivot**) est en position j, soit la $(i+1)$-ième ligne est entièrement nulle, soit son premier coefficient non nul est en position $k > j$.

Une **matrice échelonnée réduite** est une matrice échelonnée dont tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Exemple 1

Parmi les matrices suivantes, quelles sont celles qui sont échelonnées, et celles qui sont échelonnées réduites ?

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A_5=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}, A_6=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}, A_7=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}, A_8=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Réponse

A_1 et A_4 sont échelonnées, A_3, A_6 et A_8 sont échelonnées réduites.

Échelonner un système linéaire par l'algorithme de Gauss

1. On se ramène à un système équivalent tel que $a_{11} \neq 0$, en permutant éventuellement L_1 avec une autre ligne, puis on divise L_1 (la nouvelle !) par a_{11} (le nouveau !).
2. Pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, on effectue les opérations : $L_i \leftarrow L_i - a_{i1}L_1$ (on élimine ainsi l'inconnue x_1 dans toutes les équations à partir de L_2).
3. On considère désormais le système de $(n-1)$ équations formé des lignes L_2 à L_n.
   - Si tous les coefficients sont nuls, l'algorithme est achevé ;

- Sinon, on applique les deux étapes précédentes au sous-système de $(n-1)$ équations formé des lignes L_2 à L_n, en éliminant éventuellement les premières colonnes entièrement nulles.

Exemple 2

Déterminer un système échelonné équivalent à $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2y=3 \\ 4x-2y=1 \end{cases}$.

Réponse

On considère les matrices augmentées (cela évite de recopier les inconnues !) :

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-4L_1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & -11 \end{array}\right).$$

Remarque : À ce stade, on voit que les lignes L_2 et L_3 sont incompatibles… Mais ce n'est pas l'objet de la question, et on doit poursuivre l'échelonnement…

$$(A|B) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -11 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow L_3-6L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

Le système de départ est donc équivalent à : $\begin{cases} x-2y=3 \\ y=-1 \\ 0=-5 \end{cases}$.

■ Résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss

On considère un système linéaire S de n équations à p inconnues.

On se ramène au cas où le système est échelonné et, quitte à changer l'ordre des inconnues, on suppose que le nombre de 0 qui commencent chaque ligne augmente de 1 à chaque ligne.

On note $A=(a_{ij})$ la matrice échelonnée associée au système, (b_i) la matrice colonne du second membre, et r le rang du système (qui est le nombre de pivots du système échelonné).

▶ Si $r=n=p$:

La matrice augmentée s'écrit : $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ (0) & & & 1 & b_n \end{array}\right)$.

Le système admet une unique solution quel que soit le second membre (on dit qu'il est de **Cramer**).

Pour la déterminer, on réduit la matrice A.

Exemple 3

Résoudre le système $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+y+z=1 \\ x-2y+3z=3 \end{cases}$.

Réponse

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2\leftrightarrow -L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right).$$

La matrice est échelonnée. On la réduit en « remontant » les lignes :

$$(A|B) \underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_3 \\ L_1\leftarrow L_1-2L_3}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right).$$

La solution du système est donnée par la colonne « second membre » : $(-10,4,7)$.

- Si $r=n<p$:

La matrice augmentée s'écrit : $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ (0) & & & 1 & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$.

Le système admet une infinité de solutions, quel que soit le second membre.

On réduit la matrice, et on exprime les inconnues $x_1,\dots,x_n$ (appelées **inconnues principales**) à l'aide des inconnues $x_{n+1},\dots,x_p$ (appelées **inconnues secondaires**, ou **paramètres**).

Exemple 4

Résoudre le système $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+z=4 \end{cases}$.

Réponse

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\1&0&1&4\end{array}\right)\underset{L}{\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\0&-1&2&2\end{array}\right)\underset{L}{\overset{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_2\\L_2\leftarrow -L_2}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&4\\0&1&-2&-2\end{array}\right).$$

Revenons à l'écriture du système : $\begin{cases}x+z=4\\y-2z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-z\\y=-2+2z\end{cases}$.

Remarque : À terme, cette étape n'est pas utile, on peut « lire » les solutions directement sur la matrice augmentée.

On en déduit l'ensemble des solutions : $S=\left\{(4-z,-2+2z,z),z\in\mathbb{K}\right\}$.

- Si $r=p<n$:

La matrice augmentée s'écrit : $\left(\begin{array}{cccc|c}1&a_{12}&\cdots&a_{1p}&b_1\\0&1&\cdots&a_{2p}&b_2\\&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\&&&1&b_p\\0&\cdots&\cdots&0&b_{p+1}\\\vdots&&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0&b_n\end{array}\right)$

• Si, pour $i\in[\![p+1,n]\!]$, les équations $0=b_i$ (appelées **équations de compatibilité**) sont la tautologie ($0=0$), le système admet une unique solution, déterminée en réduisant la matrice.

• Sinon, le système n'a pas de solution, il est dit **incompatible**.

Exemple 5

Résoudre le système $\begin{cases}x+2y=4\\2x-3y=1.\\3x-y=5\end{cases}$

Réponse

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1&2&4\\2&-3&1\\3&-1&5\end{array}\right)\underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{\sim}}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&4\\0&-7&-7\\0&-7&-7\end{array}\right)\underset{L}{\overset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_2\\L_2\leftarrow -\frac{1}{7}L_2}}{\sim}}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&4\\0&1&1\\0&0&0\end{array}\right)\underset{L}{\overset{L_1\leftarrow L_1-2L_2}{\sim}}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{array}\right).$$

La solution du système est $(2,1)$.

▶ Si $r < p$ et $r < n$:

La matrice augmentée s'écrit : $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ & & & 1 & \cdots & a_{rp} & b_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{array}\right)$.

- Si les équations de compatibilité sont la tautologie $(0 = 0)$, le système admet une infinité de solutions ; elles sont obtenues en réduisant la matrice, et en explicitant les inconnues principales $x_1, \dots, x_r$ à l'aide des inconnues secondaires $x_{r+1}, \dots, x_p$.
- Sinon, le système n'a pas de solution.

Exemple 6

Résoudre le système $\begin{cases} 2x+3y-5z=1 \\ x-z=2 \\ y+z=0 \\ x+y-z=4 \end{cases}$.

Réponse

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right).$$

Le système n'a pas de solution.

On s'échauffe

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-2z=-1 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y+3z=1 \\ 5x-2y+8z=5 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y-z=7 \\ 3x-4y+3z=0 \\ 3x+y=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x-\dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{2}z=1 \\ \dfrac{1}{2}x-2z=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

5. $\begin{cases} 6x-y-2z=3 \\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y+z=0 \\ y-4z=1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$

7. (dans $\mathbb{C}$) $\begin{cases} x+iy-z=-1 \\ ix+2y+z=1+3i \\ x-y-z=-i \end{cases}$

On accélère

8. $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ 2x+3y+z=3 \\ 2x+y+3z=8 \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -x+2y-3z=4 \\ 2x+2z=3 \\ 3x-2y+5z=-1 \\ 3x+2y+z=10 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2y+3z=-1 \\ -x+2y-z=-2 \\ 2x-2y+5z=3 \\ x+4z=-1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ x+3y+2z-2t=13 \\ -x+y-z+4t=-2 \\ x+y-z+2t=0 \end{cases}$

On finit au top

Résoudre les systèmes suivants, en fonction des valeurs du paramètre λ :

12. $\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+2z=1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+\lambda y+(1+\lambda)z=2 \\ (1+\lambda)x+y+z=2\lambda \\ x+(2+\lambda)y+(1+\lambda)z=-2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} (1-\lambda)x+y+z=0 \\ x+(1-\lambda)y+z=0 \\ x+y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \lambda x+(\lambda-1)y+z=2\lambda \\ x+y+\lambda z=2\lambda \\ \lambda x+(1+\lambda)y+z=2\lambda \end{cases}$

Remarque : Les solutions ne sont pas détaillées pour les **exercices 1** à **11**, car la méthode est toujours la même ; on peut éventuellement faire des choix différents d'échanges ou de combinaisons de lignes, mais toutes les opérations élémentaires conduisent à la même matrice échelonnée, et donc au même résultat.

Les erreurs de calcul sont très fréquentes dans ce genre d'exercices. En se relisant, on peut ne pas voir une erreur de calcul, mais on refait rarement la même donc, en cas d'erreur, plutôt que de relire ce que l'on a fait, il vaut mieux refaire les calculs jusqu'à obtenir le bon résultat !

1. $S=\{(-1,1,0)\}$.

2. $S=\left\{\left(1-\frac{2}{3}z,\frac{7}{3}z,z\right),z\in\mathbb{R}\right\}$.

Remarque : Lorsqu'il y a une infinité de solutions, la méthode du pivot de Gauss conduit « naturellement » à exprimer les solutions avec pour inconnues secondaires les dernières inconnues (dans le sens d'écriture). Mais on peut aussi exprimer les solutions avec d'autres inconnues secondaires.

Ici, par exemple, on a aussi :

$$S=\left\{\left(x,\frac{7}{2}-\frac{7}{2}x,\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x\right),x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left(1-\frac{2}{7}y,y,\frac{3}{7}y\right),y\in\mathbb{R}\right\}.$$

3. $S=\varnothing$.

4. $S=\left\{\left(-\frac{4}{3}+4z,-20+50z,z\right),z\in\mathbb{R}\right\}$.

5. $S=\left\{\left(\frac{2}{3},1,0\right)\right\}$.

6. $S=\left\{\left(\frac{10}{7}-\frac{3}{7}z,-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}z,z\right),z\in\mathbb{R}\right\}$.

7. $S=\{(1,i,1)\}$.

8. $S=\left\{\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4},\frac{9}{4}\right)\right\}$.

9. $S=\left\{\left(\frac{3}{2}-z,\frac{11}{4}+z,z\right),z\in\mathbb{R}\right\}$.

10. $S=\varnothing$.

11. $S=\left\{(1+t,2-t,3+2t,t),t\in\mathbb{R}\right\}$.

Pour résoudre les systèmes avec paramètre(s), on procède comme dans le cas de coefficients connus, et on fait apparaître des discussions lorsque nécessaire.

⚠ On ne divise qu'en dernier recours par une expression qui dépend du paramètre, et jamais sans étudier séparément le cas où elle s'annule !

12. $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&\lambda\\2&-1&1&2\\3&0&2&1\end{array}\right)\underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&\lambda\\0&-3&-1&2-2\lambda\\0&-3&-1&1-3\lambda\end{array}\right)$

$\underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&\lambda\\0&-3&-1&2-2\lambda\\0&0&0&-1-\lambda\end{array}\right)$.

- Si $\lambda\neq-1$: le système est incompatible.
- Si $\lambda=-1$:

$(A|B)\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&-3&-1&4\\0&0&0&0\end{array}\right)\underset{L}{\overset{L_2\leftarrow-\frac{1}{3}L_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&1&1/3&-4/3\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$\underset{L}{\overset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2/3&1/3\\0&1&1/3&-4/3\\0&0&0&0\end{array}\right)$.

Finalement : $\begin{cases}\text{Si }\lambda\neq-1 & S=\varnothing\\ \text{Si }\lambda=-1 & S=\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}z,-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}z,z\right),z\in\mathbb{R}\right\}\end{cases}$.

13. $\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \lambda & 1+\lambda & 2\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 2\lambda\\ 1 & 2+\lambda & 1+\lambda & -2\end{array}\right)\underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-(1+\lambda)L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \lambda & 1+\lambda & 2\\ 0 & -\lambda^2-\lambda+1 & -\lambda^2-2\lambda & -2\\ 0 & 2 & 0 & -4\end{array}\right)$

$$\underset{L}{\overset{L_2\leftrightarrow\frac{1}{2}L_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \lambda & 1+\lambda & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & -\lambda^2-\lambda+1 & -\lambda^2-2\lambda & -2\end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3+\left(\lambda^2+\lambda-1\right)L_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \lambda & 1+\lambda & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -\lambda^2-2\lambda & -2\lambda^2-2\lambda\end{array}\right).$$

Une disjonction de cas apparaît pour $\lambda^2+2\lambda=0$:

- Si $\lambda=-2$: le système est incompatible.
- Si $\lambda=0$: $\left(A|B\right)\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$.
- Si $\lambda\notin\{-2,0\}$:

$$\left(A|B\right)\underset{L}{\overset{L_3\leftarrow\frac{-1}{\lambda(2+\lambda)}L_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \lambda & 1+\lambda & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2(1+\lambda)/(2+\lambda)\end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_1\leftarrow L_1-\lambda L_2-(1+\lambda)L_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2(1+\lambda)/(2+\lambda)\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2(1+\lambda)/(2+\lambda)\end{array}\right).$$

Finalement : $\begin{cases}\text{Si }\lambda=-2, & S=\varnothing\\ \text{Si }\lambda=0, & S=\left\{\left(2-z,-2,z\right),z\in\mathbb{R}\right\}\\ \text{Si }\lambda\notin\{-2,0\}, & S=\left\{\left(\dfrac{2(1+\lambda)}{2+\lambda},-2,\dfrac{2(1+\lambda)}{2+\lambda}\right)\right\}\end{cases}$.

14. $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1-\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0\end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1\leftrightarrow L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0\\ 1-\lambda & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$

$$\underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-(1-\lambda)L_1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda & \lambda & 0\\ 0 & \lambda & 2\lambda-\lambda^2 & 0\end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 3\lambda-\lambda^2 & 0\end{array}\right).$$

Une disjonction de cas apparaît pour $3\lambda-\lambda^2=0$:

- Si $\lambda=0$: $(A|B)\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$.

- Si $\lambda=3$:

$$(A|B)\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2\leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

- Si $\lambda\notin\{0,3\}$: $(A|B) \underset{L}{\overset{\substack{L_3\leftarrow \frac{1}{\lambda(3-\lambda)}L_3\\ L_2\leftarrow -\frac{1}{\lambda}L_2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$.

  La matrice est de rang 3, donc le système est de Cramer. Comme il est homogène, la seule solution est $(0,0,0)$.

Finalement : $\begin{cases}\text{Si } \lambda=0, & S=\left\{(-y-z,y,z),(y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}\\ \text{Si } \lambda=3, & S=\left\{(z,z,z),z\in\mathbb{R}\right\}\\ \text{Si } \lambda\notin\{0,3\}, & S=\left\{(0,0,0)\right\}\end{cases}$.

15. $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & \lambda-1 & 1 & 2\lambda\\ 1 & 1 & \lambda & 2\lambda\\ \lambda & \lambda+1 & 1 & 2\lambda\end{array}\right)\underset{L}{\overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 2\lambda\\ \lambda & \lambda-1 & 1 & 2\lambda\\ \lambda & \lambda+1 & 1 & 2\lambda\end{array}\right)$

$$\underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-\lambda L_1\\ L_3\leftarrow L_3-\lambda L_1}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 2\lambda\\ 0 & -1 & 1-\lambda^2 & 2\lambda(1-\lambda)\\ 0 & 1 & 1-\lambda^2 & 2\lambda(1-\lambda)\end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 2\lambda\\ 0 & -1 & 1-\lambda^2 & 2\lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & 2\left(1-\lambda^2\right) & 4\lambda(1-\lambda)\end{array}\right).$$

Une disjonction de cas apparaît pour $1-\lambda^2=0$:

- Si $\lambda=-1$: le système est incompatible.
- Si $\lambda=1$: $(A|B)\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\underset{L}{\overset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$
- Si $\lambda\notin\{-1,1\}$:

$$(A|B)\underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow -L_2\\ L_3\leftarrow \frac{1}{2\left(1-\lambda^2\right)}L_3}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 2\lambda\\ 0 & 1 & \lambda^2-1 & 2\lambda(\lambda-1)\\ 0 & 0 & 1 & 2\lambda/(\lambda+1)\end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-\left(\lambda^2-1\right)L_3\\ L_1\leftarrow L_1-\lambda L_3}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 2\lambda/(\lambda+1)\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\lambda/(\lambda+1)\end{array}\right)\underset{L}{\overset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\lambda/(\lambda+1)\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\lambda/(\lambda+1)\end{array}\right).$$

$$\text{Finalement : }\begin{cases}\text{Si } \lambda=-1, & S=\varnothing\\ \text{Si } \lambda=1, & S=\left\{(2-z,0,z),z\in\mathbb{R}\right\}.\\ \text{Si } \lambda\notin\{-1,1\}, & S=\left\{\left(\dfrac{2\lambda}{\lambda+1},0,\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}\right)\right\}\end{cases}$$

Inversion de matrices

Dans un premier temps, pour savoir si une matrice est inversible il faut chercher son éventuel inverse. Par la suite, on dispose d'un outil (le déterminant) qui permet de savoir si la matrice est inversible ; ce même déterminant permet de calculer les coefficients de la matrice inverse.
Cette fiche permet de s'exercer à l'inversion de matrices sans déterminant, à l'aide de méthodes reposant sur le pivot de Gauss.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Je vous montre comment

Inverser une matrice en résolvant un système linéaire

A est inversible si, et seulement si pour $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ quelconque le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ admet une unique solution. On cherche donc à le résoudre. Ce faisant :

- Soit X s'exprime de façon unique en fonction de Y (on a alors $X = A^{-1}Y$) et l'on en déduit A^{-1}.
- Soit le système n'est pas de Cramer (il est incompatible ou admet une infinité de solutions), et l'on en déduit que A n'est pas inversible.

Exemple 1

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, et déterminer son inverse.

Réponse

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On a : $AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = y_1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = y_2 \\ -x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases}$.

Il s'agit d'exprimer x_1, x_2 et x_3 en fonction de y_1, y_2 et y_3.

Pour simplifier l'écriture, on considère la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&y_1\\2&3&-1&y_2\\0&-1&2&y_3\end{array}\right)\underset{L}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&y_1\\0&3&-5&y_2-2y_1\\0&-1&2&y_3\end{array}\right)\underset{L}{\overset{L_2\leftrightarrow -L_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&y_1\\0&1&-2&-y_3\\0&3&-5&y_2-2y_1\end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&y_1\\0&1&-2&-y_3\\0&0&1&-2y_1+y_2+3y_3\end{array}\right)\underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_3\\L_1\leftarrow L_1-2L_3}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5y_1-2y_2-6y_3\\0&1&0&-4y_1+2y_2+5y_3\\0&0&1&-2y_1+y_2+3y_3\end{array}\right).$$

On a donc : $\begin{cases}x_1=5y_1-2y_2-6y_3\\x_2=-4y_1+2y_2+5y_3\\x_3=-2y_1+y_2+3y_3\end{cases}.$

On en déduit que A est inversible, et $A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-6\\-4&2&5\\-2&1&3\end{pmatrix}$.

Remarque : La recherche de l'inverse d'une matrice est un exercice qui relève essentiellement du calcul mental, et les erreurs de calcul sont fréquentes.
Il est très simple de vérifier que l'on ne s'est pas trompé : il suffit de multiplier la matrice de départ par celle que l'on a trouvée, pour s'assurer que l'on obtient bien la matrice identité. Une vérification dont il ne faut jamais se priver !

Exemple 2

Montrer que la matrice $M=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&1&-4\\4&0&4\end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Réponse

Considérons le système de matrice augmentée $(M|Y)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&y_1\\-2&1&-4&y_2\\4&0&4&y_3\end{array}\right)$.

$$(M|Y)\underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1\\L_3\leftarrow L_3-4L_1}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&y_1\\0&3&-6&2y_1+y_2\\0&-4&8&-4y_1+y_3\end{array}\right).$$

$$\underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3+\frac{4}{3}L_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&y_1\\0&3&-6&2y_1+y_2\\0&0&0&-4/3y_1+4/3y_2+y_3\end{array}\right).$$

Le système n'est pas de Cramer, la matrice n'est donc pas inversible.

■ Inverser une matrice en utilisant des matrices équivalentes

Une matrice est inversible si, et seulement si elle est équivalente à la matrice unité. On peut donc passer de l'une à l'autre en une succession d'opérations élémentaires.

En faisant simultanément ces opérations sur la matrice à inverser et sur la matrice unité, on obtient l'inverse.

Exemple 3

Inverser la matrice A de l'**exemple 1**, avec la méthode des matrices équivalentes.

Réponse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_2\leftrightarrow -L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_3 \\ L_1\leftarrow L_1-2L_3}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

On retrouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ -4 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque : Les deux méthodes nécessitent exactement les mêmes opérations élémentaires. Le choix de la méthode est en réalité un choix de présentation !

À vous !

On s'échauffe

Pour chacune des matrices suivantes dire si elle est inversible, et si elle l'est, en donner l'inverse :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

On accélère

Dans les cas suivants, déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre λ la matrice est inversible, et lorsqu'elle l'est, déterminer son inverse :

9. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

On finit au top

Dans les cas suivants, déterminer pour quelle(s) valeur(s) des paramètres la matrice est inversible, et lorsqu'elle l'est, déterminer son inverse :

14. $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

2. La matrice n'est pas inversible.

3. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3/2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & -3/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

5. La matrice n'est pas inversible.

6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

7. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, c'est la même !

8. La matrice n'est pas inversible

9. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & -\lambda & 1 \end{array}\right).$

- Si $1-\lambda^2 = 0$, la matrice n'est pas inversible.
- Si $1-\lambda^2 \neq 0$, en notant $\delta = \dfrac{1}{1-\lambda^2}$, on a :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & -\lambda & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow \delta L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda\delta & \delta \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - \lambda L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \delta & -\lambda\delta \\ 0 & 1 & -\lambda\delta & \delta \end{array}\right).$$

L'inverse est donc : $\dfrac{1}{1-\lambda^2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$.

10. $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1-\lambda & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1-\lambda & 6 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow L_2-(1-\lambda)L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & (1+\lambda)(4-\lambda) & 1 & \lambda-1 \end{array}\right).$$

- Si $\lambda \in \{-1,4\}$, la matrice n'est pas inversible.
- Si $\lambda \notin \{-1,4\}$, en notant $\delta = \dfrac{1}{(1+\lambda)(4-\lambda)}$, on a :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & (1+\lambda)(4-\lambda) & 1 & \lambda-1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow \delta L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \delta & \delta(\lambda-1) \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow L_1-(2-\lambda)L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & (\lambda-2)\delta & 6\delta \\ 0 & 1 & \delta & \delta(\lambda-1) \end{array}\right).$$

L'inverse est donc : $\dfrac{1}{(1+\lambda)(4-\lambda)}\begin{pmatrix} \lambda-2 & 6 \\ 1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$.

11. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow L_2-\lambda L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

- Si $\lambda = -1$, la matrice n'est pas inversible.
- Si $\lambda \neq -1$, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow L_2-\frac{1}{2}L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 0 & -\frac{3}{2}\lambda & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \lambda & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\widetilde{L}}{\underset{L_3\leftarrow\frac{1}{2}L_3}{L_2\leftarrow\frac{1}{1+\lambda}L_2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{3\lambda}{2(1+\lambda)} & \dfrac{3}{2(1+\lambda)} & -\dfrac{1}{2(1+\lambda)}\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\lambda}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\underset{\widetilde{L}}{L_1\leftarrow L_1+L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \dfrac{2-\lambda}{2(1+\lambda)} & \dfrac{3}{2(1+\lambda)} & -\dfrac{1}{2(1+\lambda)}\\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{3\lambda}{2(1+\lambda)} & \dfrac{3}{2(1+\lambda)} & -\dfrac{1}{2(1+\lambda)}\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\lambda}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{array}\right).$$

L'inverse est donc : $\dfrac{1}{2(1+\lambda)}\begin{pmatrix}2-\lambda & 3 & -1\\ -3\lambda & 3 & -1\\ \lambda(1+\lambda) & -(1+\lambda) & 1+\lambda\end{pmatrix}.$

12. $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0\\ \lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda^2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\widetilde{L}}{L_2\leftarrow L_2-\lambda L_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^2 & 1 & -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda^2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

$$\underset{\widetilde{L}}{L_2\leftrightarrow L_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda^2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\lambda^2 & 1 & -\lambda & 1 & 0\end{array}\right)\underset{\widetilde{L}}{L_3\leftarrow L_3+\lambda^2L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda^2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1+\lambda^4 & -\lambda & 1 & \lambda^2\end{array}\right).$$

On constate à ce stade que la matrice sera inversible quel que soit λ .

En notant $\delta=\dfrac{1}{1+\lambda^4}$, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda^2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1+\lambda^4 & -\lambda & 1 & \lambda^2\end{array}\right)\underset{\widetilde{L}}{L_3\leftarrow \delta L_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda^2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\lambda\delta & \delta & \lambda^2\delta\end{array}\right)$$

$$\underset{\widetilde{L}}{L_2\leftarrow L_2-\lambda^2L_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \lambda^3\delta & -\lambda^2\delta & \delta\\ 0 & 0 & 1 & -\lambda\delta & \delta & \lambda^2\delta\end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - \lambda L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \delta & \lambda^3\delta & -\lambda\delta \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^3\delta & -\lambda^2\delta & \delta \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda\delta & \delta & \lambda^2\delta \end{array}\right).$$

L'inverse est donc : $\dfrac{1}{1+\lambda^4}\begin{pmatrix} 1 & \lambda^3 & -\lambda \\ \lambda^3 & -\lambda^2 & 1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$.

13. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 1 & 0 & -\lambda \end{array}\right).$$

- Si $\lambda \in \{-1,1,0\}$, la matrice n'est pas inversible.
- Si $\lambda \notin \{-1,1,0\}$, en notant $\delta = \dfrac{1}{1-\lambda^2}$, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 1 & 0 & -\lambda \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow \delta L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta & 0 & -\lambda\delta \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \lambda L_3}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\lambda\delta & 0 & \delta \\ 0 & \lambda & 0 & -2\delta & 1 & 2\lambda\delta \\ 0 & 0 & 1 & \delta & 0 & -\lambda\delta \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\lambda\delta & 0 & \delta \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{2\delta}{\lambda} & \dfrac{1}{\lambda} & 2\delta \\ 0 & 0 & 1 & \delta & 0 & -\lambda\delta \end{array}\right).$$

L'inverse est donc : $\dfrac{1}{\lambda\left(1-\lambda^2\right)}\begin{pmatrix} -\lambda^2 & 0 & \lambda \\ -2 & 1-\lambda^2 & 2\lambda \\ \lambda & 0 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$.

14. • Si $a = 0$ et $b = 0$, la matrice est nulle donc non inversible !

• Si $a=0$ et $b\neq 0$, on a : $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{b}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{b}L_2}}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right)$.

L'inverse est donc $\frac{1}{b}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• Si $a\neq 0$, on a :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{a}L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - bL_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{a^2-b^2}{a} & -\frac{b}{a} & 1 \end{array}\right).$$

— Si $a^2 - b^2 = 0$, la matrice n'est pas inversible.

— Si $a^2 - b^2 \neq 0$, en notant $\delta = \frac{1}{a^2-b^2}$, on a :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a\delta} & -\frac{b}{a} & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow a\delta L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -b\delta & a\delta \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{b}{a}L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a\delta & -b\delta \\ 0 & 1 & -b\delta & a\delta \end{array}\right).$$

L'inverse est donc $\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

15. • Si $a = 0$ et $b = 0$, la matrice n'est pas inversible.

• Si $a = 0$ et $c = 0$, la matrice n'est pas inversible.

• Si $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$, on a :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{c}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{b}L_2}}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{d}{c} & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{d}{c}L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{d}{cb} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right).$$

L'inverse est alors : $\dfrac{1}{cb}\begin{pmatrix} -d & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

• Si $a \neq 0$, on a :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{a}L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - cL_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right).$$

— Si $ad - bc = 0$, la matrice n'est pas inversible.

— Si $ad - bc \neq 0$, en notant $\delta = \dfrac{1}{ad-bc}$, on a :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a\delta} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow a\delta L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -c\delta & a\delta \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{b}{a}L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d\delta & -b\delta \\ 0 & 1 & -c\delta & a\delta \end{array}\right).$$

L'inverse est donc : $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On peut synthétiser l'ensemble de ces résultats ainsi :
La matrice est inversible si, et seulement si $ad - bc \neq 0$, et son inverse est alors

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Calcul d'intégrales

Les techniques de calcul d'intégrales s'enrichissent de deux nouveaux théorèmes : celui de l'intégration par parties et celui du changement de variable. Face aux nouveaux problèmes qu'ils permettent de résoudre se pose désormais la question du choix de la méthode. Pour y répondre efficacement, il faut avoir été confronté à de nombreuses situations. C'est l'objectif de cette fiche.

Je vous montre comment

Effectuer une intégration par parties

Théorème d'intégration par parties :

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[a\,;b]$, alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t\,.$$

Remarque : Avant d'appliquer le théorème d'intégration par parties, il faut bien préciser quelles sont les fonctions mises en jeu, et leur caractère C^1 (c'est la seule hypothèse du théorème !).

Exemple 1

Calculer : $\int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t$.

Réponse

On pose : $u(t)=t, v(t)=\sin t$; u et v sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$, donc le théorème d'intégration par parties s'applique et l'on a :

$$\int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t = \left[t\sin t\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = \left[\cos t\right]_0^\pi = -2\,.$$

Remarque : Lorsque l'on intègre un produit de fonctions dont une est polynomiale, il est fréquent (comme dans l'exemple précédent) d'appliquer le théorème d'intégration par parties en prenant pour u la fonction polynomiale, afin de diminuer son degré en la dérivant. Mais attention à ne pas en faire un cas général ! Parfois, on intègre la fonction polynomiale (en particulier si l'autre fonction est un logarithme).

Exemple 2

Calculer : $\int_1^2 t\ln t\,dt$.

Réponse

On pose : $u(t)=\ln t, v(t)=\frac{1}{2}t^2$; u et v sont des fonctions de classe C^1 sur $[1,2]$ donc le théorème d'intégration par parties s'applique et l'on a :

$$\int_1^2 t\ln t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}t^2\times\frac{1}{t}dt=2\ln2-\frac{1}{2}\int_1^2 t\,dt=2\ln2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^2$$
$$=2\ln2-\frac{3}{4}.$$

⚠ Avant de se lancer dans une intégration par parties, il faut s'assurer que le produit que l'on intègre n'est pas la dérivée d'une fonction composée !

Exemple 3

Calculer : $\int_1^2\frac{\ln t}{t}dt$.

Réponse

$$\int_1^2\frac{\ln t}{t}dt=\int_1^2\ln t\times\frac{1}{t}dt=\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^2=\frac{1}{2}(\ln 2)^2.$$

■ Effectuer un changement de variable

Théorème de changement de variable :

Soient $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2, \varphi:[\alpha;\beta]\to\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[\alpha;\beta]$, et f une fonction continue sur un segment contenant $\varphi([\alpha;\beta])$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors :
$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(t)dt$.

En pratique :

- Si on veut calculer $\int_a^b f(t)dt$:
  on pose $t=\varphi(x)$, on cherche α et β tels que $a=\varphi(\alpha)$ et $b=\varphi(\beta)$, on vérifie que φ est de classe C^1 sur $[\alpha;\beta]$, puis on « remplace » $f(t)$ par $f(\phi(x))$ et dt par $\varphi'(x)dx$.

- Si on veut calculer $\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$:
  on pose $t=\varphi(x)$, on calcule $a=\varphi(\alpha)$ et $b=\varphi(\beta)$, on vérifie que φ est de classe C^1 sur $[a,b]$, puis on « remplace » $f(\phi(x))$ par $f(t)$ et $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ par $\mathrm{d}t$.

Exemple 4

Calculer : $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Réponse

On effectue un changement de variable en posant $t=\sin x$, la fonction sin étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\sin(0)=0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $\mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{\cos x\geq 0\\ \text{sur }\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Remarque : Cet exemple est un grand classique, il faut le retenir, et penser à ce changement de variable $t=\sin x$ lorsque l'on a $\sqrt{1-t^2}$.
Dans le même registre, il faut songer au changement de variable $t=\operatorname{sh} x$ lorsque l'on a $\sqrt{1+t^2}$ car $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\underbrace{=}_{\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1}\sqrt{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{ch} x$ (la fonction ch étant positive sur $\mathbb{R}$).

■ Intégrer le produit d'une exponentielle et d'un cosinus ou d'un sinus

On se place dans $\mathbb{C}$ en écrivant le cosinus ou le sinus comme la partie réelle ou imaginaire d'une exponentielle complexe. On est alors ramené à intégrer une exponentielle.

Exemple 5

Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t$.

Réponse

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}e^{3it}\,\mathrm{d}t\right).$$

On a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}e^{3it}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(2+3i)t}dt=\left[\frac{e^{(2+3i)t}}{2+3i}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{e^{\pi}e^{i\frac{3\pi}{2}}-1}{2+3i}=\frac{\left(-ie^{\pi}-1\right)(2-3i)}{13}.$$

Finalement, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos(3t)dt=\frac{-3e^{\pi}-2}{13}$.

■ Intégrer un produit de fonctions trigonométriques de la forme $t\mapsto \sin^p t\cos^q t,(p,q)\in\mathbb{N}^2$

- Si p ou q est impair (par exemple p) :

On écrit : $\sin^p t\cos^q t=\sin t\left(\sin^2 t\right)^{\frac{p-1}{2}}\cos^q t=\sin t\left(1-\cos^2 t\right)^{\frac{p-1}{2}}\cos^q t$, puis on effectue un changement de variable, en posant $x=\cos t$.

Exemple 6

Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 t\cos^5 t\,dt$.

Réponse

Pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a :

$\sin^3 t\cos^5 t=\sin t\left(1-\cos^2 t\right)\cos^5 t=\left(\cos^5 t-\cos^7 t\right)\sin t$.

On effectue un changement de variable, en posant $x=\cos t$, la fonction cos étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\cos(0)=1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $dx=-\sin t\,dt$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 t\cos^5 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^5 t-\cos^7 t\right)\sin t\,dt=\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x^5-x^7\right)(-1)dx$$

$$=\left[-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{8}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{11}{384}.$$

Remarque : Dans cet exemple les deux exposants sont impairs. On aurait également pu écrire :

$\sin^3 t\cos^5 t=\sin^3 t\left(1-\sin^2 t\right)^2\cos t=\left(\sin^3 t-2\sin^5 t+\sin^7 t\right)\cos t$

puis effectuer un changement de variable en posant $x=\sin t$.

- Si p et q sont pairs :

On linéarise l'expression.

Exemple 7

Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^4 t \, \mathrm{d}t$.

Réponse

On linéarise $\sin^2 t \cos^4 t$:

$$\begin{aligned}
\sin^2 t \cos^4 t &= \left(\frac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2i}\right)^2\left(\frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2}\right)^4\\
&= \frac{-1}{2^6}\left(\mathrm{e}^{2it}-2+\mathrm{e}^{-2it}\right)\left(\mathrm{e}^{4it}+4\mathrm{e}^{2it}+6+4\mathrm{e}^{-2it}+\mathrm{e}^{-4it}\right)\\
&= \frac{-1}{2^6}\Big(\mathrm{e}^{6it}+4\mathrm{e}^{4it}+6\mathrm{e}^{2it}+4+\mathrm{e}^{-2it}-2\mathrm{e}^{4it}-8\mathrm{e}^{2it}-12-8\mathrm{e}^{-2it}\\
&\qquad -2\mathrm{e}^{-4it}+\mathrm{e}^{2it}+4+6\mathrm{e}^{-2it}+4\mathrm{e}^{-4it}+\mathrm{e}^{-6it}\Big)\\
&= \frac{-1}{2^5}\left(\cos(6t)+2\cos(4t)-\cos(2t)-2\right).
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^4 t \, \mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{2^5}\left(\cos(6t)+2\cos(4t)-\cos(2t)-2\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{-1}{2^5}\left[\frac{\sin(6t)}{6}+\frac{\sin(4t)}{2}-\frac{\sin(2t)}{2}-2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{32}.
\end{aligned}$$

■ Intégrer une fonction rationnelle

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples, puis on primitive chaque terme.

Pour les éléments simples de la forme $\dfrac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}$, on fait apparaître la dérivée d'un logarithme, et celle d'une Arctangente :

$$\begin{aligned}
\frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta} &= \frac{a}{2}\times\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}+\frac{b-\frac{a\alpha}{2}}{x^2+\alpha x+\beta}\\
&= \frac{a}{2}\times\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}+\frac{b-\frac{a\alpha}{2}}{\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}+\beta}.
\end{aligned}$$

Le premier terme est la dérivée d'un logarithme ; pour intégrer le second terme, on met le dénominateur sous forme canonique, on fait un changement de variable affine en posant $t = x + \frac{\alpha}{2}$, puis on utilise le résultat suivant :

$$\boxed{\forall c \in \mathbb{R}^*, \int \frac{1}{c^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{c}\right) + C^{te}}.$$

Exemple 8

Calculer : $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^5+t^3+t+2}{t^2\left(t^2+t+1\right)}\mathrm{d}t$.

Réponse

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{t^5+t^3+t+2}{t^2\left(t^2+t+1\right)}$ est :

$$\frac{t^5+t^3+t+2}{t^2\left(t^2+t+1\right)} = t-1-\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}+\frac{2t}{t^2+t+1}.$$

On écrit : $\displaystyle\frac{2t}{t^2+t+1} = \frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$.

On a :

$$\int_1^2\left(t-1-\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}+\frac{2t+1}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2 - t - \ln(|t|) - \frac{2}{t} + \ln\left(\left|t^2+t+1\right|\right)\right]_1^2 = \frac{3}{2}+\ln\left(\frac{7}{6}\right).$$

Considérons maintenant $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t$:

On effectue un changement de variable, en posant $x = t + \frac{1}{2}$, la fonction affine étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, on obtient :

$$\int_1^2 \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right).$$

Finalement, $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^5+t^3+t+2}{t^2\left(t^2+t+1\right)}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}+\ln\left(\frac{7}{6}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$.

On s'échauffe

1. Calculer les intégrales suivantes, en déterminant une primitive :

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+2t)^3}\,\mathrm{d}t$

b. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\left(1-t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t$

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$

d. $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{3t}\sin(5t)\,\mathrm{d}t$

e. $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$

f. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{t}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t$

2. Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties :

a. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(2t)\,\mathrm{d}t$

b. $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2\sin t\,\mathrm{d}t$

c. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

d. $\displaystyle\int_0^2 \left(t^2+t\right)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$

e. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln t\,\mathrm{d}t,\ n\in\mathbb{N}.$

f. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$

À vous !

3. Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'un changement de variable :

a. $\displaystyle\int_{-3}^{1} \frac{1}{t^2+2t+5}\mathrm{d}t$

b. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$

c. $\displaystyle\int_{0}^{u} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t,\ u\in\mathbb{R}.$

d. $\displaystyle\int_{0}^{u} \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t,\ u\in\mathbb{R}.$

e. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1}{t+t(\ln t)^2}\mathrm{d}t$

f. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \sin(\ln t)\mathrm{d}t$

4. Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\,\mathrm{d}t$

b. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$

c. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$

d. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^4-1}\mathrm{d}t$

e. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^3}{(t^2+1)(t+1)}\mathrm{d}t$

f. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{-t^2+t-1}\mathrm{d}t$

On accélère

5. Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^2 (1-|1-t|)^3 \,\mathrm{d}t$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \,\mathrm{d}t$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \sin^2 t \,\mathrm{d}t$

d. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t$

e. $\int_0^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} \,\mathrm{d}t$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 t + 3\cos^2 t} \,\mathrm{d}t$

g. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^2 t - \cos^2 t} \,\mathrm{d}t$

h. $\int_0^{2\pi} \sin^3(3t)\cos(5t) \,\mathrm{d}t$

i. $\int_1^{2} \frac{1}{t+\sqrt{t-1}} \,\mathrm{d}t$

On finit au top

6. Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos t} \,\mathrm{d}t$

b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1-\cos t} \,\mathrm{d}t$

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\mathrm{d}t$

d. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}\mathrm{d}t$

e. $\displaystyle\int_0^{15} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt[4]{1+t}}{\sqrt{1+t}+\sqrt[4]{1+t}}\mathrm{d}t$

f. $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}\mathrm{d}t$

g. $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^2 t\times\sqrt{-t^2+3t-2}\,\mathrm{d}t$

h. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2+2t+2}}\mathrm{d}t$

1. **a.** $\int_0^1 \frac{1}{(1+2t)^3}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{4(1+2t)^2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}$.

b. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\left(1-t^2\right)^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2\left(1-t^2\right)}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$.

c. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$.

d. $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{3t}\sin(5t)\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(3+5i)t}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(3+5i)t}}{3+5i}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{5\left(\mathrm{e}^{3\pi}+1\right)}{34}$.

e. $\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$.

f. $$\int_{-1}^0 \frac{t}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}\times\frac{2t+2}{t^2+2t+2} - \frac{1}{(t+1)^2+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{1}{2}\ln\left(t^2+2t+2\right) - \mathrm{Arc}\tan(t+1)\right]_{-1}^0 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

2. **a.** On pose $u(t)=t, v(t)=-\frac{1}{2}\cos(2t)$; u et v sont des fonctions de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc le théorème d'intégration par parties s'applique et l'on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(2t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}t\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

b. On pose $u(t)=t^2, v(t)=-\cos t$; u et v sont des fonctions de classe C^1 sur $[0,\pi]$, donc le théorème d'intégration par parties s'applique et l'on a :

$$\int_0^{\pi} t^2\sin t\,\mathrm{d}t = \left[-t^2\cos t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -2t\cos t\,\mathrm{d}t = \pi^2 + 2\int_0^{\pi} t\cos t\mathrm{d}t\ .$$

On a montré dans l'**exemple 1** que $\int_0^{\pi} t\cos t\,\mathrm{d}t=-2$.

On a donc : $\int_0^{\pi} t^2\sin t\,\mathrm{d}t=\pi^2-4$.

c. On pose $u(t)=\ln t, v(t)=\dfrac{-1}{t}$; u et v sont de classe C^1 sur $[1,2]$, donc le théorème d'intégration par parties s'applique et l'on a :

$$\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^2+\int_1^2\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\ln(2)+\left[\frac{-1}{t}\right]_1^2=-\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}.$$

d. On pose $u(t)=t^2+t, v(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$; u et v sont de classe C^1sur $[0,2]$, donc le théorème d'intégration par parties s'applique et l'on a :

$$\begin{aligned}\int_0^2\left(t^2+t\right)\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t&=\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\left(t^2+t\right)\right]_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2(2t+1)\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t\\&=3\mathrm{e}^4-\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t-\int_0^2 t\,\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, on pose $w(t)=t, v(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$; w et v sont de classe C^1 sur $[0,2]$, donc le théorème d'intégration par parties s'applique, et l'on a : $\int_0^2 t\,\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{2t}\right]_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t.$

Finalement, $\int_0^2\left(t^2+t\right)\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t=2\mathrm{e}^4$.

e. On pose $u(t)=\ln t, v(t)=\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$; u et v sont de classe C^1 sur $[1,\mathrm{e}]$, donc le théorème d'intégration par parties s'applique et l'on a :

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} t^n\ln t\,\mathrm{d}t&=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{n+1}\int_1^{\mathrm{e}} t^{n+1}\times\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}}\\&=\frac{n\mathrm{e}^{n+1}+1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

f. On pose $u(t)=(\ln t)^2, v(t)=t$; u et v sont de classe C^1 sur $[1,\mathrm{e}]$, donc le théorème d'intégration par parties s'applique et l'on a :

$$\int_1^e (\ln t)^2 \,dt = \left[t(\ln t)^2\right]_1^e - \int_0^e 2\ln t \times \frac{1}{t} \times t dt = e - 2\int_0^e \ln t dt$$

$$= e - 2\left[t\ln t - t\right]_1^e = e - 2.$$

Remarque : $t \mapsto t\ln t - t$ est une primitive connue de la fonction ln ; pour la retrouver on applique le théorème d'intégration par parties avec $u(t) = \ln t, v(t) = t$.

3. a. $\displaystyle\int_{-3}^1 \frac{1}{t^2+2t+5} dt = \int_{-3}^1 \frac{1}{(t+1)^2+4} dt$.

On effectue un changement de variable, en posant $x = t+1$, la fonction affine étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $dt = dx$, on obtient :

$$\int_{-3}^1 \frac{1}{t^2+2t+5} dt = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2+4} dt = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^2 = \frac{\pi}{4}.$$

b. On effectue un changement de variable, en posant $x = \sin t$, la fonction sin étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\sin(0) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $dx = \cos t \,dt$,

on obtient : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 t} \times \cos t \,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\operatorname{Arctan} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

c. On effectue un changement de variable, en posant $x = e^t$, c'est-à-dire $t = \ln x$, la fonction ln étant de classe C^1 sur $]0,+\infty[$; avec $\ln(1) = 0$, $\ln(e^u) = u$ et $dt = \frac{1}{x} dx$, on obtient :

$$\int_0^u \frac{1}{1+e^t} dt = \int_1^{e^u} \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{x} dx = \int_1^{e^u} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \left[\ln(|x|) - \ln(|x+1|)\right]_1^{e^u} = u - \ln(1+e^u) + \ln(2).$$

d. On effectue un changement de variable, en posant $x = e^t$, c'est-à-dire $t = \ln x$, la fonction ln étant de classe C^1 sur $]0,+\infty[$; avec $\ln(1) = 0$, $\ln(e^u) = u$ et $dt = \frac{1}{x} dx$, on obtient :

$$\int_0^u \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,dt = \int_1^{e^u} \frac{x^2}{1+x} \times \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{e^u} \frac{x}{1+x}\,dx = \int_1^{e^u} \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \left[x - \ln(|1+x|)\right]_1^{e^u} = e^u - \ln\left(1+e^u\right) - 1 + \ln(2).$$

e. On effectue un changement de variable, en posant $x = \ln t$, c'est-à-dire $t = e^x$, la fonction exp étant de classe C^1 sur $[1,e]$; avec $e^0 = 1$, $e^1 = e$ et $dt = e^x dx$, on obtient :

$$\int_1^e \frac{1}{t + t(\ln t)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{e^x\left(1+x^2\right)} \times e^x\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{Arc}\tan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

f. On effectue un changement de variable, en posant $x = \ln t$, c'est-à-dire $t = e^x$, la fonction exp étant de classe C^1 sur $[1,e]$; avec $e^0 = 1$, $e^1 = e$ et $dt = e^x dx$, on obtient :

$$\int_1^e \sin(\ln t)\,dt = \int_0^1 \sin x \times e^x\,dx = \operatorname{Im}\left(\int_0^1 e^{(1+i)x}\,dx\right) = \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e\cos(1) + e\sin(1)\right).$$

4. a. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t\right)^2 \cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 t\right)^2 \cos t\,dt.$

On effectue un changement de variable, en posant $x = \sin t$, la fonction sinus étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; avec $\sin(0)=0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $dx = \cos t\,dt$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 t\right)^2 \cos t\,dt = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^2 dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^2 + 1\right)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

b. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\sin^2 t\right)\sin^2 t \cos t\,\mathrm{d}t$.

On effectue un changement de variable, en posant $x=\sin t$, la fonction sinus étant de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$; avec $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$, on obtient :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t \sin^2 t\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{\substack{\text{la fonction}\\ \text{est paire}}} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\sin^2 t\right)\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1-x^2\right)x^2\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{60}.$$

c. On a : $\sin^2 t\cos^2 t = \frac{1}{4}\sin^2(2t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos(4t)}{2}\right)$ (avec les formules de trigonométries usuelles, mais on peut également trouver ce résultat en utilisant les formules d'Euler !).

On a donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1-\cos(4t)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left[t-\frac{1}{4}\sin(4t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{64}.$$

d. La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{t^4-1}$ donne : $\frac{1}{t^4-1} = \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)} - \frac{1}{2\left(t^2+1\right)}$.

On a donc :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^4-1}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)} - \frac{1}{2\left(t^2+1\right)}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\left[\frac{1}{4}\ln\left(|t-1|\right) - \frac{1}{4}\ln\left(|t+1|\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} t\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{\ln(3)}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right).$$

e. La décomposition en éléments simples de $\dfrac{t^3}{(t^2+1)(t+1)}$ donne :

$$\frac{t^3}{(t^2+1)(t+1)}=1-\frac{1}{2(t+1)}-\frac{1+t}{2(t^2+1)}.$$

On écrit $\dfrac{1+t}{t^2+1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2t}{t^2+1}+\dfrac{1}{t^2+1}$.

On a donc :

$$\int_0^1\frac{t^3}{(t^2+1)(t+1)}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2(t+1)}-\frac{2t}{4(t^2+1)}-\frac{1}{2(1+t^2)}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\left[t-\frac{1}{2}\ln(|t+1|)-\frac{1}{4}\ln(t^2+1)-\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tan} t\right]_0^1$$

$$=1-\frac{3}{4}\ln(2)-\frac{\pi}{8}.$$

f. $$\int_{-1}^1\frac{t}{-t^2+t-1}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{-2t+1}{-t^2+t-1}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t.$$

Dans la deuxième intégrale, on effectue un changement de variable, en posant $x=t-\dfrac{1}{2}$, la fonction affine est de classe C^1 sur $[-1,1]$; avec $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, on obtient :

$$\int_{-1}^1\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\operatorname{Arc\,tan}\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}.$$

Finalement,

$$\int_{-1}^1\frac{t}{-t^2+t-1}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{-2t+1}{-t^2+t-1}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln(|-t^2+t-1|)\Big]_{-1}^1-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}=\frac{\ln(3)}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}.$$

5. **a.** On applique la relation de Chasles pour « enlever » les valeurs absolues :

$$\int_0^2 \left(1-|1-t|\right)^3 \mathrm{d}t = \int_0^1 t^3 \mathrm{d}t + \int_1^2 (2-t)^3 \mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 + \left[-\frac{(2-t)^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

b. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t} \mathrm{d}t = \left[-\ln(|\cos t|)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln(2).$$

c. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cos(2t)\mathrm{d}t.$$

Considérons $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cos(2t)\mathrm{d}t$:

On pose $u(t)=t^2, v(t)=\frac{1}{2}\sin(2t)$; u et v sont de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, donc le théorème d'intégration par parties s'applique et l'on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cos(2t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2 \sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \sin(2t)\mathrm{d}t.$$

Dans la deuxième intégrale, on pose $w(t)=t, z(t)=-\frac{1}{2}\cos(2t)$; w et z sont de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, donc le théorème d'intégration par parties s'applique et l'on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \sin(2t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}t\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}.$$

Finalement, $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^3}{384} - \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{8}.$$

d. On effectue un changement de variable, en posant $t=\sin x$, la fonction sin étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\sin(0)=0$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ et $\mathrm{d}t=\cos x \,\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cos x \,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{\cos x > 0 \\ \text{sur } \left[0,\frac{\pi}{6}\right]}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\cos x \,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

e. On effectue un changement de variable, en posant $t = \operatorname{sh} x$, la fonction sh étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\operatorname{sh}(0) = 0$, $\operatorname{sh}(\alpha) = 1$ (on calculera α plus loin…), et $dt = \operatorname{ch} x \, dx$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^\alpha \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(x)}} \operatorname{ch} x \, dx \underset{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}{=} \int_0^\alpha \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)}} \operatorname{ch} x \, dx$$

$$\underset{\operatorname{ch} x > 0}{=} \int_0^\alpha \operatorname{sh}^2(x) dx = \int_0^\alpha \left(\frac{\operatorname{ch}(2t) - 1}{2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh}(2t) - t \right]_0^\alpha = \frac{1}{4} \operatorname{sh}(2\alpha) - \frac{1}{2} \alpha.$$

On a : $\operatorname{sh}(\alpha) = \dfrac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = 1$, donc α est tel que e^α est la solution positive de $x^2 - 2x - 1 = 0$, on a donc : $\alpha = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

D'autre part, $\operatorname{sh}(2\alpha) = 2\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\alpha) = 2\operatorname{sh}(\alpha)\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\alpha)} = 2\sqrt{2}$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$.

f. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 t + 3\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t \left(\tan^2 t + 3\right)} dt$.

On effectue un changement de variable, en posant $x = \tan t$, la fonction tan étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; avec $\tan(0) = 0$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $dx = \dfrac{1}{\cos^2 t} dt$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 t + 3} \times \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$

g. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^2 t - \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 t \left(\tan^2 t - 1\right)} dt$.

On effectue un changement de variable, en posant $x=\tan t$, la fonction tan étant de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$; avec $\tan(0)=0$, $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\tan^2 t-1}\times\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{x^2-1}dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ln(|x-1|)-\ln(|x+1|)\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(2-\sqrt{3}\right).$$

h. La fonction $t\mapsto\sin^3(3t)\cos(5t)$ est 2π - périodique et impaire, on a donc :

$$\int_0^{2\pi}\sin^3(3t)\cos(5t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3(3t)\cos(5t)dt=0.$$

Remarque : Il est parfois inutile de faire de longs calculs !

i. On effectue un changement de variable, en posant $x=\sqrt{t-1}$, c'est-à-dire $t=x^2+1$, la fonction carrée étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $dt=2xdx$, on obtient :

$$\int_1^2\frac{1}{t+\sqrt{t-1}}dt=\int_0^1\frac{1}{x^2+1+x}\times 2xdx=\int_0^1\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$=\Big[\ln\left(x^2+x+1\right)\Big]_0^1-\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\ln(3)-\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\underset{u=x+\frac{1}{2}}{=}\ln(3)-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\ln(3)-\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=\ln(3)-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

6. **Remarque :** Dans les deux premiers calculs, on va utiliser les formules de trigonométrie :

$1+\cos t=2\cos^2\frac{t}{2}$ et $1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$ (qu'il faut toujours avoir en tête !!).

a. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \left[\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\,.$

b. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|\mathrm{d}t\,.$

⚠ N'oubliez pas que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$; il faut ensuite « enlever » les valeurs absolues en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\left(-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(-\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_{0}^{\pi}\right) = 4\sqrt{2}-2.$$

c. *Méthode 1* (avec une intégration par parties) :

On pose $u(t)=t, v(t)=-\dfrac{1}{2\left(1+t^2\right)}$; u et v sont de classe C^1 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, donc le théorème d'intégration par parties s'applique et l'on a :

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2\left(1+t^2\right)} \times t\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Méthode 2 (à l'aide d'un changement de variable) :

On effectue un changement de variable, en posant $t = \tan x$, la fonction tan étant de classe C^1 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$; avec $\tan(0)=0$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ et $\mathrm{d}t = \left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2(x)\left(1+\tan^2(x)\right)}{\left(1+\tan^2(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{1+\tan^2(x)}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \cos^2(x)\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Remarque : Ce changement de variable peut paraître surprenant, mais il est assez fréquent quand on a $\left(1+t^2\right)^n$ au dénominateur d'une fraction. La dérivée qui donne $\mathrm{d}t = \left(1+\tan^2(x)\right)\mathrm{d}x$, et la formule de trigonométrie $\frac{1}{1+\tan^2(x)} = \cos^2(x)$ permettent de se ramener à des polynômes de fonctions trigonométriques.
De plus, la fonction tangente étant bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$, ce changement de variable peut se faire quel que soit l'intervalle d'intégration.

d. On effectue un changement de variable, en posant $t = \tan x$, la fonction tan étant de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$; avec $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $\mathrm{d}t = \left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2} \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{\left(1+\tan^2 x\right)^2} \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2x)}{2} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

e. On effectue un changement de variable, en posant $x = \sqrt[4]{1+t}$, c'est-à-dire $t = x^4 - 1$, la fonction polynomiale étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\mathrm{d}t = 4x^3\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\int_0^{15}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt[4]{1+t}}{\sqrt{1+t}+\sqrt[4]{1+t}}\mathrm{d}t=\int_1^2\frac{x^2-x}{x^2+x}\times 4x^3\mathrm{d}x=4\int_1^2\frac{x^4-x^3}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_1^2\left(x^3-2x^2+2x-2+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=4\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x^2-2x+2\ln(|x+1|)\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+8\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

f. On effectue un changement de variable, en posant $x=\sqrt[3]{t}$, c'est-à-dire $t=x^3$, la fonction « cube » étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x$, on obtient : $\displaystyle\int_1^8\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}\mathrm{d}t=\int_1^2\frac{3x^2}{x\sqrt{x}+x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{3x}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$.

On effectue un changement de variable, en posant $u=\sqrt{x}$, c'est-à-dire $x=u^2$, la fonction « carré » étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$, on obtient :

$$\int_1^2\frac{3x}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{3u^2}{u+1}\times 2u\mathrm{d}u=6\int_1^{\sqrt{2}}\left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$=6\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln(|1+u|)\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=10\sqrt{2}-11+6\ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{2}}\right)=10\sqrt{2}-11+6\ln\left(2\sqrt{2}-2\right).$$

g. $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^2 t\times\sqrt{-t^2+3t-2}\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{3}{2}}^2 t\times\sqrt{\frac{1}{4}-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2}\mathrm{d}t=\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{t}{2}\times\sqrt{1-(2t-3)^2}\,\mathrm{d}t.$

On effectue un changement de variable, en posant $x=2t-3$, la fonction affine étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^2 t\times\sqrt{1-(2t-3)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x+3}{2}\sqrt{1-x^2}\times\frac{1}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\left(\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+3\underbrace{\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x}_{\text{calculé dans l'exemple 4}}\right)$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{2} t\times\sqrt{1-(2t-3)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(\left[-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+3\times\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{24}+\frac{3\pi}{32}.$$

h. $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2+2t+2}}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{(t+1)\sqrt{(t+1)^2+1}}\,\mathrm{d}t$.

On effectue un changement de variable, en posant $x=t+1$, la fonction affine étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, on obtient :

$$\int_0^1\frac{1}{(t+1)\sqrt{(1+t)^2+1}}\,\mathrm{d}t=\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

On effectue un changement de variable, en posant $x=\operatorname{sh}u$, la fonction sh étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\operatorname{sh}(\alpha)=1$ (α a été déterminé dans l'**exercice 5.e**), $\operatorname{sh}(\beta)=2$ (on calculera β plus loin…) et $\mathrm{d}x=\operatorname{ch}u\,\mathrm{d}u$, on obtient :

$$\int_\alpha^\beta\frac{1}{\operatorname{sh}u\sqrt{\operatorname{sh}^2u+1}}\times\operatorname{ch}u\,\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\operatorname{sh}u\sqrt{\operatorname{ch}^2u}}\times\operatorname{ch}u\,\mathrm{d}u\underbrace{=}_{\operatorname{ch}u>0}\int_\alpha^\beta\frac{1}{\operatorname{sh}u}\,\mathrm{d}u.$$

On a : $\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{1}{\operatorname{sh}u}\,\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\frac{2}{\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\frac{2\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^{2u}-1}\,\mathrm{d}u$.

On effectue un changement de variable, en posant $v=\mathrm{e}^u$, la fonction exp étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; avec $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\frac{2}{\mathrm{e}^{2u}-1}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u=\int_{\mathrm{e}^\alpha}^{\mathrm{e}^\beta}\frac{2}{v^2-1}\,\mathrm{d}v&=\int_{\mathrm{e}^\alpha}^{\mathrm{e}^\beta}\left(\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v+1}\right)\mathrm{d}v\\&=\Big[\ln(|v-1|)-\ln(|v+1|)\Big]_{\mathrm{e}^\alpha}^{\mathrm{e}^\beta}.\end{aligned}$$

On a montré dans l'**exercice 5.e.** que $\mathrm{e}^\alpha=1+\sqrt{2}$.

β est tel que $\dfrac{\mathrm{e}^\beta-\mathrm{e}^{-\beta}}{2}=2$, donc e^β est la solution positive de $x^2-4x-1=0$, d'où $\mathrm{e}^\beta=2+\sqrt{5}$.

Finalement,

$$\int_0^1\frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2+2t+2}}\,\mathrm{d}t=\ln\left(1+\sqrt{5}\right)-\ln\left(3+\sqrt{5}\right)-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\ln\left(2+\sqrt{2}\right).$$

Équations différentielles linéaires

La résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre et des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants fait l'objet du programme de mathématiques en première année et se révèle indispensable aux autres disciplines scientifiques. C'est un sujet incontournable.

Avant de faire cette fiche, il faut maîtriser celle du calcul d'intégrales.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I désigne un **intervalle**.

Je vous montre comment

■ Résoudre une équation différentielle homogène du premier ordre

Soit $(H): ay'+by=0$, une équation différentielle linéaire homogène (a et b étant des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, a ne s'annulant par sur I). Alors l'ensemble est solutions de (H) sur I est : $S_H=\left\{\varphi : I \to \mathbb{K}, x \mapsto Ce^{-\int \frac{b}{a}}, C \in \mathbb{K}\right\}$ où $\int \frac{b}{a}$ désigne une primitive de $\frac{b}{a}$.

Pour résoudre (H), on est donc ramené à la recherche d'une primitive de $\frac{b}{a}$.

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (H): $y'+xy=0$.

Réponse

On a : $-\int x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}+K, K \in \mathbb{R}$, donc $S_H=\left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{-\frac{x^2}{2}}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

■ Résoudre une équation différentielle du premier ordre

> Soient $(L): ay'+by=c$ une équation différentielle linéaire, (*a*, *b* et *c* étant des fonctions continues de *I* dans $\mathbb{K}$, *a* ne s'annulant par sur un intervalle *I*), et $(H): ay'+by=0$ l'équation homogène associée.
>
> Si y_p est une solution particulière de (L), l'ensemble des solutions de (L) est : $S_L=\left\{\varphi: I\to\mathbb{K}, x\mapsto h(x)+y_p(x), h\in S_H\right\}$, où S_H est l'ensemble des solutions de (*H*).

Lorsqu'il n'apparaît aucune solution évidente, on dispose d'une méthode systématique pour trouver une solution particulière appelée méthode de **variation de la constante** :

Après avoir résolu l'équation différentielle homogène (*H*), on cherche une solution de (*L*) sous la forme $y_p=zh$ où *z* est une fonction dérivable sur *I*, et *h* est une solution non nulle de (*H*) (on prend celle pour laquelle la constante *C* vaut 1).

On a alors :

$$\left(y_p\in S_L\right)\Leftrightarrow\left(a(z'h+zh')+bzh=c\right)\Leftrightarrow\left(az'h+z\underbrace{(ah'+bh)}_{\substack{0\\ \text{car } h\in S_H}}=c\right)\Leftrightarrow\left(z'=\frac{c}{ah}\right).$$

> **Remarque :** On peut diviser par ah, car on a supposé que *a* ne s'annule pas sur *I*, et *h* étant une solution (non nulle !) de (*H*), c'est une fonction de la forme e^u qui ne s'annule pas.

On ramène donc le problème à la recherche d'une primitive de $\frac{c}{ah}$.

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (L): $y'+2y=x^2e^{-2x}$.

Réponse

On note (H): $y'+2y=0$, l'équation homogène.
On a : $-\int 2\,dx=-2x+K, K\in\mathbb{R}$, donc $S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto Ce^{-2x}, C\in\mathbb{R}\right\}$.
On cherche une solution de (*L*) sous la forme $y_p=zh$ avec, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=e^{-2x}$.

> **Remarque :** Il est préférable dans un premier temps de garder la notation *h* plutôt que de la remplacer par sa forme explicite, car l'expression se simplifie du

fait de l'appartenance de h à S_H, et dériver réellement h apporte une source d'erreur inutile !

$$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(z'h + zh' + 2zh = x^2 e^{-2x}\right) \Leftrightarrow \left(z'h + z\underbrace{(h'+2h)}_{\substack{0 \\ \text{car } h \in S_H}} = x^2 e^{-2x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(z' = x^2\right) \Leftrightarrow \left(z = \frac{x^3}{3} + C, C \in \mathbb{R}\right).$$

Remarque : On a ici usé d'un abus de notation.

Au lieu d'écrire :

$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, z'(x)h(x) + z(x)h'(x) + 2z(x)h(x) = x^2 e^{-2x}\right)$,

on a écrit : $\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(z'h + zh' + 2zh = x^2 e^{-2x}\right)$.

On tolère un tel abus, sans quoi les expressions seraient difficiles à lire.

⚠ On veut $y_p = zh$, on a déterminé z, il ne faut pas oublier de la multiplier par h !

$$S_L = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-2x}\left(C + \frac{x^3}{3}\right), C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Remarque : La méthode de variation de la constante est très performante (à condition de savoir calculer des primitives !). Mais il ne faut pas oublier que l'on cherche une solution particulière de l'équation différentielle, et que parfois il peut y en avoir une qui apparait clairement, parfois sans calcul !

Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (L): $\left(1+x^2\right)y' - y = 1$.

Réponse

On note (H): $\left(1+x^2\right)y' - y = 0$, l'équation homogène.

On a : $-\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctan}(x) + K, K \in \mathbb{R}$,

donc $S_H = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{\operatorname{Arctan}(x)}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

$y_p : x \mapsto -1$ est clairement solution de (L).

On a donc : $S_L = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{\operatorname{Arctan}(x)} - 1, C \in \mathbb{R}\right\}$.

■ Résoudre une équation différentielle homogène du deuxième ordre

Soit $(H): y''+ay'+by=0$, où $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ une équation différentielle homogène du deuxième ordre.

On note $(EC): r^2+ar+b=0$ son **équation caractéristique**.

▶ Résolution dans $\mathbb{C}$:

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors : $S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, x\mapsto Ae^{r_1 x}+Be^{r_2 x}, (A,B)\in\mathbb{C}^2\right\}$.
- Si l'équation caractéristique admet une solution double r_0, alors : $S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, x\mapsto (Ax+B)e^{r_0 x}, (A,B)\in\mathbb{C}^2\right\}$.

▶ Résolution dans $\mathbb{R}$:

- Si l'équation caractéristique a une ou deux solutions réelles, l'ensemble des solutions est le même que dans le cas complexe (avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$).
- Si l'équation caractéristique a deux solutions distinctes complexes (conjuguées) $\alpha+i\beta$ et $\alpha-i\beta$, alors : $S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)\right), (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Exemple 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(H): 2y''-2y'+y=0$.

Réponse

L'équation caractéristique est (EC): $2r^2-2r+1=0$.

Remarque : Pour obtenir la forme de l'encadré, il faut diviser les deux membres de (H) par 2 ; toutefois les équations $2r^2-2r+1=0$ et $r^2-r+\frac{1}{2}=0$ étant équivalentes, on privilégie la première pour éviter des écritures fractionnaires.

Les solutions de (EC) sont : $r_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et $r_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. On en déduit l'ensemble des solutions :

Dans $\mathbb{C}$: $S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, x\mapsto e^{\frac{1}{2}x}\left(Ae^{\frac{ix}{2}}+Be^{-\frac{ix}{2}}\right), (A,B)\in\mathbb{C}^2\right\}$.

Dans $\mathbb{R}$: $S_H = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right), (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

■ Résoudre une équation différentielle du deuxième ordre

> Soient $(L): y'' + ay' + by = c$, une équation différentielle homogène du deuxième ordre ($(a,b) \in \mathbb{K}^2, c \in C^0(I, \mathbb{K})$), et $(H): y'' + ay' + by = 0$ l'équation homogène associée.
>
> Si y_p est une solution particulière de (L), l'ensemble des solutions de (L) est :
> $S_L = \left\{ \varphi : I \to \mathbb{K}, x \mapsto y_p(x) + h(x), h \in S_H \right\}$, où S_H est l'ensemble des solutions de (H).

▶ Si $(L): y'' + ay' + by = P(x)$, avec $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré n :

- Si $b \neq 0$, (L) admet pour solution une fonction polynomiale de degré n.

Exemple 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(L): y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1$.

Réponse

On note $(H): y'' + y' - 2y = 0$, l'équation homogène associée à (L).

L'équation caractéristique est $(EC): r^2 + r - 2 = 0$, dont les solutions sont 1 et -2.

On a donc : $S_H = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ae^x + Be^{-2x}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

$$\begin{aligned}
(y_p \in S_L) &\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, 2\alpha + 2\alpha x + \beta - 2\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = 2x^2 - 3x + 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left((-2\alpha = 2) \wedge (2\alpha - 2\beta = -3) \wedge (2\alpha + \beta - 2\gamma = 1)\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, $S_L = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + Ae^x + Be^{-2x}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- si $b = 0$ et $a \neq 0$, (L) admet pour solution une fonction polynomiale de degré $n + 1$ et de valuation 1 (c'est-à-dire dont le terme constant est nul).

Exemple 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(L): y''+2y'=3x^2$.

Réponse

On note $(H): y''+2y'=0$, l'équation homogène associée à (L).

L'équation caractéristique est $(EC): r^2+2r=0$, dont les solutions sont 0 et -2.

On a donc : $S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto A+Be^{-2x},(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

On cherche une solution particulière sous la forme : $y_p: x\mapsto \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x$.

$$\begin{aligned}(y_p\in S_L) &\Leftrightarrow \left(\forall x\in\mathbb{R}, 6\alpha x+2\beta+2\left(3\alpha x^2+2\beta x+\gamma\right)=3x^2\right)\\ &\Leftrightarrow \left((6\alpha=3)\wedge(6\alpha+4\beta=0)\wedge(2\beta+2\gamma=0)\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\forall x\in\mathbb{R}, y_p(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x\right).\end{aligned}$$

Finalement, $S_L=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x+A+Be^{-2x},(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

▶ Si $(L): y''+ay'+by=e^{mx}P(x)$, avec $m\in\mathbb{K}$ et $P\in\mathbb{K}[X]$, de degré n :

- si m n'est pas solution de l'équation caractéristique, alors (L) admet une solution de la forme $y_p: x\mapsto e^{mx}Q(x)$, où Q est un polynôme de degré n.

Exemple 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(L): y''+y=xe^x$.

Réponse

On note $(H): y''+y=0$, l'équation homogène associée à (L).

L'équation caractéristique est $(EC): r^2+1=0$, dont les solutions sont i et $-i$.

On a donc :

$S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto A\cos(x)+B\sin(x),(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p: x\mapsto(\alpha x+\beta)e^x$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $y_p'(x)=(\alpha x+\alpha+\beta)e^x$ et $y_p''(x)=(\alpha x+2\alpha+\beta)e^x$.
Alors,

$$\begin{aligned}(y_p\in S_L) &\Leftrightarrow \left(\forall x\in\mathbb{R}, (\alpha x+2\alpha+\beta+\alpha x+\beta)e^x=xe^x\right)\\ &\Leftrightarrow \left((2\alpha=1)\wedge(2\alpha+2\beta=0)\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}, y_p(x)=\frac{1}{2}(x-1)e^x\right).\end{aligned}$$

Finalement, $S_L = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)e^x + A\cos(x) + B\sin(x), (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

- si m est solution simple de l'équation caractéristique, alors (*L*) admet une solution de la forme $y_p : x \mapsto e^{mx} x Q(x)$, où Q est un polynôme de degré n.

Exemple 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(L) : y'' - y = (x+2)e^{-x}$.

Réponse

On note $(H) : y'' - y = 0$, l'équation homogène associée à (*L*).

L'équation caractéristique est $(EC) : r^2 - 1 = 0$, dont les solutions sont 1 et -1.

On a donc : $S_H = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ae^x + Be^{-x}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

On cherche une solution particulière sous la forme :

$y_p : x \mapsto (\alpha x + \beta) x e^{-x} = \left(\alpha x^2 + \beta x\right)e^{-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $y_p'(x) = \left(-\alpha x^2 + (2\alpha - \beta)x + \beta\right)e^{-x}$

et $y_p''(x) = \left(\alpha x^2 + (\beta - 4\alpha)x + 2\alpha - 2\beta\right)e^{-x}$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\left(y_p \in S_L\right) &\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, (-4\alpha x + 2\alpha - 2\beta)e^{-x} = (x+2)e^{-x}\right) \\
&\Leftrightarrow \left((-4\alpha = 1) \wedge (2\alpha - 2\beta = 2)\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = -\frac{1}{4}\left(x^2 + 5x\right)e^{-x}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, $S_L = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + B\right)e^{-x} + Ae^x, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

- si m est solution double de l'équation caractéristique, alors (*L*) admet une solution de la forme $y_p : x \mapsto e^{mx} x^2 Q(x)$, où Q est un polynôme de degré n.

Exemple 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(L) : y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

Réponse

On note $(H) : y'' + 2y' + y = 0$, l'équation homogène associée à (*L*).

L'équation caractéristique est $(EC) : r^2 + 2r + 1 = 0$, dont l'unique solution est -1.

On a donc :

$S_H = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (Ax+B)\mathrm{e}^{-x}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha x^2 \mathrm{e}^{-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$y_p{}'(x) = \left(-\alpha x^2 + 2\alpha x\right)\mathrm{e}^{-x}$ et $y_p{}''(x) = \left(\alpha x^2 - 4\alpha x + 2\alpha\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Alors, $\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, 2\alpha \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x}\right)$.

Finalement, $S_L = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(\dfrac{x^2}{2} + Ax + B\right)\mathrm{e}^{-x}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On s'échauffe

1. Déterminer les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

a. $y'' - 2y' + y = xe^{x}$

b. $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$

c. $y'' - 5y' + 6y = 1 + x^{2}$

d. $y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}$

e. $y'' - 4y' + 3y = xe^{x}$

f. $2y'' + y' = x^{2} + 1$

g. $y'' - 2\sqrt{2}y' + 4y = x + e^{\sqrt{2}x}$

2. Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes, sur l'intervalle I :

a. $y' - \dfrac{y}{x} = x^{2}$, $I =]0,+\infty[$.

b. $\left(1+e^{x}\right)y' + e^{x}y = 1 + e^{x}$, $I = \mathbb{R}$.

c. $y' + 2xy = xe^{x^{2}}$, $I = \mathbb{R}$.

d. $y' + 2y = x^{2}$, $I = \mathbb{R}$.

e. $(1-x)y' + y = x$, $I =]1;+\infty[$.

f. $x\left(1+x^{2}\right)y' + 2x^{2}y = 1$, $I =]0,+\infty[$.

g. $\left(1+x^{2}\right)y' - xy = \sqrt{1+x^{2}}$, $I = \mathbb{R}$.

3. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

a. $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = (x+1)e^{-3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y'' - 5y' = e^{5x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} (1-x)y' + y = 1 \\ y(2) = 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \left(e^x - 1\right)y' + e^x y = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x\left(1 + \left(\ln(x)\right)^2\right)y' + 2\ln(x)y = 1 \\ y(e) = 1 \end{cases}$

On accélère

4. Déterminer les solutions dans K des équations différentielles suivantes :

a. $5y'' - 4y' - y = x\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{K} = \mathbb{R}$.

b. $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$, $\mathrm{K} = \mathbb{R}$.

c. $y'' + y = x\sin(x)$, $\mathrm{K} = \mathbb{R}$.

d. $y'' + iy = \sin(x)$, $\mathrm{K} = \mathbb{C}$.

e. $y'' + y' + (-1+3i)y = e^x \sin(x)$, $\mathrm{K} = \mathbb{C}$.

5. Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes, sur l'intervalle I :

a. $(x-1)y' + xy = \sin(x)$, $I =]1, +\infty[$.

b. $\left(1 + \cos^2(x)\right)y' - \sin(2x)y = \cos(x)$, $I = \mathbb{R}$.

c. $\cos^2(x)y' + y = \tan(x)$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

d. $\left(1 + x^2\right)y' + 2xy = \sqrt{1+x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

e. $\tan(x)y' - y = \cos(x)$, $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On finit au top

6. Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + xe^x \\ y_2' = -y_1 + x \end{cases}$,

c'est-à-dire déterminer les fonctions y_1 et y_2 définies et dérivables sur $\mathbb{R}$,

vérifiant les deux égalités.

1. On notera (*L*) l'équation différentielle, (*H*) l'équation différentielle homogène associée, S_H l'ensemble des solutions de (*H*), et S_L l'ensemble des solutions de (*L*).

a. L'équation caractéristique est $(EC): r^2-2r+1=0$, dont l'unique solution est 1. On a donc :

$$S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto(Ax+B)e^x, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p: x\mapsto(\alpha x+\beta)x^2e^x$.

$$\left(y_p\in S_L\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R},(6\alpha x+2\beta)e^x=xe^x\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}, y_p(x)=\frac{1}{6}x^3e^x\right).$$

Finalement, $S_L=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\left(\frac{1}{6}x^3+Ax+B\right)e^x, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

b. L'équation caractéristique est $(EC): r^2-3r+2=0$, dont les solutions sont 1 et 2. On a donc : $S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto Ae^x+Be^{2x}, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p: x\mapsto\alpha xe^x$.

$$\left(y_p\in S_L\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R},-\alpha e^x=e^x\right)\Leftrightarrow(\alpha=-1)\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}, y_p(x)=-xe^x\right).$$

Finalement, $S_L=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto(-x+A)e^x+Be^{2x}, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

c. L'équation caractéristique est $(EC): r^2-5r+6=0$, dont les solutions sont 2 et 3. On a donc : $S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto Ae^{2x}+Be^{3x}, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p: x\mapsto\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

$$\begin{aligned}\left(y_p\in S_L\right)&\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R},2\alpha-5(2\alpha x+\beta)+6\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)=1+x^2\right)\\&\Leftrightarrow\left((6\alpha=1)\wedge(-10\alpha+6\beta=0)\wedge(2\alpha-5\beta+6\gamma=1)\right)\\&\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}, y_p(x)=\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{18}x+\frac{37}{108}\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$S_L=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{18}x+\frac{37}{108}+Ae^{2x}+Be^{3x}, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

d. L'équation caractéristique est $(EC): r^2+4r+13=0$, dont les solutions sont $-2+3i$ e t $-2-3i$. On a donc :

$$S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto e^{-2x}\left(A\cos(3x)+B\sin(3x)\right), (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \alpha e^{-2x}$.

⚠ -2 n'est pas solution de (EC)…

$$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, (4\alpha - 8\alpha + 13\alpha)e^{-2x} = e^{-2x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{1}{9}\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = \frac{1}{9}e^{-2x}\right).$$

Finalement,

$$S_L = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-2x}\left(\frac{1}{9} + A\cos(3x) + B\sin(3x)\right), (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

e. L'équation caractéristique est $(EC) : r^2 - 4r + 3 = 0$, dont les solutions sont 1 et 3. On a donc :

$$S_H = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ae^{x} + Be^{3x}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto (\alpha x + \beta)xe^{x}$.

$$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, (-4\alpha x + 2\alpha - 2\beta)e^{x} = xe^{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = -\frac{1}{4}\left(x^2 + x\right)e^{x}\right).$$

Finalement,

$$S_L = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + A\right)e^{x} + Be^{3x}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

f. L'équation caractéristique est (EC): $2r^2 + r = 0$, dont les solutions sont 0 et $-\frac{1}{2}$. On a donc : $S_H = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto A + Be^{-\frac{x}{2}}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

On cherche une solution particulière sous la forme :

$y_p : x \mapsto \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x.$

$$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, 3\alpha x^2 + (12\alpha + 2\beta)x + 4\beta + \gamma = x^2 + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x\right).$$

Finalement,

$$S_L = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + A + Be^{-\frac{x}{2}}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

g. L'équation caractéristique est (EC): $r^2-2\sqrt{2}r+4=0$, dont les solutions sont $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ et $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$. On a donc :

$$S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},x\mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\left(A\cos\left(\sqrt{2}x\right)+B\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right),(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Remarque : Le « second membre » est une somme de fonctions. On va appliquer le **principe de superposition des solutions**.

- On cherche une solution particulière de l'équation différentielle $(L_1): y''-2\sqrt{2}y'+4y=x$ sous la forme $y_{p_1}: x\mapsto \alpha x+\beta$.

$$\left(y_{p_1}\in S_{L_1}\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R},4\alpha x+4\beta-2\sqrt{2}\alpha=x\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R},y_{p_1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{8}\right).$$

- On cherche une solution particulière de l'équation différentielle $(L_2): y''-2\sqrt{2}y'+4y=\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}$ sous la forme $y_{p_2}: x\mapsto \alpha\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}$.

$$\left(y_{p_2}\in S_{L_2}\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R},(2\alpha-4\alpha+4\alpha)\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}=\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R},y_{p_2}(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\right).$$

Finalement,

$$S_L=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},x\mapsto\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{8}+\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\left(\frac{1}{2}+A\cos\left(\sqrt{2}x\right)+B\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right),(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

2. a. Résolvons l'équation homogène (H): $y'-\dfrac{y}{x}=0$.

On a $\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(|x|)+K,K\in\mathbb{R}$,

donc $S_H=\left\{\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R},x\mapsto Cx,C\in\mathbb{R}\right\}$.

Remarque : $\boxed{\forall x\in\,]0,+\infty[,\mathrm{e}^{\ln(x)}=x.}$

On cherche une solution de (L) sous la forme $y_p = zh$ avec, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $h(x) = x$.

$$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(z'h + zh' - \frac{zh}{x} = x^2\right) \Leftrightarrow \left(z'h + z\underbrace{\left(h' - \frac{h}{x}\right)}_{\substack{0 \\ \text{car } h \in S_H}} = x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (z' = x) \Leftrightarrow \left(z = \frac{1}{2}x^2 + C, C \in \mathbb{C}\right).$$

Finalement, $S_L = \left\{\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}x^3 + Cx, C \in \mathbb{R}\right\}$.

b. Résolvons l'équation homogène $(H) : \left(1+e^x\right)y' + e^x y = 0$.

On a : $-\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = -\ln\left(1+e^x\right) + K, K \in \mathbb{R}$,

donc $S_H = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C}{1+e^x}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

Remarque : $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}.}$

On cherche une solution de (L) sous la forme $y_p = zh$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

$$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(\left(1+e^x\right)\left(z'h + zh'\right) + e^x zh = 1+e^x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(1+e^x\right)z'h + z\underbrace{\left(\left(1+e^x\right)h' + e^x h\right)}_{\substack{0 \\ \text{car } h \in S_H}} = \left(1+e^x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(z' = 1+e^x\right) \Leftrightarrow \left(z = x + e^x + C, C \in \mathbb{C}\right).$$

Finalement, $S_L = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C + x + e^x}{1+e^x}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

c. Résolvons l'équation homogène $(H) : y'+2xy=0$.

On a : $-\int 2x\,\mathrm{d}x = -x^2+K, K\in\mathbb{R}$,

donc $S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto Ce^{-x^2}, C\in\mathbb{R}\right\}$.

On cherche une solution de (L) sous la forme $y_p=zh$ avec, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=e^{-x^2}$.

$$\left(y_p\in S_L\right)\Leftrightarrow\left(z'h+zh'+2xzh=xe^{x^2}\right)\Leftrightarrow\left(z'h+z\underbrace{(h'+2xh)}_{\substack{0\\ \text{car } h\in S_H}}=xe^{x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(z'=xe^{2x^2}\right)\Leftrightarrow\left(z=\frac{1}{4}e^{2x^2}+C, C\in\mathbb{R}\right).$$

Finalement, $S_L=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto Ce^{-x^2}+\frac{1}{4}e^{x^2}, C\in\mathbb{R}\right\}$.

d. Résolvons l'équation homogène $(H) : y'+2y=0$.

On a : $-\int 2\,\mathrm{d}x=-2x+K, K\in\mathbb{R}$,

donc $S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto Ce^{-2x}, C\in\mathbb{R}\right\}$.

Les coefficients nous incitent à chercher une solution de (L) sous la forme $y_p : x\mapsto \alpha x^2+\beta x+\gamma$.

$$\left(y_p\in S_L\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}, 2\alpha x+\beta+2\alpha x^2+2\beta x+2\gamma=x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left((2\alpha=1)\wedge(2\alpha+2\beta=0)\wedge(\beta+2\gamma=0)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}, y_p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right).$$

Finalement, $S_L=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto Ce^{-2x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}, C\in\mathbb{R}\right\}$.

Remarque : Si on ne sait pas prévoir la forme d'une solution particulière, on peut toujours recourir à la méthode de variation de la constante :
On cherche une solution de (L) sous la forme $y_p=zh$ avec, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=e^{-2x}$.

$$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(z'h+zh'+2zh=x^2\right) \Leftrightarrow \left(z'h+z\underbrace{\left(h'+2h\right)}_{\substack{0\\ \text{car } h\in S_H}}=x^2\right) \Leftrightarrow \left(z'=x^2\mathrm{e}^{2x}\right).$$

Une double intégration par parties (en dérivant à chaque fois la fonction polynomiale et primitivant l'exponentielle, toutes deux de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) donne :

$$z=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}-\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+C, C\in\mathbb{R}.$$

En multipliant par h, on retrouve la solution déterminée précédemment.

e. Résolvons l'équation homogène $(H):(1-x)y'+y=0$.

On a : $-\int \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\ln\left(|1-x|\right)+K, K\in\mathbb{R}$,

donc $S_H=\left\{\varphi :]1,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto C(x-1), C\in\mathbb{R}\right\}$.

⚠ Il ne faut pas oublier les valeurs absolues car sur $]1,+\infty[$, $1-x<0$.

On cherche une solution de (L) sous la forme $y_p=zh$ avec, pour tout $x\in]1,+\infty[$, $h(x)=x-1$.

$$\left(y_p\in S_L\right)\Leftrightarrow\left((1-x)(z'h+zh')+zh=x\right)\Leftrightarrow\left((1-x)z'h+z\underbrace{\left((1-x)h'+h\right)}_{\substack{0\\ \text{car } h\in S_H}}=x\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(z'=\frac{-x}{(1-x)^2}\right).$$

On a :

$$z=\int\frac{-x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1-x}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-x)^2}\right)\mathrm{d}x=-\ln\left(|1-x|\right)-\frac{1}{1-x}+C, C\in\mathbb{R}.$$

Finalement, $S_L=\left\{\varphi :]1,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto(x-1)\left(C-\ln(x-1)\right)+1, C\in\mathbb{R}\right\}$.

f. Résolvons l'équation homogène $(H): x\left(1+x^2\right)y'+2x^2y=0$.

On a : $-\int \frac{2x^2}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=-\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\ln\left(1+x^2\right)+K, K\in\mathbb{R}$,

donc $S_H=\left\{\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{C}{1+x^2}, C\in\mathbb{R}\right\}$.

On cherche une solution de (L) sous la forme $y_p=zh$ avec, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

$$\left(y_p\in S_L\right)\Leftrightarrow\left(x\left(1+x^2\right)(z'h+zh')+2x^2zh=1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x\left(1+x^2\right)z'h+z\underbrace{\left(x\left(1+x^2\right)h'+2x^2h\right)}_{\substack{0\\ \text{car } h\in S_H}}=1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(z'=\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\left(z=\ln(|x|)+C, C\in\mathbb{R}\right).$$

Finalement, $S_L=\left\{\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{C+\ln(x)}{1+x^2}, C\in\mathbb{R}\right\}$.

g. Résolvons l'équation homogène $(H): \left(1+x^2\right)y'-xy=0$.

On a : $\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+K, K\in\mathbb{R}$,

donc $S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto C\sqrt{1+x^2}, C\in\mathbb{R}\right\}$.

Remarque : $\forall x\in\,]0,+\infty[, e^{\frac{1}{2}\ln(x)}=\sqrt{x}$.

On cherche une solution de (L) sous la forme $y_p=zh$ avec, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=\sqrt{1+x^2}$.

$$\left(y_p\in S_L\right)\Leftrightarrow\left(\left(1+x^2\right)(z'h+zh')-xzh=\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left((1+x^2)z'h+z\underbrace{\left((1+x^2)h'-xh\right)}_{\substack{0\\ \text{car } h\in S_H}}=\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(z'=\frac{1}{1+x^2}\right)\Leftrightarrow\left(z=\mathrm{Arctan}(x)+C, C\in\mathbb{R}\right).$$

Finalement, $S_L=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\sqrt{1+x^2}\left(C+\mathrm{Arctan}(x)\right), C\in\mathbb{R}\right\}$.

3. **Remarque :** Dans cet exercice, je ne détaillerai pas la recherche des solutions des équations différentielles. Les méthodes ont été largement explicitées dans les exercices précédents.

On notera S_L l'ensemble des solutions de l'équation différentielle, et S la solution du problème de Cauchy.

a. $S_L=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto A\cos(x)+B\sin(x), (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

$$\begin{cases}\varphi(0)=1\\ \varphi'(0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\ B=1\end{cases}.$$

Ainsi, $S=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\cos(x)+\sin(x)\right\}$.

b. $S_L=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+Ax+B\right)e^{-3x}, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

$$\begin{cases}\varphi(0)=0\\ \varphi'(0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=0\\ A-3B=1\end{cases}.$$

Ainsi, $S=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right)e^{-3x}\right\}$.

c. $S_L=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto A+\left(\frac{1}{5}x+B\right)e^{5x}, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

$$\begin{cases}\varphi(0)=0\\ \varphi'(0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0\\ 5B+\frac{1}{5}=0\end{cases}.$$

Ainsi, $S=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{1}{25}+\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{25}\right)e^{5x}\right\}$.

d. L'équation différentielle se résout sur l'un des intervalles : $]-\infty,1[$ ou $]1,+\infty[$.

Compte tenu de la condition initiale, on doit se placer sur $]1,+\infty[$.

$S_L=\{\varphi:]1,+\infty[\to\mathbb{R},x\mapsto 1+C(x-1),C\in\mathbb{R}\}$.

$(\varphi(2)=0)\Leftrightarrow(C=-1)$.

Ainsi, $S=\{\varphi:]1,+\infty[\to\mathbb{R},x\mapsto 2-x\}$.

e. L'équation différentielle se résout sur l'un des intervalles : $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$.

Compte tenu de la condition initiale, on doit se placer sur $]0,+\infty[$.

$$S_L=\left\{\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R},x\mapsto\frac{C+x}{e^x-1},C\in\mathbb{R}\right\}.$$

$(\varphi(1)=0)\Leftrightarrow(C=-1)$.

Ainsi, $S=\left\{\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R},x\mapsto\dfrac{x-1}{e^x-1}\right\}$.

f. $$S_L=\left\{\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R},x\mapsto\frac{C+\ln(x)}{1+(\ln(x))^2},C\in\mathbb{R}\right\}.$$

Remarque : Pour déterminer les solutions de l'équation homogène, on effectue un changement de variable, en posant $t=\ln(x)$.

$(\varphi(e)=1)\Leftrightarrow(C=1)$.

Ainsi, $S=\left\{\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R},x\mapsto\dfrac{1+\ln(x)}{1+(\ln(x))^2}\right\}$.

4. **Remarque :** Dans cet exercice, je ne détaillerai pas la recherche des solutions de l'équation homogène, dont l'ensemble des solutions sera noté S_H.

a. $$S_H=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},x\mapsto Ae^x+Be^{-\frac{1}{5}x},(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, donc pour déterminer une solution particulière, on résout les équations différentielles $(L_1): 5y'' - 4y' - y = \dfrac{1}{2}xe^x$ et $(L_2): 5y'' - 4y' - y = \dfrac{1}{2}xe^{-x}$, puis on somme les solutions pour avoir une solution particulière de (L).

- Pour (L_1) on cherche une solution particulière sous la forme $y_{p_1}: x \mapsto \left(\alpha x^2 + \beta x\right)e^x$ (car 1 est une solution simple de l'équation caractéristique).

On trouve $y_{p_1}: x \mapsto \left(\dfrac{1}{24}x^2 - \dfrac{5}{72}x\right)e^x$.

- Pour (L_2) on cherche une solution particulière sous la forme $y_{p_2}: x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-x}$ (car -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique).

On trouve $y_{p_2}: x \mapsto \left(\dfrac{1}{16}x + \dfrac{7}{64}\right)e^{-x}$.

Finalement,

$$S_L = \left\{\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(\frac{1}{16}x + \frac{7}{64}\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{24}x^2 - \frac{5}{72}x + A\right)e^x + Be^{-\frac{1}{5}x}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

b. $S_H = \left\{\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right), (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Pour déterminer une solution particulière, on va se placer dans $\mathbb{C}$ en remarquant que $\sin x = \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)$.

Soit $(L_c): y'' + 2y' + 2y = e^{ix}$. On va chercher une solution particulière de (L_c) sous la forme $y_{p_c}: x \mapsto \alpha e^{ix}$ (car i n'est pas solution de l'équation caractéristique), puis on prendra sa partie imaginaire.

$$\left(y_{p_c} \in S_{L_c}\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \alpha(1+2i)e^{ix} = e^{ix}\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, y_{p_c}(x) = \left(\frac{1-2i}{5}\right)e^{ix}\right).$$

Finalement,

$$S_L = \left\{\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(Ae^{-x} - \frac{2}{5}\right)\cos(x) + \left(Be^{-x} + \frac{1}{5}\right)\sin(x), (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

c. $S_H = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x), (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Pour déterminer une solution particulière, on va comme précédemment se placer dans $\mathbb{C}$.

Soit $(L_c) : y'' + 4 = xe^{ix}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_{p_c} : x \mapsto (\alpha x^2 + \beta x)e^{ix}$ (car i est une solution simple de l'équation caractéristique).

$$\left(y_{p_c} \in S_{L_c}\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, (4\alpha ix + 2\beta i + 2\alpha)e^{ix} = xe^{ix}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, y_{p_c}(x) = \left(-\frac{i}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^{ix}\right).$$

Finalement,

$$S_L = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(A - \frac{1}{4}x^2\right)\cos(x) + \left(B + \frac{1}{4}x\right)\sin(x), (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

d.

Remarque : Pour résoudre l'équation caractéristique, on doit déterminer les racines carrées de $-i$. On a :

$$\left(r^2 = e^{i\frac{3\pi}{2}}\right) \Leftrightarrow \left(\left(r = e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \vee \left(r = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\pi\right)}\right)\right) \Leftrightarrow \left(r \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}\right)$$

$$S_H = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ae^{\frac{x}{2}\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)} + Be^{\frac{x}{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Remarque : Comme ici les coefficients sont complexes, on ne peut pas utiliser la partie imaginaire de e^{ix} pour le sinus. On utilise la formule d'Euler : $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$.

On a donc $(L) : y'' + iy = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$.

On résout séparément les équations différentielles $(L_1) : y'' + iy = \frac{1}{2i}e^{ix}$ et $(L_2) : y'' + iy = \frac{-1}{2i}e^{-ix}$.

- On cherche une solution particulière de (L_1) sous la forme $y_{p_1} : x \mapsto \alpha e^{ix}$ (car i n'est pas solution de l'équation caractéristique).

  On trouve $y_{p_1} : x \mapsto \dfrac{-1+i}{4} e^{ix}$.

- On cherche une solution particulière de (L_2) sous la forme $y_{p_2} : x \mapsto \beta e^{-ix}$ (car $-i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique).

  On trouve $y_{p_2} : x \mapsto \dfrac{1-i}{4} e^{-ix}$.

Finalement,

$$S_L = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-1+i}{4} e^{ix} + \frac{1-i}{4} e^{-ix} + A e^{\frac{x}{2}\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)} + B e^{\frac{x}{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

e.

Remarque : Pour résoudre l'équation caractéristique, on doit déterminer les racines carrées de $5-12i$. On a :

$$\left((a+ib)^2 = 5-12i\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ 2ab=-12 \\ a^2+b^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \left(a+ib \in \{3-2i, -3+2i\}\right).$$

$$S_H = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto A e^{(1-i)x} + B e^{(-2+i)x}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Comme dans l'exercice précédent, on écrit

$$(L) : y'' + y' + (-1+3i)y = e^x \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$

On résout séparément les équations différentielles

$$(L_1) : y'' + y' + (-1+3i)y = \frac{1}{2i} e^{(1+i)x} \text{ et } (L_2) : y'' + y' + (-1+3i)y = \frac{-1}{2i} e^{(1-i)x}.$$

- On cherche une solution particulière de (L_1) sous la forme $y_{p_1} : x \mapsto \alpha e^{(1+i)x}$ (car $1+i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique).

  On trouve $y_{p_1} : x \mapsto \dfrac{-1}{12} e^{(1+i)x}$.

- On cherche une solution particulière de (L_2) sous la forme $y_{p_2} : x \mapsto \beta x e^{(1-i)x}$ (car $1-i$ est solution simple de l'équation caractéristique).

  On trouve $y_{p_2} : x \mapsto \left(\dfrac{-2+3i}{26}\right) x e^{(1-i)x}$.

Finalement,

$$S_L = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{12} e^{(1+i)x} + \left(A + \left(\frac{-2+3i}{26}\right)x\right) e^{(1-i)x} + B e^{(-2+i)x}, \right.$$
$$\left. (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5. **a.** On a : $-\displaystyle\int \frac{x}{x-1} dx = -\int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = -x - \ln(|x-1|) + K, K \in \mathbb{R}$, donc

$$S_H = \left\{ \varphi :]1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{Ce^{-x}}{x-1}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche une solution de (L) sous la forme $y_p = zh$ avec, pour tout $x \in]1,+\infty[$, $h(x) = \dfrac{e^{-x}}{x-1}$.

$$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(z' = \sin(x) e^x\right) \Leftrightarrow \left(z' = \operatorname{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(z = \frac{1}{2} e^x (\sin(x) - \cos(x)) + C, C \in \mathbb{R}\right).$$

Finalement, $S_L = \left\{ \varphi :]1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{Ce^{-x} + \sin(x) - \cos(x)}{2(x-1)}, C \in \mathbb{R} \right\}$.

b. On a :

$$-\int \frac{-\sin(2x)}{1+\cos^2(x)} dx = \int \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)} dx$$
$$\underbrace{=}_{\substack{t=\cos(x) \\ dt=-\sin(x)dx}} -\int \frac{2t}{1+t^2} dt = -\ln\left(1+t^2\right) + K, K \in \mathbb{R},$$

donc $S_H = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{C}{1+\cos^2(x)}, C \in \mathbb{R} \right\}$.

On cherche une solution de (L) sous la forme $y_p = zh$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{1+\cos^2(x)}$.

$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(z' = \cos(x)\right) \Leftrightarrow \left(z = \sin(x) + C, C \in \mathbb{R}\right)$.

Finalement, $S_L = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{C + \sin(x)}{1 + \cos^2(x)}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

c. On a : $-\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = -\tan(x) + K, K \in \mathbb{R}$, donc

$S_H = \left\{\varphi : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{-\tan(x)}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

On cherche une solution de (*L*) sous la forme $y_p = zh$ avec, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = e^{-\tan(x)}$.

$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(z' = \dfrac{\tan(x)e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\right)$.

$$\int \frac{\tan(x)e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx \underbrace{=}_{\substack{t=\tan(x)\\ dt=\frac{dx}{\cos^2(x)}}} \int t e^t dt \underbrace{=}_{\substack{\text{I.P.P.}\\ u=t\\ v=e^t}} \left[te^t\right] - \int e^t dt = te^t - e^t + C$$

$$= \tan(x)e^{\tan(x)} - e^{\tan(x)} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Finalement, $S_L = \left\{\varphi : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto Ce^{-\tan(x)} + \tan(x) - 1, C \in \mathbb{R}\right\}$.

d. On a : $-\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2} dx = -\ln\left(1 + x^2\right) + K, K \in \mathbb{R}$,

donc $S_H = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{C}{1+x^2}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

On cherche une solution de (*L*) sous la forme $y_p = zh$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(z' = \sqrt{1 + x^2}\right)$.

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{x=\mathrm{sh}(t)\\ \mathrm{d}x=\mathrm{ch}(t)\mathrm{d}t}} \int \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(t)}\,\mathrm{ch}(t)\mathrm{d}t = \int \mathrm{ch}^2(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1+\mathrm{ch}(2t)}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\mathrm{sh}(2t) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Il faut maintenant revenir à la variable x :

La fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut expliciter sa bijection réciproque (Argsh) à l'aide des fonctions usuelles :

$$\left(\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} = x\right) \Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^t - 2x - \mathrm{e}^{-t} = 0\right) \Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{2t} - 2x\mathrm{e}^t - 1 = 0\right).$$

e^t est donc la solution positive de $X^2 - 2xX - 1 = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^t = x + \sqrt{1+x^2}$, d'où : $t = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

De plus, $\mathrm{sh}(2t) = 2\mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}(t) = 2x\sqrt{1+x^2}$.

Finalement,

$$S_L = \left\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{C}{1+x^2} + \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

e. On a : $-\int \frac{-1}{\tan(x)}\mathrm{d}x = \ln\left(\left|\sin(x)\right|\right) + K, K \in \mathbb{R}$,

donc $S_H = \left\{\varphi : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto C\sin(x), C \in \mathbb{R}\right\}$.

On cherche une solution de (L) sous la forme $y_p = zh$ avec, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = \sin(x)$.

$$\left(y_p \in S_L\right) \Leftrightarrow \left(z' = \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\right) \Leftrightarrow \left(z' = \frac{1}{\sin^2(x)} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(z = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - x + C, C \in \mathbb{R}\right).$$

Remarque : Si on ne connait pas de primitive de $\frac{1}{\sin^2 x}$ on effectue un changement de variable pour se ramener à $\frac{1}{\cos^2 x}$. On a :

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} \underbrace{=}_{\substack{x=\frac{\pi}{2}-t \\ dx=-dt}} -\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\tan(t)+C = \frac{-\cos x}{\sin x}+C \text{, avec } C \in \mathbb{R}.$$

Finalement, $S_L = \left\{\varphi : \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)(C-x)-\cos(x), C \in \mathbb{R}\right\}$.

6. Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

ANALYSE : Si le système admet des solutions y_1 et y_2 dérivables sur $\mathbb{R}$ alors, puisque $y_1' = y_1 - 2y_2 + xe^x$ et $y_2' = -y_1 + x$, on en déduit que y_1' et y_2' sont également dérivables sur $\mathbb{R}$.

On dérive les deux membres de la deuxième égalité, on obtient : $y_2'' = -y_1' + 1$ d'où $y_1' = 1 - y_2''$.

Dans la première égalité, cela donne : $1 - y_2'' = x - y_2' - 2y_2 + xe^x$.

On en déduit que y_2 est solution de l'équation différentielle : $y'' - y' - 2y = 1 - x - xe^x$.

Les solutions de cette équation sont :

$$y_2 : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x \text{, avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

En utilisant la deuxième égalité, on a :

$$y_1 = x - y_2' = Ae^{-x} - 2Be^{2x} + x - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^x.$$

SYNTHÈSE : les applications $y_1 : x \mapsto Ae^{-x} - 2Be^{2x} + x - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^x$ et $y_2 : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, vérifient bien les deux égalités du système.

Développements limités

Lorsque l'on commence à faire des développements limités, on commet de nombreuses erreurs de calculs, soit parce que l'on ne maîtrise pas bien le calcul mental, soit parce que l'on n'est pas suffisamment rigoureux.
Pour progresser, il faut faire une grande quantité d'exercices.

f et g désignent des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

$a \in \overline{\mathbb{R}}$ désigne un élément ou une extrémité de I, finie ou infinie.

Je vous montre comment

Trouver un équivalent simple d'une fonction au voisinage de *a*

Équivalents usuels :

Si $P = a_n X^n + \ldots + a_m X^m$ avec $n \geq m$, $a_n \neq 0, a_m \neq 0$, alors :

$P(x) \underset{x \to \infty}{\sim} a_n x^n$ et $P(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_m x^m$.

$e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$; $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$; $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$; $1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

$\tan x \underset{x \to 0}{\sim} x$; $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- Si la fonction admet un $DL_n(a)$:

On utilise le premier terme non nul de la partie régulière.

- Si la fonction est le produit ou le quotient de fonctions dont on connait des équivalents simples :

On utilise le résultat suivant :

Si $f_1(x) \underset{x \to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \to a}{\sim} g_2(x)$ alors $f_1(x) f_2(x) \underset{x \to a}{\sim} g_1(x) g_2(x)$ et lorsque $f_1 g_1$ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a) : $\dfrac{1}{f_1(x)} \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{1}{g_1(x)}$.

- Si la fonction est composée :

On utilise le résultat suivant :

> Soient h une fonction réelle définie sur un intervalle J tel que $h(J) \subset I$, et b un élément ou une extrémité de J tel que $\lim\limits_{x \to b} h(x) = a$. Alors : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \Rightarrow f(h(x)) \underset{x \to b}{\sim} g(h(x))$.

⚠ On ne peut pas composer à gauche simplement.

On peut par exemple avoir au voisinage de a : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $e^{f(x)} \underset{x \to a}{\not\sim} e^{g(x)}$, ou encore $\ln(f(x)) \underset{x \to a}{\not\sim} \ln(g(x))$.

Par exemple :

Au voisinage de $+\infty$: $x+1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x$ mais $e^{x+1} \underset{x \to +\infty}{\not\sim} e^{x}$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x+1}}{e^{x}} = e$).

Au voisinage de 0 : $1+x \underset{x \to 0}{\sim} 1+x^2$ mais $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\not\sim} \ln\left(1+x^2\right)$ (car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln(1+x)} = 0$).

Exemple 1

Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de : $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+2x^2}}{\ln\left(1-x^2\right)}$.

Réponse

$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1+2x^2} = 1$, donc $\sqrt{1+2x^2} \underset{x \to 0}{\sim} 1$;

$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, donc en composant à droite par $x \mapsto -x^2$ (qui s'annule en 0) :

$\ln\left(1-x^2\right) \underset{x \to 0}{\sim} -x^2$

Enfin, par quotient : $\dfrac{\sqrt{1+2x^2}}{\ln\left(1-x^2\right)} \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$.

⚠ La relation '$\underset{a}{\sim}$' n'est pas compatible avec l'addition, en particulier si on a $f(x) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$ et $g(x) \underset{x \to a}{\sim} -u(x)$ on n'a pas $f(x)+g(x) \underset{x \to a}{\sim} 0$ (sauf si $f+g$ est nulle au voisinage de a, mais il y a peu de chances !).

Pour trouver un équivalent simple de $f+g$, on pourra être amené à « pousser » l'ordre des développements limités de f et g, jusqu'à obtenir un terme non nul dans la somme de leurs parties régulières.

Exemple 2

Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de : $x \mapsto e^x - (\cos x + \sin x)$.

Réponse

On a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2),\ \sin x = x + o_{x\to 0}\left(x^2\right) \text{ et } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}\left(x^2\right).$$

Donc $e^x - (\cos x + \sin x) = x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)$ d'où :

$e^x - (\cos x + \sin x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.

⚠ Quand on effectue plusieurs développements limités dans une somme, il faut avoir le même ordre pour chacune des fonctions sommées, sous peine de grossières erreurs.

■ Obtenir le $DL_n(0)$ d'un produit

On écrit les $DL_n(0)$ des deux fonctions. On fait le produit de leurs parties régulières, que l'on tronque au degré n.

Exemple 3

Donner le $DL_5(0)$ de : $x \mapsto \dfrac{\cos x}{1-x}$.

Remarque : Il faut bien voir cette fonction comme un produit (celui de $x \mapsto \cos x$ avec $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$).

Réponse

On a : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o_{x\to 0}\left(x^5\right)$

et $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)$.

$$\text{D'où : } \frac{\cos x}{1-x} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + \frac{13}{24}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right).$$

Remarque : Lorsque la partie régulière de l'un des développements limités a pour valuation $k > 0$ (c'est-à-dire que le monôme de plus bas degré a pour degré k), il suffit d'écrire le développement limité de l'autre fonction à l'ordre $n-k$ (car, $\boxed{x^k \times o_{x\to 0}\left(x^{n-k}\right) = o_{x\to 0}\left(x^n\right)}$).

Exemple 4

Donner le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1-x}$.

Réponse

On a : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o_{x\to 0}\left(x^5\right)$

et $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o_{x\to 0}\left(x^4\right)$.

D'où : $\dfrac{\sin x}{1-x} = \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)$

$$= x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{101}{120}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right).$$

■ Obtenir un $DL_n(0)$, en primitivant

Soient f admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière P, F une primitive de f, et Q la primitive de P telle que $Q(0) = F(0)$. Alors F admet un $DL_{n+1}(0)$ de partie régulière Q.

Exemple 5

Donner le $DL_{2n+1}(0)$ de la fonction Arctan, $n \in \mathbb{N}$.

Réponse

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\operatorname{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; on sait que :

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o_{x\to 0}\left(x^n\right)$.

En remplaçant x par $-x^2$ (avec $x \mapsto -x^2$ qui s'annule en 0), on obtient :

$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o_{x\to 0}\left(x^{2n}\right)$.

En primitivant on obtient :

$$\operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}(0) + x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x\to 0}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x\to 0}\left(x^{2n+1}\right).$$

■ Obtenir le $DL_n(0)$ d'une fonction composée $h \circ f$

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ contenant 0, f définie sur I admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière P, et h définie sur J admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière Q.

Si $f(I) \subset J$ et $\boldsymbol{f(0) = 0}$, alors $h \circ f$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en « tronquant » $Q \circ P$ au degré n.

▶ Si l'on peut utiliser les $DL_n(0)$ des fonctions usuelles :

1. On s'assure que la partie régulière P du $DL_n(0)$ de f s'annule en 0.
2. On remplace x par $P(x)$ dans la partie régulière Q du $DL_n(0)$ de g.
3. On développe, puis on tronque au degré n.

Exemple 6

Donner le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$.

Réponse

On a : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right) = 0$, et $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)$; on en déduit donc :

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o_{x\to 0}\left(x^3\right)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

> **Remarque :** On constate que l'on aurait pu tronquer $x - \frac{x^3}{6}$ dès le carré de la partie régulière du développement de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, le monôme de degré 3 générant au minimum du degré 4 en développant le carré (dans le double produit), et du degré 5 en développant le cube (avec la formule du binôme de Newton).
> Il vaut toutefois mieux tout écrire tant que l'on ne maîtrise pas bien la technique, pour ne pas prendre le risque d'oublier des termes.
> Il faut garder en tête qu'écrire trop de termes n'est pas une erreur (ils finissent dans le petit *o*), mais en oublier conduit systématiquement à un résultat faux.

⚠ Il faut bien s'assurer que la partie régulière du $DL_n(0)$ de f s'annule en 0. Si ce n'est pas le cas, il faut s'y ramener.

Exemple 7

Donner le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\cos x}$.

Réponse

On a : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_{x\to 0}\left(x^4\right)$

donc $\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{1 + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_{x\to 0}\left(x^4\right)}$

⚠ Il ne faut surtout pas remplacer x par $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)$ dans la partie régulière du $DL_n(0)$ de $x\mapsto\sqrt{1+x}$ car $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)=1\neq 0.$

On factorise :

$$\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)}=\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)},$$

Avec cette fois : $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)=0.$

De plus, $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o_{x\to 0}\left(x^2\right).$

Remarque : On voit qu'il est inutile d'écrire le développement limité de $x\mapsto\sqrt{1+x}$ jusqu'à l'ordre 4, car en composant les deux parties régulières, le monôme de plus bas degré issu du degré 3 du développement de $x\mapsto\sqrt{1+x}$ sera au minimum de degré 6 (et celui issu du degré 4 sera au minimum de degré 8) !

On a donc, en tenant compte de cette remarque et de celle de l'exemple précédent :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos x}&=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)\\&=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}x^2+\frac{\sqrt{2}}{384}x^4+o_{x\to 0}\left(x^4\right).\end{aligned}$$

- Dans le cas d'une fonction de la forme e^u :

Si $u(0)=\alpha$, on note $e^u=e^\alpha e^f$ avec $f(0)=0$, puis on effectue le $DL_n(0)$ de f, que l'on compose avec la partie régulière de la fonction exponentielle qui est : $1+X+\frac{1}{2}X^2+...+\frac{1}{n!}X^n$.

Exemple 8

Donner le $DL_4(0)$ de $x\mapsto e^{\cos x}$.

Réponse

On a : $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{24}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)$ donc $e^{\cos x}=e\times e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)}$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)=0$.

On a donc :

$$e^{\cos x} = e \times e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)} = e\left(1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right).$$

Finalement, $e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^4\right)$.

- Dans le cas d'une fonction de la forme $\ln u$:

⚠ Il faut $u(0)=\alpha>0$ (sinon la fonction n'admet pas de $DL_n(0)$).

En factorisant, on se ramène à $\ln u = \ln(\alpha)+\ln(1+f)$ avec $f(0)=0$, puis on effectue le $DL_n(0)$ de f, que l'on compose avec la partie régulière de $x \mapsto \ln(1+x)$ qui est :

$$X-\frac{1}{2}X^2+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}X^n.$$

Exemple 9

Donner le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln\left(1+e^x\right)$.

Réponse

On a : $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o_{x\to 0}\left(x^3\right)$ donc

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+e^x\right) &= \ln\left(2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)\\
&= \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)\right)\\
&= \ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right),
\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)=0$; on a donc :

$$\ln\left(1+e^x\right)=\ln 2+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

Remarque : On a tronqué les polynômes au fur et à mesure du calcul, supprimant les monômes qui génèrent des degrés supérieurs à 3 dans le développement… mais attention à ne pas en oublier !

Après développement et troncature, on obtient :

$$\ln\left(1+e^x\right)=\ln 2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

Remarque : Le coefficient du monôme de degré 3 de la partie régulière est nul. Il ne faut surtout pas baisser pour autant le degré dans le petit *o* !

- Si l'on ne peut pas appliquer les $DL_n(0)$ usuels :

On dérive, on fait le $DL_{n-1}(0)$ de la fonction dérivée, puis on le primitive.

Exemple 10

Donner le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(e^x\right)$.

Réponse

Remarque : Le problème réside ici dans le fait que la fonction Arctan est composée avec une fonction qui ne prend pas la valeur 0 en 0. On ne peut donc pas appliquer le développement limité de la fonction Arctan en 0. De plus, son développement limité en 1 n'est pas (encore !) connu.

On dérive *f* (composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$) :

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

Remarque : On veut le $DL_4(0)$ de *f*, on cherche donc le $DL_3(0)$ de f'.

On sait que : $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o_{x\to 0}\left(x^3\right)$

et $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)$.

En composant on obtient :

$$\frac{1}{1+e^{2x}}=\frac{1}{1+1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\left(x+x^2+\frac{2}{3}x^3\right)+\left(x+x^2\right)^2-(x)^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

Par produit, on obtient :

$$\frac{e^x}{1+e^{2x}}=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2+o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

En primitivant, on obtient :

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3+o_{x\to 0}\left(x^4\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3+o_{x\to 0}\left(x^4\right).$$

⚠ Il ne faut pas oublier $f(0)$ quand on primitive !

■ Obtenir un développement limité en dehors de 0

- En effectuant un changement de variable :

Exemple 11

Donner le $\mathrm{DL}_4\left(\frac{\pi}{2}\right)$ de la fonction sinus.

Réponse

On pose $x=\frac{\pi}{2}+h$; alors $\sin(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=\cos(h)=1-\frac{h^2}{2}+\frac{h^4}{24}+o_{h\to 0}\left(h^4\right)$.

On revient à la variable x :

$$\sin(x)=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+o_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right).$$

⚠ On ne développe surtout pas les expressions $(x-a)^k$; elles doivent figurer dans la forme définitive du $\mathrm{DL}_n(a)$!!!

- En appliquant la formule de Taylor Young :

> Si f admet une dérivée n-ième en a, alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ qui s'écrit :
>
> $$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o_{x\to a}\left((x-a)^n\right).$$

Exemple 12

Donner le $\mathrm{DL}_4(1)$ de la fonction Arctan.

Réponse

La fonction Arctan est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{Arctan}'(x)=\frac{1}{1+x^2},\ \mathrm{Arctan}''(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2},\ \mathrm{Arctan}^{(3)}(x)=\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3},$$

$$\mathrm{Arctan}^{(4)}(x)=\frac{-24x^3+24x}{\left(1+x^2\right)^4}.$$

On applique la formule de Taylor, et on obtient :

$$\operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o_{x\to 1}\left((x-1)^4\right)$$

⚠ N'oubliez pas les factorielles dans la formule de Taylor, c'est une erreur fréquente !

Remarque : Maintenant que nous disposons du $DL_4(1)$ de Arctan, revenons à l'**exemple 10.**

$$\operatorname{Arctan}\left(e^x\right) = \operatorname{Arctan}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right),$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right) = 1.$

On a donc :

$$\operatorname{Arctan}\left(e^x\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{4}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3 + o_{x\to 0}\left(x^4\right).$$

Après développement et troncature, on retrouve :

$$\operatorname{Arctan}\left(e^x\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o_{x\to 0}\left(x^4\right).$$

On s'échauffe

1. Donner un équivalent simple au voisinage de a des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$, $\quad a = 0.$

b. $x \mapsto \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$, $\quad a = 0.$

c. $x \mapsto \dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\ln(1+x)}$, $\quad a = 0.$

d. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x)}$, $\quad a = 0.$

e. $x \mapsto \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\sin^3(x)}$, $\quad a = 0.$

f. $x \mapsto \sqrt{x}-\sqrt{\sin x}$, $\quad a = 0.$

g. $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{x\ln(x)}$, $\quad a = 1.$

h. $x \mapsto \dfrac{\cos(\pi x)}{1-\sqrt{2x}}$, $\quad a = \dfrac{1}{2}.$

i. $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{e^{2x-1}-e^x}$, $\quad a = 1.$

j. $x \mapsto \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $\quad a = 0$, puis $a = 1.$

2. Donner les $DL_n(0)$ des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto e^{2x}\sin x$, $\quad n = 4.$

b. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, $\quad n = 4.$

c. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $\quad n = 4.$

d. $x \mapsto e^{1-\cos x}$, $n = 4$.

e. $x \mapsto \ln(\cos x)$, $n = 6$.

f. $x \mapsto \sqrt{\cos x}$, $n = 4$.

g. $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$, $n = 3$.

h. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$, $n = 4$.

i. $x \mapsto \ln\left(\cos(x) + \cos(2x)\right)$, $n = 5$.

j. $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $n = 5$.

On accélère

3. Calculer les limites suivantes :

a. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\left(x^2 - 3x + 2\right)\sin(\pi x)}{\ln\left(x^2 - 2x + 2\right)}$

b. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{e^{x^2} - 1}$

c. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}$

d. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

e. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x + 1}\right)^x$

f. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{\ln(x)\ln\left(1 + \sqrt{x^2 - 1}\right)}$

g. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}$

h. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

i. $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\ln(\cos x)+\tan x\right)$

4. Donner les $\mathrm{DL}_n(a)$ des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto \sqrt{1+e^x}$, $a=0, n=3$.

b. $x \mapsto \tan x$, $a=0, n=5$.

c. $x \mapsto \exp\left(\frac{\ln(1+2x)}{1+x}\right)$, $a=0, n=3$.

d. $x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$, $a=0, n=3$.

e. $x \mapsto \frac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}$ $a=0, n=2$.

f. $x \mapsto x^{\frac{1}{x-1}}$, $a=1, n=2$.

g. $x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right)$, $a=0, n=4$.

h. $x \mapsto x^x$, $a=2, n=2$.

i. $x \mapsto \mathrm{Arctan}(2\sin x)$, $a=\frac{\pi}{6}, n=2$.

On finit au top

5. Donner le $\mathrm{DL}_{15}(0)$ de $x \mapsto (\mathrm{sh}\,x - \sin x)^2(\tan x - \mathrm{th}\,x)^3$.

6. Donner le $\mathrm{DL}_{3p}(0)$ de $x \mapsto \left(\sin x - x + x^3 + x^4\right)^p$, où $p \in \mathbb{N}^*$.

7. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x) = (1+\sin x)^x - (1+x)^{\sin x}$.

1. **a.** On a : $x\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$; donc, par quotient : $\dfrac{x\sin x}{1-\cos x} \underset{x\to 0}{\sim} 2$.

   b. On a : $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$; en composant à droite par $x \mapsto 2x$, on obtient : $1-\cos(2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$; donc, par quotient : $\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 2$.

   c. On a : $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$; en composant à droite par $x \mapsto \sqrt{x}$, on obtient : $\sin\left(\sqrt{x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$.

   De plus, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

   Finalement, par quotient : $\dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

   d. On a : $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$; en composant à droite par $x \mapsto x^2$, on obtient : $\sqrt{1+x^2}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x^2$.

   De plus, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

   Finalement, par quotient : $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

   e. On a : $\cos x = 1-\dfrac{1}{2}x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)$; en composant à droite par $x \mapsto 3x$, on obtient : $\cos(3x) = 1-\dfrac{9}{2}x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)$.
   Comme $\ln(1+x) = x + o_{x\to 0}(x)$, en composant les développements limités, on obtient :

   $$\ln(\cos(3x)) = \ln\left(1-\frac{9}{2}x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)\right) = -\frac{9}{2}x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right).$$

Remarque : On a recours ici aux développements limités car la composition à gauche ne conserve pas toujours la relation d'équivalence. Ici par exemple, $\cos(3x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$, mais $\ln(\cos(3x))$ n'est pas nul au voisinage de 0, donc pas équivalent à ln(1) !!

De plus : $\sin^3(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$.

Finalement, par quotient : $\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\sin^3(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{9}{2x}$.

f. On a :

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x + o_{x\to 0}(x)$;
en composant, on obtient :

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{x}\sqrt{1-\frac{x^2}{6}+o_{x\to 0}\left(x^2\right)} = \sqrt{x}\left(1-\frac{x^2}{12}+o_{x\to 0}\left(x^2\right)\right).$$

On en déduit que : $\sqrt{x}-\sqrt{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{12}x^{\frac{5}{2}}$.

g. On pose $x = 1 + h$. $\dfrac{\sin(\pi x)}{x\ln(x)} = \dfrac{\sin(\pi+\pi h)}{(1+h)\ln(1+h)} = \dfrac{-\sin(\pi h)}{(1+h)\ln(1+h)}$.

On a : $-\sin(\pi h) \underset{h\to 0}{\sim} -\pi h$, $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$, et $1+h \underset{h\to 0}{\sim} 1$.

Par quotient, on a donc : $\dfrac{-\sin(\pi h)}{(1+h)\ln(1+h)} \underset{h\to 0}{\sim} -\pi$ d'où : $\dfrac{\sin(\pi x)}{x\ln(x)} \underset{x\to 1}{\sim} -\pi$.

h. On pose $x = \dfrac{1}{2}+h$. $\dfrac{\cos(\pi x)}{1-\sqrt{2x}} = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi h\right)}{1-\sqrt{1+2h}} = \dfrac{-\sin(\pi h)}{1-\sqrt{1+2h}}$.

On a : $-\sin(\pi h) \underset{h\to 0}{\sim} -\pi h$ et $1-\sqrt{1+2h} \underset{h\to 0}{\sim} -h$ (car $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$).

Par quotient, on a donc : $\dfrac{-\sin(\pi h)}{1-\sqrt{1+2h}} \underset{h\to 0}{\sim} \pi$ d'où : $\dfrac{\cos(\pi x)}{1-\sqrt{2x}} \underset{x\to \frac{1}{2}}{\sim} \pi$.

i. On pose $x = 1 + h$. $\dfrac{x^2-1}{e^{2x-1}-e^x} = \dfrac{h^2+2h}{e^{1+2h}-e^{1+h}} = \dfrac{h^2+2h}{e\times e^h\left(e^h-1\right)}$.

On a : $h^2+2h \underset{h\to 0}{\sim} 2h$, $e^h \underset{h\to 0}{\sim} 1$ et $e^h-1 \underset{h\to 0}{\sim} h$ donc, par produit et quotient : $\dfrac{h^2+2h}{e\times e^h\left(e^h-1\right)} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{2}{e}$, d'où : $\dfrac{x^2-1}{e^{2x-1}-e^x} \underset{x\to 1}{\sim} 2e^{-1}$.

j. • En 0 :

Pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

On a $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$; en composant à droite par $x \mapsto -x^2$, on obtient : $\sqrt{1-x^2}-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}x^2$.

D'autre part, $x\sqrt{1-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Finalement, par quotient : $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x}{2}$.

• En 1 :

Pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}\right)$.

On en déduit que $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$.

2. a. Par produit :

$$\begin{aligned} e^{2x}\sin x &= \left(1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right) \\ &= x+2x^2+\frac{11}{6}x^3+x^4+o_{x\to 0}\left(x^4\right). \end{aligned}$$

Remarque : Le $DL_4(0)$ du sinus n'ayant pas de terme constant, on s'est contenté d'un $DL_3(0)$ pour $x \mapsto e^{2x}$.

b. Pour tout $x<1$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$; on va appliquer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

Remarque : On pourrait également considérer la fonction comme la composée de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ avec $x \mapsto \sqrt{x}$ mais c'est bien plus long !

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}(-x)^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{6}(-x)^3$$
$$+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right)}{24}(-x)^4+o_{x\to 0}\left(x^4\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+o_{x\to 0}\left(x^4\right).$$

c. On se place dans un voisinage de 0 sur lequel on a : $1+x>0$ et $1-x>0$.

On peut alors écrire : $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

Connaissant le $DL_4(0)$ de $x\mapsto\ln(1+x)$, on en déduit :

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)$$
$$-\left(-x-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}-\frac{(-x)^4}{4}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)$$
$$=2x+\frac{2}{3}x^3+o_{x\to 0}\left(x^4\right).$$

d. On a : $1-\cos x=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)$,

donc $e^{1-\cos x}=e^{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)=0$.

Remarque : La valuation de la partie régulière du $DL_4(0)$ de $x\mapsto 1-\cos x$ est 2. On peut donc se contenter du $DL_2(0)$ de l'exponentielle pour obtenir un $DL_4(0)$ de la composée.

En composant, on obtient :

$$e^{1-\cos x}=1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o_{x\to 0}\left(x^4\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^4+o_{x\to 0}\left(x^4\right).$$

e. On a : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o_{x\to 0}\left(x^6\right)$,

donc $\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o_{x\to 0}\left(x^6\right)\right)$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o_{x\to 0}\left(x^6\right)\right) = 0.$

En composant, on obtient :

$$\ln(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + o_{x\to 0}\left(x^6\right)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o_{x\to 0}\left(x^6\right).$$

f. On a : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o_{x\to 0}\left(x^4\right)$ donc

$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o_{x\to 0}\left(x^4\right)}$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right) = 0.$

De plus, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right).$

En composant, on obtient :

$$\sqrt{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o_{x\to 0}\left(x^4\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^4\right).$$

g. On a : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)$, donc :

$$e^{\sqrt{1+x}} = e^{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)} = e \times e^{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right) = 0.$

En composant, on obtient :

$$e^{\sqrt{1+x}}=e\left(1+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)$$

$$=e\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{48}\right)+o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

h. On a : $\dfrac{\sin x}{x}=1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)$ donc :

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)=0.$

En composant, on obtient :

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}\right)^2+o_{x\to 0}\left(x^4\right)$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o_{x\to 0}\left(x^4\right).$$

i. On a : $\cos(x)+\cos(2x)=\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}\right)+\left(1-2x^2+\dfrac{2}{3}x^4\right)+o_{x\to 0}\left(x^5\right)$, donc

$$\ln(\cos(x)+\cos(2x))=\ln\left(2\left(1-\frac{5}{4}x^2+\frac{17}{48}x^4+o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)\right)$$

$$=\ln(2)+\ln\left(1-\frac{5}{4}x^2+\frac{17}{48}x^4+o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{5}{4}x^2+\dfrac{17}{48}x^4+o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)=0$.

En composant, on obtient :

$$\ln(\cos(x)+\cos(2x))=\ln(2)+\left(-\frac{5}{4}x^2+\frac{17}{48}x^4\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}x^2\right)^2+o_{x\to 0}\left(x^5\right)$$

$$=\ln(2)-\frac{5}{4}x^2-\frac{41}{96}x^4+o_{x\to 0}\left(x^5\right).$$

j. On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-x^2\right)+\frac{3}{8}\left(-x^2\right)^2+o_{x\to 0}\left(x^5\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o_{x\to 0}\left(x^5\right).$$

D'autre part, pour tout $x\in\left]-1,1\right[$, $\operatorname{Arcsin}'x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donc en primitivant, on obtient :

$$\operatorname{Arcsin}(x)=\operatorname{Arcsin}(0)+x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o_0\left(x^5\right)$$
$$=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o_{x\to 0}\left(x^5\right).$$

Par produit, on obtient :

$$\frac{\operatorname{Arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)$$
$$=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{15}x^5+o_{x\to 0}\left(x^5\right).$$

3. a. Si elles existent, on a :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-3x+2\right)\sin(\pi x)}{\ln\left(x^2-2x+2\right)}\underset{x=1+h}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\left(h^2-h\right)\left(-\sin(\pi h)\right)}{\ln\left(1+h^2\right)}.$$

On a : $h-h^2\underset{h\to 0}{\sim}h$, $\sin(\pi h)\underset{h\to 0}{\sim}\pi h$ et $\ln\left(1+h^2\right)\underset{h\to 0}{\sim}h^2$,

donc par produit et quotient :

$$\frac{\left(h-h^2\right)\sin(\pi h)}{\ln\left(1+h^2\right)}\underset{h\to 0}{\sim}\frac{\pi h^2}{h^2}\text{ d'où : }\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-3x+2\right)\sin(\pi x)}{\ln\left(x^2-2x+2\right)}=\pi.$$

b. On a : $\sqrt{\cos x}-1=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}+o_{x\to 0}\left(x^2\right)}-1=-\dfrac{x^2}{4}+o_{x\to 0}\left(x^2\right).$

Par quotient, on en déduit que : $\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{e^{x^2}-1}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{-\frac{x^2}{4}}{x^2}$,

puis $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{e^{x^2}-1}=-\frac{1}{4}.$

c. On a : $\sqrt{1+\sin x}=\sqrt{1+x+o_{x\to 0}(x)}=1+\dfrac{x}{2}+o_{x\to 0}(x)$

donc : $e^{\sqrt{1+\sin x}}-e=e\times\left(e^{\frac{x}{2}+o_{x\to 0}(x)}-1\right)=e\left(\dfrac{x}{2}+o_{x\to 0}(x)\right)$.

De plus, $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}\underset{x\to 0}{\sim}x$.

Par quotient, on obtient : $\dfrac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e}{\tan x}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{e\times\frac{x}{2}}{x}$,

puis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e}{\tan x}=\dfrac{e}{2}$.

d. On a : $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o_{x\to 0}\left(x^2\right)\right)}=e^{1-\frac{x}{2}+o_{x\to 0}(x)}$.

On a donc : $(1+x)^{\frac{1}{x}}-e=e\left(1-\dfrac{x}{2}+o_{x\to 0}(x)-1\right)=-\dfrac{e}{2}x+o_{x\to 0}(x)$.

Remarque : il faut effectuer un $DL_2(0)$ de $x\mapsto\ln(1+x)$, sans quoi on ne peut pas trouver d'équivalent correct du numérateur.

Finalement, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=-\dfrac{e}{2}$.

e. Si elles existent, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)^x\underset{x=\frac{1}{h}}{=}\lim\limits_{h\to 0^+}\left(\dfrac{1+2h-3h^2}{1-h+h^2}\right)^{\frac{1}{h}}$.

On a :

$$\frac{1+2h-3h^2}{1-h+h^2}=\left(1+2h+o_{h\to 0}(h)\right)\left(1+h+o_{h\to 0}(h)\right)=1+3h+o_{h\to 0}(h),$$

donc :

$$\left(\frac{1+2h-3h^2}{1-h+h^2}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{h}\ln\left(1+3h+o_{h\to 0}(h)\right)}=e^{\frac{1}{h}\left(3h+o_{h\to 0}(h)\right)}=e^{3+o_{h\to 0}(1)}.$$

Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)^x=e^3$.

f. Si elles existent, on a :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln(x)\ln\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)}\underset{x=h+1}{=}\lim_{h\to0}\frac{(1+h)\left((1+h)^h-1\right)}{\ln(1+h)\ln\left(1+\sqrt{2h+h^2}\right)}.$$

On a : $\ln(1+h)\ln\left(1+\sqrt{2h+h^2}\right)\underset{h\to0}{\sim}h\times\sqrt{2h}$

et $(1+h)^h-1=e^{h\ln(1+h)}-1=e^{h^2+o_{h\to0}\left(h^2\right)}-1=h^2+o_{h\to0}\left(h^2\right)$,

donc, par quotient : $\dfrac{(1+h)\left((1+h)^h-1\right)}{\ln(1+h)\ln\left(1+\sqrt{2h+h^2}\right)}\underset{h\to0}{\sim}\dfrac{h^2}{h\times\sqrt{2h}}$.

Finalement, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln(x)\ln\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)}=0.$

g. Sachant que $\tan(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+o_{x\to0}\left(x^3\right)$ (c'est l'objet d'un exercice ultérieur), on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2x}&=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\left(1+\frac{2}{3}x^2+o_{x\to0}\left(x^2\right)\right)}\\&=\frac{1}{x^2}\left(1-\left(1-\frac{2}{3}x^2+o_{x\to0}\left(x^2\right)\right)\right)=\frac{2}{3}+o_{x\to0}(1).\end{aligned}$$

Finalement, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2x}=\frac{2}{3}$.

Remarque : En écrivant :

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2x}=\frac{\tan^2(x)-x^2}{x^2\tan^2(x)}=\frac{(\tan(x)-x)(\tan(x)+x)}{x^2\tan^2(x)},$$

il vient :

$\dfrac{(\tan(x)-x)(\tan(x)+x)}{x^2\tan^2(x)}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{\frac{x^3}{3}\times2x}{x^2\times x^2}$, et on retrouve $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2x}=\frac{2}{3}$.

h. Si elles existent, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} \underbrace{=}_{x=\frac{1}{h}} \lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^{\frac{1}{h^2}}$.

On a : $\frac{\sin h}{h}=1-\frac{h^2}{6}+o_{h\to 0}\left(h^2\right)$, donc

$$\left(\frac{\sin h}{h}\right)^{\frac{1}{h^2}}=e^{\frac{1}{h^2}\ln\left(1-\frac{h^2}{6}+o_{h\to 0}\left(h^2\right)\right)}=e^{\frac{1}{h^2}\left(-\frac{h^2}{6}+o_{h\to 0}\left(h^2\right)\right)}=e^{-\frac{1}{6}+o_{h\to 0}(1)}.$$

Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}=e^{-\frac{1}{6}}$.

i. Si elles existent, on a :

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\ln(\cos x)+\tan x\right)\underbrace{=}_{x=\frac{\pi}{2}-h}\lim_{h\to 0^+}\left(\ln(\sin h)+\frac{1}{\tan h}\right).$$

On a : $\ln(\sin h)\underset{h\to 0}{\sim}\ln h$ et $\tan h\underset{h\to 0}{\sim}h$, donc $\tan h\times\ln(\sin h)\underset{h\to 0}{\sim}h\ln h$, avec $\lim\limits_{h\to 0}h\ln h=0$.

On en déduit : $\ln(\sin h)+\frac{1}{\tan h}=\frac{1}{\tan h}\left(\tan h\times\ln(\sin h)+1\right)\underset{h\to 0}{\sim}\frac{1}{h}$.

Finalement, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\ln(\cos x)+\tan x\right)=+\infty$.

4. a.
$$\begin{aligned}\sqrt{1+e^x}&=\sqrt{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o_{x\to 0}\left(x^3\right)}\\&=\sqrt{2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)}\\&=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{x}{2}\right)^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)\\&=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{32}x^2+\frac{7\sqrt{2}}{384}x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right).\end{aligned}$$

⚠ Il ne faut pas appliquer le $DL_3(0)$ de $x\mapsto\sqrt{1+x}$ à e^x, car $\lim\limits_{x\to 0}e^x\neq 0$.

b. $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o_{x\to 0}\left(x^5\right)}{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o_{x\to 0}\left(x^5\right)}$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)\left(1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)$$

$$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o_{x\to 0}\left(x^5\right).$$

Remarque : Il est utile de retenir (ou de savoir rapidement retrouver) les deux premiers termes de ce développement limité.

c. On a :

$$\frac{\ln(1+2x)}{1+x}=\left(2x-\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{3}+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)\left(1-x+x^2+o_{x\to 0}\left(x^2\right)\right)$$

$$=2x-4x^2+\frac{20}{3}x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

En composant, on obtient :

$$\exp\left(\frac{\ln(1+2x)}{1+x}\right)=e^{2x-4x^2+\frac{20}{3}x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)}$$

$$=1+\left(2x-4x^2+\frac{20}{3}x^3\right)+\frac{1}{2}\left(2x-4x^2\right)^2+\frac{1}{6}(2x)^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)$$

$$=1+2x-2x^2+o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

d. On a :

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o_{x\to 0}\left(x^5\right)}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)}$$

$$=\frac{1}{x}\left(1-\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)+\left(-\frac{x^2}{6}\right)^2+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right),$$

d'où : $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{7}{360}x^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right).$

e. **Remarque :** La valuation des parties régulières des développements limités du numérateur et du dénominateur est 2 ; pour avoir un développement limité d'ordre 2 du quotient, il faut donc faire au numérateur et au dénominateur des développements limités d'ordre 4.

On a : $e^x - \cos x - x = x^2 + \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}\left(x^4\right)$

et $x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o_{x\to 0}\left(x^4\right)$.

Par quotient, on obtient :

$$\frac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)} = \frac{x^2\left(1 + \frac{x}{6} + o_{x\to 0}\left(x^2\right)\right)}{\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}\left(x^2\right)\right)}$$

$$= 2\left(1 + \frac{x}{6} + o_{x\to 0}\left(x^2\right)\right)\left(1 - \left(-\frac{2x}{3} + \frac{x^2}{2}\right) + \left(-\frac{2x}{3}\right)^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)\right)$$

$$= 2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{9}x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right).$$

f. On pose $x = 1 + h$: $x^{\frac{1}{x-1}} = (1+h)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{h}\ln(1+h)}$. On a :

$$e^{\frac{1}{h}\ln(1+h)} = e^{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o_{h\to 0}\left(h^2\right)} = e\left(1 + \left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{h}{2}\right)^2 + o_{h\to 0}\left(h^2\right)\right)$$

$$= e\left(1 - \frac{1}{2}h + \frac{11}{24}h^2 + o_{h\to 0}\left(h^2\right)\right).$$

Donc $x^{\frac{1}{x-1}} = e\left(1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{11}{24}(x-1)^2 + o_{x\to 1}\left((x-1)^2\right)\right)$.

g. Pour $x = 1$, on pose $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

⚠ $f(0) = \text{Arc}\tan(1)$, on ne peut donc pas utiliser le $DL_n(0)$ de l'Arctangente !

Remarque : On a déterminé le $DL_4(1)$ de l'Arctangente dans l'**exemple 12**. On peut l'utiliser et faire une composition. Mais ce n'est pas un résultat que l'on est sensé connaître. On va donc dériver la fonction $f : x \mapsto \text{Arc}\tan\left(\frac{1}{1-x}\right)$, effectuer son $DL_3(0)$, puis primitiver.

Pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{2-2x+x^2}$.

$$\frac{1}{2-2x+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x+\dfrac{x^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)+\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^2-(-x)^3+o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

En primitivant, on obtient : $f(x) = f(0)+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)$, d'où :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o_{x\to 0}\left(x^4\right).$$

h. On pose $x = 2+h$:

$$x^x = (2+h)^{2+h} = e^{(2+h)\ln(2+h)} = e^{(2+h)\left(\ln(2)+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)}.$$

On a :

$$(2+h)\left(\ln(2)+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right) = (2+h)\left(\ln(2)+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+o_{h\to 0}\left(h^2\right)\right)$$

$$= 2\ln(2)+(1+\ln(2))h+\frac{1}{4}h^2+o_{h\to 0}\left(h^2\right).$$

En composant, on obtient :

$$e^{(2+h)\left(\ln(2)+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)} = e^{2\ln(2)+(1+\ln(2))h+\frac{1}{4}h^2+o_{h\to 0}\left(h^2\right)}$$

$$= e^{2\ln(2)}\left(1+\left((1+\ln(2))h+\frac{1}{4}h^2\right)+\frac{1}{2}\left((1+\ln(2))h\right)^2+o_{h\to 0}\left(h^2\right)\right)$$

$$= 4\left(1+(1+\ln(2))h+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(1+\ln(2))^2\right)h^2+o_{h\to 0}\left(h^2\right)\right).$$

Finalement,

$$x^x = 4+4(1+\ln(2))(x-2)+\left(1+2(1+\ln(2))^2\right)(x-2)^2+o_{x\to 2}\left((x-2)^2\right).$$

i. La méthode la plus courte est l'utilisation de la formule de Taylor Young. On note $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(2\sin x)$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe C^∞.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{2\cos(x)}{1+4\sin^2(x)}, f''(x) = \frac{-2\sin(x)\left(5+4\cos^2(x)\right)}{\left(1+4\sin^2(x)\right)^2}$$

(avec un peu de trigonométrie !).

La formule de Taylor Young donne :

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 + o_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2\right);$$

d'où :

$$\operatorname{Arctan}(2\sin x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 + o_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2\right).$$

5. On a : $\operatorname{sh} x - \sin x = \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)$ d'où : $(\operatorname{sh} x - \sin x)^2 = \frac{x^6}{9} + o_{x\to 0}\left(x^6\right)$.

D'autre part, on a :

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{x + \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)}{1 + \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)}$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)\left(1 - \left(\frac{x^2}{2}\right) + o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right) = x - \frac{1}{3}x^3 + o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

On en déduit que $\tan x - \operatorname{th} x = \frac{2}{3}x^3 + o_{x\to 0}\left(x^3\right)$,

puis $(\tan x - \operatorname{th} x)^3 = \frac{8}{27}x^9 + o_{x\to 0}\left(x^9\right)$.

Par produit, on obtient :

$$(\operatorname{sh} x - \sin x)^2(\tan x - \operatorname{th} x)^3 = \frac{8}{243}x^{15} + o_{x\to 0}\left(x^{15}\right).$$

6. $$\left(\sin x - x + x^3 + x^4\right)^p = \left(\frac{5}{6}x^3 + x^4 + o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)^p$$
$$= \left(\frac{5}{6}\right)^p x^{3p}\left(1 + \frac{6}{5}x + o_{x\to 0}(x)\right)^p$$
$$= \left(\frac{5}{6}\right)^p x^{3p} + o_{x\to 0}\left(x^{3p}\right).$$

7. Pour avoir un terme non nul dans la partie régulière du développement limité de $x \mapsto (1+\sin x)^x - (1+x)^{\sin x}$ au voisinage de 0, il faut aller à l'ordre 5 !!!

Remarque : Ce n'est pas prévisible, c'est en le faisant que l'on s'en aperçoit !

On trouve : $$(1+\sin x)^x = \mathrm{e}^{x\times\ln\left(1+x-\frac{x^3}{6}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)}$$
$$= \mathrm{e}^{x\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{x}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{x}{3}(x)^3-\frac{x}{4}(x)^4+x\times o_{x\to 0}\left(x^4\right)}$$
$$= \mathrm{e}^{x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{12}+o_{x\to 0}\left(x^5\right)}$$
$$= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right)^2 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)$$
$$= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{7}{12}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right).$$

Et : $$(1+x)^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x\times\ln(1+x)} = \mathrm{e}^{\left(x-\frac{x^3}{6}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o_{x\to 0}\left(x^4\right)\right)}$$
$$= \mathrm{e}^{x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{6}o_{x\to 0}\left(x^5\right)}$$
$$= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right)^2 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)$$
$$= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right).$$

Finalement : $(1+\sin x)^x - (1+x)^{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^5}{12}$.

Espaces vectoriels

L'introduction des espaces vectoriels est la première étape dans l'étude de l'algèbre linéaire. Comprendre la structure de ces ensembles, dans lesquels une grande partie des nouvelles notions d'algèbre abordées en première et deuxième année va se situer, est l'assurance d'un meilleur apprentissage futur.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Je vous montre comment

■ Établir si *F* est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E,+,\cdot)$

> *F* est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$ si, et seulement si :
>
> i. $0_E \in F$.
>
> ii. $\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x + y \in F$.

▸ Si *F* est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$:

On montre qu'il vérifie les deux propriétés caractéristiques.

Exemple 1

Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\right\}$. Montrer que *F* est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{R}^3,+,\cdot\right)$.

Réponse

- $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ car $0+0+0=0$.
- Soient $(u,v) \in F^2, \lambda \in \mathbb{R}$. On note $u=(x,y,z)$ et $v=(a,b,c)$.
  Alors $u+\lambda v = (x+\lambda a, y+\lambda b, z+\lambda c)$.

On a : $(x+\lambda a)+(y+\lambda b)+(z+\lambda c)=\underbrace{(x+y+z)}_{\substack{=0 \\ \text{car } u\in F}}+\lambda\underbrace{(a+b+c)}_{\substack{=0 \\ \text{car } v\in F}}=0$,

donc $u+\lambda v\in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

- Si F n'est pas un sous-espace vectoriel :

On montre que l'une des propriétés caractéristiques n'est pas vérifiée (à l'aide d'un contre-exemple pour ii).

Exemple 2

Soit $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x+y=1\}$. F muni des lois usuelles sur $\mathbb{R}^2$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Réponse

Non ! $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\notin F$ car $0+0\neq 1$.

Montrer qu'une partie *F* de $\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$ définie par une ou plusieurs équations caractéristiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et en déterminer une base

On montre que tout élément de F s'écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs fixés de $\mathbb{R}^n$, et que ces vecteurs forment une famille libre.

Exemple 3

Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x=2y\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, et en donner un base.

Réponse

On a : $((x,y,z)\in F \Leftrightarrow (x,y,z)=(2y,y,z)=y(2,1,0)+z(0,0,1))$.

Ainsi F est l'ensemble des combinaisons linéaires de (2,1,0) et (0,0,1), donc

$F=\text{Vect}\{(2,1,0),(0,0,1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

De plus (2,1,0) et (0,0,1) ne sont pas colinéaires (car les coordonnées ne sont pas proportionnelles).

Ils forment donc une base de F.

Remarque : Avec cette méthode, on démontre que F est un sous-espace vectoriel en même temps que l'on détermine une base. Il est inutile de vérifier séparément les propriétés caractéristiques d'un sous-espace vectoriel.

■ Établir si une famille de vecteurs est libre

On écrit formellement une combinaison linéaire nulle de vecteurs de la famille, et l'on cherche à déterminer si elle est triviale (c'est-à-dire si tous les scalaires sont nécessairement nuls).

- Si c'est le cas, la famille est libre.
- Sinon, on exhibe une combinaison linéaire nulle non triviale de vecteurs de la famille, et on conclut à leur dépendance.

Exemple 4

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions réelles définies dans $\mathbb{R}$, muni des lois usuelles.

Soient $f_1 : x \mapsto \cos(2x), f_2 : x \mapsto \cos^2(x), f_3 : x \mapsto 1$.

Les familles $\{f_1, f_2\}$ et $\{f_1, f_2, f_3\}$ sont-elles libres ?

Réponse

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.
  On a : $\left(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \cos^2(x) = 0\right)$.
  De la deuxième assertion, avec $x = \dfrac{\pi}{2}$ on obtient $\lambda_1 = 0$, puis avec $x = 0$ on obtient $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, puis que la famille $\{f_1, f_2\}$ est libre.
- Pour tout réel x, on a : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ donc $f_1 - 2f_2 + f_3 = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.
  La famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est liée.

Remarque : En dimension finie, les méthodes peuvent varier.

Exemple 5

Soients $u = (1,0,-2), v = (3,2,-1), w = (-1,1,-5), s = (0,4,10)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Les familles $\{u,v,w,s\}, \{u,v,w\}, \{u,v,s\}$ sont-elles libres ?

Réponse

- La famille $\{u,v,w,s\}$ est de cardinal 4 dans un espace vectoriel de dimension 3, elle est donc liée.

> **Remarque :** On a ici utilisé le résultat suivant :
> Dans un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, toute famille de cardinal strictement supérieur à n est liée.

- Pour la famille $\{u,v,w\}$, en utilisant la définition :

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=0_{\mathbb{R}^3}$. On a :

$$\left(\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=0_{\mathbb{R}^3}\right)\Leftrightarrow\left((\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3,2\lambda_2+\lambda_3,-2\lambda_1-\lambda_2-5\lambda_3)=(0,0,0)\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3=0\\2\lambda_2+\lambda_3=0\\-2\lambda_1-\lambda_2-5\lambda_3=0\end{cases}\underset{L_3\leftarrow L_3+2L_1}{\underbrace{\Leftrightarrow}}\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3=0\\2\lambda_2+\lambda_3=0\\5\lambda_2-7\lambda_3=0\end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+7L_2}{\underbrace{\Leftrightarrow}}\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3=0\\2\lambda_2+\lambda_3=0\\19\lambda_2=0\end{cases}\Leftrightarrow(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0).$$

La seule combinaison linéaire nulle des vecteurs u, v et w est triviale, la famille $\{u,v,w\}$ est donc libre.

Remarque : En dimension finie, pour étudier la liberté d'une famille de vecteurs, on est ramené à déterminer le rang d'un système linaire homogène. Le rang du système est égal au rang de la famille de vecteurs. En particulier, si le rang est égal au nombre de vecteurs dans la famille, alors le système est de Cramer ; la seule solution est la solution triviale et la famille est libre.

Une autre rédaction peut donc être la suivante :

On a : $\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&2&1\\-2&-1&-5\end{pmatrix}\underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3+2L_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&2&1\\0&5&-7\end{pmatrix}\underset{L}{\overset{L_3\leftarrow 5L_2-2L_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&2&1\\0&0&19\end{pmatrix}$.

Le rang de la matrice est 3, donc le rang de la famille $\{u,v,w\}$ est 3 ; elle est libre.

Remarque : Dans les corrections des exercices, je fais le choix d'utiliser les systèmes, car cette méthode permet de mémoriser la définition d'une famille libre.

- $s=2v-6u$, la famille $\{u,v,s\}$ est donc liée.

Remarque : Comme dans le cas précédent, on peut raisonner sur le rang de la famille.

On a : $\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&4\\-2&-1&10\end{pmatrix}\underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3+2L_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&2&4\\0&5&10\end{pmatrix}\underset{L}{\overset{L_3\leftarrow 2L_3-5L_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Le rang de la matrice est 2, donc le rang de la famille $\{u,v,s\}$ est 2 ; elle n'est pas libre.

■ Montrer qu'une famille est une base en dimension finie

On montre qu'elle est libre, et que son cardinal est égal à la dimension de l'espace.

⚠ Même si le lien est étroit, ne pas confondre le mot **cardinal** (qui est le nombre d'éléments d'une famille finie) avec le mot **dimension** (qui est le cardinal des bases d'un espace vectoriel).

Exemple 6

Soient $P_1 = X^2 - 1, P_2 = X^2 + 2X, P_3 = X$. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Réponse

Montrons que la famille est libre :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. On a :

$$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0) \Leftrightarrow \left((\lambda_1 + \lambda_2)X^2 + (2\lambda_2 + \lambda_3)X - \lambda_1 = 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0).$$

La famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est donc libre, de cardinal 3 qui est la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$; on en déduit que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Remarque : On distingue la famille (non ordonnée) $\{P_1, P_2, P_3\}$ de la base (ordonnée) (P_1, P_2, P_3), par l'emploi des accolades pour la première et des parenthèses pour la seconde.

■ Déterminer une base de Vect{$\mathscr{F}$}, où $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel

Remarque : D'après le théorème de la base extraite, on sait que l'on peut extraire une base de toute famille génératrice d'un espace vectoriel.

1. On choisit un vecteur (non nul !) de $\mathscr{F}$.
   - Si tous les autres vecteurs de $\mathscr{F}$ lui sont colinéaires, il constitue une base.
   - Sinon, on choisit un autre vecteur de $\mathscr{F}$ non colinéaire au premier.
2. On cherche un troisième vecteur de $\mathscr{F}$ qui forme avec les deux précédents une famille libre.
   - S'il n'en existe pas, les deux vecteurs précédemment choisis constituent une base.

- Sinon on prend un tel vecteur et on recommence avec un quatrième…
  Ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait testé tous les vecteurs ou que l'on ait obtenu une famille dont le cardinal est la dimension de l'espace (car on sait que toute famille de cardinal strictement supérieur à la dimension de l'espace est liée).

3. La plus grande sous-famille libre ainsi constituée est une base de Vect{$\mathscr{F}$}.

Exemple 7

Soient $u=(2,0,1), v=(1,3,-2), w=(5,3,0), s=(0,6,-5)$.

Déterminer une base de $\text{Vect}\{u,v,w,s\}$.

Réponse

- u et v ne sont clairement pas colinéaires (car les coordonnées ne sont pas proportionnelles).
- $w=2u+v$ donc $\{u,v,w\}$ est liée.
- $s=2v-u$ donc $\{u,v,s\}$ est liée.

Finalement une base de $\text{Vect}\{u,v,w,s\}$ est (u,v).

Remarque : Il n'y a évidemment pas unicité. La seule constante est le nombre de vecteurs dans la base (qui est la dimension de l'espace engendré).

Déterminer l'intersection de deux sous-espaces vectoriels *F* et *G* de *E* en dimension finie

On écrit un vecteur de *E* comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base de *F* et comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base de *G*. On exprime les scalaires de l'une des combinaisons linéaires à l'aide des scalaires de l'autre, puis on établit une relation qui donne la forme générale d'un vecteur de l'intersection.

Exemple 8

Soient $f_1=(1,0,2), f_2=(0,1,1), g_1=(0,1,3), g_2=(1,1,1)$, $F=\text{Vect}\{f_1,f_2\}$ et $G=\text{Vect}\{g_1,g_2\}$. Déterminer $F\cap G$.

Réponse

Remarque : dim(*F*) + dim(*G*) > 3, donc $F\cap G\neq\left\{0_{\mathbb{R}^3}\right\}$, comme en atteste la formule de Grassman :

> Si *F* et *G* sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$ **de dimension finie**, alors : $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$.

Soit $x \in F \cap G$.

$x \in F$, donc il existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que $x = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = (\lambda_1,\lambda_2,2\lambda_1+\lambda_2)$;

$x \in G$, donc il existe $(\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que

$x = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 = (\mu_2,\mu_1+\mu_2,3\mu_1+\mu_2)$.

On a : $\begin{cases} \lambda_1 = \mu_2 \\ \lambda_2 = \mu_1+\mu_2 \\ 2\lambda_1+\lambda_2 = 3\mu_1+\mu_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \mu_2 \\ \lambda_2 = \mu_1+\mu_2 \\ \mu_1+3\mu_2 = 3\mu_1+\mu_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \mu_2 \\ \lambda_2 = \mu_1+\mu_2 \\ \mu_1 = \mu_2 \end{cases}$.

On en déduit que $x = \mu_1 g_1 + \mu_1 g_2 = \mu_1(1,2,4)$, puis que $F \cap G = \mathrm{Vect}\{(1,2,4)\}$.

Remarque : On aurait également pu exprimer λ_2 à l'aide de λ_1 ce qui donne : $x = \lambda_1 f_1 + 2\lambda_1 f_2 = \lambda_1(1,2,4)$.

■ Montrer que deux sous-espaces vectoriels *F* et *G* sont supplémentaires dans *E*

- En montrant que $F \cap G = \{0_E\}$, et que tout élément de *E* s'écrit comme la somme d'un élément de *F* et d'un élément de *G* :

Exemple 9

On se place dans l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, muni des lois usuelles.

Montrer que l'ensemble F_p des fonctions paires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et l'ensemble F_i des fonctions impaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Réponse

- Soit $f \in F_p \cap F_i$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) \underset{f \in F_p}{=} f(-x) \underset{f \in F_i}{=} -f(x)$, donc $f(x) = 0$.

  On a montré que $F_p \cap F_i = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$.

- Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

  $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

$x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ est une fonction paire, et $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ est une fonction impaire ; on a donc écrit *f* comme la somme d'un élément de F_p et d'un élément de F_i.

On a donc montré que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subset F_p + F_i$, donc que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F_p + F_i$ (puisque l'on a : $F_p + F_i \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$).

Ainsi, on a montré que F_p et F_i sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- En dimension finie, en montrant que F et G vérifient les deux assertions suivantes :

> i. $F \cap G = \{0_E\}$
>
> ii. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

Exemple 10

Montrer que $F = \text{Vect}\{(1,2,3);(0,2,-3)\}$ et $G = \text{Vect}\{(0,1,-4)\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Réponse

- Pour montrer que $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{R}^3}\right\}$, le plus simple est de montrer que la famille $\{(1,2,3);(0,2,-3);(0,1,-4)\}$ est libre.

En effet, si la famille est libre, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$\lambda(0,1,-4) \notin \text{Vect}\{(1,2,3);(0,2,-3)\}$, donc $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{R}^3}\right\}$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,2,-3) + \lambda_3(0,1,-4) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

On a :

$$\left(\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,2,-3) + \lambda_3(0,1,-4) = (0,0,0)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2} \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0).$$

Ainsi, la famille $\{(1,2,3);(0,2,-3);(0,1,-4)\}$ est libre, et $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{R}^3}\right\}$.

- card(F) = 2, car les vecteurs (1, 2, 3) et (0, 2, -3) ne sont clairement pas colinéaires. On a donc : $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$.

En conclusion, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

■ Déterminer un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel *F* dans un espace vectoriel *E* de dimension finie

Si $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de *dimension finie*, alors tout sous-espace vectoriel admet au moins un supplémentaire (dans *E*).

On complète une base de *F* avec des vecteurs d'une base de *E* jusqu'à obtenir une famille libre de cardinal dim(*E*).

L'espace engendré par ces vecteurs est un supplémentaire de *F*.

Exemple 11

Déterminer un supplémentaire de $F=\text{Vect}\{(1,0,-2);(3,0,2)\}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Réponse

$(1,0,-2)$ et $(3,0,2)$ ne sont clairement pas colinéaires, donc dim(*F*) = 2.

Comme dim($\mathbb{R}^3$) = 3, les supplémentaires de *F* dans $\mathbb{R}^3$ sont de dimension 1.

Montrons que $\{(1,0,-2);(3,0,2);(0,1,0)\}$ est une famille libre :

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1,0,-2)+\lambda_2(3,0,2)+\lambda_3(0,1,0)=0_{\mathbb{R}^3}$.

On a : $$\left(\lambda_1(1,0-2)+\lambda_2(3,0,2)+\lambda_3(0,1,0)=(0,0,0)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2=0\\ \lambda_3=0\\ -2\lambda_1+2\lambda_2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0).$$

La famille $\{(1,0,-2);(3,0,2);(0,1,0)\}$ est libre, de cardinal 3.

On a donc : $F\oplus\text{Vect}\{(0,1,0)\}=\mathbb{R}^3$.

Remarque : Le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est dans *F*, on ne pouvait donc pas compléter la base de *F* avec lui !

À vous !

On s'échauffe

1. Les ensembles F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels usuels ?

   Si oui, en déterminer une base, et un supplémentaire.

   a. $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x-y-2z=0\right\}$

   b. $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x^2-y-2z=0\right\}$

   c. $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x-2y+3z+t=0\right\}$

   d. $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+2y-z=0\right\}$

   e. $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, (x+y=0)\wedge(x+y+z=0)\right\}$ (on rappelle que le symbole $\wedge$ signifie « et ».)

   f. $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, (x+y=0)\vee(x+y+z=0)\right\}$ (on rappelle que le symbole $\vee$ signifie « ou ».)

   g. $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x^2+y^2=0\right\}$

   h. $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, (x+y+z)^2+(2x+y-z)^2=0\right\}$

   i. $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, (x+y+z)^2=(2x+y-z)^2\right\}$

   j. $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, xy\leq 0\right\}$

   k. $F=\left\{P\in\mathbb{R}_2[X], P(1)=0\right\}$

   l. $F=\left\{P\in\mathbb{R}_2[X], (P(0)=0)\wedge(P(1)=1)\right\}$

   m. $F=\left\{P\in\mathbb{R}_2[X], P(1)=P(-1)=0\right\}$

   n. $F=\left\{P\in\mathbb{R}_3[X], P(1)=P(-1)=0\right\}$

   o. $F=\left\{P\in\mathbb{R}_2[X], P(2)=P'(2)=0\right\}$

   p. $F=\left\{P\in\mathbb{R}_2[X], P'(1)=0\right\}$

2. Les familles suivantes sont-elles libres ?

   a. Dans $\mathbb{R}^4$: $\{e_1,e_2,e_3\}$ telle que :
   $e_1=(1,-1,0,1), e_2=(0,2,-1,1), e_3=(-2,1,-2,0)$.

   b. Dans $\mathbb{R}^4$: $\{e_1,e_2,e_3\}$ telle que :
   $e_1=(1,-1,0,1), e_2=(0,2,-1,1), e_3=(1,-5,2,-1)$.

   c. Dans $\mathbb{R}[X]$: $\left\{X^0, X, X\left(X^2-1\right)\right\}$.

   d. Dans $\mathbb{R}[X]$: $\left\{X-1, X+1, X^2-1\right\}$.

   e. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{f_1,f_2\}$ telle que $f_1 : x\mapsto \cos(x), f_2 : x\mapsto \sin(x)$.

   f. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{f_1,f_2\}$ telle que $f_1 : x\mapsto \sin(x), f_2 : x\mapsto \sin^2(x)$.

   g. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{f_1,f_2,f_3\}$ telle que
   $f_1 : x\mapsto \ln\left(1+x^2\right), f_2 : x\mapsto \ln\left(1+x+x^2\right), f_3 : x\mapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{1+x^2}\right)$.

   h. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{f_1,f_2,f_3\}$ telle que $f_1 : x\mapsto \operatorname{ch}(x), f_2 : x\mapsto \operatorname{sh}(x), f_3 : x\mapsto e^x$.

   i. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{f_1,f_2,f_3\}$ telle que $f_1 : x\mapsto \operatorname{ch}(x), f_2 : x\mapsto \operatorname{sh}(x), f_3 : x\mapsto e^{2x}$.

   j. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{f_1,f_2,f_3\}$ telle que
   $f_1 : x\mapsto |x-1|, f_2 : x\mapsto |x-2|, f_3 : x\mapsto |x-3|$.

On accélère

3. Dans les cas suivants, $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$ (où $+$ est la loi usuelle sur $\mathbb{R}^2$) est-il un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ?

   a. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et la loi externe est définie par :
   $\forall\left(\lambda,(x,y)\right)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2, \lambda\cdot(x,y)=\left((1-\lambda)x,(1+\lambda)y\right)$.

   b. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et la loi externe est définie par :
   $\forall\left(a+ib,(x,y)\right)\in \mathbb{C}\times\mathbb{R}^2, (a+ib)\cdot(x,y)=(ax-by, ay+bx)$.

4. Soit $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3, (x-y+z)^2+(x+y+3z)^2=0\right\}$.

   a. F est-il un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$?

   b. Même question si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

5. Sachant que $\{e_1,e_2,e_3\}$ est une famille libre, les familles suivantes le sont-elles ?

   a. $\{e_1+e_2,e_1+e_3,e_2+e_3\}$

   b. $\{e_1+e_2+e_3,e_1+e_2,2e_1+e_2-e_3\}$

   c. $\{e_1+e_2+e_3,e_1+e_2,e_1+e_2-e_3\}$

6. Dans $\mathbb{R}^3$, soient
   $u=(2,1,-1),v=(0,1,1),w=(-2,1,3),s=(-4,1,5),t=(1,0,-2)$,
   $F=\text{Vect}\{u,v\},G=\text{Vect}\{w,s\},H=\text{Vect}\{s,t\}$.

   a. Montrer que $F=G$.

   b. Déterminer $F\bigcap H$.

7. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u=(2,-1,1),v=(1,0,-1),s=(1,1,1),t=(0,2,-1)$
   $F=\text{Vect}\{u,v\},G=\text{Vect}\{s,t\}$. Déterminer une base de $F\bigcap G$.

8. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $u=(1,1,0,-1),v=(1,0,0,-1),w=(1,0,-1,0)$,
   $F=\text{Vect}\{u,v,w\}$, $G=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,x+y-z+2t=0\right\}$.

   a. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

   b. Déterminer une base de F, G, $F\bigcap G$ et $F+G$.

On finit au top

9. Dans les cas suivants, montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

   a. $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$, $F=\left\{f\in E,\int_0^1 f(t)dt=0\right\}$, et G est l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$.

   b. $E=C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F=\{f\in E,f(0)=f'(0)=0\}$, et G est l'ensemble des fonctions affines.

   c. $E=\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N},n\geq 2)$, $F=\text{Vect}\{(1,1,\ldots,1)\}$,
   et $G=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,x_1+x_2+\ldots+x_n=0\right\}$.

10. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que la famille $\mathrm{F}=\{f_a:x\mapsto|x-a|,a\in\mathbb{R}\}$ est libre.

1. a. On a : $\big((x,y,z)\in F\big)\Leftrightarrow\big((x,y,z)=(y+2z,y,z)=y(1,1,0)+z(2,0,1)\big)$.

Ainsi, $F=\text{Vect}\{(1,1,0),(2,0,1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, dont $\big((1,1,0),(2,0,1)\big)$ est une base (car les deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires).

De plus, $\mathbb{R}^3=F\oplus\text{Vect}\{(1,0,0)\}$.

En effet, dim(F) = 2, et dim($\mathbb{R}^3$) = 3, on cherche donc un supplémentaire de dimension 1.

Vérifions que la famille $\{(1,0,0),(1,1,0),(2,0,1)\}$ est libre :

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(2,0,1)=0_{\mathbb{R}^3}$.

On a :

$$\big(\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(2,0,1)=(0,0,0)\big)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0).$$

La famille est donc libre.

Ainsi, Vect{(1,0,0)} est bien un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

b. On a : $(1,1,0)\in F$ car $1^2-1-0=0$, mais $2\cdot(1,1,0)\notin F$ car $2^2-2-0\neq 0$.

F n'est pas stable par combinaisons linéaires, donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : Pour trouver un contre-exemple, il faut comprendre pourquoi on n'a pas un sous-espace vectoriel. Ici, c'est en raison du carré sur x. Le produit par un scalaire ne peut pas conserver la propriété qui n'est pas « linéaire ».

c. On a :

$$\big((x,y,z,t)\in F\big)\Leftrightarrow\big((x,y,z,t)=(2y-3z-t,y,z,t)$$
$$=y(2,1,0,0)+z(-3,0,1,0)+t(-1,0,0,1)\big).$$

Ainsi, $F=\text{Vect}\{(2,1,0,0),(-3,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Montrons que $\{(2,1,0,0),(-3,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ est une famille libre :

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que
$\lambda_1(2,1,0,0)+\lambda_2(-3,0,1,0)+\lambda_3(-1,0,0,1)=0_{\mathbb{R}^4}$.

On a immédiatement : $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

La famille est donc libre, et $\big((2,1,0,0),(-3,0,1,0),(-1,0,0,1)\big)$ est une base de F.

De plus, $\mathbb{R}^4=F\oplus \text{Vect}\{(1,0,0,0)\}$.

En effet, $\dim(F)=3$, et $\dim(\mathbb{R}^4)=4$, on cherche donc un supplémentaire de dimension 1.

Vérifions que la famille $\{(1,0,0,0),(2,1,0,0),(-3,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ est libre :

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$\lambda_1(1,0,0,0)+\lambda_2(2,1,0,0)+\lambda_3(-3,0,1,0)+\lambda_4(-1,0,0,1)=0_{\mathbb{R}^4}$.

On a immédiatement : $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. La famille est donc libre.

Ainsi, Vect{(1,0,0,0)} est bien un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

d. ⚠ La coordonnée t n'apparaît pas dans l'équation caractéristique de F, mais on est dans $\mathbb{R}^4$!

$$\big((x,y,z,t)\in F\big)\Leftrightarrow\big((x,y,z,t)=(-2y+z,y,z,t)$$
$$=y(-2,1,0,0)+z(1,0,1,0)+t(0,0,0,1)\big).$$

Ainsi, $F=\text{Vect}\{(-2,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Montrons que $\{(-2,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ est une famille libre :

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$\lambda_1(-2,1,0,0)+\lambda_2(1,0,1,0)+\lambda_3(0,0,0,1)=0_{\mathbb{R}^4}$.

On a immédiatement $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

La famille est donc libre, et $\big((-2,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)\big)$ est une base de F.

De plus, $\mathbb{R}^4=F\oplus \text{Vect}\{(1,0,0,0)\}$.

En effet, $\dim(F)=3$, et $\dim(\mathbb{R}^4)=4$, on cherche donc un supplémentaire de dimension 1.

Vérifions que la famille $\{(1,0,0,0),(-2,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ est libre :

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$\lambda_1(1,0,0,0)+\lambda_2(-2,1,0,0)+\lambda_3(1,0,1,0)+\lambda_4(0,0,0,1)=0_{\mathbb{R}^4}$.

On a immédiatement : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
La famille est donc libre.

Ainsi, Vect{(1,0,0,0)} est bien un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

e. Remarquons tout d'abord que :
$\big((x+y=0)\wedge(x+y+z=0)\big) \Leftrightarrow \big((y=-x)\wedge(z=0)\big)$.
On a donc : $\big((x,y,z)\in F\big) \Leftrightarrow \big((x,y,z)=(x,-x,0)=x(1,-1,0)\big)$.
Ainsi, $F=\mathrm{Vect}\{(1,-1,0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, de base $\big((1,-1,0)\big)$.
De plus, $\mathbb{R}^3 = F \oplus \mathrm{Vect}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$.
En effet, dim(F) = 1, et dim($\mathbb{R}^3$) = 3, on cherche donc un supplémentaire de dimension 2.
$(1,-1,0)+(0,1,0)=(1,0,0)$, donc les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ appartiennent à :
$\mathrm{Vect}\{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = F+\mathrm{Vect}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ d'où
$\mathbb{R}^3 = F+\mathrm{Vect}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$.
Ainsi, $\mathrm{Vect}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque : Ici, il était rapide de montrer que $\mathbb{R}^3 = F+\mathrm{Vect}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$, mais on aurait également pu montrer la liberté de la famille $\{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

f. **Remarque :** $F_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y=0\}$ et $F_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Vérifier l'une ou l'autre des équations caractéristiques signifie appartenir à l'un ou l'autre des sous-espaces vectoriels, on peut donc écrire $F = F_1 \cup F_2$.

Pour montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel, on va choisir un vecteur de F_1 (qui est donc dans F) qui n'est pas dans F_2, et un vecteur de F_2 (également dans F) qui n'est pas dans F_1, et vérifier que leur somme n'est pas dans F.

$(1,-1,1)\in F_1$ car $1-1=0$, donc $(1,-1,1)\in F$ (mais $(1,-1,1)\notin F_2$ car $1-1+1\neq 0$) ;

$(-1,0,1) \in F_2$ car $-1+0+1=0$, donc $(-1,0,1) \in F$ (mais $(-1,0,1) \notin F_1$ car $-1+0 \neq 0$).

Or $(1,-1,1)+(-1,0,1)=(0,-1,2) \notin F$ car $0-1 \neq 0$ et $0-1+2 \neq 0$.

Ainsi, F n'est pas stable par combinaisons linéaires, ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

g. Remarquons tout d'abord que dans $\mathbb{R}$: $\left(x^2+y^2=0\right) \Leftrightarrow (x=y=0)$.

On a donc : $\left((x,y,z) \in F\right) \Leftrightarrow \left((x,y,z)=(0,0,z)=z(0,0,1)\right)$.

Ainsi, $F=\text{Vect}\{(0,0,1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, de base $((0,0,1))$.

De plus, $\mathbb{R}^3=F \oplus \text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ (on a reconstitué la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Ainsi, $\text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

h. Remarquons tout d'abord que dans $\mathbb{R}$:

$$\left((x+y+z)^2+(2x+y-z)^2=0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 2L_1-L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=-3z \end{cases}.$$

On a donc : $\left((x,y,z) \in F\right) \Leftrightarrow \left((x,y,z)=(2z,-3z,z)=z(2,-3,1)\right)$.

Ainsi, $F=\text{Vect}\{(2,-3,1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, de base $((2,-3,1))$.

De plus, $\mathbb{R}^3=F \oplus \text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

En effet, dim(F) = 1, et dim($\mathbb{R}^3$) = 3, on cherche donc un supplémentaire de dimension 2.

$(2,-3,1)-2(1,0,0)+3(0,1,0)=(0,0,1)$, donc les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ appartiennent à :

$\text{Vect}\{(2,-3,1),(1,0,0),(0,1,0)\}=F+\text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ d'où

$\mathbb{R}^3=F+\text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Ainsi, $\text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est bien un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

i. **Remarque :**

$$\left((x+y+z)^2=(2x+y-z)^2\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\left(\underbrace{x+y+z=2x+y-z}_{(1)}\right)\vee\left(\underbrace{x+y+z=-(2x+y-z)}_{(2)}\right)\right).$$

On va choisir un vecteur dont les coordonnées vérifient l'égalité (1) et un autre dont les coordonnées vérifient l'égalité (2). Chacun de ces vecteurs sera dans F, mais pas leur somme.

$(2,0,1)\in F$, car $(2+0+1)^2=(4+0-1)^2$;
$(2,-3,0)\in F$ car $(2-3+0)^2=(4-3+0)^2$.
Mais $(2,0,1)+(2,-3,0)=(4,-3,1)\notin F$, car $(4-3+1)^2\neq(8-3-1)^2$.
F n'est pas stable par combinaisons linéaires, donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

j. **Remarque :** $xy\leq 0$ signifie que les coordonnées sont de signes contraires. On va chercher à contredire la stabilité par somme en prenant deux vecteurs ayant chacun des coordonnées de signes contraires, mais dont la somme aura deux coordonnées de même signe.

$(1,-1)\in F$, car $1\times(-1)\leq 0$; $\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)\in F$, car $-2\times\dfrac{1}{2}\leq 0$.
Mais $(1,-1)+\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)=\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\notin F$, car $-1\times\dfrac{-1}{2}>0$.
F n'est pas stable par combinaisons linéaires, donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

k. Remarquons tout d'abord que $P(1)=0$ signifie que 1 est une racine de P.

On a donc :

$$(P\in F)\Leftrightarrow\left(\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2, P=(X-1)(aX+b)=aX(X-1)+b(X-1)\right).$$

Ainsi, $F=\text{Vect}\{X(X-1),X-1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, de base $(X(X-1),X-1)$ (les deux vecteurs n'étant clairement pas colinéaires).

De plus, $\mathbb{R}_2[X]=F\oplus\text{Vect}\{X^0\}$.

En effet, $\dim(F) = 2$, et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, on cherche donc un supplémentaire de dimension 1.

$\left\{X^0, X-1, X(X-1)\right\}$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés, elle est donc libre.

Ainsi, $\mathrm{Vect}\left\{X^0\right\}$ est bien un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

l. $0_{\mathbb{R}_2[X]} \notin F$, donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
(Il ne faut pas oublier les arguments les plus simples !)

m. Remarquons tout d'abord que $P(1) = P(-1) = 0$ signifie que 1 et -1 sont des racines de P.

On a donc : $(P \in F) \Leftrightarrow \left(\exists a \in \mathbb{R}, P = a(X-1)(X+1)\right)$.

Ainsi, $F = \mathrm{Vect}\left\{(X-1)(X+1)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, de base $\left((X-1)(X+1)\right)$.

De plus, $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus \mathrm{Vect}\left\{X^0, X\right\}$.

En effet, $\dim(F) = 1$, et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, on cherche donc un supplémentaire de dimension 2.

$\left\{X^0, X, (X-1)(X+1)\right\}$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés, elle est donc libre.

Ainsi, $\mathrm{Vect}\left\{X^0, X\right\}$ est bien un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

n. ⚠ Cette fois, on se place dans $\mathbb{R}_3[X]$!

$$(P \in F) \Leftrightarrow \Big(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = (X-1)(X+1)(aX+b) \\ = aX(X-1)(X+1) + b(X-1)(X+1)\Big).$$

Ainsi, $F = \mathrm{Vect}\left\{X(X-1)(X+1), (X-1)(X+1)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, de base $\left(X(X-1)(X+1), (X-1)(X+1)\right)$ (les deux vecteurs n'étant clairement pas colinéaires).

De plus, $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus \mathrm{Vect}\left\{X^0, X\right\}$.

En effet, $\dim(F) = 2$, et $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$, on cherche donc un supplémentaire de dimension 2.

$\left\{X^0, X, (X-1)(X+1), X(X-1)(X+1)\right\}$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés, elle est donc libre.

Ainsi, $\text{Vect}\left\{X^0, X\right\}$ est bien un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

o. Remarquons tout d'abord que $P(2) = P'(2) = 0$ signifie que 2 est une racine double de P.

On a donc : $(P \in F) \Leftrightarrow \left(\exists a \in \mathbb{R}, P = a(X-2)^2\right)$.

Ainsi, $F = \text{Vect}\left\{(X-2)^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, de base $\left((X-2)^2\right)$.

De plus, $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus \text{Vect}\left\{X^0, X\right\}$.

En effet, dim(F) = 1, et dim($\mathbb{R}_2[X]$) = 3, on cherche donc un supplémentaire de dimension 2.

$\left\{X^0, X, (X-2)^2\right\}$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés, elle est donc libre.

Ainsi, $\text{Vect}\left\{X^0, X\right\}$ est bien un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

p. On a : $(P \in F) \Leftrightarrow \left(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = a + b(X-1)^2\right)$

Remarque : On a utilisé la formule de Taylor pour un polynôme de degré au plus 2 : $P = P(1) + P'(1)(X-1) + \dfrac{P''(1)}{2}(X-1)^2$.

Ainsi, $F = \text{Vect}\left\{X^0, (X-1)^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, de base $\left(X^0, (X-1)^2\right)$ (les deux vecteurs n'étant clairement pas colinéaires).

De plus, $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus \text{Vect}\left\{X\right\}$.

En effet, dim(F) = 2, et dim($\mathbb{R}_2[X]$) = 3, on cherche donc un supplémentaire de dimension 1.

$\left\{X^0, X, (X-1)^2\right\}$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés, elle est donc libre.

Ainsi, $\text{Vect}\left\{X\right\}$ est bien un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

2. a. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3=0_{\mathbb{R}^4}$. On a :

$$\left(\lambda_1(1,-1,0,1)+\lambda_2(0,2,-1,1)+\lambda_3(-2,1,-2,0)=(0,0,0,0)\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_3=0\\-\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\-\lambda_2-2\lambda_3=0\\\lambda_1+\lambda_2=0\end{cases}\Leftrightarrow(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0).$$

La famille est donc libre.

b. $e_3=e_1-2e_2$. La famille est donc liée.

c. $\left\{X^0,X,X\left(X^2-1\right)\right\}$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés ; elle est donc libre.

d. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(X-1)+\lambda_2(X+1)+\lambda_3\left(X^2-1\right)=0$.
On a :

$$\left(\lambda_1(X-1)+\lambda_2(X+1)+\lambda_3\left(X^2-1\right)=0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_3=0\\\lambda_1+\lambda_2=0\\-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0).$$

La famille est donc libre.

e. Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$.

On a : $\left(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R},\lambda_1\cos(x)+\lambda_2\sin(x)=0\right)$.

De la deuxième assertion, avec $x=0$ on obtient $\lambda_1=0$, et avec $x=\frac{\pi}{2}$ on obtient $\lambda_2=0$.

La famille est donc libre.

f. Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$.

On a : $\left(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R},\lambda_1\sin(x)+\lambda_2\sin^2(x)=0\right)$.

De la deuxième assertion, avec $x=\frac{\pi}{2}$ on obtient $\lambda_1+\lambda_2=0$, et avec $x=-\frac{\pi}{2}$ on obtient $-\lambda_1+\lambda_2=0$. On en déduit que $\lambda_1=\lambda_2=0$, puis que la famille est libre.

g. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)=\ln\left(\frac{1+x^2+x}{1+x^2}\right)=\ln\left(1+x+x^2\right)-\ln\left(1+x^2\right)$ d'où $f_3=f_2-f_1$. La famille est donc liée.

h. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x=\text{ch}(x)+\text{sh}(x)$, donc $f_3=f_1+f_2$ et la famille est liée.

i. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3=0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$.

$$\left(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3=0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}, (\lambda_1+\lambda_2)e^x+(\lambda_1-\lambda_2)e^{-x}+2\lambda_3 e^{2x}=0\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}, 2\lambda_3 e^{3x}+(\lambda_1+\lambda_2)e^{2x}+(\lambda_1-\lambda_2)=0\right)$$
$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{y=e^x}\left(\forall y\in\mathbb{R}_+^*, 2\lambda_3 y^3+(\lambda_1+\lambda_2)y^2+(\lambda_1-\lambda_2)=0\right).$$

Ainsi, le polynôme $2\lambda_3 X^3+(\lambda_1+\lambda_2)X^2+(\lambda_1-\lambda_2)$ a une infinité de racines, il est donc nul.

On en déduit que $\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2=\lambda_1-\lambda_2=0$, et par suite que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

La famille est donc libre.

j. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3=0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$.

$$\left(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3=0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}, \lambda_1|x-1|+\lambda_2|x-2|+\lambda_3|x-3|=0\right).$$

De la deuxième assertion, avec $x=1$ on obtient $\lambda_2+2\lambda_3=0$, avec $x=2$ on obtient $\lambda_1+\lambda_3=0$, et avec $x=3$ on obtient $2\lambda_1+\lambda_2=0$.

$$\begin{cases}\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2=0\end{cases}\Leftrightarrow(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0).$$

La famille est donc libre.

3. a. $1\cdot(1,1)=(0,2)\neq(1,1)$; une propriété caractéristique de la loi externe n'est pas vérifiée donc $(E,+,\cdot)$ n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

b. On vérifie toutes les propriétés caractéristiques d'un espace vectoriel (c'est un peu fastidieux, mais on n'a pas le choix !) :

- $\left(\mathbb{R}^2,+\right)$ est un groupe abélien.

- $\forall(a+ib,\lambda+i\mu)\in\mathbb{C}^2, \forall((x,y),(u,v))\in\left(\mathbb{R}^2\right)^2$:

i) $1\cdot(x,y)=(x-0y,y+0x)=(x,y)$.

ii) $(a+ib+\lambda+i\mu)\cdot(x,y)=((a+\lambda)x-(b+\mu)y,(a+\lambda)y+(b+\mu)x)$
$=(ax-by,ay+bx)+(\lambda x-\mu y,\lambda y+\mu x)=(a+ib)\cdot(x,y)+(\lambda+i\mu)\cdot(x,y)$.

iii) $(a+ib)\cdot((x,y)+(u,v))=(a+ib)\cdot(x+u,y+v)$
$=(a(x+u)-b(y+v),a(y+v)+b(x+u))$
$=(ax-by,ay+bx)+(au-bv,av+bu)$
$=(a+ib)\cdot(x,y)+(a+ib)\cdot(u,v)$.

iv) $(a+ib)\cdot((\lambda+i\mu)\cdot(x,y))=(a+ib)\cdot(\lambda x-\mu y,\lambda y+\mu x)$
$=(a(\lambda x-\mu y)-b(\lambda y+\mu x),a(\lambda y+\mu x)+b(\lambda x-\mu y))$
$=((a\lambda-b\mu)x-(a\mu+b\lambda)y,(a\lambda-b\mu)y+(a\mu+b\lambda)x)$
$=((a\lambda-b\mu)+i(a\mu+b\lambda))\cdot(x,y)=((a+ib)(\lambda+i\mu))\cdot(x,y)$.

On en déduit que $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

4. a. Remarquons tout d'abord que dans $\mathbb{R}$:

$$\left((x-y+z)^2+(x+y+3z)^2=0\right)\Leftrightarrow((x-y+z=0)\wedge(x+y+3z=0))$$
$$\Leftrightarrow((x=-2z)\wedge(y=-z)).$$

On a donc : $((x,y,z)\in F)\Leftrightarrow((x,y,z)=(-2z,-z,z)=z(-2,-1,1))$.

Ainsi, $F=\text{Vect}\{(-2,-1,1)\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

b. Dans $\mathbb{C}$, $\left((x-y+z)^2+(x+y+3z)^2=0\right)\Leftrightarrow(x-y+z=\pm i(x+y+3z))$.

$(1,i,0)\in F$ et $(i,1,0)\in F$, mais $(1,i,0)+(i,1,0)=(1+i,1+i,0)\notin F$.

F n'est pas stable par combinaisons linéaires, donc ce n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

5. **a.** Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(e_1+e_2)+\lambda_2(e_1+e_3)+\lambda_3(e_2+e_3)=0$.

On a :

$$\left(\lambda_1(e_1+e_2)+\lambda_2(e_1+e_3)+\lambda_3(e_2+e_3)=0\right)$$
$$\Leftrightarrow\left((\lambda_1+\lambda_2)e_1+(\lambda_1+\lambda_3)e_2+(\lambda_2+\lambda_3)e_3=0\right).$$

Or $\{e_1,e_2,e_3\}$ est une famille libre donc $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$, qui équivaut à $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0)$.

La famille est donc libre.

b. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$\lambda_1(e_1+e_2+e_3)+\lambda_2(e_1+e_2)+\lambda_3(2e_1+e_2-e_3)=0$. On a :

$$\left(\lambda_1(e_1+e_2+e_3)+\lambda_2(e_1+e_2)+\lambda_3(2e_1+e_2-e_3)=0\right)$$
$$\Leftrightarrow\left((\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)e_1+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e_2+(\lambda_1-\lambda_3)e_3=0\right).$$

Or $\{e_1,e_2,e_3\}$ est une famille libre donc $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_3=0\end{cases}$, ce qui équivaut à $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0)$.

La famille est donc libre.

c. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$\lambda_1(e_1+e_2+e_3)+\lambda_2(e_1+e_2)+\lambda_3(e_1+e_2-e_3)=0$.

On a :

$$\left(\lambda_1(e_1+e_2+e_3)+\lambda_2(e_1+e_2)+\lambda_3(e_1+e_2-e_3)=0\right)$$
$$\Leftrightarrow\left((\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e_1+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e_2+(\lambda_1-\lambda_3)e_3=0\right).$$

Or $\{e_1,e_2,e_3\}$ est une famille libre donc $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_3=0\end{cases}$.

Le système n'est pas de Cramer, la famille est donc liée.

Remarque : On aurait aussi pu remarquer que

$$e_1+e_2=\frac{1}{2}\left((e_1+e_2+e_3)+(e_1+e_2-e_3)\right).$$

6. Remarquons que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, car u et v ne sont clairement pas colinéaires, de même que w et s, ainsi que s et t.

   a. On a : $w = 2v - u$ et $s = 3v - 2u$. On en déduit que $G \subset F$.

   De plus, $\dim(G) = \dim(F) = 2$. On a donc $G = F$.

   b. On a montré dans la question précédente que $s \in F$, donc $s \in F \cap H$. Montrons que $\{u, v, t\}$ est libre :

   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 t = 0_{\mathbb{R}^3}$.

   On a :

$$\left(\lambda_1(2,1,-1) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(1,0,-2) = (0,0,0)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0).$$

   On en déduit que $F + H = \mathbb{R}^3$ (puisque $F + H$ contient une famille libre de trois éléments).

   On a donc, d'après la formule de Grassman :

   $\dim(F \cap H) = \dim(F) + \dim(H) - \dim(F + H) = 1.$

   Finalement, $F \cap H = \text{Vect}\{s\}$.

7. Soit $x \in F \cap G$.

   $x \in F$, donc il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que :

   $x = \lambda_1 u + \lambda_2 v = (2\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2)$.

   $x \in G$, donc il existe $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que :

   $x = \mu_1 s + \mu_2 t = (\mu_1, \mu_1 + 2\mu_2, \mu_1 - \mu_2)$.

   On a donc : $\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 \\ -\lambda_1 = \mu_1 + 2\mu_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = \mu_1 - \mu_2 \end{cases}$, ce qui équivaut à : $\begin{cases} \lambda_1 = -\mu_1 - 2\mu_2 \\ \lambda_2 = 3\mu_1 + 4\mu_2 \\ -4\mu_1 - 6\mu_2 = \mu_1 - \mu_2 \end{cases}$.

   On en déduit que $\mu_1 = -\mu_2$, puis que $x = \mu_1(s - t) = \mu_1(1, -1, 2)$.

   Finalement, $F \cap G = \text{Vect}\{(1, -1, 2)\}$.

8. a. On a :

$$((x,y,z,t)\in G)\Leftrightarrow((x,y,z,t)=y(-1,1,0,0)+z(1,0,1,0)+t(-2,0,0,1)),$$

donc $G=\text{Vect}\{(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(-2,0,0,1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b. • Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=0_{\mathbb{R}^4}$.

On a :

$$(\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=(0,0,0,0))\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1=0\\ -\lambda_3=0\\ -\lambda_1-\lambda_2=0\end{cases}\Leftrightarrow(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0).$$

La famille $\{u, v, w\}$ est donc libre, et (u, v, w) est une base de F.

• On a déterminé dans la question précédente que

$G=\text{Vect}\{(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(-2,0,0,1)\}$.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$\lambda_1(-1,1,0,0)+\lambda_2(1,0,1,0)+\lambda_3(-2,0,0,1)=0_{\mathbb{R}^4}$.

On a :

$(\lambda_1(-1,1,0,0)+\lambda_2(1,0,1,0)+\lambda_3(-2,0,0,1)=(0,0,0,0))$

$\Leftrightarrow(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0)$.

On en déduit que $((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(-2,0,0,1))$ est une base de G.

• Soit $x\in F\cap G$.

$x\in F$, donc il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$, tel que :

$x=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1,-\lambda_3,-\lambda_1-\lambda_2)$.

$x\in G$, donc il existe $(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in\mathbb{R}^3$, tel que :

$x=(-\mu_1+\mu_2-2\mu_3,\mu_1,\mu_2,\mu_3)$.

On a donc : $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-\mu_1+\mu_2-2\mu_3\\ \lambda_1=\mu_1\\ -\lambda_3=\mu_2\\ -\lambda_1-\lambda_2=\mu_3\end{cases}$, ce qui équivaut à : $\begin{cases}\mu_1=\lambda_1\\ \mu_2=-\lambda_3\\ \mu_3=-\lambda_1-\lambda_2\\ \lambda_2=2\lambda_3\end{cases}$.

On en déduit que $x=\lambda_1 u+\lambda_3(2v+w)$.

Finalement, $F\cap G=\mathrm{Vect}\{u,2v+w\}$.

Les vecteurs u et $2v+w$ n'étant clairement pas colinéaires, $(u,2v+w)$ est une base de $F\cap G$.

- D'après la formule de Grassman :
  $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=4$.

  On en déduit que $F+G=\mathbb{R}^4$.

9. a. • Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E :

i. $0_E\in F$, car $\int_0^1 0\,\mathrm{d}t=0$.

ii. Soit $(\lambda,f,g)\in\mathbb{R}\times F^2$. On a :

$$\int_0^1(\lambda f(t)+g(t))\mathrm{d}t=\lambda\underbrace{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}_{\substack{=0\\ \text{car } f\in F}}+\underbrace{\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t}_{\substack{=0\\ \text{car } g\in F}}=0\text{, donc } \lambda f+g\in F.$$

F est donc un sous-espace vectoriel de E.

• Montrons que G est un sous-espace vectoriel de E :

i. $0_E\in G$ car $x\mapsto 0$ est une fonction constante.

ii. Soit $(\lambda,f,g)\in\mathbb{R}\times G^2$; f et g sont des fonctions constantes donc $\lambda f+g$ est une fonction constante, elle appartient à G.

G est donc un sous-espace vectoriel de E.

• Soit $f\in F\cap G$.

$f\in F$ donc $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0$, et $f\in G$ donc c'est une application constante sur $[0,1]$ (égale à $f(0)$). On en déduit que $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=f(0)(1-0)=0$ donc $f=0_E$ et $F\cap G=\{0_E\}$.

- Soit $f \in E$. f étant continue sur $[0,1]$, elle y admet des primitives et $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est bien définie. On écrit : $f = \left(f - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right) + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
  $c : x \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est une fonction constante sur $[0,1]$ et $\varphi : x \mapsto f(x) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que : $\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right) \times (1-0) = 0$.
  Ainsi, $f = \varphi + c \in F + G$, donc $E = F + G$.

Remarque : On a montré $E \subset F + G$, l'autre inclusion est immédiate car $F \subset E$ et $G \subset E$.

Finalement : $E = F \oplus G$.

b. • Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E :

i. $0_E \in F$.

ii. Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times F^2$, $\lambda \underbrace{f(0)}_{\substack{=0 \\ \text{car } f\in F}} + \underbrace{g(0)}_{\substack{=0 \\ \text{car } g\in F}} = 0$ et $\lambda \underbrace{f'(0)}_{\substack{=0 \\ \text{car } f\in F}} + \underbrace{g'(0)}_{\substack{=0 \\ \text{car } g\in F}} = 0$,

donc $\lambda f + g \in F$.

F est donc un sous-espace vectoriel de E.

- Montrons que G est un sous-espace vectoriel de E :

  i. $0_E \in G$ car $x \mapsto 0$ est une fonction affine.

  ii. Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times G^2$; f et g sont des fonctions affines c'est-à-dire qu'il existe $(a,b,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ et $g(x) = \alpha x + \beta$.

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc : $\lambda f(x) + g(x) = (\lambda a + \alpha)x + \lambda b + \beta$; ainsi $\lambda f + g \in G$.

  G est donc un sous-espace vectoriel de E.

- Soit $f \in F \cap G$.

  $f \in G$ donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$; de plus, $f \in F$ donc $f(0) = f'(0) = 0$, ce qui donne : $b = a = 0$, puis $f = 0_E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

- Soit $f \in E$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On écrit :
  $f = \left(f - f(0) - f'(0)x\right) + f(0) + f'(0)x$.
  $g : x \mapsto f(0) + f'(0)x$ est une fonction affine et $\varphi : x \mapsto f(x) - f(0) - f'(0)x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) et vérifie :
  $\varphi(0) = f(0) - f(0) = 0$ et $\varphi'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$.
  Ainsi, $f = \varphi + g \in F + G$, donc $E = F + G$.

Finalement : $E = F \oplus G$.

c. • Par construction, F est un sous-espace vectoriel de E.

- Montrons que G est un sous-espace vectoriel de E :
  i. $0_E \in G$, car $\sum_{i=1}^{n} 0 = 0$.
  ii. Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times G^2$. On note $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, avec $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, avec $\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$.
  Alors : $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, ..., \lambda x_n + y_n)$,
  avec $\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$.
  On en déduit que $\lambda x + y \in G$.
  G est donc un sous-espace vectoriel de E.

- Soit $x \in F \cap G$.
  $x \in F$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que : $x = (a, a, ..., a)$; de plus, $f \in G$, donc $\sum_{i=1}^{n} a = na = 0$ ce qui donne $a = 0$, donc $x = 0_E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

- Soit $x \in E$.
  On va effectuer un raisonnement par analyse-synthèse pour trouver la décomposition de x dans $F + G$:
  ANALYSE : On écrit $x = (x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda(1, 1, ..., 1) + (y_1, y_2, ..., y_n)$ (c'est-à-dire pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = x_i - \lambda$).

On a : $\left((y_1,y_2,\ldots,y_n)\in G\right)\Leftrightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}y_i=0\right)\Leftrightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}x_i=n\lambda\right)$. On choisit donc $\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

SYNTHÈSE : $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\lambda(1,1,\ldots,1)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)$,

avec $\sum_{i=1}^{n}y_i=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\lambda=0$, donc $x\in F+G$ puis $E=F+G$.

Finalement : $E=F\oplus G$.

10. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $\{a_i, i\in[\![1,n]\!]\}$ une famille de réels deux à deux distincts, et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{a_i}=0$.

S'il existe $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0}\neq 0$, alors $f_{a_{i_0}}=-\frac{1}{\lambda_{i_0}}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}\lambda_i f_{a_i}$.

Or pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, si $i\neq i_0$, alors f_{a_i} est dérivable en a_{i_0} donc, par somme, $f_{a_{i_0}}=-\frac{1}{\lambda_{i_0}}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}\lambda_i f_{a_i}$ est dérivable en a_{i_0}, ce qui est faux.

On en déduit que pour tout $i_0\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_{i_0}=0$, donc que la famille $\{f_{a_i}, i\in[\![1,n]\!]\}$ est libre.

Toute sous-famille finie de F est libre, donc F est libre.

Applications linéaires

Les espaces vectoriels étant définis, on s'intéresse aux applications qui les relient. Montrer qu'une application est linéaire et en déterminer les caractéristiques sont les premières étapes d'une étude plus spécifique de certaines d'entre elles, largement développée en deuxième année.
Dans cette fiche on travaille essentiellement en dimension finie.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application définie sur E, à valeurs dans F.

Je vous montre comment

Établir si une application entre deux espaces vectoriels est linéaire

$$\boxed{\left(f\in\mathscr{L}(E,F)\right)\Leftrightarrow\left(\forall(\lambda,x,y)\in\mathbb{K}\times E^2, f(\lambda\cdot x+y)=\lambda\cdot f(x)+f(y)\right)}$$

- Si f est bien linéaire :

On montre qu'elle vérifie la propriété caractéristique.

Exemple 1

Montrer que $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (2x-y,y-3x)\end{array}\right.$ est linéaire.

Réponse

Soit $(\lambda,(x,y),(a,b))\in\mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^2\right)^2$, on a :

$$\begin{aligned}f(\lambda(x,y)+(a,b))&=f(\lambda x+a,\lambda y+b)\\&=\left(2(\lambda x+a)-(\lambda y+b),\lambda y+b-3(\lambda x+a)\right)\\&=\left(\lambda(2x-y)+2a-b,\lambda(y-3x)+b-3a\right)\\&=\lambda(2x-y,y-3x)+(2a-b,b-3a)=\lambda f(x,y)+f(a,b).\end{aligned}$$

f est donc une application linéaire.

- Si elle n'est pas linéaire, on cherche un contrexemple :
  - Soit $f(0_E) \neq 0_F$.

Exemple 2

Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y+1 \end{array} \right.$ n'est pas linéaire.

Réponse

$f((0,0)) = 1 \neq 0$, donc f n'est pas linéaire.

  - Soit on trouve $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2$, tel que $f(\lambda \cdot x + y) \neq \lambda \cdot f(x) + f(y)$.

Exemple 3

Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array} \right.$ n'est pas linéaire.

Réponse

$2 \times f((1,1)) = (4,2)$ et $f((2,2)) = (4,4)$; ainsi, $2 \times f((1,1)) \neq f((2,2))$ donc f n'est pas une application linéaire.

■ Passer d'une forme explicite à une matrice d'application linéaire, et vice-versa

Si on connait la forme explicite d'une application linéaire f en dimension finie :

Pour obtenir la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$, on écrit en colonnes les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$ des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$.

Exemple 4

Donner la matrice de l'application linéaire $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 3x-2y, y) \end{array} \right.$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (appelée **matrice canoniquement associée** à f).

Réponse

La base canonique de $\mathbb{R}^2$, est : $\mathcal{C}_2 = ((1,0),(0,1))$; celle de $\mathbb{R}^3$, est :
$\mathcal{C}_3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.
On a : $f((1,0)) = (1,3,0)$ et $f((0,1)) = (1,-2,1)$.

On en déduit : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

▶ Si on connait la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F$:

On obtient la matrice dans $\mathcal{B}_F$ de l'image d'un vecteur u de E par f, en multipliant $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$.

Exemple 5

Donner la forme explicite de l'application linéaire $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dont la matrice dans les bases canoniques est : $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (on dit que f est **canoniquement associée** à A).

Réponse

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+2z\\ -x+z\end{pmatrix}$, donc $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \mapsto & (y+2z,-x+z)\end{array}\right.$.

■ Déterminer $\mathrm{Ker}(f)=\{x\in E, f(x)=0\}=f^{-1}(\{0_F\})$

▶ Si f est donnée avec une forme explicite :

On résout l'équation : $f(x)=0_F$.

Exemple 6

Déterminer le noyau de l'application linéaire $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \mapsto & (x+y,x-y,2x)\end{array}\right.$.

Réponse

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a : $\big(f((x,y))=(0,0,0)\big)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\ x-y=0\\ 2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\big((x,y)=(0,0)\big)$;

donc Ker(f) = {(0,0)}.

Remarque : Déterminer le noyau de f permet d'établir l'injectivité de f. Ici, f est injective car son noyau est réduit à $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

▶ Si on connait la matrice M de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F$, (avec dim($E$) = n, et dim(F) = p) :

On résout l'équation matricielle $MX=0_{M_{p,1}(\mathbb{K})}$, où $X\in M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 7

Déterminer le noyau de l'application linéaire $f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X]$, dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{C}_3=(X^0,X,X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est : $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

Réponse

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b-c=0\\3a+b+2c=0\\2b-2c=0\end{cases}\underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}a+2b-c=0\\-5b+5c=0\\2b-2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-c\\b=c\end{cases}.$$

On a donc : $P=a+bX+cX^2\in\mathrm{Ker}(f)$ si, et seulement si $P=c\left(-1+X+X^2\right)$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\left\{-1+X+X^2\right\}$.

■ Déterminer $\mathbf{Im}(f)=f(E)=\left\{y\in F,\exists x\in E,f(x)=y\right\}$ (en dimension finie)

- Si *f* est donnée explicitement :

$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left\{f(e_i),i\in I\right\}$, où $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E.

Exemple 8

Soit $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}^3\\(x,y)&\mapsto&(2x-y,x+2y,x-y)\end{array}\right.$. Déterminer une base de Im(*f*).

Réponse

$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left\{f((1,0)),f((0,1))\right\}=\mathrm{Vect}\left\{(2,1,1),(-1,2,-1)\right\}$.

Les vecteurs (2, 1, 1) et (– 1, 2, – 1) n'étant clairement pas colinéaires, ils forment une base de Im (*f*).

- Si on connait la matrice *M* de *f* relativement aux bases $\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F$:

Les vecteurs colonnes de *M* donnent les coordonnées dans $\mathscr{B}_F$ d'une famille génératrice de Im (*f*).

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix}f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_n)\end{matrix}\\
\hline
\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_i\\ \vdots\\ \varepsilon_p\end{matrix} & \begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn}\end{pmatrix}
\end{array}$$

Exemple 9

Déterminer l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{C}_3 = \left(X^0, X, X^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Réponse

$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left\{1+3X, 2+X+2X^2, -1+2X-2X^2\right\}$.

Étudions la liberté de la famille génératrice obtenue :

On a : $-1+2X-2X^2 = (1+3X) - \left(2+X+2X^2\right)$, la famille est donc liée.

$1+3X$ et $2+X+2X^2$ ne sont clairement pas colinéaires.

On en déduit qu'une base de Im *f* est : $\left(1+3X, 2+X+2X^2\right)$.

Remarque : On a vu dans l'**exemple 7** que dim(Ker(*f*)) = 1.

Il est normal de trouver dim(Im(*f*)) = 2, d'après le théorème du rang :

$\boxed{\text{Si } E \text{ est de dimension finie, } \dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).}$

■ Effectuer un changement de base

Lorsque l'on connait la matrice *M* d'un endomorphisme *f* relativement à la base $\mathscr{C}$, et que l'on veut exprimer la matrice de *f* relativement à la base $\mathscr{B}$:

1. On détermine la matrice de passage $P = P_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$ de la base $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$ en écrivant en colonne les coordonnées, dans la base $\mathscr{C}$, des vecteurs de $\mathscr{B}$.
2. On calcule P^{-1}.
3. On effectue le produit matriciel $P^{-1}MP$, et l'on obtient la matrice de *f* dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple 10

Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{C}_2 = (e_1, e_2)$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient $\varepsilon_1 = -e_1 + e_2$ et $\varepsilon_2 = 2e_1 + e_2$.

Après avoir justifié que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, déterminer la matrice de *f* dans cette base.

Réponse

Les vecteurs ε_1 et ε_2 ne sont clairement pas colinéaires ; ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$, qui est de dimension 2.

La matrice de passage de la base $\mathscr{C}_2$ à la base $\mathscr{B}$ est $P=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

son inverse est $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$.

La matrice de *f* dans la base $\mathscr{B}$ est $P^{-1}MP=\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 1/3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

On s'échauffe

1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Pour celles qui le sont, donner la matrice canoniquement associée, et déterminer le noyau et une base de l'image.

   a. $f:\left|\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \mapsto & (x+y,2x-3y,0)\end{array}\right.$

   b. $f:\left|\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z,xyz)\end{array}\right.$

   c. $f:\left|\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,z,y)\end{array}\right.$

   d. $f:\left|\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,x-y,z+2)\end{array}\right.$

   e. $f:\left|\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y-z,3x+2y-z,x+y)\end{array}\right.$

   f. $f:\left|\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & \left(x^2,y^2\right)\end{array}\right.$

   g. $f:\left|\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,x-y+z,z+2x)\end{array}\right.$

   h. $f:\left|\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4\\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-y+z,2x-y,t+z,x+t)\end{array}\right.$

   i. $f:\left|\begin{array}{lcl}\mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X]\\ P & \mapsto & P-XP'\end{array}\right.$

   j. $f:\left|\begin{array}{lcl}\mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X]\\ P & \mapsto & X^0+P(1)X+P(2)X^2\end{array}\right.$

   k. $f:\left|\begin{array}{lcl}\mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X]\\ P & \mapsto & P(1)X^0+P'(1)X^2\end{array}\right.$

l. $f:\left|\begin{array}{ll}\mathbb{R}_2[X] \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto P(0)X^0+P(1)X+P(2)X^2\end{array}\right.$

m. $f:\left|\begin{array}{ll}\mathbb{R}_3[X] \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto P(0)X^0+P(1)X+P(2)X^2\end{array}\right.$

2. Pour chacune des matrices suivantes, expliciter l'application linéaire f de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p\right)$ canoniquement associée, puis déterminer son noyau et une base de son image.

a. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

On accélère

3. Soient $E=\mathbb{R}^3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de sa base canonique $\mathcal{C}_3=\left(e_1,e_2,e_3\right)$, et $f\in\mathcal{L}(E)$ défini par :
$f\left((x,y,z)\right)=\left(-x+3y-z,-x+3y-z,x-y+z\right)$.

a. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}_3$.

b. Déterminer une base de Ker(f) et une base de Im(f).

c. Soient $e_1'=e_1+e_2, e_2'=-e_1+e_3, e_3'=e_1+e_2+e_3$. Montrer que $\mathcal{B}=\left(e_1',e_2',e_3'\right)$ est une base de E, et déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

4. Soient $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de sa base canonique $\mathscr{C}_3=(e_1,e_2,e_3)$, et $f\in\mathscr{L}(E)$ canoniquement associé à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Soient $e_1'=e_1+e_3, e_2'=e_1-e_2, e_3'=e_1+e_2+e_3$.

Montrer que $\mathscr{B}=(e_1',e_2',e_3')$ est une base de E et déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}$.

b. Sans calcul, justifier que f n'est pas un endomorphisme bijectif.

5. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E, et $f\in\mathscr{L}(E)$ défini par :

$$\begin{cases} f(e_1)=5e_1+3e_3 \\ f(e_2)=-6e_1-e_2-3e_3 \\ f(e_3)=-6e_1-4e_3 \end{cases}.$$

a. Déterminer Ker(f) et Im(f).

b. Soient $e_1'=e_1+e_2, e_2'=e_1+e_3, e_3'=2e_1+e_3$.

Montrer que $\mathscr{B}'=(e_1',e_2',e_3')$ est une base de E, puis déterminer la matrice de f relativement à $\mathscr{B}'$.

6. Mêmes questions avec :

$$\begin{cases} f(e_1)=e_1+e_2+e_3 \\ f(e_2)=e_1+e_3 \\ f(e_3)=-e_1-e_3 \end{cases} \quad \text{et } e_1'=e_1+e_2+e_3, e_2'=-e_1+e_2-e_3, e_3'=e_2+e_3.$$

7. Soient $E=\mathbb{R}_2[X]$ et $f\in\mathscr{L}(E)$ défini par :

$$f(P)=P(0)\left(1-X^2\right)+P'(0)X(1-X)+P(1)X^2.$$

a. Montrer que $\mathscr{B}=\left(1-X^2,X(1-X),X^2\right)$ est une base de E, et déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}$. Que peut-on en déduire ?

b. Retrouver le résultat précédent en explicitant $f(a+bX+cX^2)$.

8. Soient $E=\mathbb{R}_2[X]$, $\mathscr{C}_3=\left(X^0,X,X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et $f\in\mathscr{L}(E)$ défini par : $f(P)=P(0)(X-1)(X-2)+P(1)X(X-2)+P(2)X(X-1)$.

a. Montrer que $\mathscr{B}=\big((X-1)(X-2),X(X-2),X(X-1)\big)$ est une base de E, et déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}$.

b. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathscr{C}_3$ de deux façons différentes.

On finit au top

9. Montrer que $f:\begin{vmatrix}\mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto (2+X)P+X^3P''\end{vmatrix}$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$.

10. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^n=0$ et $f^{n-1}\neq 0$.

Soit $x\in E$ tel que $f^{n-1}(x)\neq 0$.

a. Montrer que $\left(x,f(x),\ldots,f^{n-1}(x)\right)$ est une base de E.

b. Déterminer la matrice de f relativement à cette base.

c. En déduire l'image et le noyau de f.

11. Soient $E=C^0(\mathbb{R})$, et T définie sur E par :

$\forall f\in E,\forall x\in\mathbb{R},T(f)(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que T est un endomorphisme injectif de E.

b. T est-il surjectif ?

1. a. • Soit $\left(\lambda,(x,y),(a,b)\right)\in\mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^2\right)^2$.

$$\begin{aligned}f\left(\lambda(x,y)+(a,b)\right)&=f(\lambda x+a,\lambda y+b)\\&=\left(\lambda x+a+\lambda y+b,2(\lambda x+a)-3(\lambda y+b),0\right)\\&=\left(\lambda(x+y)+a+b,\lambda(2x-3y)+(2a-3b),0\right)\\&=\lambda(x+y,2x-3y,0)+(a+b,2a-3b,0)\\&=\lambda f(x,y)+f(a,b).\end{aligned}$$

f est donc une application linéaire.

• On note $\mathscr{C}_2$ la base canonique et $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C}_3$ la base canonique et $\mathbb{R}^3$;

$f((1,0))=(1,2,0), f((0,1))=(1,-3,0)$ donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_2,\mathscr{C}_3}(f)=\begin{pmatrix}1&1\\2&-3\\0&0\end{pmatrix}$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\left(f((x,y))=(0,0,0)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\2x-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow(x=y=0).$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\left\{0_{\mathbb{R}^2}\right\}$.

Remarque : f est injective.

• $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left\{(1,2,0),(1,-3,0)\right\}$. Les deux vecteurs n'étant clairement pas colinéaires, ils forment une base de Im(f).

b. $2\times f((1,1,1))=2\times(3,1)=(6,2); f((2,2,2))=(6,8)$. $2\times f((1,1,1))\neq f((2,2,2))$ donc f n'est pas linéaire.

c. • Soit $\left(\lambda,(x,y,z),(a,b,c)\right)\in\mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^3\right)^2$.

$$\begin{aligned}f\left(\lambda(x,y,z)+(a,b,c)\right)&=f(\lambda x+a,\lambda y+b,\lambda z+c)\\&=\left(\lambda x+a+\lambda y+b,\lambda z+c,\lambda y+b\right)\\&=\left(\lambda(x+y)+a+b,\lambda z+c,\lambda y+b\right)\\&=\lambda(x+y,z,y)+(a+b,c,b)\\&=\lambda f(x,y,z)+f(a,b,c).\end{aligned}$$

f est donc une application linéaire.

- $f((1,0,0))=(1,0,0), f((0,1,0))=(1,0,1), f((0,0,1))=(0,1,0)$ donc :

  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3}(f)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

- On a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3}(f)\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; elle est clairement de rang 3.

  On en déduit que f est un endomorphisme surjectif, donc bijectif.

  Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\left\{0_{\mathbb{R}^3}\right\}$ et $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$.

d. $f((0,0,0))=(0,0,2)\neq(0,0,0)$, donc f n'est pas une application linéaire.

e. • Soit $(\lambda,(x,y,z),(a,b,c))\in\mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^3\right)^2$.

$$\begin{aligned}f(\lambda(x,y,z)+(a,b,c))&=f(\lambda x+a,\lambda y+b,\lambda z+c)\\&=(2(\lambda x+a)+\lambda y+b-(\lambda z+c),3(\lambda x+a)+2(\lambda y+b)-(\lambda z+c),\\&\qquad\lambda x+a+\lambda y+b)\\&=(\lambda(2x+y-z)+2a+b-c,\lambda(3x+2y-z)+3a+2b-c,\\&\qquad\lambda(x+y)+a+b)\\&=\lambda f((x,y,z))+f((a,b,c)).\end{aligned}$$

f est donc une application linéaire.

- $f((1,0,0))=(2,3,1), f((0,1,0))=(1,2,1), f((0,0,1))=(-1,-1,0)$ donc :

  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3}(f)=\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

- Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

  $$(f((x,y,z))=(0,0,0))\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-z=0\\3x+2y-z=0\\x+y=0\end{cases}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_3\\L_1\leftarrow L_1-2L_3}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}-y-z=0\\-y-z=0\\x+y=0\end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow\begin{cases}z=-y\\x=-y\end{cases}\Leftrightarrow((x,y,z)=y(-1,1,-1)).$$

  Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}$.

- Le théorème du rang donne : $\mathrm{rg}(f)=\dim\left(\mathbb{R}^3\right)-\dim(\mathrm{Ker}(f))=3-1=2$.
  $(2,3,1)$ et $(1,2,1)$ ne sont clairement pas colinéaires ; ils forment donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.
  $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\{(2,3,1),(1,2,1)\}$.

Remarque : Le théorème du rang évite d'étudier la liberté de la famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ donnée par les images des vecteurs de la base canonique. Connaissant le rang de f, on sait ici que la famille $\{(2,3,1),(1,2,1),(-1,-1,0)\}$ est liée et qu'il faut en extraire deux vecteurs non colinéaires pour avoir une base.

f. $2\times f((1,1))=(2,2), f((2,2))=(4,4)$. $2\times f((1,1))\neq f((2,2))$, donc f n'est pas linéaire.

g. • Soit $(\lambda,(x,y,z),(a,b,c))\in\mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^3\right)^2$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda(x,y,z)+(a,b,c)) &= f(\lambda x+a,\lambda y+b,\lambda z+c)\\
&=(\lambda x+a+\lambda y+b,\lambda x+a-(\lambda y+b)+\lambda z+c,\lambda z+c+2(\lambda x+a))\\
&=(\lambda(x+y)+a+b,\lambda(x-y+z)+a-b+c,\lambda(z+2x)+c+2a)\\
&=\lambda f((x,y,z))+f((a,b,c)).
\end{aligned}$$

f est donc une application linéaire.

- $f((1,0,0))=(1,1,2), f((0,1,0))=(1,-1,0), f((0,0,1))=(0,1,1)$, donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3}(f)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix}.$$

- Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$(f((x,y,z))=(0,0,0))\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\x-y+z=0\\z+2x=0\end{cases}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x+y=0\\-2y+z=0\\-2y+z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\z=2y\end{cases}\Leftrightarrow((x,y,z)=y(-1,1,2)).$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\{(-1,1,2)\}$.

- Le théorème du rang donne : $\mathrm{rg}(f)=\dim\left(\mathbb{R}^3\right)-\dim(\mathrm{Ker}(f))=3-1=2$.
  $(1,-1,0)$ et $(0,1,1)$ ne sont clairement pas colinéaires ; ils forment donc une base de Im(*f*).
  $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\{(1,-1,0),(0,1,1)\}$.

h. • Soit $\left(\lambda,(x,y,z,t),(a,b,c,d)\right)\in\mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^4\right)^2$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda(x,y,z,t)+(a,b,c,d)) &= f(\lambda x+a,\lambda y+b,\lambda z+c,\lambda t+d)\\
&=(\lambda x+a-(\lambda y+b)+\lambda z+c,2(\lambda x+a)-(\lambda y+b),\lambda t+d+\lambda z+c,\\
&\qquad\qquad \lambda x+a+\lambda t+d)\\
&=(\lambda(x-y+z)+a-b+c,\lambda(2x-y)+2a-b,\lambda(t+z)+c+d,\\
&\qquad\qquad \lambda(x+t)+a+d)\\
&=\lambda f((x,y,z,t))+f((a,b,c,d)).
\end{aligned}$$

f est donc une application linéaire.

• $f((1,0,0,0))=(1,2,0,1), f((0,1,0,0))=(-1,-1,0,0)$,
$f((0,0,1,0))=(1,0,1,0), f((0,0,0,1))=(0,0,1,1)$,

donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_4}(f)=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\2&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$.

• Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a :

$$\left(f((x,y,z,t))=(0,0,0,0)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+z=0\\2x-y=0\\t+z=0\\x+t=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-t\\z=-t\\y=-2t\end{cases}\Leftrightarrow(x,y,z,t)=t(-1,-2,-1,1).$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\{(1,2,1,-1)\}$.

- Le théorème du rang donne : $\mathrm{rg}(f)=\dim\left(\mathbb{R}^4\right)-\dim(\mathrm{Ker}(f))=4-1=3.$

  Pour déterminer une base de Im(*f*), il faut extraire une famille libre de trois vecteurs de $\{(1,2,0,1),(-1,-1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$.

  Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. On a :

  $$\left(\lambda_1(1,2,0,1)+\lambda_2(-1,-1,0,0)+\lambda_3(1,0,1,0)=(0,0,0,0)\right)$$
  $$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\2\lambda_1-\lambda_2=0\\\lambda_3=0\\\lambda_1=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0).$$

  Donc la famille $\{(1,2,0,1),(-1,-1,0,0),(1,0,1,0)\}$ est libre, elle constitue une base de Im(*f*).

i. On note $\mathscr{C}_3=\left(X^0,X,X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

- Soit $(\lambda,P,Q)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}_2[X])^2$.

  $f(\lambda P+Q)=\lambda P+Q-X(\lambda P+Q)'=\lambda(P-XP')+Q-XQ'=\lambda f(P)+f(Q)$ (par linéarité de l'opérateur de dérivation.)

  f est donc une application linéaire.

- $f\left(X^0\right)=X^0, f(X)=0, f\left(X^2\right)=-X^2$, donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

- À la lecture de la matrice de *f*, on a : Im(*f*) $=\mathrm{Vect}\left\{X^0,X^2\right\}$ et Ker(*f*) $=\mathrm{Vect}\{X\}$.

j. $f(0)=X^0\neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$, donc *f* n'est pas linéaire.

k.
- Soit $(\lambda,P,Q)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}_2[X])^2$.

  $f(\lambda P+Q)=(\lambda P+Q)(1)+(\lambda P+Q)'(1)X^2=\lambda f(P)+f(Q)$.

  f est donc une application linéaire.

- $f\left(X^0\right)=X^0, f(X)=1+X^2, f\left(X^2\right)=1+2X^2$, donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3}(f)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}$.

- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

  $\left(f(P)=0\right) \Leftrightarrow \left(P(1)=P'(1)=0\right) \Leftrightarrow \left(\exists a \in \mathbb{R}, P=a(X-1)^2\right)$.

  En effet, si $P(1)=P'(1)=0$, alors 1 est une racine de P de multiplicité au moins 2.

  Ainsi, Ker(f) = $\text{Vect}\left\{1-2X+X^2\right\}$.

- Le théorème du rang donne :

  $\text{rg}(f)=\dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right)-\dim\left(\text{Ker}(f)\right)=3-1=2.$

  X^0 et $1+X^2$ ne sont clairement pas colinéaires ; ils forment donc une base de Im(f).

  Im(f) = $\text{Vect}\left\{X^0, 1+X^2\right\}$.

I. • Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}_2[X]\right)^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= \lambda P(0)+Q(0)+\left(\lambda P(1)+Q(1)\right)X+\left(\lambda P(2)+Q(2)\right)X^2 \\ &= \lambda f(P)+f(Q). \end{aligned}$$

f est donc une application linéaire.

- $f\left(X^0\right)=1+X+X^2, f(X)=X+2X^2, f\left(X^2\right)=X+4X^2$, donc :

  $\text{Mat}_{\mathcal{C}_3}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a : $\left(f(P)=0\right) \Leftrightarrow \left(P(0)=P(1)=P(2)=0\right) \Leftrightarrow (P=0)$. En effet, un polynôme de degré au plus 2 admettant au moins 3 racines est nécessairement nul.

  Ainsi, Ker(f) = $\left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$.

- f est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_2[X]$ (de dimension fini). Il est donc surjectif, et Im(f) = $\mathbb{R}_2[X]$.

Remarque : On pouvait également écrire

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&2&4\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix};$$

la matrice étant de rang 3, l'endomorphisme est bijectif.

m. • L'étude précédente donne la linéarité de *f*.

• $f\left(X^0\right)=1+X+X^2, f(X)=X+2X^2, f\left(X^2\right)=X+4X^2, f\left(X^3\right)=X+8X^2,$

donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&4&8\end{pmatrix}.$

• Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$. On a :

$\left(f(P)=0\right)\Leftrightarrow\left(P(0)=P(1)=P(2)=0\right)\Leftrightarrow\left(\exists a\in\mathbb{R}, P=aX(X-1)(X-2)\right).$

Ainsi, Ker(*f*) = $\mathrm{Vect}\left\{2X-3X^2+X^3\right\}$.

• Le théorème du rang donne :

$\mathrm{rg}(f)=\dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right)-\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right)=4-1=3.$

f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3, donc Im(*f*) = $\mathbb{R}_2[X]$.

2. a. Au regard des dimensions de la matrice, on a $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

• Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $\begin{pmatrix}1&-2&4\\-1&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y+4z\\-x-2y\\0\end{pmatrix}$ donc :

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3&\to&\mathbb{R}^3\\(x,y,z)&\mapsto&(x-2y+4z,-x-2y,0)\end{array}\right..$$

• Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\left(f((x,y,z))=(0,0,0)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+4z=0\\-x-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2y\\z=y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left((x,y,z)=y(-2,1,1)\right).$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\left\{(-2,1,1)\right\}$.

- Le théorème du rang donne : $\mathrm{rg}(f)=\dim\left(\mathbb{R}^3\right)-\dim(\mathrm{Ker}(f))=3-1=2$.
  $(1,-1,0)$ et $(1,0,0)$ n'étant clairement pas colinéaires, ils forment une base de Im(f).

Remarque : Le second vecteur proposé dans la base est colinéaire au troisième vecteur colonne de la matrice.

b. On a $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$.

- Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y+4z\\ -x-2y\end{pmatrix}$, donc

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y+4z,-x-2y)\end{array}\right..$$

- Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\left(f((x,y,z))=(0,0)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+4z=0\\ -x-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2y\\ z=y\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\left((x,y,z)=y(-2,1,1)\right).$$

  Ainsi, Ker(f) = $\mathrm{Vect}\left\{(-2,1,1)\right\}$.

- Le théorème du rang donne :
  $\mathrm{rg}(f)=\dim\left(\mathbb{R}^3\right)-\dim(\mathrm{Ker}(f))=3-1=2=\dim\left(\mathbb{R}^2\right)$.
  On en déduit que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$.

Remarque : f est surjective, non injective.

c. On a $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3$.

- Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\ -2x-2y\\ 4x\end{pmatrix}$, donc

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \mapsto & (x-y,-2x-2y,4x)\end{array}\right..$$

- Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\left(f((x,y))=(0,0,0)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\-2x-2y=0\\4x=0\end{cases}\Leftrightarrow(x=y=0).$$

Ainsi, Ker(*f*) $=\left\{0_{\mathbb{R}^2}\right\}$.

- $(1,-2,4)$ et $(-1,-2,0)$ n'étant clairement pas colinéaires, ils forment une base de Im(*f*).

Remarque : *f* est injective, non surjective.

d. On a $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

- Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y-z\\-3x-3y+3z\\-2x-2y+2z\end{pmatrix}$, donc

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3&\to&\mathbb{R}^3\\(x,y,z)&\mapsto&(x+y-z,-3x-3y+3z,-2x-2y+2z)\end{array}\right..$$

- On constate immédiatement que les trois colonnes de la matrice sont proportionnelles.

Ainsi, rg(*f*) = 1 et Im(*f*) = $\mathrm{Vect}\left\{(1,-3,-2)\right\}$.

- Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\left(f((x,y,z))=(0,0,0)\right)\Leftrightarrow(x+y-z=0)\Leftrightarrow\left((x,y,z)=x(1,0,1)+y(0,1,1)\right).$$

Ainsi, Ker(*f*) = $\mathrm{Vect}\left\{(1,0,1),(0,1,1)\right\}$.

3. a. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-1&3&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

b. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\left(f((x,y,z))=(0,0,0)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-x+3y-z=0\\x-y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-x\\y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left((x,y,z)=x(1,0,-1)\right).$$

Ainsi, Ker(*f*) = $\mathrm{Vect}\left\{(1,0,-1)\right\}$.

Le théorème du rang donne : $\mathrm{rg}(f)=\dim\left(\mathbb{R}^3\right)-\dim(\mathrm{Ker}(f))=3-1=2$.

$(-1,-1,1)$ et $(3,3,-1)$ n'étant clairement pas colinéaires, ils forment une base de Im(*f*).

c. Soit $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées, dans $\mathscr{C}$, des vecteurs de $\mathscr{B}$.

⚠ On ne peut pas appeler *P* « matrice de passage » tant que l'on n'a pas justifié que $\mathscr{B}$ est une base (c'est-à-dire que la matrice est inversible) !

Après calculs, on trouve *P* inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

$\mathscr{B}$ est donc une base $\mathbb{R}^3$, et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)P=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Remarque : On retrouve que e_2' engendre Ker(*f*) !

4. a. Soit $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées, dans $\mathscr{C}$, des vecteurs de $\mathscr{B}$.

Après calculs, on trouve *P* inversible, et $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

$\mathscr{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$, et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

b. La matrice de *f* dans la base $\mathscr{B}$ donne immédiatement $\mathrm{rg}(f)=2$ (et $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\{e_3'\}$). *f* n'est donc pas bijectif.

5. **Remarque :** On ne connait pas explicitement *E*, il faut donc exprimer les vecteurs de *E* à l'aide des vecteurs de la base qui est donnée.

a. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\left(f\left(xe_1+ye_2+ze_3\right)=0_E\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(xf\left(e_1\right)+yf\left(e_2\right)+zf\left(e_3\right)=x\left(5e_1+3e_3\right)+y\left(-6e_1-e_2-3e_3\right)+z\left(-6e_1-4e_3\right)=0_E\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\left(5x-6y-6z\right)e_1-ye_2+\left(3x-3y-4z\right)e_3=0_E\right)$$
$$\underset{\mathscr{B}\text{ est une base}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}5x-6y-6z=0\\-y=0\\3x-3y-4z=0\end{cases}\Leftrightarrow\left(x=y=z=0\right).$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(f)=\left\{0_E\right\}$.

f est un endomorphisme injectif de E, il est donc bijectif et $\operatorname{Im}(f)=E$.

b. On a : $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f\right)=\begin{pmatrix}5&-6&-6\\0&-1&0\\3&-3&-4\end{pmatrix}$.

Soit $P=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées, dans $\mathscr{B}$, des vecteurs de $\mathscr{B}'$.

Après calculs, on trouve P inversible, et $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

$\mathscr{B}'$ est donc une base de E, et $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}\left(f\right)=P^{-1}\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f\right)P=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Remarque : La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est diagonale, sans zéro sur la diagonale, elle est donc inversible. On retrouve que f bijectif.

6. a. • Soit $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\left(f\left(xe_1+ye_2+ze_3\right)=0_E\right)\Leftrightarrow\left(\left(x+y-z\right)e_1+xe_2+\left(x+y-z\right)e_3=0_E\right)$$
$$\underset{\mathscr{B}\text{ est une base}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x+y-z=0\\x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=z\\x=0\end{cases}\Leftrightarrow\left(\left(x,y,z\right)=y\left(0,1,1\right)\right).$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}\left\{e_2+e_3\right\}$.

Remarque : On ne connait pas explicitement E. Il faut donc exprimer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ à l'aide des vecteurs qui sont donnés.

- Le théorème du rang donne : $\mathrm{rg}(f)=\dim(E)-\dim(\mathrm{Ker}(f))=3-1=2$.
  $f(e_1)=e_1+e_2+e_3$ et $f(e_2)=e_1+e_3$ n'étant clairement pas colinéaires, ils forment une base de Im(f).

b. On a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Soit $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées, dans $\mathscr{B}$, des vecteurs de $\mathscr{B}'$.

Après calculs, on trouve P inversible, et $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

$\mathscr{B}'$ est donc une base de E, et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)=P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Remarque : On retrouve que $e_3'=e_2+e_3$ engendre Ker(f).

7. a. On note $P_1=1-X^2, P_2=X(1-X), P_3=X^2$.

Pour montrer que $\mathscr{B}$ est une base, plusieurs méthodes s'offrent à nous :

- On peut montrer que la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base canonique $\mathscr{C}_3=\left(X^0,X,X^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est inversible :

  $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3}(\mathscr{B})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ est triangulaire sans 0 sur la diagonale, elle est donc inversible.

- On peut montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre :

  Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. On a :

  $$\begin{aligned}(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3=0) &\Leftrightarrow \left(\lambda_1+\lambda_2X+(-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)X^2=0\right)\\ &\Leftrightarrow (\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0).\end{aligned}$$

  La famille $\mathscr{B}$ est donc une famille libre de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, c'en est une base.

- On peut montrer que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice :

  On a : $X^0 = P_1 + P_3, X = P_2 + P_3, X^2 = P_3$. Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont donc dans Vect$\{P_1, P_2, P_3\}$, donc $\mathbb{R}_2[X] \subset \text{Vect}\{P_1, P_2, P_3\}$; l'autre inclusion étant triviale, on a $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\{P_1, P_2, P_3\}$.

Pour déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, on exprime les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$ (ce qui est relativement immédiat compte tenu de la façon dont f est explicitée) :

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P(0)P_1 + P'(0)P_2 + P(1)P_3$

$P_1(0) = 1, P_1'(0) = 0, P_1(1) = 0$, donc $f(P_1) = P_1$;

$P_2(0) = 0, P_2'(0) = 1, P_2(1) = 0$, donc $f(P_2) = P_2$;

$P_3(0) = 0, P_3'(0) = 0, P_2(1) = 1$, donc $f(P_3) = P_3$.

On en déduit que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_3$, donc que f est l'identité sur $\mathbb{R}_2[X]$!

b. $f\left(a + bX + cX^2\right) = a\left(1 - X^2\right) + bX(1 - X) + (a + b + c)X^2 = a + bX + cX^2$.
On retrouve l'identité !

8. a. On note $P_1 = (X-1)(X-2), P_2 = X(X-2), P_3 = X(X-1)$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0)$$
$$\Leftrightarrow \left(2\lambda_1 + (-3\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3)X + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 = 0\right)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -3\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0).$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc une famille libre de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, c'en est une base.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P(0)P_1 + P(1)P_2 + P(2)P_3$

$f(P_1) = 2P_1, f(P_2) = -P_2, f(P_3) = 2P_3$; on en déduit que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Première méthode :

On exprime dans la base canonique $\mathscr{C}_3$ les images par f des vecteurs de $\mathscr{C}_3$.

On trouve : $f\left(X^0\right)=2-6X+3X^2, f(X)=-4X+3X^2, f\left(X^2\right)=-6X+5X^2$.

On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Deuxième méthode :

Soit $P=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{C}_3$ à la base $\mathscr{B}$.

Après calculs, on trouve $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

⚠ Ici, on connait la matrice de l'endomorphisme dans la « nouvelle » base. On utilise donc l'égalité : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3}(f)=P\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P^{-1}$.

On retrouve : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3}(f)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Soit $(\lambda,P,Q)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}[X])^2$.

$f(\lambda P+Q)=(2+X)(\lambda P+Q)+X^3(\lambda P+Q)''=\lambda f(P)+f(Q)$, par linéarité de l'opérateur de dérivation. f est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. On a : $(f(P)=0)\Leftrightarrow\left((2+X)P+X^3P''=0\right)$.

Considérons le degré d de P :

Si $d<2$, $P''=0$ et on a : $(f(P)=0)\Leftrightarrow(P=0)$.

Si $d\geq 2$, on note a_d le coefficient dominant de P.

Le coefficient dominant de $(2+X)P+X^3P''$ est $(1+d(d-1))a_d$.

Or $a_d\neq 0$, et d^2-d+1 ne s'annule pas dans $\mathbb{R}$, donc $f(P)=0$ est impossible.

Finalement l'unique polynôme P vérifiant $f(P)=0$ est le polynôme nul, et f est injective.

10. a. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose : $\lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + ... + \lambda_n f^{n-1}(x) = 0$.

On applique f^{n-1} qui est linéaire :

$$f^{n-1}\left(\lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + ... + \lambda_n f^{n-1}(x)\right) = \lambda_1 f^{n-1}(x) + \lambda_2 f^n(x) + ... + \lambda_n f^{2n-2}(x) = f^{n-1}(0) = 0$$

$f^n = 0$ donc, f étant linéaire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{n+k} = 0$; l'égalité donne donc : $\lambda_1 f^{n-1}(x) = 0$.

Comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, on en déduit que $\lambda_1 = 0$.

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que pour tout $i \in [\![1, k]\!], \lambda_i = 0$. On a donc :

$\lambda_{k+1} f^k(x) + \lambda_{k+2} f^{k+1}(x) + ... + \lambda_n f^{n-1}(x) = 0$.

On applique f^{n-1-k} qui est linéaire :

$$f^{n-1-k}\left(\lambda_{k+1} f^k(x) + \lambda_{k+2} f^{k+1}(x) + ... + \lambda_n f^{n-1}(x)\right)$$
$$= \lambda_{k+1} f^{n-1}(x) + \lambda_{k+2} f^n(x) + ... + \lambda_n f^{2n-2-k}(x) = f^{n-1-k}(0) = 0.$$

Le même argument que précédemment donne : $\lambda_{k+1} = 0$.

Ainsi, par récurrence finie, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = 0$.

La famille $\mathcal{B} = \left(x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\right)$ est une famille libre de cardinal n, c'est donc une base de E.

b. Par construction de $\mathcal{B}$, on obtient : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. À la lecture de la matrice, il vient :

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{f(x), f^2(x), ..., f^{n-2}(x)\right\}, \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left\{f^{n-1}(x)\right\}$.

11. a. T est bien définie sur E à valeurs dans E, car si $f \in E$, l'application $t \mapsto t f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives ($T(f)$ existe), elles-mêmes continues sur $\mathbb{R}$ (car dérivables !).

Soit $(\lambda,f,g)\in\mathbb{R}\times E^2$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$T(\lambda f+g)(x)=\int_0^x t(\lambda f+g)(t)\mathrm{d}t=\lambda T(f)(x)+T(g)(x)$, par linéarité de l'intégrale.

T est donc linéaire, de *E* dans *E*, c'est un endomorphisme.

Remarque : Pour montrer que *f* est un *endo*morphisme, il ne fallait pas oublier de montrer que $\mathrm{Im}(f)\subset E$.

Soit $f\in E$. On note $g=T(f)$. D'après le théorème fondamental d'intégration, l'application $t\mapsto tf(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=xf(x)$.

Ainsi, on a :

$$(g=0)\Rightarrow(g'=0)\Rightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}, xf(x)=0\right)\Rightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}^*, f(x)=0\right)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{f\text{ continue en }0}\quad(f=0).$$

T est donc injectif.

b. Comme dit précédemment, les images par *T* des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction « valeur absolue » est continue sur $\mathbb{R}$ (elle est donc dans *E*), mais elle n'est pas dérivable en 0. Elle n'admet donc pas d'antécédent par *T*, qui n'est donc pas surjectif.

Espaces préhilbertiens

Dans le plan et dans l'espace usuels, on définit le produit scalaire de deux vecteurs dès le lycée. Il caractérise l'orthogonalité, introduite très tôt de façon géométrique.
Dans le supérieur, on définit le produit scalaire dans un espace vectoriel.
L'orthogonalité est alors introduite d'un point de vue algébrique permettant, entre autre, de construire des bases orthonormées d'espaces vectoriels.
Cette fiche vise deux objectifs : se familiariser avec la notion de produit scalaire en dimension quelconque, et comprendre l'orthogonalité.

E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

J'utiliserai le sigle b.o.n. pour base orthonormée.

Je vous montre comment

Montrer qu'une application φ est un produit scalaire

On vérifie que :

1. L'application est bien définie sur E^2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Cela peut sembler évident, mais il ne faut pas oublier cette étape !

2. Elle est symétrique : $\left(\forall (u,v)\in E^2, \varphi(u,v)=\varphi(v,u)\right)$.
3. Elle est linéaire par rapport à l'une de ses variables (la symétrie assurant l'autre linéarité donc la bilinéarité) : Pour $\alpha \in E$ quelconque, $u \mapsto \varphi(\alpha,u)$ (ou $u \mapsto \varphi(u,\alpha)$) est linéaire.
4. Elle est définie positive :

   Pour tout $u \in E$, $\varphi(u,u) \geq 0$ et $\left(\left(\varphi(u,u)=0\right) \Rightarrow (u=0)\right)$.

Remarque : Si φ est bilinéaire, on a $\varphi(0,0)=0$.

Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*, (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels deux à deux distincts.

Pour $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on définit : $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Réponse

- φ est bien définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$. On a : $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$, car le produit $P(a_k)Q(a_k)$ est commutatif (dans $\mathbb{R}$), donc φ est symétrique.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $(\lambda, Q, S) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_n[X])^2$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(P, \lambda Q + S) &= \sum_{k=0}^{n} P(a_k)(\lambda Q + S)(a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k) + \sum_{k=0}^{n} P(a_k)S(a_k)\\ &= \lambda\varphi(P,Q) + \varphi(P,S) ;\end{aligned}$$

  φ est linéaire par rapport à sa deuxième variable donc, par symétrie, bilinéaire.

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} (P(a_k))^2 \geq 0$.

  Si $\varphi(P,P) = 0$, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(a_k) = 0$; P est alors un polynôme de degré au plus n, admettant au moins $n+1$ racines distinctes, c'est donc le polynôme nul.

  φ est définie positive.

En conclusion, φ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

■ Orthonormaliser une famille finie, par le procédé de Gram-Schmidt

Pour toute famille *libre* (finie) $\{e_1, ..., e_p\}$ d'un espace préhilbertien $(E, (\cdot|\cdot))$, il existe une famille orthonormée $\{u_1, ..., u_p\}$ telle que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$: $\text{Vect}\{e_1, ..., e_k\} = \text{Vect}\{u_1, ..., u_k\}$.

- Pour $k = 1$, on prend $u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.
- Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, si la famille $\{u_1, ..., u_k\}$ est construite, on détermine $v_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (e_{k+1}|u_i)u_i$, puis on prend $u_{k+1} = \dfrac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$.

Exemple 2

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini dans l'exemple précédent avec $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$, c'est-à-dire :
$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X], (P|Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.
Orthonormaliser (pour ce produit scalaire) la base canonique $\left(X^0, X, X^2\right)$.

Réponse

On note (P_0, P_1, P_2) la base recherchée.

- $\left(X^0 \middle| X^0\right) = 3$, on prend donc $P_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} X^0$.
- On trouve un vecteur de $\text{Vect}\left\{X^0, X\right\}$ orthogonal à P_0 en prenant :

$$Q_1 = X - (X|P_0)P_0 = X - \frac{1}{3}\left(X\middle|X^0\right)X^0 = X - \frac{1}{3} \times 3X^0 = X - 1.$$

Remarque : Quand il n'y a pas d'ambiguité, on notera a le polynôme aX^0 $(a \in \mathbb{R})$.

$(Q_1|Q_1) = 2$, on prend donc $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$.

- On trouve un vecteur de $\text{Vect}\left\{X^0, X, X^2\right\}$ orthogonal à P_0 et à P_1 en prenant :

$$\begin{aligned} Q_2 &= X^2 - \left(X^2|P_0\right)P_0 - \left(X^2|P_1\right)P_1 = X^2 - \frac{1}{3}\left(X^2\middle|X^0\right)X^0 - \frac{1}{2}\left(X^2|X-1\right)(X-1) \\ &= X^2 - \frac{1}{3} \times 5X^0 - \frac{1}{2} \times 4(X-1) = X^2 - 2X + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$(Q_2|Q_2) = \frac{2}{3}$, on prend donc $P_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2 - 2X + \frac{1}{3}\right)$.

La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}X^0, \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1), \sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2 - 2X + \frac{1}{3}\right)\right)$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire considéré.

■ Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel

▸ Dans $\mathbb{R}^3$:

On assimile les triplets à des coordonnées de vecteurs de l'espace muni d'une base orthonormée ; on dispose alors du produit vectoriel de deux vecteurs qui permet d'obtenir un vecteur orthogonal aux deux autres.

Exemple 3

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer l'orthogonal des sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}\{(1,-1,0),(2,-3,1)\}$ et $G = \text{Vect}\{(1,1,-1)\}$.

Réponse

On est en dimension finie ; un sous-espace vectoriel et son orthogonal sont donc supplémentaires. Pour $F^{\perp}$ on cherche un sous-espace vectoriel de dimension 1, pour $G^{\perp}$ on cherche un sous-espace vectoriel de dimension 2.

On note $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ les vecteurs de l'espace de coordonnées respectives $(1,-1,0)$, $(2,-3,1)$ et $(1,1,-1)$ dans une base orthonormée.

- Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$, de coordonnées $(-1,-1,-1)$, est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$; on a donc $(-1,-1,-1) \in F^{\perp}$. Comme $\dim(F^{\perp}) = 1$, il forme une base. Ainsi : $F^{\perp} = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$.
- Le vecteur $\vec{u}$ est clairement orthogonal à $\vec{w}$ car leur produit scalaire est nul ; on a donc $(1,-1,0) \in G^{\perp}$.

  Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{w}$, de coordonnées $(1,1,2)$, est orthogonal à $\vec{w}$; on a donc $(1,1,2) \in G^{\perp}$.

  Les deux vecteurs déterminés ne sont pas colinéaires, ainsi :
  $G^{\perp} = \text{Vect}\{(1,-1,0),(1,1,2)\}$.

  - Si on connait une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel dont on veut l'orthogonal :

On cherche l'expression des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de la famille génératrice, en résolvant des équations.

Exemple 4

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire usuel. Déterminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}\{1+X, X+X^2\}$.

Réponse

Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\left(P \in F^{\perp}\right) \Leftrightarrow \left(\left((P|1+X)=0\right) \wedge \left(\left(P\middle|X+X^2\right)=0\right)\right) \Leftrightarrow \left((a+b=0) \wedge (b+c=0)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(P = b\left(-1+X-X^2\right)\right).$$

On a donc : $F^{\perp} = \text{Vect}\left\{1 - X + X^2\right\}$.

■ Expliciter une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

- Si on connait une base du sous-espace vectoriel F de dimension finie sur lequel on projette :

Si la base n'est pas orthonormée, on l'orthonormalise. On note $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_p)$ une b.o.n. de F.

On applique ensuite le résultat suivant : $\boxed{\forall x \in E, p_F(x)=\sum_{i=1}^{p}(x|e_i)e_i}$.

Exemple 5

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}_4$ de la projection orthogonale sur $F=\text{Vect}\{u,v\}$, où $u=(1,-1,-1,1), v=(1,1,1,1)$.

Réponse

$(u|v)=0$; la famille {u, v} est orthogonale, il suffit de la normer pour avoir une b.o.n. de F.

On note $u_1=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$ et $v_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)$, les vecteurs normés.

Pour tout $X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, on a :

$p_F(X)=(X|u_1)u_1+(X|v_1)v_1=\frac{1}{2}(x-y-z+t)u_1+\frac{1}{2}(x+y+z+t)v_1$.

D'où : $p_F((x,y,z,t))=\frac{1}{4}(2x+2t,2y+2z,2y+2z,2x+2t)$,

puis : $\text{Mat}_{\mathcal{C}_4}(p_F)=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

- Si E est de dimension finie, et si $\dim(F^{\perp})<\dim(F)$:

On détermine la projection $p_{F^{\perp}}$ sur $F^{\perp}$, puis on utilise la relation : $\boxed{p_{F^{\perp}}+p_F=\text{id}_E}$.

Exemple 6

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire canonique, expliciter la projection orthogonale sur $F=\text{Vect}\{1+X,X+X^2\}$.

Réponse

On a montré dans l'**exemple 4** que $F^{\perp}=\text{Vect}\{1-X+X^2\}$.

$\left\|1-X+X^2\right\|=\sqrt{3}$ donc une base (ortho)normée de $F^{\perp}$ est $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1-X+X^2\right)\right)$.

Pour tout $P=a+bX+cX^2\in\mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$p_{F^{\perp}}(P)=\frac{1}{3}\left(P\middle|1-X+X^2\right)\left(1-X+X^2\right)=\frac{a-b+c}{3}\left(1-X+X^2\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}p_F(P)&=a+bX+cX^2-\frac{a-b+c}{3}\left(1-X+X^2\right)\\&=\frac{2a+b-c}{3}+\frac{a+2b+c}{3}X+\frac{-a+b+2c}{3}X^2.\end{aligned}$$

■ Calculer une distance

La distance d'un vecteur de E à un sous-espace vectoriel F de dimension finie est donnée par le résultat suivant : $\boxed{\forall x\in E,\left(d(x,F)\right)^2=\|x\|^2-\|p_F(x)\|^2}$

Calculer une distance revient donc à déterminer un projeté orthogonal.

Exemple 7

On reprend les données de l'**exemple 5**. Déterminer la distance des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à F.

Réponse

On note $\mathscr{C}_4=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Les images des vecteurs de la base canonique par p_F sont données par les colonnes de la matrice que l'on a déterminée.

On voit qu'elles ont toutes la même norme : $\forall i\in[\![1,4]\!],\|p_F(e_i)\|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On en déduit que pour tout $i\in[\![1,4]\!]$, $d(e_i,F)=\sqrt{\|e_i\|^2-\|p_F(e_i)\|^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

> **Remarque :** Si E est de dimension finie et si $\dim\left(F^{\perp}\right)<\dim(F)$, il est plus rapide de déterminer le projeté orthogonal $p_{F^{\perp}}$ sur $F^{\perp}$, et de faire le calcul : $d(x,F)=\left\|p_{F^{\perp}}(x)\right\|$.

Exemple 8

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, soit $F=\mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(-1,2,2)\}$.

Calculer la distance de $x=(1,1,1)$ à F.

Réponse

En dimension 3, l'orthogonal de F (qui est de dimension 2) est un sous-espace vectoriel de dimension 1. On détermine un vecteur unitaire u de $F^{\perp}$ en normant le produit vectoriel des vecteurs de coordonnées $(1,0,-1)$ et $(-1,2,2)$. On obtient : $F^{\perp}=\text{Vect}\left\{\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$.

On a donc : $d(x,F)=\left\|p_{F^{\perp}}(x)\right\|=\left\|(x|u)u\right\| \underset{u\text{ unitaire}}{=} \left|(x|u)\right|=1$.

On s'échauffe

1. Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires sur l'espace vectoriel E précisé.

   a. $E=\mathbb{R}[X], \varphi : \left| \begin{array}{l} E^2 \to \mathbb{R} \\ (P,Q) \mapsto \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x \end{array} \right.$

   b. $E=\mathbb{R}_n[X], \varphi : \left| \begin{array}{l} E^2 \to \mathbb{R} \\ (P,Q) \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) \end{array} \right.$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$.)

   c. $E=C^0([-1,1],\mathbb{R}), \varphi : \left| \begin{array}{l} E^2 \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x)g(x)\mathrm{d}x \end{array} \right.$

   d. $E=C^1([0,1],\mathbb{R}), \varphi : \left| \begin{array}{l} E^2 \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto f(0)g(0)+\int_0^1 f'(x)g'(x)\mathrm{d}x \end{array} \right.$

2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer l'orthogonal des sous-espaces vectoriels suivants :

   a. $F_1=\mathrm{Vect}\{(1,0,1),(1,-1,0)\}$

   b. $F_2=\mathrm{Vect}\{(-2,1,1)\}$

   c. $F_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y-2z=0\}$

   d. $F_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, (x+y-2z=0)\wedge(z=0)\}$

3. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer l'orthogonal des sous-espaces vectoriels suivants :

   a. $F_1=\mathrm{Vect}\{(1,1,0,0),(0,0,-1,1),(-1,2,0,-1)\}$

   b. $F_2=\mathrm{Vect}\{(1,0,1,-1),(2,1,-1,0)\}$

   c. $F_3=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+y-z-t=0\}$

   d. $F_4=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x=y=0\}$

4. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère les sous-espaces vectoriels $F_1 = \text{Vect}\left\{X, 1+X^2\right\}$, $F_2 = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = P(1) = 0\right\}$, et $F_3 = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = P'(0) = 0\right\}$.
Déterminer l'orthogonal de chacun de ces sous-espaces vectoriels pour les produits scalaires suivants :
   a. Le produit scalaire canonique.
   b. Le produit scalaire défini par :
   $\forall (P,Q) \in \left(\mathbb{R}_2[X]\right)^2, (P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.
   c. Le produit scalaire défini par :
   $\forall (P,Q) \in \left(\mathbb{R}_2[X]\right)^2, (P|Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

5. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser les familles suivantes :
   a. $F_1 = \left\{(1,1,1,1), (1,1,2,0)\right\}$
   b. $F_2 = \left\{(1,-1,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,1,-1)\right\}$
   c. $F_3 = \left\{(1,2,-2,0), (1,1,0,-1), (0,0,0,1)\right\}$

6. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour les produits scalaires suivants :
   a. $\forall (P,Q) \in \left(\mathbb{R}_2[X]\right)^2, (P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$
   b. $\forall (P,Q) \in \left(\mathbb{R}_2[X]\right)^2, (P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$
   c. $\forall (P,Q) \in \left(\mathbb{R}_2[X]\right)^2, (P|Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$

7. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :
$\forall (P,Q) \in \left(\mathbb{R}[X]\right)^2, (P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$.
Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$, et en déduire la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

8. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par :
$\forall (P,Q) \in \left(\mathbb{R}_2[X]\right)^2, (P|Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.
Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

On accélère

9. On se place dans $M_2(\mathbb{R})$. On considère le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

- **a.** Montrer que l'application φ définie sur $(M_2(\mathbb{R}))^2$ par $\varphi(M,N) = \text{tr}\left({}^t MN\right)$ (où tr désigne la trace) est un produit scalaire.
- **b.** Déterminer le projeté orthogonal de $M = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ sur F.
- **c.** Déterminer l'orthogonal de F ; en déduire, sans calcul, le projeté orthogonal de $N = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ sur F.

10. Dans $M_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel (donné dans l'exercice précédent), on considère les matrices : $M_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$.

- **a.** Montrer que $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3)$ est une base de $F = \text{Ker}(\text{tr})$, et l'orthonormaliser.
- **b.** Expliciter le projeté orthogonal sur F d'une matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$.
- **c.** Vérifier que $I_2 \in F^{\perp}$, et retrouver le résultat précédent.

11. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, calculer la distance de $u = (1,1,1,1)$ à $G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, (x - y + z = 0) \wedge (x + y + z - t = 0)\right\}$.

On finit au top

12. On se place dans $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel : $\forall (f,g) \in E^2, (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\text{d}t$.

- **a.** Pour $i \in \{0,1,2\}$, on note $f_i : x \mapsto x^i$. Déterminer le projeté orthogonal de f_2 sur $F = \text{Vect}\{f_0, f_1\}$.

b. En déduire $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(x^2 - ax - b\right)^2 \mathrm{d}x$.

13. Montrer que l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{ll} \left(C^1([0,1],\mathbb{R})\right)^2 \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto f(0)g(1) + f(1)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)\mathrm{d}x \end{array} \right.$$ est un produit scalaire sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$.

14. On se place dans $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par :

$\forall (f,g) \in E^2, (f|g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)\mathrm{d}x$.

(On a montré qu'il s'agit bien d'un produit scalaire dans l'**exercice 1**).

Soient $F = \text{Vect}\left\{f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1\right\}$ et $G = \text{Vect}\left\{f \in E, f(0) = 0\right\}$.

Montrer que $F^{\perp} = G$ et $G^{\perp} = F$.

1. a. Les fonctions polynômiales sont continues sur $\mathbb{R}$, donc φ est bien définie sur $(\mathbb{R}[X])^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soit $(P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2$. $\varphi(P,Q)=\varphi(Q,P)$ donc φ est symétrique.

- Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Pour tout $(\lambda,Q,S)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}[X])^2$ on a :

  $\varphi(P,\lambda Q+S)=\lambda\varphi(P,Q)+\varphi(P,S)$, par linéarité de l'intégrale.

  φ est linéaire par rapport à sa deuxième variable donc, par symétrie, bilinéaire.

- Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. $\varphi(P,P)=\int_0^1(P(x))^2\,dx\geq 0$.

  $x\mapsto(P(x))^2$ est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$, donc si $\varphi(P,P)=\int_0^1(P(x))^2\,dx=0$, pour tout $x\in[0,1]$, $P(x)=0$; P est alors un polynôme qui admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. φ est définie positive.

En conclusion, φ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Les fonctions polynômiales sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc φ est bien définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soit $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$. $\varphi(P,Q)=\varphi(Q,P)$, donc φ est symétrique.

- Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $(\lambda,Q,S)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}_n[X])^2$, on a : $\varphi(P,\lambda Q+S)=\lambda\varphi(P,Q)+\varphi(P,S)$, par linéarité de l'opérateur de dérivation.

  φ est linéaire par rapport à sa deuxième variable donc, par symétrie, bilinéaire.

- Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. $\varphi(P,P)=\sum_{k=0}^{n}\left(P^{(k)}(0)\right)^2\geq 0$.

  Si $\varphi(P,P)=0$, alors pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $P^{(k)}(0)=0$; 0 est donc une racine de P de multiplicité supérieure à $n+1$; P, de degré au plus n, est donc le polynôme nul. φ est définie positive.

En conclusion, φ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Si *f* et *g* sont des fonctions continues sur $[-1,1]$, alors $x \mapsto \sqrt{1-x^2} f(x) g(x)$ est continue sur $[-1,1]$, donc φ est bien définie sur $\left(C^0([-1,1],\mathbb{R})\right)^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soit $(f,g) \in \left(C^0([-1,1],\mathbb{R})\right)^2$. $\varphi(f,g) = \varphi(g,f)$, donc φ est symétrique.
- Soit $f \in C^0([-1,1],\mathbb{R})$. Pour tout $(\lambda,g,h) \in \mathbb{R} \times \left(C^0([-1,1],\mathbb{R})\right)^2$, on a : $\varphi(f,\lambda g+h) = \lambda\varphi(f,g)+\varphi(f,h)$, par linéarité de l'intégrale. φ est linéaire par rapport à sa deuxième variable donc, par symétrie, bilinéaire.
- Soit $f \in C^0([-1,1],\mathbb{R})$. $\varphi(f,f) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq 0$.
  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}\left(f(x)\right)^2$ est une fonction continue et positive sur $[-1,1]$, donc si $\varphi(f,f) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 0$, alors pour tout $x \in [-1,1]$, $\sqrt{1-x^2}\left(f(x)\right)^2 = 0$, donc pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = 0$ (car $\sqrt{1-x^2}$ s'annule en -1 et en 1). Or *f* est continue sur $[-1,1]$, donc par prolongement on a : pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = 0$. φ est définie positive.

En conclusion, φ est bien un produit scalaire sur $C^0([-1,1],\mathbb{R})$.

d. Si *f* et *g* sont des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$, alors leurs dérivées sont continues sur $[0,1]$ donc φ est bien définie sur $\left(C^1([0,1],\mathbb{R})\right)^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soit $(f,g) \in \left(C^1([0,1],\mathbb{R})\right)^2$. $\varphi(f,g) = \varphi(g,f)$, donc φ est symétrique.
- Soit $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $(\lambda,g,h) \in \mathbb{R} \times \left(C^1([0,1],\mathbb{R})\right)^2$, on a : $\varphi(f,\lambda g+h) = \lambda\varphi(f,g)+\varphi(f,h)$, par linéarité de l'opérateur de dérivation, et de l'intégrale.
  φ est linéaire par rapport à sa deuxième variable donc, par symétrie, bilinéaire.
- Soit $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$. $\varphi(f,f) = \left(f(0)\right)^2 + \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq 0$.

$x \mapsto (f'(x))^2$ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, donc si $\varphi(f,f) = (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(x))^2 \, dx = 0$, alors $f(0) = 0$, et pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = 0$; on a donc : pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) = 0$.
φ est définie positive.

En conclusion, φ est bien un produit scalaire sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$.

2. a. $\dim\left(F_1^{\perp}\right) = 1$. Un produit vectoriel donne : $F_1^{\perp} = \mathrm{Vect}\{(1,1,-1)\}$.

b. On note $u = (-2,1,1)$.

$\dim\left(F_2^{\perp}\right) = 2$. Le vecteur $v = (0,1,-1)$ est clairement orthogonal à u car leur produit scalaire est nul, il est donc dans $F_2^{\perp}$. Pour trouver un autre vecteur de $F_2^{\perp}$ non colinéaire à v, on effectue un produit vectoriel, qui donne : $(-2,-2,-2)$.

On obtient : $F_2^{\perp} = \mathrm{Vect}\{(0,1,-1),(1,1,1)\}$.

c. F_3 est un plan vectoriel (de dimension 2). Son supplémentaire orthogonal est de dimension 1.

Considérons le vecteur $u = (1,1,-2)$. On a :

$((x,y,z) \in F_3) \Leftrightarrow (((x,y,z)|u) = 0)$.

On en déduit que $F_3 = u^{\perp}$, puis que $F_3^{\perp} = \mathrm{Vect}\{u\}$, car nous sommes en dimension finie.

Remarque : On retrouve la notion géométrique de vecteur normal à un plan, dont les coordonnées en base orthonormée sont données par les coefficients devant x, y et z dans l'équation du plan.

d. F_4 est l'intersection de deux plans, c'est donc une droite vectorielle (de dimension 1). Son supplémentaire orthogonal est un plan vectoriel (de dimension 2).

Considérons les vecteurs $u = (1,1,-2)$ et $v = (0,0,1)$. On a :

$((x,y,z) \in F_4) \Leftrightarrow (((x,y,z)|u) = 0 \wedge ((x,y,z)|v) = 0)$. De plus, u et v ne sont pas colinéaires.

On en déduit que $F_4 = \{u,v\}^{\perp}$, puis que $F_4^{\perp} = \mathrm{Vect}\{u,v\}$, car nous sommes en dimension finie.

3. **a.** On note $u=(1,1,0,0), v=(0,0,-1,1)$ et $w=(-1,2,0,-1)$. On a :

$$\left(X=(x,y,z,t)\in F_1^{\perp}\right)\Leftrightarrow\left(\left((X|u)=0\right)\wedge\left((X|v)=0\right)\wedge\left((X|w)=0\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\-z+t=0\\-x+2y-t=0\end{cases}\Leftrightarrow\left(X=x(1,-1,-3,-3)\right).$$

On a donc : $F_1^{\perp}=\text{Vect}\left\{(1,-1,-3,-3)\right\}$.

b. Sur le même principe que le cas précédent :

$$\left((x,y,z,t)\in F_2^{\perp}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+z-t=0\\2x+y-z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left((x,y,z,t)=x(1,-2,0,1)+z(0,1,1,1)\right).$$

On a donc : $F_2^{\perp}=\text{Vect}\left\{(1,-2,0,1),(0,1,1,1)\right\}$.

c. Remarquons tout d'abord que F_3 est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$, car c'est le noyau de la forme linéaire : $(x,y,z,t)\mapsto x+y-z-t$. Son supplémentaire orthogonal est donc de dimension 1. Considérons le vecteur $u=(1,1,-1,-1)$. On a :
$\left(X=(x,y,z,t)\in F_3\right)\Leftrightarrow\left((X|u)=0\right)$.
On en déduit que $F_3=u^{\perp}$, puis que $F_3^{\perp}=\text{Vect}\{u\}$, car nous sommes en dimension finie.

d. $F_4=\text{Vect}\left\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\right\}$, donc $F_4^{\perp}=\text{Vect}\left\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\right\}$, car la base canonique est orthonormée pour le produit scalaire canonique !

4. **a.** • $\left(P=a+bX+cX^2\in F_1^{\perp}\right)\Leftrightarrow\left(\left((P|X)=0\right)\wedge\left(P\middle|1+X^2\right)=0\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\left(P=a\left(1-X^2\right)\right).$$

On a donc : $F_1^{\perp}=\text{Vect}\left\{1-X^2\right\}$.

• $F_2=\text{Vect}\left\{X(1-X)\right\}$. On a :

$$\left(P=a+bX+cX^2\in F_2^{\perp}\right)\Leftrightarrow\left(\left(P\middle|X-X^2\right)=0\right)\Leftrightarrow(b-c=0)$$

$$\Leftrightarrow\left(P=a+b\left(X+X^2\right)\right).$$

On a donc : $F_2^{\perp}=\text{Vect}\left\{X^0,X+X^2\right\}$.

- $F_3 = \text{Vect}\left\{X^2\right\}$; on a donc : $F_3{}^{\perp} = \text{Vect}\left\{X^0, X\right\}$, car la base canonique est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

b. • Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$P(-1) = a - b + c, P(0) = a, P(1) = a + b + c$. On a :

$$\left(P = a + bX + cX^2 \in F_1{}^{\perp}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -(a-b+c)+(a+b+c)=0 \\ 2(a-b+c)+a+2(a+b+c)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 5a+4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(P = a\left(1 - \frac{5}{4}X^2\right)\right).$$

On a donc : $F_1{}^{\perp} = \text{Vect}\left\{4 - 5X^2\right\}$.

- Ici, plutôt que d'utiliser la famille génératrice de F_2 mise en évidence dans le cas précédent, il est plus judicieux de remarquer que pour tout $(Q,P) \in F_2 \times \mathbb{R}_2[X]$, $(Q|P) = Q(-1)P(-1)$, avec $Q(-1) \neq 0$ si Q n'est pas le polynôme nul, car il est de degré au plus 2, et a déjà deux racines (autres que -1).

On a :

$$\left(P \in F_2{}^{\perp}\right) \Leftrightarrow \left(P(-1) = 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = (1+X)(a+bX) = a(1+X) + bX(1+X)\right).$$

On a donc : $F_2{}^{\perp} = \text{Vect}\left\{1 + X, X + X^2\right\}$.

- On utilise ici $F_3 = \text{Vect}\left\{X^2\right\}$. On a :

$$\left(P = a + bX + cX^2 \in F_3{}^{\perp}\right) \Leftrightarrow \left((a-b+c)+(a+b+c)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(P = a\left(1 - X^2\right) + bX\right).$$

On a donc : $F_3{}^{\perp} = \text{Vect}\left\{X, 1 - X^2\right\}$.

c. • Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. $P(0) = a, P'(0) = b, P''(0) = 2c$.

On a : $\left(P = a + bX + cX^2 \in F_1{}^{\perp}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a+4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(P = c\left(-4 + X^2\right)\right)$.

On a donc : $F_1{}^{\perp} = \text{Vect}\left\{-4 + X^2\right\}$.

- $F_2 = \text{Vect}\{X(1-X)\}$.

  On a : $\left(P = a + bX + cX^2 \in F_2{}^{\perp}\right) \Leftrightarrow (b - 4c = 0) \Leftrightarrow \left(P = a + c\left(4X + X^2\right)\right)$.

  On a donc : $F_2{}^{\perp} = \text{Vect}\left\{X^0, 4X + X^2\right\}$.

- Ici, plutôt que d'utiliser la famille génératrice de F_3 mise en évidence dans le premier cas, il est plus judicieux de remarquer que pour tout $(Q,P) \in F_3 \times \mathbb{R}_2[X]$, $(Q|P) = Q''(0)P''(0)$, avec $Q''(0) \neq 0$ si Q n'est pas le polynôme nul, car il est de degré au plus 2, et 0 est déjà racine de multiplicité 2.

  On a : $\left(P \in F_3{}^{\perp}\right) \Leftrightarrow \left(P''(0) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = a + bX\right)$.

  On a donc : $F_3{}^{\perp} = \text{Vect}\left\{X^0, X\right\}$.

5. **a.** On note $e_1 = (1,1,1,1), e_2 = (1,1,2,0)$ et $\{u_1, u_2\}$ la famille recherchée.

$\|e_1\| = 2$, on prend donc $u_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

On trouve un vecteur de $\text{Vect}\{e_1, e_2\}$ orthogonal à u_1 en prenant : $v_2 = e_2 - (e_2|u_1)u_1 = (0,0,1,-1)$; $\|v_2\| = \sqrt{2}$, on prend donc $u_2 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

b. On note $e_1 = (1,-1,0,0), e_2 = (0,1,-1,0), e_3 = (0,0,1,-1)$ et $\{u_1, u_2, u_3\}$ la famille recherchée.

$\|e_1\| = \sqrt{2}$, on prend donc $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$.

On trouve un vecteur de $\text{Vect}\{e_1, e_2\}$ orthogonal à u_1 en prenant : $v_2 = e_2 - (e_2|u_1)u_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0\right)$; $\|v_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, on prend donc $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)$.

On trouve un vecteur de $\text{Vect}\{e_1, e_2, e_3\}$ orthogonal à u_1 et u_2 en prenant : $v_3 = e_3 - \underbrace{(e_3|u_1)}_{0}u_1 - (e_3|u_2)u_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$; $\|v_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, on prend donc $u_3 = \frac{\sqrt{3}}{6}(1,1,1,-3)$.

c. Sur le même principe que précédemment on trouve :

$$u_1=\frac{1}{3}(1,2,-2,0), u_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(2,1,2,-3), u_3=\frac{\sqrt{2}}{6}(2,1,2,3).$$

6. a. On note (P_0, P_1, P_2) la base recherchée.

- $\left(X^0 \middle| X^0\right)=3$, on prend donc $P_0=\frac{1}{\sqrt{3}}X^0$.
- $\left(X \middle| X^0\right)=0$; $(X|X)=2$, on prend donc $P_1=\frac{1}{\sqrt{2}}X$.
- On trouve un vecteur de $\mathrm{Vect}\left\{X^0, X, X^2\right\}$ orthogonal à P_0 et à P_1 en prenant :

$$Q_2=X^2-\left(X^2|P_0\right)P_0-\left(X^2|P_1\right)P_1=X^2-\frac{1}{3}\left(X^2\middle|X^0\right)X^0-\frac{1}{2}\underbrace{\left(X^2|X\right)}_{0}X$$

$$=X^2-\frac{2}{3}.$$

$(Q_2|Q_2)=\frac{2}{3}$, on prend donc $P_2=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2-\frac{2}{3}\right)$.

b. On note (P_0, P_1, P_2) la base recherchée.

- $\left(X^0 \middle| X^0\right)=1$, on prend donc $P_0=X^0$.
- On trouve un vecteur de $\mathrm{Vect}\left\{X^0, X\right\}$ orthogonal à P_0 en prenant :

$Q_1=X-(X|P_0)P_0=X-\frac{1}{2}$.

$$\left(X-\frac{1}{2}\middle|X-\frac{1}{2}\right)=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1=\frac{1}{12},$$

on prend donc $P_1=\sqrt{3}(2X-1)$.

- On trouve un vecteur de $\mathrm{Vect}\left\{X^0, X, X^2\right\}$ orthogonal à P_0 et à P_1 en prenant : $Q_2=X^2-\left(X^2|P_0\right)P_0-\left(X^2|P_1\right)P_1$.

On a : $\left(X^2|P_0\right)=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$ et $\left(X^2|P_1\right)=\sqrt{3}\int_0^1\left(2x^3-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{6}$,

donc $Q_2=X^2-X+\frac{1}{6}$.

$$(Q_2|Q_2)=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2 dx=\int_0^1\left(x^4-2x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right)dx$$

$$=\frac{1}{180},\text{ on prend donc } P_2=\sqrt{5}\left(6X^2-6X+1\right).$$

c. La base canonique est orthogonale pour ce produit scalaire ! Les deux premiers vecteurs sont normés ; il suffit de normer le troisième. On prend : $P_0=X^0, P_1=X, P_2=\frac{1}{2}X^2$.

7. Dans l'exercice précédent, on a vu que pour ce produit scalaire, $\left(X^0,\sqrt{3}(2X-1),\sqrt{5}\left(6X^2-6X+1\right)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}p_{\mathbb{R}_2[X]}\left(X^3\right)&=\left(X^3\middle|X^0\right)X^0+3\left(X^3|2X-1\right)(2X-1)\\&\quad+5\left(X^3\middle|6X^2-6X+1\right)\left(6X^2-6X+1\right)\\&=\frac{1}{4}+\frac{9}{20}(2X-1)+\frac{1}{4}\left(6X^2-6X+1\right)=\frac{3}{2}X^2-\frac{3}{5}X+\frac{1}{20},\end{aligned}$$

puis : $d\left(X^3,\mathbb{R}_2[X]\right)=\sqrt{\left\|X^3\right\|^2-\left\|p_{\mathbb{R}_2[X]}\left(X^3\right)\right\|^2}=\frac{\sqrt{7}}{140}$.

8. Dans l'**exemple 2**, on a vu que pour ce produit scalaire, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}X^0,\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1),\sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2-2X+\frac{1}{3}\right)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}X^0,\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)\right)\in\left(\mathbb{R}_1[X]\right)^2,\sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2-2X+\frac{1}{3}\right)\in\mathbb{R}_2[X]$.

Si on se place dans $\mathbb{R}_2[X]$, et si on considère $F=\mathbb{R}_1[X]$ comme un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, le vecteur $P=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2-2X+\frac{1}{3}\right)$ est un vecteur normé qui dirige $F^\perp$.

On en déduit que : $d\left(X^2,F\right)=\left\|p_{F^\perp}\left(X^2\right)\right\|=\left\|\left(X^2|P\right)P\right\|\underset{P\text{ normé}}{=}\left|\left(X^2|P\right)\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Remarque : On peut également procéder comme dans l'exercice précédent, mais c'est plus long !

9. a. φ est bien définie sur $\left(M_2(\mathbb{R})\right)^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soit $(M,N)\in\left(M_2(\mathbb{R})\right)^2$.

$$\varphi(N,M)=\mathrm{tr}\left({}^tNM\right)\underbrace{=}_{\mathrm{tr}\left({}^tA\right)=\mathrm{tr}(A)}\mathrm{tr}\left({}^t\left({}^tNM\right)\right)=\mathrm{tr}\left({}^tMN\right)=\varphi(M,N),$$

donc φ est symétrique.

- Soit $M\in M_2(\mathbb{R})$. Pour tout $(\lambda,N,P)\in\mathbb{R}\times\left(M_2(\mathbb{R})\right)^2$, on a :
$\varphi(M,\lambda N+P)=\lambda\varphi(M,N)+\varphi(M,P)$, par linéarité de la trace.
φ est linéaire par rapport à sa deuxième variable donc, par symétrie, bilinéaire.

- Soit $M\in M_2(\mathbb{R})$. On note $M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.
On a : $\varphi(M,M)=a^2+b^2+c^2+d^2\geq 0$, et si $\varphi(M,M)=0$, alors $a=b=c=d=0$, donc $M=0$. φ est définie positive.

En conclusion, φ est bien un produit scalaire sur $M_2(\mathbb{R})$.
On notera désormais $(M|N)=\varphi(M,N)$.

b. On note $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ et $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
Orthonormalisons la base (A_1, A_2) de F :

$(A_1|A_2)=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)=0$; la famille est donc orthogonale, il suffit de la normer.

$\|A_1\|^2=\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2$, on prend donc $B_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

$\|A_2\|^2=\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2$, on prend donc $B_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

$M=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; on a donc : $p_F(M)=(M|B_1)B_1+(M|B_2)B_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

c. On a :

$$\left(M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in F^{\perp}\right)\Leftrightarrow\left(\left((A_1|M)=0\right)\wedge\left((A_2|M)=0\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}\right)=0\right)\wedge\left(\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\right)=0\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left((a-d=0)\wedge(c+b=0)\right)\Leftrightarrow\left(M=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Donc $F^{\perp}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

On remarque que N est la somme des deux vecteurs qui engendrent $F^{\perp}$, c'est donc un vecteur de $F^{\perp}$; on en déduit (sans calcul) que $p_F(N)=0$.

10. a. On a $\mathrm{tr}(M_1)=\mathrm{tr}(M_2)=\mathrm{tr}(M_3)=0$, donc $\mathscr{B}$ est une famille de Ker(tr).

Dans $M_n(\mathbb{R})$, l'application linéaire « trace » est une forme linéaire (à valeurs dans $\mathbb{R}$) non nulle. Son rang est donc 1 et, d'après le théorème du rang, son noyau est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$.

Dans $M_2(\mathbb{R})$, Ker(tr) est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3. Pour montrer que la famille $\mathscr{B}$ (de cardinal 3) est une base, il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$.

$$\left(\lambda_1M_1+\lambda_2M_2+\lambda_3M_3=0_{M_2(\mathbb{R})}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_2=0\\ -\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0).$$

La famille $\mathscr{B}$ est donc bien une famille libre, de cardinal 3, c'est une base de Ker(tr).

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt donne :

$$B_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},B_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. On sait que pour tout $M\in M_2(\mathbb{R})$,

$p_F(M)=(M|B_1)B_1+(M|B_2)B_2+(M|B_3)B_3$.

En notant $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a :

$$(M|B_1)=(B_1|M)=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\right)=b.$$

$$\left(M|B_2\right)=\left(B_2|M\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=c\,.$$

$$\left(M|B_3\right)=\left(B_3|M\right)=\operatorname{tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}a & b\\ -c & -d\end{pmatrix}\right)=\frac{a-d}{\sqrt{2}}\,.$$

On obtient : $p_F(M)=\begin{pmatrix}\dfrac{a-d}{2} & b\\ c & \dfrac{d-a}{2}\end{pmatrix}$.

c. Soit $N\in F$. $\left(I_2|N\right)=\operatorname{tr}\left({}^tI_2N\right)=\operatorname{tr}(N)=0$ (car $F=\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$). Donc $I_2\in F^{\perp}$ et, compte tenu des dimensions, $F^{\perp}=\operatorname{Vect}\{I_2\}$.

$\|I_2\|^2=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2$, donc une base orthonormée de $F^{\perp}$ est $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}I_2\right)$.

On en déduit que pour tout $M\in M_2(\mathbb{R})$,

$p_F(M)=\operatorname{Id}(M)-p_{F^{\perp}}(M)=M-\dfrac{1}{2}\left(I_2|M\right)I_2=M-\dfrac{\operatorname{tr}(M)}{2}I_2$, ce qui correspond au résultat obtenu à la question précédente.

11. On a : $\left((x,y,z,t)\in G\right)\Leftrightarrow\left((x,y,z,t)=x(1,0,-1,0)+y(0,1,1,2)\right)$, donc $G=\operatorname{Vect}\{(1,0,-1,0),(0,1,1,2)\}$.

Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient une b.o.n. de G : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0),\sqrt{\dfrac{2}{11}}\left(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{1}{2},2\right)\right)$, puis $p_G\left((1,1,1,1)\right)=\left(\dfrac{4}{11},\dfrac{8}{11},\dfrac{4}{11},\dfrac{16}{11}\right)$.

Finalement, on obtient : $d\left((1,1,1,1),G\right)=2\sqrt{\dfrac{3}{11}}$.

12. a. On orthonormalise la famille $\{f_0, f_1\}$ par le procédé de Gram-Schmidt. On obtient :

$g_0 : x\mapsto 1, g_1 : x\mapsto\sqrt{3}(2x-1)$, que l'on peut écrire : $g_0=f_0, g_1=\sqrt{3}(2f_1-f_0)$.

On en déduit : $p_F(f_2)=\left(\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\right)f_0+3\left(\displaystyle\int_0^1 x^2(2x-1)\mathrm{d}x\right)(2f_1-f_0)=f_1-\dfrac{1}{6}f_0$.

b. $$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1\left(x^2-ax-b\right)^2\mathrm{d}x=\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|f_2-af_1-bf_0\|^2=\left(d(f_2,F)\right)^2.$$

$$=\|f_2\|^2-\|p_F(f_2)\|^2=\frac{\sqrt{5}}{6}.$$

13. f et g étant des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$, leurs dérivées sont continues sur $[0,1]$ donc φ est bien définie sur $\left(C^1([0,1],\mathbb{R})\right)^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soit $(f,g)\in\left(C^1([0,1],\mathbb{R})\right)^2$. $\varphi(f,g)=\varphi(g,f)$ donc φ est symétrique.
- Soit $f\in C^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $(\lambda,g,h)\in\mathbb{R}\times\left(C^1([0,1],\mathbb{R})\right)^2$, on a : $\varphi(f,\lambda g+h)=\lambda\varphi(f,g)+\varphi(f,h)$, par linéarité de l'opérateur de dérivation et de l'intégrale. φ est linéaire par rapport à sa deuxième variable donc, par symétrie, bilinéaire.
- Soit $f\in C^1([0,1],\mathbb{R})$. $\varphi(f,f)=2f(0)f(1)+\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$.

Remarque : On veut montrer que pour tout $f\in C^1([0,1],\mathbb{R})$,
$\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x+2f(0)f(1)\geq 0$.

Une inégalité faisant intervenir l'intégrale d'une fonction au carré doit faire penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, pour tout $g\in C^0([0,1],\mathbb{R})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left(\int_0^1 g(x)\times 1\,\mathrm{d}x\right)^2\leq\left(\int_0^1\left(g(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}x\right)$$; c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall g\in C^0([0,1],\mathbb{R}),\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\int_0^1\left(g(x)\right)^2\mathrm{d}x}$$

$f\in C^1([0,1],\mathbb{R})$ donc $f'\in C^0([0,1],\mathbb{R})$; on applique l'inégalité pour $g=f'$,

on a : $\left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$.

Le théorème fondamental d'intégration donne : $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=f(1)-f(0)$.
On en déduit :

$$\left(f(1)-f(0)\right)^2\leq\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

donc $\left(f(1)\right)^2+\left(f(0)\right)^2-2f(0)f(1)\leq\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$,

et enfin : $0\leq\left(f(1)\right)^2+\left(f(0)\right)^2\leq\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x+2f(0)f(1)$, donc $\varphi(f,f)\geq 0$.

Les inégalités $0 \leq (f(1))^2 + (f(0))^2 \leq \int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x + 2f(0)f(1)$, donnent :

$$\begin{aligned}(\varphi(f,f)=0) &\Rightarrow \left((f(0)=0)\wedge(f(1)=0)\wedge\left(2f(0)f(1)+\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x=0\right)\right)\\ &\Rightarrow \left((f(0)=f(1)=0)\wedge\left(\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x=0\right)\right)\\ &\Rightarrow \left((f(0)=f(1)=0)\wedge(\forall x\in[0;1], f'(x)=0)\right)\\ &\Rightarrow (\forall x\in[0;1], f(x)=0).\end{aligned}$$

φ est définie positive.

En conclusion, φ est bien un produit scalaire sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$.

14. On a : $(f\in F^{\perp}) \Leftrightarrow ((f|f_0)=0) \Leftrightarrow (f(0)=0)$, donc $F^{\perp}=G$.

Remarque : On a toujours $F\subset F^{\perp\perp}$, mais on n'a pas toujours l'égalité…

Soit $g\in G^{\perp}$ et soit $h=g-g(0)f_0$.

Remarque : On veut montrer que $G^{\perp}=\mathrm{Vect}\{f_0\}$, il n'est donc pas très surprenant de s'intéresser à ce vecteur h.

On a : $h(0)=0$, donc $h\in G$. On en déduit que $(h|g)=0$, soit encore :

$\|g\|^2 - g(0)(f_0|g) = (g(0))^2 + \int_0^1 (g'(x))^2\,\mathrm{d}x - (g(0))^2 = \int_0^1 (g'(x))^2\,\mathrm{d}x = 0$.

Ainsi, pour tout $x\in[0,1]$, $g'(x)=0$ d'où : $g=g(0)f_0\in F$.

On avait $F\subset F^{\perp\perp}=G^{\perp}$, on vient de montrer que $G^{\perp}\subset F$, on a donc bien $G^{\perp}=F$.

Séries numériques

En première année, l'étude des séries numériques vient compléter celle des suites, mais les exercices sont de nature différente. La recherche de convergence de séries permet de mettre en œuvre l'analyse asymptotique, et le calcul de sommes nécessite parfois une certaine agilité dans le calcul algébrique.
Les techniques utilisées sont assez peu variées, et la répétition d'exercices permet de les maîtriser relativement vite. C'est l'objectif de cette fiche.

Pour la filière PTSI-PT, l'absolue convergence est au programme de deuxième année.

Je vous montre comment

Utiliser correctement la limite du terme général d'une série

Si la série $\sum u_n$ converge, **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Ce critère sert à montrer qu'une série diverge :

Si le terme général n'admet pas 0 pour limite, on dit que la série **diverge grossièrement**.

Exemple 1

Montrer que la série $\sum e^{-\cos(n)}$ diverge.

Réponse

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq -\cos(n)$ donc, par croissance de la fonction exponentielle, $e^{-1} \leq e^{-\cos(n)}$.

On en déduit que le terme général de la série n'admet pas 0 pour limite, donc que la série diverge grossièrement.

⚠ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ est une condition nécessaire **non suffisante** pour avoir la convergence de la série $\sum u_n$. Ce critère ne sert donc **JAMAIS** pour montrer la convergence d'une série.

Exemple 2

Montrer que la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ diverge (bien que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$).

Remarque : Il existe de nombreuses démonstrations de ce résultat. En voici une.

Réponse

On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$; $S_{2p} - S_p = \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{1}{n} \geq p \times \frac{1}{2p}$, car $0 < n \leq 2p \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2p}$.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_{2p} - S_p \geq \frac{1}{2}$. Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeait vers un réel L, il en serait de même de la suite extraite $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ce qui est impossible d'après l'inégalité démontré. On en déduit que la suite des sommes partielles diverge, et donc que la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ diverge.

Utiliser les critères de comparaison pour déterminer la nature d'une série $\sum u_n$

- En montrant que le terme général u_n est équivalent en l'infini au terme général d'une série POSITIVE dont on connait la nature :

Exemple 3

Donner la nature des séries $\sum_{n>0} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n>0} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Réponse

On a : $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$ donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n} > 0$, et la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

Par comparaison de séries positives, on en déduit que la série $\sum_{n>0} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

Pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n^2} > 0$ et la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

Par comparaison de séries positives, on en déduit que la série $\sum_{n>0} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

Remarque : On sait que deux fonctions équivalentes en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ sont de même signe au voisinage de a. Il n'est donc pas nécessaire d'étudier le signe du terme général de la série, celui de l'équivalent nous le donne, pour n assez grand.

- En majorant à partir d'un certain rang $|u_n|$ par le terme général d'une série convergente :

On obtient alors l'absolue convergence de la série $\sum u_n$, donc sa convergence.

Exemple 4

Donner la nature de la série $\sum \frac{\sin(n)}{n^2+n+2}$.

Réponse

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\sin(n)}{n^2+n+2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

Par comparaison de séries positives, on en déduit que la série $\sum \left|\frac{\sin(n)}{n^2+n+2}\right|$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum \frac{\sin(n)}{n^2+n+2}$ est absolument convergente, donc convergente.

Appliquer le « critère de Riemann » pour déterminer la nature d'une série $\sum u_n$

- Si on sait trouver un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = 0$:

Alors on a : $u_n = o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et, par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Exemple 5

Donner la nature de la série $\sum ne^{-n}$.

Réponse

Par croissances comparées, $\lim_{n \to +\infty} n^2 \times ne^{-n} = 0$. Ainsi, $ne^{-n} = o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc, par comparaison, $\sum ne^{-n}$ est une série convergente.

▸ Si on sait trouver un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha} u_n = +\infty$:

Alors, pour n suffisamment grand, $u_n \geq \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ et par comparaison à une série de Riemann divergente, $\sum u_n$ diverge.

Exemple 6

Donner la nature de la série $\sum\limits_{n>0} \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$.

Réponse

Par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{3/4} \times \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{1/4}}{\ln n} = +\infty$. Ainsi, à partir d'un certain rang, $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n} \geq \dfrac{1}{n^{3/4}} > 0$. $\sum\limits_{n>0} \dfrac{1}{n^{3/4}}$ est une série de Riemann divergente donc, par comparaison, $\sum\limits_{n>0} \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ est une série divergente.

■ Montrer la convergence d'une série de la forme $\sum (-1)^n u_n$, avec $u_n > 0$

On note (S_n) la suite des sommes partielles. Si la suite (u_n) est décroissante, de limite nulle, on montre que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Le théorème des suites adjacentes permet de conclure à la convergence des suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) vers une même limite donc, d'après le théorème sur les suites extraites, à la convergence de la suite (S_n), c'est-à-dire la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Exemple 7

Donner la nature de la série $\sum\limits_{n>0} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Réponse

On note $(S_n)_{n>0}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n>0} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Montrons que les suites $(S_{2n})_{n>0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes :

- Soit $n > 0$. $S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{-1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{-1}{(2n+1)(2n+2)} < 0$, donc la suite $(S_{2n})_{n>0}$ est décroissante.
- Soit $n \geq 0$. $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+3} = \dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0$, donc la suite $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ est croissante.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_{2n+1}-S_{2n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{2n+1}=0$.

Les suites $\left(S_{2n}\right)_{n>0}$ et $\left(S_{2n+1}\right)_{n\geq 0}$ sont donc adjacentes. On déduit du théorème des suites adjacentes qu'elles admettent une même limite réelle, donc que la suite $\left(S_n\right)_{n>0}$ converge, d'après le théorème sur les suites extraites.

Par définition, la convergence de la suite $\left(S_n\right)_{n>0}$ assure la convergence de la série $\sum\limits_{n>0}\dfrac{(-1)^n}{n}$.

Remarque : Cet exemple montre qu'une série convergente peut ne pas converger absolument, puisque $\sum\limits_{n>0}\dfrac{1}{n}$ diverge.

⚠ Les séries de la forme $\sum(-1)^n u_n$ avec $u_n>0$ ne sont pas toutes convergentes.

Exemple 8

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n>0}$ définie par : $u_n=\dfrac{1}{n}$ si n est pair, et $u_n=\dfrac{1}{n^2}$ si n est impair.

Montrer que la série $\sum\limits_{n>0}(-1)^n u_n$ diverge.

Réponse

On note $\left(S_n\right)_{n>0}$ la suite des sommes partielles.

Pour tout $n>0$, on a : $S_{2n}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$ (en séparant dans la somme **finie** les termes d'indice pair et ceux d'indice impair).

$\dfrac{1}{(2k+1)^2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{4k^2}$, donc par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum\dfrac{1}{(2k+1)^2}$ converge, c'est-à-dire que la suite de ses sommes partielles converge.

La série $\sum\limits_{k>0}\dfrac{1}{k}$ diverge, donc la suite de ses sommes partielles diverge.

Par somme, on en conclut que la suite $\left(S_{2n}\right)_{n>0}$ diverge, donc que la suite $\left(S_n\right)_{n>0}$ diverge, c'est-à-dire que la série $\sum\limits_{n>0}(-1)^n u_n$ diverge.

Remarque : De façon générale, il y a convergence de la série $\sum(-1)^n u_n$ lorsque la suite (u_n) décroit vers 0. Ce résultat fait l'objet d'un théorème étudié en deuxième année dans les filières MP et PC, appelé **critère spécial des séries alternées**.

■ Calculer la somme d'une série convergente

⚠ La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, mais pour le calcul de sa somme, le changement d'un seul terme modifie le résultat, il faut donc bien prêter attention au premier terme.

Remarque : À ce stade de l'apprentissage, on connait peu de sommes de séries. Lorsque l'on demande de calculer une somme, on doit se ramener à une somme connue.
Pour cela, sauf cas particuliers (nous en verrons deux dans les exercices), deux possibilités :

- En reconnaissant une **série géométrique** :

La série géométrique $\sum\limits_{n \geq n_0} q^n$ (où $q \in \mathbb{C}^*$, $n_0 \in \mathbb{N}$) converge si, et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas, sa somme vaut : $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$.

Exemple 9

Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{\mathrm{ch}(n)}{3^n}$ converge, et calculer sa somme.

Réponse

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\mathrm{ch}(n)}{3^n} = \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2 \times 3^n} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n + \left(\frac{\mathrm{e}^{-1}}{3}\right)^n\right)$.

$0 \leq \frac{\mathrm{e}}{3} < 1$ et $0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-1}}{3} < 1$, donc les deux séries géométriques $\sum\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n$ et $\sum\left(\frac{\mathrm{e}^{-1}}{3}\right)^n$ convergent.

Par combinaison linéaire, on en déduit que la série $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{3^n}$ converge, et que l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(n)}{3^n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-1}}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}}{3}} + \frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{-1}}{3}}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3-\mathrm{e}} + \frac{1}{3-\mathrm{e}^{-1}}\right).$$

- En reconnaissant une **série télescopique** :

Une série télescopique est de la forme $\sum_{n \geq n_0} \left(u_{n+1} - u_n\right)$ (où $\left(u_n\right)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique).

Elle converge si, et seulement si la suite $\left(u_n\right)_{n \geq n_0}$ converge, et dans ce cas, sa somme vaut : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(u_{n+1} - u_n\right) = \lim_{n \to +\infty} u_n - u_{n_0}$.

Exemple 10

Montrer que la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, et calculer sa somme.

Réponse

Pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

La série s'écrit donc $\sum_{n>0} \left(u_{n+1} - u_n\right)$ avec, pour tout $n > 0$, $u_n = -\frac{1}{n}$.

On reconnait une série télescopique.

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, donc la série converge, et on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} u_n - u_1 = 1$.

À vous !

On s'échauffe

1. Donner la nature des séries numériques suivantes :

   a. $\sum_{n>0} \frac{1}{n} \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{n}\right)$

   b. $\sum_{n>0} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$

   c. $\sum_{n>0} \frac{\left(\sqrt{n}+1\right)^3}{(n+1)^2 n}$

   d. $\sum_{n>0} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+1}-\left(\sqrt{n}+1\right)^3}$

   e. $\sum_{n\geq 0} \left(\cos(n+1)-\cos(n)\right)$

   f. $\sum_{n>0} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$

   g. $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$

   h. $\sum_{n>0} \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n}}$

   i. $\sum_{n\geq 0} \left(1-\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$

   j. $\sum_{n>0} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

   k. $\sum_{n>0} \frac{1}{n} \ln\left(2+\frac{1}{n}\right)$

   l. $\sum_{n>0} n^{-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$

m. $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{n^4+4^n}{2^{2n}+(2n)^2}$

n. $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{5^n+n^5}{3^{2n}+5^n}$

o. $\sum\limits_{n>0}\dfrac{2\sin\left(n^2\right)-1}{n^3}$

p. $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{\text{ch}(n)}{2^n}$

On accélère

2. Montrer que les séries suivantes convergent, et calculer leurs sommes :

a. $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{\text{sh}(n)}{4^n}$

b. $\sum\limits_{n>0}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

c. $\sum\limits_{n\geq 0}\text{e}^{-2n}\text{ch}(n)$

d. $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1-2n}{n^2(1-n)^2}$

e. $\sum\limits_{n\geq 2}\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

f. $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^n\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$

g. $\sum\limits_{n>0}\ln\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right)$

3. Donner la nature des séries numériques suivantes :

a. $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n}$

b. $\sum_{n>0} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^{n}$

c. $\sum_{n>0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

d. $\sum_{n>0} \left(n^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$

e. $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$

f. $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

g. $\sum_{n>0} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

h. $\sum_{n\geq 0} \left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right)$

i. $\sum_{n>0} \frac{\sin n+\cos n}{n^2}$

j. $\sum_{n>0} \frac{|\sin n|+|\cos n|}{n}$

k. $\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$

4. Donner la nature des séries suivantes, en discutant suivant la valeur du (ou des) paramètre(s) :

   a. $\sum_{n\geq 0} a^{\sqrt{n}}, a>0$.

   b. $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}, a>0$.

   c. $\sum_{n\geq 0} e^{an^2+bn}, (a,b)\in \mathbb{R}^2$.

   d. $\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}\right), a\in \mathbb{R}$.

   e. $\sum_{n\geq 0} 2^{(-1)^n} a^n, a>0$.

On finit au top

5. Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes positifs.

   a. Déterminer la nature des séries $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ et $\sum \sin^2(a_n)$.

   b. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}^+$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n^{\,2}+a_n^{\,2}}\right)$.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

6. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)$ en fonction du réel $a\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, et lorsqu'elle converge, déterminer sa somme.

7. Calculer la somme de la série $\sum_{n>0}\frac{(-1)^n}{n}$.

1. a. On a : $\frac{1}{n}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$; donc par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n>0}\frac{1}{n}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

Remarque : Les séries de Riemann, de la forme $\sum_{n>0}\frac{1}{n^{\alpha}}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$, sont positives. Il est donc inutile de préciser que l'on applique un critère de comparaison pour des séries positives (c'est induit !).

b. Par croissances comparées, on a : $\lim_{n\to+\infty} n^{5/4}\frac{\ln n}{n^{3/2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^{1/4}}=0$; on en déduit que $\frac{\ln n}{n^{3/2}}=o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right)$.

$\frac{5}{4}>1$, donc la série de Riemann $\sum_{n>0}\frac{1}{n^{5/4}}$ converge et, par comparaison, la série $\sum_{n>0}\frac{\ln n}{n^{3/2}}$ converge.

c. On a : $\frac{\left(\sqrt{n}+1\right)^3}{(n+1)^2 n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^{3/2}}$; donc par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n>0}\frac{\left(\sqrt{n}+1\right)^3}{(n+1)^2 n}$ converge.

d. Il faut ici prêter attention au dénominateur :

$$\sqrt{n^3+1}-\left(\sqrt{n}+1\right)^3=n^{\frac{3}{2}}\left(\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{1/2}-\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\right)$$

$$=n^{\frac{3}{2}}\left(\left(1+\frac{1}{2n^3}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)$$

$$=n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Par quotient, on obtient : $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+1}-\left(\sqrt{n}+1\right)^3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3n^{2/3}}$.

$\frac{2}{3}<1$, donc par comparaison à une série de Riemann divergente, la série $\sum_{n>0}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+1}-\left(\sqrt{n}+1\right)^3}$ diverge.

e. On reconnait une série télescopique. Montrons par l'absurde que la suite $\big(\cos(n)\big)$ diverge. Si $\big(\cos(n)\big)$ converge vers un réel L, alors :

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$, par passage à la limite, on a : $2L^2 - L - 1 = 0$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n)\cos(n+1) = \frac{1}{2}\big(\cos(2n+1) + \cos(1)\big)$, donc par passage à la limite, on a : $2L^2 - L - \cos(1) = 0$.

Or $\cos(1) \neq 1$; on a donc une contradiction, et la suite $\big(\cos(n)\big)$ diverge.

On en déduit que la série télescopique $\sum\limits_{n \geq 0} \big(\cos(n+1) - \cos(n)\big)$ diverge.

f. On a : $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$ (de signe constant) ; la série de Riemann $\sum\limits_{n>0} \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum\limits_{n>0} -\frac{1}{2n^2}$ converge et, par comparaison, la série $\sum\limits_{n>0} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$ converge.

g. Par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n}\right)^3 e^{-\sqrt{n}} = 0$, donc $e^{-\sqrt{n}} = o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum\limits_{n \geq 0} e^{-\sqrt{n}}$ converge.

h. On a : $\frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$; donc par comparaison à une série de Riemann divergente, $\sum\limits_{n>0} \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n}}$ diverge.

i. On a : $1 - \cos\left(\frac{1}{2^n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2^n}\right)^2$; $\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{4^n}$ et $\sum \frac{1}{4^n}$ est une série géométrique **positive** convergente, donc la série **positive** $\sum \frac{1}{2^{2n+1}}$ converge et, par comparaison, $\sum\limits_{n \geq 0} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$ converge.

j. On a : $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^{3/2}}$ donc, par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n>0}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge.

k. On a : $\frac{1}{n}\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ln(2)}{n}$ donc, par comparaison à une série de Riemann divergente, la série $\sum_{n>0}\frac{1}{n}\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)$ diverge.

l. On a : $n^{-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$, donc par comparaison à une série de Riemann divergente, $\sum_{n>0}n^{-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$ diverge.

m. On a : $\frac{n^4+4^n}{2^{2n}+(2n)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4^n}{2^{2n}}$, d'où $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+4^n}{2^{2n}+(2n)^2}=1$.

La série $\sum_{n\geq 0}\frac{n^4+4^n}{2^{2n}+(2n)^2}$ est grossièrement divergente.

n. On a : $\frac{5^n+n^5}{3^{2n}+5^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{5^n}{3^{2n}}$ d'où $\frac{5^n+n^5}{3^{2n}+5^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{5}{9}\right)^n$;

par comparaison à une série géométrique positive convergente, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{5^n+n^5}{3^{2n}+5^n}$ converge.

o. Pour tout $n>0$, on a : $\left|\frac{2\sin\left(n^2\right)-1}{n^3}\right|\leq\frac{2\left|\sin\left(n^2\right)\right|+1}{n^3}\leq\frac{3}{n^3}$;

par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n>0}\frac{2\sin\left(n^2\right)-1}{n^3}$ est absolument convergente, donc convergente.

p. On a : $\frac{\mathrm{ch}(n)}{2^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\times\frac{e^n}{2^n}$; $\frac{e}{2}>1$ donc la série géométrique positive $\sum\left(\frac{e}{2}\right)^n$ diverge donc, par comparaison, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{\mathrm{ch}(n)}{2^n}$ diverge.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{\operatorname{sh}(n)}{4^n} = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{e}{4}\right)^n - \left(\dfrac{e^{-1}}{4}\right)^n\right)$; $0 < \dfrac{e}{4} < 1$ et $0 < \dfrac{e^{-1}}{4} < 1$, donc les séries géométriques $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{e^n}{4^n}$ et $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{e^{-n}}{4^n}$ convergent.

Par combinaison linéaire, $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{\operatorname{sh}(n)}{4^n}$ converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(n)}{4^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e/4} - \frac{1}{1-e^{-1}/4}\right) = 2\left(\frac{1}{4-e} - \frac{1}{4-e^{-1}}\right).$$

b. Une décomposition en éléments simples donne pour tout $n > 0$:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right).$$

Ainsi la série $\sum\limits_{n>0} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est une série télescopique de la forme $\sum\limits_{n>0} \left(u_{n+1} - u_n\right)$ avec pour tout $n > 0$: $u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) = 0$ donc la série converge, et l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = 0 - u_1 = \frac{1}{4}.$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $e^{-2n}\operatorname{ch}(n) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-n} + e^{-3n}\right)$; $0 < e^{-1} < 1$ et $0 < e^{-3} < 1$, donc les séries géométriques $\sum\limits_{n \geq 0} e^{-n}$ et $\sum\limits_{n \geq 0} e^{-3n}$ convergent.

Par combinaison linéaire, $\sum\limits_{n \geq 0} e^{-2n}\operatorname{ch}(n)$ converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n}\operatorname{ch}(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-3}}\right).$$

d. Une décomposition en éléments simples donne, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1-2n}{n^2(1-n)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Ainsi la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1-2n}{n^2(1-n)^2}$ est une série télescopique de la forme $\sum_{n\geq 2}(u_{n+1}-u_n)$ avec, pour tout $n\geq 2$: $u_n=\frac{1}{(n-1)^2}$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n-1)^2}=0$ donc la série converge, et l'on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1-2n}{n^2(1-n)^2}=0-u_2=-1.$$

e. Pour tout $n\geq 2$, on a :

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)=\left(\ln(n+1)-\ln(n)\right)-\left(\ln(n)-\ln(n-1)\right).$$

Ainsi la série $\sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est une série télescopique de la forme $\sum_{n\geq 2}(u_{n+1}-u_n)$ avec, pour tout $n\geq 2$: $u_n=\ln(n)-\ln(n-1)$.

$\lim_{n\to+\infty}\ln(n)-\ln(n-1)=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=0$ donc la série converge, et l'on a : $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=0-u_2=-\ln 2$.

f. Pour tout $n\geq 2$, on a :

$$(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=(-1)^n\left(\ln(n+1)-\ln(n)\right)-(-1)^{n-1}\left(\ln(n)-\ln(n-1)\right).$$

Ainsi la série $\sum_{n\geq 2}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ est une série télescopique de la forme $\sum_{n\geq 2}(u_{n+1}-u_n)$ avec, pour tout $n\geq 2$: $u_n=(-1)^{n-1}\left(\ln(n)-\ln(n-1)\right)$.

Remarque : Ici, pour faire apparaître la différence de deux termes consécutifs d'une suite on ne pouvait pas se contenter d'écrire : $(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=(-1)^n\ln(n+1)-(-1)^n\ln(n-1)$.
Il fallait faire intervenir un terme intermédiaire.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}\big(\ln(n)-\ln(n-1)\big)=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)=0$ donc la série converge, et l'on a : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=0-u_2=\ln 2$.

Remarque : Voici un nouvel exemple du fait que la convergence d'une série n'implique pas l'absolue convergence. En effet :

$\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)=\ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{n}$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left|(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right|$ diverge.

g. Pour tout $n>0$, on a :

$$\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)=\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$$
$$=\big(-\ln(n+3)+\ln(n+1)\big)-\big(-\ln(n+2)+\ln(n)\big).$$

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n>0}\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$ est une série télescopique de la forme $\displaystyle\sum_{n>0}(u_{n+1}-u_n)$ avec, pour tout $n>0$: $u_n=-\ln(n+2)+\ln(n)$.

Remarque : Ici aussi, il faut bien s'assurer que l'on écrit la différence de deux termes consécutifs d'une suite. Pour tout $n>0$, on a :

$\ln\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right)=\big(-\ln(n+3)+\ln(n+2)\big)-\big(-\ln(n+1)+\ln(n)\big)$, mais la différence mise en évidence ici ne s'écrit pas sous la forme $u_{n+1}-u_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}-\ln(n+2)+\ln(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=0$ donc la série converge, et l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)=0-u_1=\ln 3$.

3. a. Pour tout $n \geq 2$, on a : $\left|\dfrac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n}\right| \leq \dfrac{1}{n^{3/2}-1}$.

$\dfrac{1}{n^{3/2}-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/2}}$, donc par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^{3/2}-1}$ converge et, par comparaison encore, la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n}$ est absolument convergente, donc convergente.

b. Pour tout $n > 0$, on a :

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)} = e^{n\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)}$$

$$= e^{n\ln\left(\frac{1}{2}\right)+2+o_{n\to+\infty}(1)} \text{ d'où } \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^2 \times \frac{1}{2^n}.$$

Par comparaison à une série géométrique **positive** convergente, la série $\sum_{n>0}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$ converge.

Remarque : Le passage à la forme exponentielle est ici indispensable pour trouver un équivalent correct.

c. Pour tout $n > 0$, on a :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{n^2\ln\left(\frac{1}{1+1/n}\right)} = e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{\frac{1}{2}-n+o_{n\to+\infty}(1)},$$

d'où $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{2}} \times e^{-n}$.

Remarque : On rappelle que l'on ne peut pas composer simplement à gauche avec la relation "$\underset{a}{\sim}$". Ici, il faut « pousser » le $DL_n(0)$ du logarithme jusqu'à l'ordre 2 pour avoir un équivalent correct du terme général de la série.

$0 < e^{-1} < 1$ donc la série géométrique positive $\sum e^{-n}$ converge.

Par comparaison, la série $\sum\limits_{n>0} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

d. Pour tout $n > 0$, on a : $n^{\frac{1}{n^2}} - 1 = e^{\frac{1}{n^2}\ln n} - 1$; par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^2} = 0$ donc $n^{\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^2}$.

Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2} \times \dfrac{\ln n}{n^2} = 0$, donc $\dfrac{\ln n}{n^2} = o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$; par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum\limits_{n>0} \dfrac{\ln n}{n^2}$ converge et, par comparaison de séries positives, la série $\sum\limits_{n>0} \left(n^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)$ converge.

e. ⚠ La forme du terme général peut faire penser à une série télescopique, mais ce n'en est pas une !

Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n}\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n^2} - \left(-\frac{1}{2n^2}\right) + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

d'où : $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$.

Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum\limits_{n\geq 2} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ converge.

f. Considérons la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 2}$:

pour tout $n \geq 2$, $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^k}{\ln k}$.

Montrons que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes :

- Soit $n\geq 1$. $S_{2n+2}-S_{2n}=\dfrac{1}{\ln(2n+2)}-\dfrac{1}{\ln(2n+1)}<0$ (car la fonction ln est croissante) donc la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante.
- Soit $n\geq 1$. $S_{2n+3}-S_{2n+1}=\dfrac{-1}{\ln(2n+3)}+\dfrac{1}{\ln(2n+2)}>0$, donc la suite $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ est croissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n+1}-S_{2n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{\ln(2n+1)}=0$.

  Les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont donc adjacentes. On déduit du théorème des suites adjacentes qu'elles admettent une même limite réelle, donc que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ converge, d'après le théorème sur les suites extraites.
  Par définition, la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ assure la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

Remarque : Cet exercice permet de présenter deux séries de nature différente, dont les termes généraux sont équivalents.

On a montré dans l'**exemple 7** que la série $\sum\limits_{n>0}\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge donc, par somme, $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^n\left(\dfrac{1}{\ln n}+\dfrac{1}{n}\right)$ converge.
On a également montré dans l'**exemple 2** que la série $\sum\limits_{n>0}\dfrac{1}{n}$ diverge ; donc, par somme, $\sum\limits_{n\geq 2}\left(\dfrac{(-1)^n}{\ln n}+\dfrac{1}{n}\right)$ diverge.

Vérifions que les termes généraux sont équivalents :

$$\frac{(-1)^n\left(\dfrac{1}{\ln n}+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{(-1)^n}{\ln n}+\dfrac{1}{n}}=\frac{n+\ln n}{n+(-1)^n\ln n}\underset{n\to+\infty}{\sim}1.$$

On voit donc bien que le critère de comparaison par équivalence ne s'applique pas pour les séries dont le terme général n'est pas de signe constant !

g. $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)=1$, donc le terme général ne tend pas vers 0.

La série $\sum\limits_{n>0}(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est grossièrement divergente.

Remarque : Il ne faut pas oublier les critères les plus simples !

h. Pour $n\geq 0$, on pose : $u_n=\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $t\in[0,1]$, on a : $\frac{t^n}{1+t}\geq\frac{t^n}{2}$, donc $u_n\geq\frac{1}{2(n+1)}>0$.

Par comparaison à une série de Riemann divergente, la série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right)$ diverge.

i. Pour tout $n>0$, on a : $\left|\frac{\sin n+\cos n}{n^2}\right|\leq\frac{2}{n^2}$ donc, par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum\limits_{n>0}\frac{\sin n+\cos n}{n^2}$ est absolument convergente, donc convergente.

j. Pour tout $n>0$, on a : $|\sin n|\leq 1$ et $|\cos n|\leq 1$; on en déduit que pour tout $n>0$, $0\leq\sin^2 n\leq|\sin n|$ et $0\leq\cos^2 n\leq|\cos n|$ d'où :

$\frac{|\sin n|+|\cos n|}{n}\geq\frac{1}{n}>0$.

Par comparaison à une série de Riemann divergente, la série $\sum\limits_{n>0}\frac{|\sin n|+|\cos n|}{n}$ diverge.

k. Pour tout $n\geq 2$, on a :

$n\times\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}=\mathrm{e}^{n\ln(\ln n)-(\ln n)^2+\ln n}=\mathrm{e}^{n\left(\ln(\ln n)-\frac{(\ln n)^2}{n}+\frac{\ln n}{n}\right)}$, donc par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\times\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}=+\infty$.

On en déduit que, à partir d'un certain rang, $\dfrac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}} \geq \dfrac{1}{n} > 0$. Par comparaison à une série de Riemann divergente, la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$ est divergente.

4. a. • Si $a \geq 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a^{\sqrt{n}}$ est grossièrement divergente.

• Si $0 < a < 1$, on a : $\ln a < 0$, donc par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 a^{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \mathrm{e}^{\sqrt{n}\ln a} = 0$. On en déduit que $a^{\sqrt{n}} = o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a^{\sqrt{n}}$ converge.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} = \dfrac{1}{a^{-n}+a^n}$.

• Si $0 < a < 1$, on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n$. Ainsi par comparaison à une série géométrique positive convergente $(0 < a < 1)$, la série $\sum u_n$ converge.

• Si $a > 1$, on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a^n}$. Ainsi par comparaison à une série géométrique positive convergente $\left(0 < \dfrac{1}{a} < 1\right)$, la série $\sum u_n$ converge.

• Si $a = 1$, la série diverge grossièrement.

c. • Si $a > 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{e}^{an^2+bn}$ est grossièrement divergente.

• Si $a = 0$, la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\mathrm{e}^b\right)^n$ converge si, et seulement si $\mathrm{e}^b < 1$ donc si, et seulement si $b < 0$.

• Si $a < 0$, par croissances comparées $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \mathrm{e}^{an^2+bn} = 0$, donc $\mathrm{e}^{an^2+bn} = o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{e}^{an^2+bn}$ converge.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}=n\left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{1/3}-\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{1/2}\right)$$

$$=n\left(1+\frac{a}{3n^2}-\left(1+\frac{3}{2n^2}\right)+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right),$$

d'où : $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}=\frac{1}{n}\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\right)+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- Si $a \neq \frac{9}{2}$, $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underbrace{\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\right)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{de signe constant}}}$.

  La série de Riemann $\sum\limits_{n>0}\frac{1}{n}$ est divergente, donc par comparaison (le terme général étant de signe constant), la série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}\right)$ diverge.

- Si $a=\frac{9}{2}$, $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}=o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$; donc par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}\right)$ converge absolument, donc converge.

e. On remarque que : $2^{(-1)^n}=2$ si n est pair, et $2^{(-1)^n}=\frac{1}{2}$ si n est impair.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc : $\frac{a^n}{2} \leq 2^{(-1)^n}a^n \leq 2a^n$ (car $a>0$).
On en déduit :

- Si $0<a<1$, l'encadrement $0<2^{(-1)^n}a^n \leq 2a^n$ donne la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0}2^{(-1)^n}a^n$, par comparaison à une série géométrique positive convergente.

- Si $a \geq 1$, l'inégalité $\frac{a^n}{2} \leq 2^{(-1)^n}a^n$ donne la divergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0}2^{(-1)^n}a^n$, par comparaison à une série géométrique positive divergente.

5. a. La série $\sum a_n$ converge, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, on a : $\dfrac{a_n}{1+a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.

La série $\sum a_n$ est convergente, *à termes positifs* donc, par comparaison, la série $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ converge.

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, on a : $\sin^2(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n{}^2$. On a aussi à partir d'un certain rang : $0 \leq a_n{}^2 \leq a_n \leq 1$. Ainsi, par comparaison de séries positives, la série $\sum a_n{}^2$ converge donc, par comparaison encore, la série $\sum \sin^2(a_n)$ converge.

b. Remarque : Compte tenu des données de l'énoncé, il faut se ramener à la série $\sum a_n$. L'idée consiste donc à considérer la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$, dont on sait que la convergence équivaut à la convergence de la suite (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{u_n{}^2 + a_n{}^2} - u_n\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{a_n{}^2}{\sqrt{u_n{}^2 + a_n{}^2} + u_n}$ (en utilisant une expression conjuguée).

$u_0 \geq 0$; si pour $n \geq 0, u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n{}^2 + a_n{}^2}\right) \geq 0$. Cette récurrence rapide montre la positivité de la suite (u_n), d'où l'on déduit :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{a_n{}^2}{\sqrt{u_n{}^2 + a_n{}^2} + u_n} \leq \dfrac{1}{2}a_n$.

Finalement, par comparaison de séries positives, la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, donc la suite (u_n) converge.

6. • Si $a = 0$, la série a pour terme général 0, elle est donc convergente, de somme nulle.

• Si $a \neq 0, \ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2^n}\right)^2 + o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2^{2n+1}}\right)\right)$ donc

$$\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \underbrace{-\frac{1}{2}\times\frac{a^2}{4^n}}_{\text{de signe constant}}$$; par comparaison à une série géométrique de signe constant convergente, la série $\sum_{n\geq 0}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)$ converge.

Pour calculer la somme, il faut remarquer que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$, $\cos(x)=\frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}$.

Soit $a\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$. Pour tout $n>0$, on a :

$$\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)=\ln\left(\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)\right)-\ln\left(\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)-\ln(2).$$

Soit $N>0$. Par télescopage, on obtient :

$\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)=-\ln\left(\sin\left(\frac{a}{2^N}\right)\right)+\ln(\sin(a))-N\ln(2)$, puis (en ajoutant le cas $n=0$) : $\sum_{n=0}^{N}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)=\ln(\cos(a))+\ln(\sin(a))-\ln\left(2^N\sin\left(\frac{a}{2^N}\right)\right)$.

Enfin, comme $2^N\sin\left(\frac{a}{2^N}\right)\underset{N\to+\infty}{\sim}a$, on obtient, pour tout $a\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)=\ln(\cos(a))+\ln(\sin(a))-\ln(a)=\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).$$

7. On a montré dans l'**exemple 7** que la série $\sum_{n>0}\frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Il existe plusieurs façons de déterminer cette somme. Nous en verrons deux.

Première méthode : En reconnaissant un développement de Taylor.

Les sommes partielles de cette série ne sont pas sans rappeler le $DL_n(0)$ de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ qui est : $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k+o_{n\to+\infty}(x^n)$.

Rappelons l'inégalité de Taylor–Lagrange pour toute fonction *f* de classe C^{n+1} sur $[a,b]$:

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Considérons $f:x\mapsto\ln(1+x)$. Cette fonction est de classe C^∞ sur $[0,1]$.

Montrons par récurrence que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\forall x\in[0,1],f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

Initialisation : Pour tout $x\in[0,1],f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{(1+x)^1}$, donc la propriété est vérifiée pour $k=1$.

Hérédité : Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $x\in[0,1]$,

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Alors, pour tout $x\in[0,1]$,

$$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}\right)'(x)=\frac{-k\times(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^{k+1}}=\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

On applique la formule de Taylor-Lagrange à *f*, avec $a=0$ et $b=1$, et on obtient :

$$\left|f(1)-\ln(1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}\right|\leq\frac{1}{(n+1)!}\sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}\right),$$

d'où : $\left|\ln(2)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right|\leq\dfrac{1}{(n+1)}$.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$.

Deuxième méthode : En remarquant que pour tout $n>0$, $\frac{1}{n}=\int_0^1 t^{n-1}\mathrm{d}t$ (il fallait y penser !).

Soit $n>0$. On a (par linéarité de l'intégrale) :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^k t^{k-1}\mathrm{d}t \underset{j=k-1}{\underbrace{=}} -\int_0^1\sum_{j=0}^{n-1}(-t)^j\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^1\frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\mathrm{d}t=-\underbrace{\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t}_{\ln 2}+\int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t\in[0,1]$, $\left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|\leq t^n$, donc $\left|\int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$.

On en déduit que pour tout $n>0$: $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}+\ln 2\right|\leq\frac{1}{n+1}$.

Soit encore : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$.

Dérivées

Dérivées de fonctions usuelles

Fonction f	Dérivable sur	Fonction f'
$x \mapsto k$ $k \in \mathbb{R}$ ou $k \in \mathbb{C}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x^n, \ n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$, $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto a^x, \ a \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \ln(a) a^x$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$x \mapsto \ln(\lvert x \rvert)$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \operatorname{Arccos} x$	$]-1, 1[$	$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$	$]-1, 1[$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \mapsto \operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

…/…

.../...

$x \mapsto \text{sh}x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \text{ch}x$
$x \mapsto \text{ch}x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \text{sh}x$

Primitives

Primitives de fonctions usuelles

Fonction f	Intervalle I	Une primitive de f sur I
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, si $n \leq -2$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$x \mapsto \ln(\lvert x \rvert)$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan x$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$]-1, 1[$	$x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ ou $x \mapsto -\operatorname{Arccos} x$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \operatorname{Arctan} x$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + a^2}, a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

.../...

.../...

$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \operatorname{ch} x$
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \operatorname{sh} x$
$x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \operatorname{th} x$

Trigonométrie

Formules d'addition

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \qquad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b} \quad \text{si } a\text{, } b \text{ et } a+b \text{ sont différents de } \frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b} \quad \text{si } a\text{, } b \text{ et } a-b \text{ sont différents de } \frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Formules de duplication

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a \qquad \sin 2a=2\sin a\cos a$$
$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$

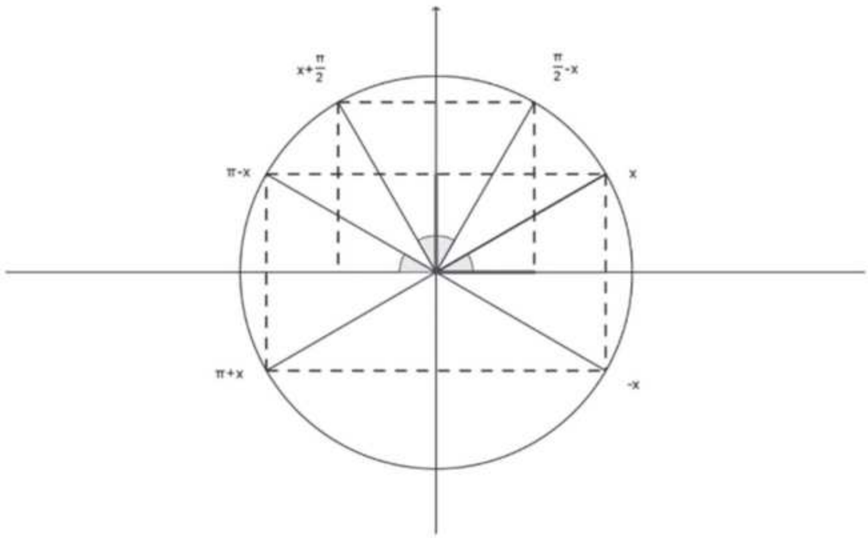
Transformation de produits en sommes

$$\cos a\cos b=\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$$
$$\sin a\sin b=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$
$$\sin a\cos b=\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

Transformation de sommes en produits

$$\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \cos a-\cos b=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a+\sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin a-\sin b=2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Liens entre sinus et cosinus



$$\cos(-x)=\cos(x),\qquad \sin(-x)=-\sin(x)$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x),\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x),\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$$

$$\cos(x+\pi)=-\cos(x),\quad \sin(x+\pi)=-\sin(x)$$

$$\cos(\pi-x)=-\cos(x),\quad \sin(\pi-x)=\sin(x)$$

$\mathrm{DL}_n(0)$ des fonctions usuelles

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \to 0}(x^n)$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \to 0}(x^{2n})$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \to 0}(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o_{x \to 0}\left(x^{2p}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o_{x \to 0}\left(x^{2p+1}\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o_{x \to 0}\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o_{x \to 0}\left(x^n\right)$$

(que l'on retrouve en primitivant la précédente et remplaçant x par $-x$)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_{x \to 0}\left(x^n\right), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

MATHS
SUP

Vous qui entrez en classes préparatoires et qui devez faire un choix parmi une multitude de livres de cours et d'exercices, pourquoi choisir celui-ci en premier ?

Parce que ce livre part d'une réalité, s'est construit sur une expérience, et répond à un réel besoin.

Depuis plusieurs années, la maîtrise des techniques n'est plus un attendu du lycée, et de nombreux étudiants qui entrent en classes préparatoires rencontrent de grandes difficultés dès qu'il s'agit de mener un calcul, tant en mathématiques qu'en sciences physiques ou en sciences industrielles.

Les techniques non acquises pèsent sur les apprentissages.

Avec ce livre, nous vous proposons de travailler les techniques et exercices de base, afin d'assurer un socle solide qui vous évitera de perdre pied dès que vous serez confronté à un calcul.

Du même auteur

9 782340 024144

www.editions-ellipses.fr