

H Repa

Collection dirigée par Jean-Marie Brébéc

# Électromagnétisme

1<sup>re</sup> année  
MPSI-PCSI-PTSI



HACHETTE  
*Supérieur*





# Électromagnétisme

---

1<sup>re</sup> année MPSI-PCSI-PTSI

**Jean-Marie BRÉBEC**

Professeur en classes préparatoires au lycée Saint-Louis à Paris

**Thierry DESMARAIS**

Professeur en classes préparatoires au lycée Vaugelas à Chambéry

**Marc MÉNÉTRIER**

Professeur en classes préparatoires au lycée Thiers à Marseille

**Bruno NOËL**

Professeur en classes préparatoires au lycée Champollion à Grenoble

**Régine NOËL**

Professeur en classes préparatoires au lycée Champollion à Grenoble

**Claude ORSINI**

Professeur honoraire en classes préparatoires au lycée Dumont-d'Urville à Toulon



**HACHETTE**  
*Supérieur*

**22.** *doc.* 9 : © Philippe Burlot.

**92.** *doc.* 20 : Photo auteur.

**122.** *doc.* 10 et 11 : © Philippe Burlot.

Composition et mise en page : *Soft Office*

Maquette intérieure : *S.G. Création et Pascal Plottier*

Maquette de couverture : *Alain Vambacas*

© HACHETTE LIVRE 2003, 43, quai de Grenelle 75905 Paris Cedex 15

I.S.B.N. 978-2-0118-1757-0

*Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.*

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

# Préface

Cette collection concerne les nouveaux programmes des classes préparatoires aux Grandes Écoles, mis en application à la rentrée de septembre 2003 pour les classes de première année MPSI, PCSI et PTSI.

- Les auteurs ont fait en sorte de placer les mathématiques à leur juste place, en privilégiant la réflexion et le raisonnement physique et en mettant l'accent sur les paramètres significatifs et les relations qui les unissent.
- La physique est une science expérimentale et doit être enseignée en tant que telle. Les auteurs ont particulièrement soigné la description des dispositifs expérimentaux sans négliger la dimension pratique. Souhaitons que leurs efforts incitent professeurs et élèves à améliorer ou à susciter les activités expérimentales toujours très formatrices.
- La physique n'est pas une science désincarnée, uniquement préoccupée de spéculations fermées aux réalités technologiques. Chaque fois que le sujet s'y prête, les auteurs ont donné une large place aux applications scientifiques ou industrielles, propres à motiver nos futurs chercheurs et ingénieurs.
- La physique n'est pas une science aseptisée et intemporelle, elle est le produit d'une époque et ne s'exclut pas du champ des activités humaines. Les auteurs n'ont pas dédaigné les références à l'histoire des sciences, aussi bien pour décrire l'évolution des modèles théoriques que pour replacer les expériences dans leur contexte.

L'équipe d'auteurs, coordonnée par Jean-Marie BRÉBEC, est composée de professeurs de classes préparatoires très expérimentés, qui possèdent une longue pratique des concours des Grandes Écoles et dont la compétence scientifique est unanimement reconnue. Cette équipe a travaillé en relation étroite avec les auteurs des collections DURANDEAU et DURUPHY du second cycle des classes de lycée ; les ouvrages de classes préparatoires s'inscrivent donc dans une parfaite continuité avec ceux du secondaire, tant dans la forme que dans l'esprit.

Gageons que ces ouvrages constitueront de précieux outils pour les étudiants, tant pour une préparation efficace des concours que pour l'acquisition d'une solide culture scientifique.

J.-P. DURANDEAU

# **Sommaire**

<u>1</u>	DISTRIBUTIONS DE CHARGES .....	5
<u>2</u>	CHAMP ÉLECTROSTATIQUE .....	17
<u>3</u>	POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE .....	39
<u>4</u>	LE THÉORÈME DE GAUSS .....	61
<u>5</u>	DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE .....	81
<u>6</u>	DISTRIBUTIONS DE COURANTS .....	101
<u>7</u>	CHAMP MAGNÉTIQUE .....	116
<u>8</u>	LE THÉORÈME D'AMPÈRE .....	141
<u>9</u>	DIPÔLE MAGNÉTIQUE .....	162
<u>10</u>	LA FORCE DE LORENTZ .....	175
	ANNEXE .....	205
	INDEX .....	207

# Distributions de charges

# 1

## Introduction

*La matière est constituée d'électrons, de protons et de neutrons. Pour décrire les propriétés de ces particules, il est nécessaire de leur associer une grandeur physique appelée charge électrique.*

*En étudiant les propriétés et les interactions des ensembles (ou distributions) de charges électriques, nous définirons le cadre de l'électromagnétisme adopté dans cet ouvrage.*

## O B J E C T I F S

- Choisir un modèle de description des distributions de charges.
- Reconnaître leurs symétries.

## P R É R E Q U I S

- Expériences élémentaires d'électrisation vues dans le cycle secondaire.

# La charge électrique

## 1.1. Électrisation – Charge élémentaire

### 1.1.1. Expériences qualitatives

Les expériences d'électrisation sont connues depuis l'Antiquité ; celles-ci (vues dans les classes antérieures) mettent en évidence quelques propriétés électriques de la matière :

- certains matériaux (verre, plexiglas...) possèdent, lorsqu'ils ont été frottés avec d'autres matériaux, la propriété d'attirer des corps légers. Nous disons qu'ils ont été électrisés ;
- les interactions observables entre corps électrisés conduisent à distinguer deux types d'électrisation. Deux objets semblablement électrisés se repoussent et, dans le cas contraire, ils s'attirent.

L'étude quantitative des lois d'attraction et de répulsion fut réalisée par A. de Coulomb (1736-1806), qui proposa sa loi d'interaction en 1785.

### 1.1.2. Particules et charges élémentaires

Des expériences datant de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle (J.-J. Thomson, 1856-1940 et J. Perrin, 1870-1942) conduisent à une interprétation de la matière en termes de corpuscules élémentaires pouvant porter des charges électriques positives ou négatives.

#### L'unité de charge est le coulomb, noté C.

- Les *protons*, chargés positivement, constituent avec les *neutrons*, de charge nulle, les noyaux des atomes.
- Les *électrons*, chargés négativement, constituent l'enveloppe (*nuage électronique*) de ces mêmes atomes.
- La charge de l'électron vaut  $-e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Fait remarquable, celle du proton lui est exactement opposée ; elle est égale à  $+e$ .

Lors des expériences classiques d'électrisation, les charges positives, liées aux noyaux, restent au sein des supports matériels. On obtient une électrisation positive ou négative des objets utilisés lorsque des électrons sont respectivement arrachés ou apportés.

#### Les charges observées sont toujours des multiples entiers de la charge élémentaire $e$ : la charge électrique est quantifiée.

#### Remarque

Les *quarks*, constituants ultimes de la matière nucléaire connus à ce jour, portent des charges multiples entiers de  $\frac{e}{3}$ . Ils ne sont pas observés isolément, mais à l'intérieur de structures dont la charge est un multiple entier de  $e$ .



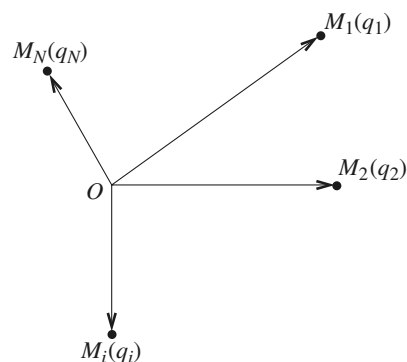
## 1.2. Conservation de la charge

La charge électrique est une grandeur fondamentale qui intervient dans les expressions des champs électromagnétiques créés par des distributions de charges statiques ou mobiles (courants).

Toutes les interactions connues à ce jour (collisions de particules dans les accélérateurs, réactions chimiques, etc.) ont la propriété de conserver la charge électrique. En outre, cette grandeur est *indépendante* du référentiel d'observation.

**Pour un système fermé, c'est-à-dire n'échangeant pas de matière avec l'extérieur, la charge électrique est constante et elle est la même pour tous les observateurs.**

La charge électrique est une *grandeur indépendante du référentiel* d'observation.



**Doc. 1.** Distribution de  $N$  charges ponctuelles.

# 2 Distributions de charges

## 2.1. Charges ponctuelles

Une *particule* est en général un objet d'extension spatiale très limitée. L'extension d'un nucléon (composant du noyau d'un atome : proton ou neutron), par exemple, est de l'ordre du fermi ou femtomètre ( $10^{-15}$  m).

Les lois de l'électromagnétisme donnent une description satisfaisante du comportement des particules chargées tant que les distances mises en jeu restent grandes devant cette distance élémentaire.

Assimiler les particules élémentaires chargées à des points matériels portant une charge constitue ainsi une approximation convenable.

Nous définirons une distribution de  $N$  charges ponctuelles par l'ensemble des positions  $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$  des charges  $q_i$ ,  $i$  variant de 1 à  $N$  (doc. 1).

## 2.2. Modélisation d'une répartition de charges

### 2.2.1. Échelle microscopique

À l'échelle microscopique, caractérisée par une longueur notée  $d$ , la structure de la matière apparaît *discontinue*.

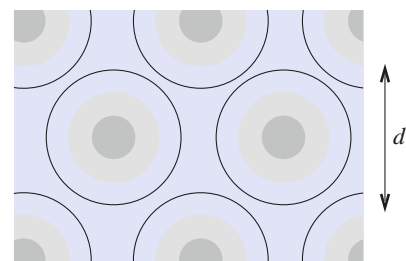
Dans un milieu condensé (solide, liquide), cette distance  $d$  sera de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres, car la taille d'un atome est de l'ordre de 0,1 nm.

Ainsi, dans un cristal, les distances séparant les atomes ou les ions varient environ de 0,2 nm à 1 nm.

Pour un observateur capable d'une observation microscopique du milieu, celui-ci pourrait avoir un aspect semblable à celui représenté par le document 2.

#### Remarque

L'utilisation d'un microscope à effet tunnel permet ce genre d'observation. Grâce à cet appareil, il est par exemple possible d'observer la surface d'un solide en distinguant les couches d'empilement des atomes le composant.



**Doc. 2.** Répartition de charges à l'échelle microscopique.

# Application 1

## Ordre de grandeur de $d$ dans un plasma

Évaluer l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique  $d$  pour un plasma, milieu ionisé constitué d'électrons et d'ions de densités identiques  $n = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ .

Si nous associons à chaque particule un volume égal à  $d^3$ , un ordre de grandeur de  $d$  s'établit à :

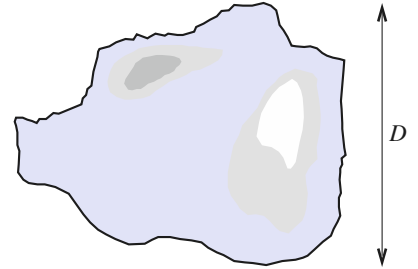
$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 10^{-7} \text{ m} = 10^2 \text{ nm}.$$

### 2.2.2. Échelle macroscopique

L'échelle macroscopique est fixée par une longueur caractéristique  $D$  définie à partir des caractéristiques significatives directement perceptibles à l'examen de l'objet étudié : dimensions latérales, périodes spatiales pour les objets de très grandes dimensions à structure périodique, etc.

Dans la plupart des cas, cette longueur  $D$  est très largement supérieure à la longueur microscopique  $d$ .

Une représentation macroscopique d'un objet est donnée document 3, où les zones plus (ou moins) sombres symbolisent une concentration plus (ou moins) forte de charges électriques.



Doc. 3. Observation à l'échelle macroscopique.

### 2.2.3. Échelle mésoscopique

À l'échelle microscopique, la structure de la matière est discontinue. Les entités microscopiques sont considérées explicitement et cette particularité se prête mal à l'étude de leurs comportements d'ensemble.

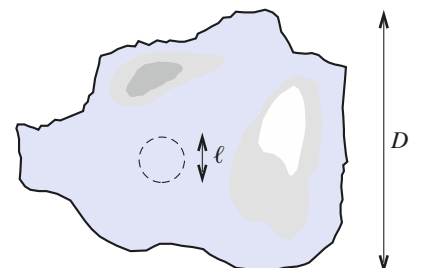
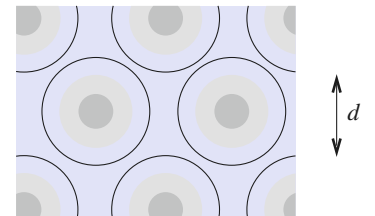
À l'échelle macroscopique, la description des objets est imprécise et elle ne permet pas de prévoir leurs comportements.

Pour lever ce dilemme il est nécessaire d'introduire une troisième échelle, dite mésoscopique. Cette échelle, intermédiaire entre l'échelle microscopique de longueur caractéristique  $d$  et l'échelle macroscopique de longueur caractéristique  $D$ , est définie par une longueur caractéristique  $\ell$  satisfaisant à la double inégalité  $d \ll \ell \ll D$ .

Sous réserve de l'existence d'une telle échelle, il sera possible de donner une description locale des objets étudiés avec les deux avantages suivants :

- comme  $\ell \gg d$ , il est possible de définir convenablement la *grandeur locale moyenne* des grandeurs attachées aux entités microscopiques, puisqu'un volume  $\ell^3$  contient un très grand nombre de ces entités. Cette opération de *lissage* ou de *nivellement* fait de la valeur locale une grandeur variant continûment. Il est dès lors possible d'adopter une description des objets en *termes de milieux continus* ;
- comme  $\ell \ll D$ , le volume  $\ell^3$  reste très petit à l'échelle macroscopique, et, de ce fait, la description locale est une description précise de l'objet étudié.

Le document 4 résume les propriétés des trois échelles examinées.



Doc. 4. Échelles microscopique  $d$ , mésoscopique  $\ell$  et macroscopique  $D$ .

À une échelle macroscopique, les distributions de charges (entités microscopiques) seront représentées à l'aide d'une grandeur nivelée à une échelle mésoscopique : la densité de charges.

Remarque

La description des distributions de charges en termes mésoscopiques est la seule qui soit opératoire quand le nombre de charges est élevé. Mais nous perdons toute information sur le comportement individuel des entités microscopiques et nous devons nous contenter dès lors de leur comportement local d'ensemble.

# Application 2

## Répartition des charges sur une sphère conductrice portée à un potentiel donné

Le cuivre, de numéro atomique  $Z = 29$ , de masse molaire  $M = 64 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , a pour masse volumique  $\mu = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Une petite sphère de cuivre de rayon  $a = 1 \text{ mm}$  est chargée en la portant au potentiel  $V = 3\,000 \text{ V}$  (au-delà, le champ électrique de la sphère peut provoquer l'ionisation de l'air environnant). La charge apportée est alors :

$$Q = 4\pi\epsilon_0 a V, \text{ où } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}.$$

L'apport d'une charge  $Q$  entraîne une déformation des nuages électroniques au voisinage de la surface de la sphère. La charge excédentaire apparaît ainsi délocalisée, nivelée localement sur une épaisseur d'extension caractéristique de l'ordre de  $30 \text{ nm}$ .

Les valeurs numériques proposées dans cet énoncé sont-elles en accord avec les inégalités liant  $d$ ,  $\ell$  et  $D$  ?

La sphère contient :

$$N = N_A \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right) \frac{\mu}{M} \text{ atomes de cuivre,}$$

où  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  est le nombre d'Avogadro. Le nombre de protons contenus dans la sphère est donc  $N_p = ZN = 10^{22}$ .

Le nombre d'électrons est identique si la sphère est neutre. La charge  $Q$  positive portée par la sphère correspond à une diminution de son nombre d'électrons (charges libres), soit :

$$N_e = N_p - \frac{Q}{e} = 10^{22} - 2 \cdot 10^9.$$

Constatons que la différence relative de  $N_p$  et  $N_e$  est très faible : le milieu est peu perturbé par la charge.

Nous pouvons définir une longueur microscopique  $d$  en attribuant à chaque atome de cuivre un volume de l'ordre de  $d^3$ , soit :

$$Nd^3 = \frac{4}{3} \pi a^3,$$

$$\text{d'où } d = \left( N_A \frac{\mu}{M} \right)^{-\frac{1}{3}} = 0,23 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 0,23 \text{ nm}.$$

La distance caractérisant l'étalement de l'excès de charge nous permet de définir une échelle mésoscopique  $\ell = 30 \text{ nm}$  grande devant  $d$  et encore très faible à l'échelle macroscopique définie, par exemple, par le rayon de la sphère de cuivre :  $D = a = 1 \text{ mm}$ .

## 2.3. Charges volumiques

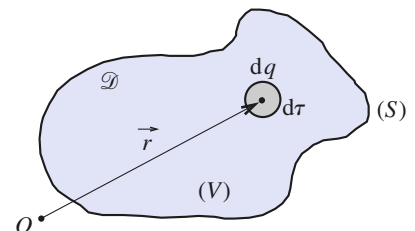
La présence de charges dans un milieu est en général modélisée par une charge délocalisée, nivelée, décrite par la charge volumique  $\rho$ .

Pour un milieu chargé de volume  $V$ , la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est définie par la donnée de  $\rho$  à l'intérieur de la surface  $S$  contenant  $V$  (doc. 5).

**La charge contenue dans un volume élémentaire  $d\tau$  (petit à l'échelle macroscopique et de l'ordre de  $\ell^3$ ) est :**

$$dq = \rho d\tau.$$

**La densité volumique  $\rho$  est mesurée en  $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$ .**



**Doc. 5.** Distribution volumique de charges.

## 2.4. Charges surfaciques

Supposons que la distribution  $\mathcal{D}$  présente l'aspect d'une nappe chargée : la densité volumique de charges est non nulle à l'intérieur d'une écorce d'épaisseur  $h$  très faible à l'échelle macroscopique d'étude (doc. 6a).

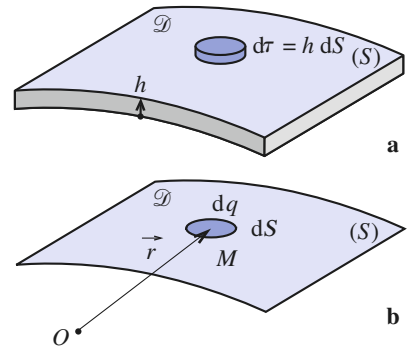
Pour une surface élémentaire  $dS$  de cette nappe, la charge portée par le volume  $d\tau = h dS$  est  $dq = \rho d\tau = \rho h dS$ .

L'épaisseur  $h$  étant très petite, considérons la représentation limite «  $h$  tend vers zéro à charge  $dq$  constante » pour un élément de surface  $dS$  donné. Le produit  $\rho h$ , que nous noterons  $\sigma$ , doit être maintenu constant en considérant cette description limite de la distribution  $\mathcal{D}$  (doc. 6b).

Nous définissons ainsi une distribution surfacique de charges, de densité  $\sigma$ .

La charge portée par une surface élémentaire  $dS$  (petite à l'échelle macroscopique et de l'ordre de  $\ell^2$ ) s'écrit alors  $dq = \sigma dS$ .

La densité surfacique de charges  $\sigma$  est mesurée en  $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ .



Doc. 6. Écorce chargée (a) et modélisation surfacique (b).

# Application 3

## Épaisseur de l'écorce chargée

Lorsque la bille de cuivre de l'Application 2 est chargée, les charges excédentaires ont tendance à se répartir au voisinage de la surface de celle-ci. En considérant les valeurs numériques précédentes et en attribuant une charge élémentaire excédentaire à chaque atome de cuivre de cette couche, obtenir une évaluation de l'épaisseur  $h$ . Commenter.

La perturbation du milieu due à l'excès de charges est très faible. L'épaisseur  $h$  doit donc être faible devant le rayon de la bille, de sorte que le volume de l'écorce chargée est proche de  $4\pi a^2 h$ .

Cette écorce contient alors  $\frac{N_A(4\pi a^2 h)\mu}{M}$  atomes de cuivre.

Chaque électron excédentaire étant supposé associé à chacun de ces atomes, l'épaisseur  $h$  est donnée par :

$$Q = \frac{e N_A (4\pi a^2 h) \mu}{M}, \text{ soit } h = \frac{\epsilon_0 V M}{a \mu e N_A}.$$

Numériquement, nous obtenons  $h = 3 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ .

Cette valeur numérique est clairement absurde : elle est largement inférieure à la taille d'un atome de cuivre !

Attribuer une charge excédentaire  $e$  à chaque atome de cuivre de la couche chargée est bien entendu très excessif, mais il est clair que même en répartissant cet excès sur quelques milliers d'atomes, nous obtiendrons une épaisseur  $h$  extraordinairement faible. La charge surfacique semble alors un modèle convenable pour décrire la distribution de charges portées par le conducteur.

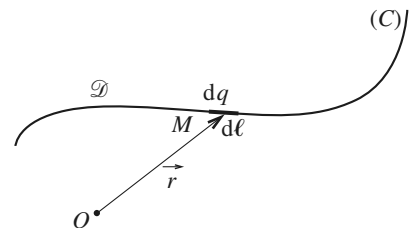
► Pour s'entraîner : ex. 6 et 8.

## 2.5. Charges linéiques

Lorsque la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est filiforme, nous définirons de façon analogue une distribution linéique de charges le long de la courbe  $(C)$  en introduisant une densité linéique  $\lambda$  (doc. 7).

La charge portée par une longueur élémentaire  $d\ell$  est  $dq = \lambda d\ell$ .

La densité linéique  $\lambda$  est mesurée en  $\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$ .



► Pour s'entraîner : ex. 8.

Doc. 7. Charge  $dq = \lambda d\ell$  en  $M$ .

## 2.6. Distributions de matière

La matière, elle aussi, possède une structure discontinue à l'échelle microscopique avec les mêmes entités microscopiques à savoir les atomes, les ions et les molécules. Nous sommes donc fondés à reprendre (par analogie) les échelles et les modélisations qui ont été introduites lors de l'étude des distributions de charges. Pour nos besoins ultérieurs, nous n'explicitons que la définition de la masse volumique.

La distribution de masses dans un volume  $V$  est définie par la donnée de la *masse volumique*  $\mu$  à l'intérieur de la surface  $S$  délimitant  $V$ .

La masse contenue dans un volume élémentaire  $d\tau$  est :  $dm = \mu d\tau$ , la masse volumique  $\mu$  est mesurée en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

# 3 Symétries des distributions de charges

## 3.1. Symétries usuelles

Les distributions de charges peuvent posséder des symétries. Nous allons examiner quelques propriétés des densités de charges  $\rho(M)$  liées aux symétries élémentaires usuelles.

### 3.1.1. Symétrie plane

Une distribution est symétrique par rapport à un plan  $\Pi$  si,  $M$  et  $M'$  étant deux points symétriques par rapport à  $\Pi$ , sa densité de charge vérifie :  $\rho(M) = \rho(M')$ .

Le plan  $\Pi$  de symétrie est aussi appelé *plan-miroir* (doc. 8).

En coordonnées cartésiennes, une distribution de charges est symétrique par rapport au plan  $\Pi = (xOy)$ , lorsque :  $\rho(x, y, z) = \rho(x, y, -z)$ .

### 3.1.2. Antisymétrie plane

Une distribution est antisymétrique par rapport à un plan  $\Pi^*$  si,  $M$  et  $M'$  étant deux points symétriques par rapport à  $\Pi^*$ , sa densité de charge vérifie :  $\rho(M) = -\rho(M')$ .

Le plan  $\Pi^*$  est appelé *plan d'antisymétrie* ou *plan-antimiroir*.

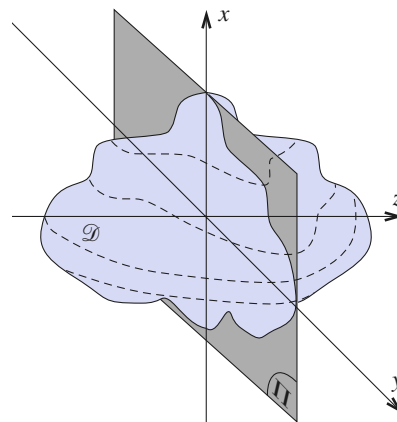
En coordonnées cartésiennes, une distribution de charges admet le plan  $\Pi^* = (xOy)$  comme plan de symétrie, lorsque :  $\rho(x, y, z) = -\rho(x, y, -z)$ .

### 3.1.3. Invariance par translation

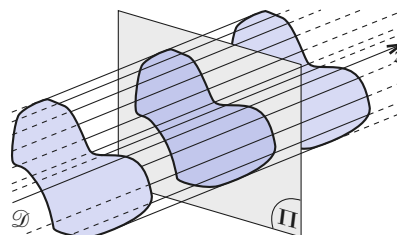
Une distribution, illimitée dans la direction de l'axe  $\Delta$ , est invariante par translation suivant  $\Delta$  si, pour tout point  $M$  et son translaté  $M'$ , sa densité de charge vérifie :  $\rho(M) = \rho(M')$ .

En coordonnées cartésiennes, si l'axe  $(Oz)$  est pris comme axe  $\Delta$ , une telle distribution satisfait à l'égalité  $\rho(x, y, z) = \rho(x, y, z')$  quel que soit  $z$  et  $z'$ , donc la densité de charge est indépendante de la coordonnée  $z$  :  $\rho(x, y)$ .

Le document 9 illustre ce cas : distribution de charges contenue dans un cylindre de génératrices parallèles à l'axe  $(Oz)$ , invariante par translation parallèlement à l'axe  $(Oz)$ . Notons que tout plan perpendiculaire à cet axe constitue un plan de symétrie de la distribution.



Doc. 8. Distribution invariante par symétrie plane.



Doc. 9. Distribution invariante par

### Remarque

Nous pourrions aussi rencontrer des cas de distributions invariantes par des translations discrètes le long d'un axe. Ces distributions présenteront un caractère périodique le long de l'axe, comme l'illustre le document 10.

### 3.1.4. Invariance par rotation

Une distribution  $\mathcal{D}$  est invariante par rotation autour d'un axe ( $Oz$ ) si la densité de charges est la même en un point  $M$  de la distribution et en tout point  $M'$  obtenu par rotation d'un angle quelconque de  $M$  autour de l'axe. Notons  $(r, \theta, z)$  les coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ) du point  $M$ . Pour une telle distribution, la répartition de charges ne doit pas dépendre de l'angle  $\theta$ .

**La charge d'une distribution invariante par rotation autour d'un axe ( $Oz$ ) est telle que  $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$ .**

Remarquons que tout plan contenant l'axe de révolution ( $Oz$ ) est un plan de symétrie de la distribution de charges (doc. 11).

### Remarque

Nous pourrions aussi rencontrer des cas de distributions invariantes par des rotations discrètes autour d'un axe. Un ensemble de trois charges identiques occupant les trois sommets d'un triangle équilatéral est invariant par rotation d'angle  $\alpha$  multiple entier de  $\frac{2\pi}{3}$  autour de l'axe perpendiculaire au plan du triangle et passant par son centre.

## 3.2. Distributions à symétries multiples

Nous rencontrerons fréquemment des distributions invariantes vis-à-vis de plusieurs symétries élémentaires. Nous avons déjà remarqué que les distributions invariantes par translation, ou par rotation, possèdent une infinité de plans-miroirs. Nous citerons encore deux types de distributions de charges remarquables par leur degré de symétrie élevé. L'utilisation des propriétés précédentes permet de démontrer les propositions suivantes.

### 3.2.1. Distribution à symétrie cylindrique

La distribution à symétrie cylindrique est invariante par translation parallèlement à un axe noté ( $Oz$ ) (tout plan perpendiculaire à l'axe ( $Oz$ ) est plan de symétrie), et elle est de révolution autour de cet axe (tout plan contenant l'axe ( $Oz$ ) est plan de symétrie).

Utilisant les coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ), nous avons (doc. 12) :

**Distribution à symétrie cylindrique :  $\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$ .**

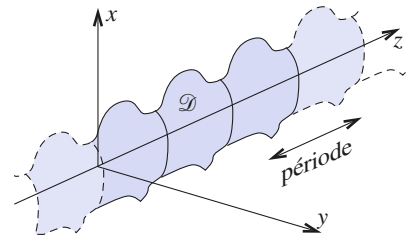
### 3.2.2. Distribution à symétrie sphérique

La distribution à symétrie sphérique est invariante par rotation autour de tous les axes passant par le centre de symétrie.

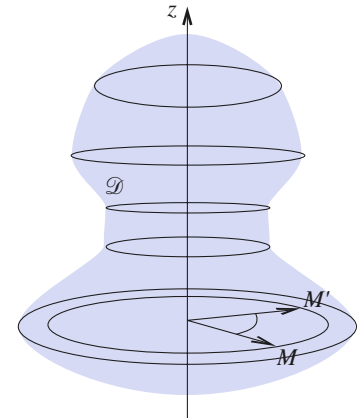
Remarquons, de plus, que tout plan contenant l'origine est plan de symétrie de la distribution.

Utilisant les coordonnées sphériques  $r, \theta$  et  $\phi$  avec l'origine au point centre de symétrie, nous avons (doc. 13) :

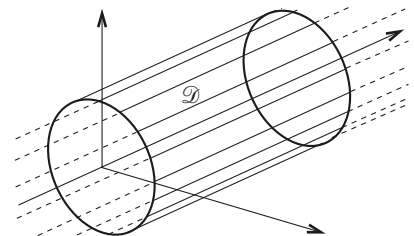
**Distribution à symétrie sphérique :  $\rho(r, \theta, \phi) = \rho(r)$ .**



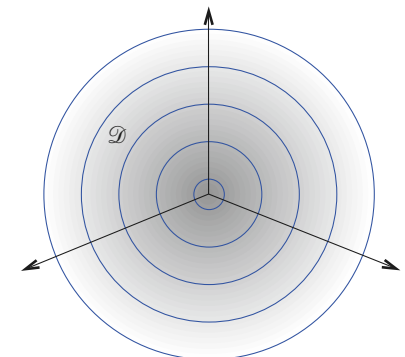
Doc. 10. Distribution invariante par



Doc. 11. Distribution invariante par rotation autour d'un axe ( $Oz$ ).



Doc. 12. Distribution à symétrie cylindrique.



Doc. 13. Distribution à symétrie sphérique.

► Pour s'entraîner : ex. 1, 2, 3, 4, 5 et 7.

## C Q F R

## ● CHARGE ÉLECTRIQUE

- L'unité de charge est le coulomb, noté  $C$ .
- Les charges observées sont toujours des multiples entiers de la charge élémentaire  $e$  ( $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$ ) : la charge électrique est quantifiée.
- Pour un système fermé, c'est-à-dire n'échangeant pas de matière avec l'extérieur, la charge électrique reste constante.

## ● DISTRIBUTION DE CHARGES

À une échelle macroscopique, les distributions de charges (entités microscopiques) seront représentées à l'aide d'une grandeur nivelée à une échelle mésoscopique : la densité de charges.

## • Charges volumiques

La charge contenue dans un volume élémentaire  $d\tau$  est :

$$dq = \rho d\tau.$$

La densité volumique  $\rho$  est mesurée en  $C \cdot m^{-3}$ .

## • Charges surfaciques

La charge portée par une surface élémentaire  $dS$  s'écrit :

$$dq = \sigma dS.$$

La densité surfacique  $\sigma$  est mesurée en  $C \cdot m^{-2}$ .

## • Charges linéiques

La charge portée par une longueur élémentaire  $d\ell$  est :

$$dq = \lambda d\ell.$$

La densité linéique  $\lambda$  est mesurée en  $C \cdot m^{-1}$ .

## ● SYMÉTRIE DES DISTRIBUTIONS

- Une distribution est symétrique par rapport à un plan  $\Pi$  si,  $M$  et  $M'$  étant deux points symétriques par rapport à  $\Pi$ , sa densité de charge vérifie :

$$\rho(M) = \rho(M').$$

- Une distribution est antisymétrique par rapport à un plan  $\Pi^*$  si,  $M$  et  $M'$  étant deux points symétriques par rapport à  $\Pi^*$ , sa densité de charge vérifie :

$$\rho(M) = -\rho(M').$$

- Une distribution, illimitée dans la direction de l'axe  $\Delta$ , est invariante par translation suivant  $\Delta$  si, pour tout point  $M$  et son translaté  $M'$ , sa densité de charge vérifie :

$$\rho(M) = \rho(M').$$

- Une distribution est à symétrie cylindrique (coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ ) si :

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r).$$

- Une distribution est à symétrie sphérique (coordonnées sphériques au centre de symétrie) si :

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r).$$



# Contrôle rapide

## Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Citer trois propriétés de la charge électrique.
- ✓ Citer les trois échelles de description et d'étude de la matière.
- ✓ Quels sont les caractéristiques d'une description des objets à l'échelle mésoscopique ?
- ✓ Citer trois grandeurs caractérisant les distributions de charges décrites à l'échelle mésoscopique.
- ✓ Lors de l'étude des propriétés de symétrie d'un objet, quelles sont les invariances qu'il convient d'examiner ?
- ✓ Quels sont les éléments de symétrie d'un doublet de charges ponctuelles opposées  $\pm q$  ?

## Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Un cylindre de hauteur  $h$  est invariant par translation le long de son axe.  
☐ Vrai ☐ Faux
2. La charge volumique  $\rho(M)$  est une grandeur quantifiée.  
☐ Vrai ☐ Faux
3. Un ensemble de trois charges ponctuelles quelconques ne présente aucun élément de symétrie.  
☐ Vrai ☐ Faux
4. Une distribution volumique de charges suivant une loi de la forme  $\rho(r)$  ( $r \geq 0$ ) est une distribution à symétrie cylindrique ou sphérique.  
☐ Vrai ☐ Faux
5. Une distribution volumique de charges suivant une loi de la forme  $\rho(z)$  est une distribution à symétrie cylindrique.  
☐ Vrai ☐ Faux

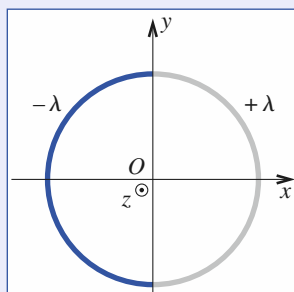
► Solution, page 16.



# Exercices

## 1 Cerceau chargé

Quelles sont les symétries de la distribution circulaire uniforme ci-contre ?



## 2 Sphère uniformément chargée

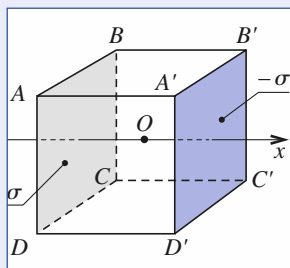
Soit une sphère de rayon  $a$ , de centre  $O$ , portant une répartition surfacique uniforme de charges  $\sigma$ .

Quelles sont les symétries de cette répartition de charges ?

## 3 Cube chargé

Soit un cube d'arête  $a$ . Les faces  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  portent des charges surfaciques uniformes opposées  $\sigma$  et  $-\sigma$ .

Quelles sont les symétries de cette distribution ?



## 4 Sphère polarisée

Une sphère de rayon  $a$  porte la densité surfacique de charges :

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta$$

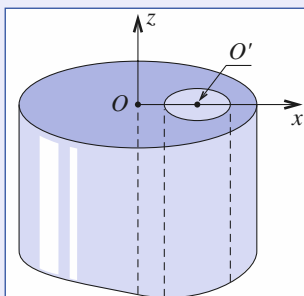
en coordonnées sphériques de centre  $O$  confondu avec le centre de la sphère.

Quelles sont les symétries de cette distribution ?

## 5 Cylindre chargé avec cavité

Un cylindre infini d'axe  $(Oz)$ , comportant une partie cylindrique évidée d'axe  $(O'z')$ , porte une charge volumique  $\rho$  uniforme.

Quelles symétries peut-on attribuer à cette distribution de charges ?



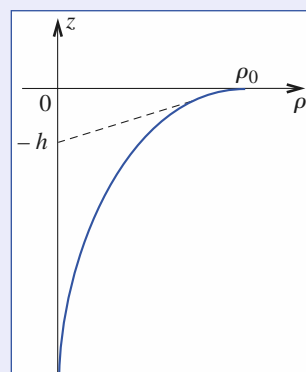
## 6 Modélisation d'une densité surfacique de charges

Nous avons supposé au § 2.4. que la répartition de charges était uniforme à l'intérieur de l'écorce d'épaisseur  $h$ , ce qui n'est pas nécessaire. Considérons par exemple un milieu occupant le demi-espace  $z < 0$ , chargé au voisinage de sa surface avec la densité volumique  $\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{z}{h}\right)$ , où  $h$  est une distance petite à l'échelle macroscopique.

1) Pour quelle profondeur  $z_0$  la couche comprise entre  $z = 0$  et  $z = z_0$  contient-elle 90 % de la charge portée par le milieu ?

2) Définir la densité surfacique de charges  $\sigma$  équivalente.

3) Commenter la situation limite  $\rho_0 \rightarrow \infty$  et  $h \rightarrow 0$ , avec  $\rho_0 h = \sigma_0 = \text{cte}$ .

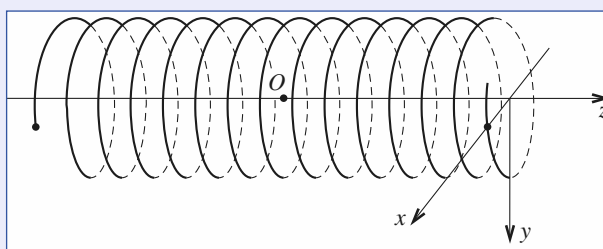


## 7 Hélice infinie

Le schéma ci-dessous représente une hélice d'axe  $(Oz)$ , correspondant à l'ensemble des points de coordonnées cartésiennes :

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = \frac{-p\theta}{2\pi} \quad (\text{hélice gauche})$$

lorsque  $\theta$  varie de  $\theta_{\min}$  à  $\theta_{\max}$ .



Cette hélice porte une densité linéique de charges uniforme  $\lambda$ . Quelles symétries suggère une telle distribution ? Examiner le cas d'une hélice infinie.

## 8 Modélisation d'une densité linéique de charges

Un tube cylindrique, à section circulaire de rayon  $a$ , est chargé uniformément avec la densité volumique  $\rho$ . Le rayon  $a$  étant petit à l'échelle macroscopique, on modélise le tube par un fil portant la densité linéique  $\lambda$ . Exprimer  $\lambda$  en fonction de  $\rho$  et  $a$ .

# Corrigés

**Solution du tac au tac, p. 14.**

1. Faux ;

2. Faux ;

3. Faux ;

4. Vrai ;

5. Faux.

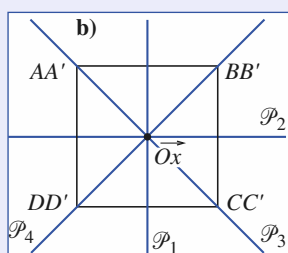
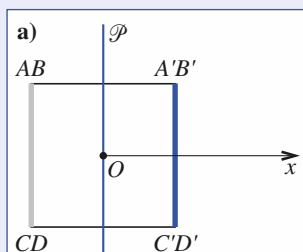
**1** Les plans  $(xOy)$  et  $(xOz)$  sont des plans-miroirs de la distribution : ce sont des plans de symétrie des charges.

Le plan  $(yOz)$  est un plan-antimiroir : c'est un plan d'antisymétrie des charges.

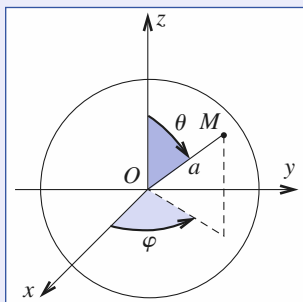
**2** Tout plan passant par le point  $O$  centre de la sphère est un plan de symétrie de charges et tout axe passant par  $O$  est un axe de révolution.

**3** Le plan  $\mathcal{P}$  parallèle aux deux faces considérées et passant par le centre  $O$  du cube est un plan d'antisymétrie (schéma a) ( $\mathcal{P} = \Pi^*$ ).

Les plans  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$  et  $\mathcal{P}_4$  ( $\mathcal{P}_i = \Pi_i$ ) indiqués sur le schéma b) sont des plans de symétrie de charges.



**4** La densité surfacique de charges ne dépend pas de l'angle  $\varphi$  : la distribution est invariante par rotation autour de l'axe  $(Oz)$ . Changer  $\theta$  en  $\pi - \theta$  inverse le signe de  $\sigma$  ; le plan  $(xOy) = \Pi^*$ , correspondant à :  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , est un plan d'antisymétrie de cette distribution de charges.



**5** Cette distribution est invariante par translation parallèlement à l'axe  $(Oz)$ .

Le plan  $(xOz)$ , qui contient l'axe  $(O'z)$  de la partie évidée, est un plan-miroir de la distribution ; c'est un plan de symétrie de la distribution de charges. La distribution n'est pas invariante par rotation autour de l'axe  $(Oz)$  si  $O'$  est différent de  $O$ .

**6** 1) Constatons que la densité volumique de la charge devient rapidement négligeable au-delà de la profondeur  $h$  :

$$\rho = \rho_0 \text{ pour } z = 0 ; \rho_0 = \frac{\rho_0}{5} \text{ pour } z = -(1,6)h ; \rho_0 = \frac{\rho_0}{1\,000} \text{ pour } z = -7h.$$

La charge comprise dans un volume cylindrique d'axe  $(Oz)$ , de base  $dS$  et d'épaisseur  $|z|$ , est :

$$dQ = \int_Z^0 \rho(z) dS dz = \rho_0 h \left[ 1 - e^{\frac{z}{h}} \right] dS \text{ avec } Z < 0.$$

Elle vaut  $dQ_{\text{tot}} = \rho_0 h dS$  si l'épaisseur est infinie et 90 % de cette valeur pour  $Z = z_0 = -h \ln(10) = -2,3h$ . Nous voyons ainsi que l'essentiel de la charge du milieu est dans une épaisseur de l'ordre de grandeur de  $h$ .

2) La répartition peut donc être considérée comme surfacique si  $h$  est assez faible :

$$\sigma dS = \int_{-\infty}^0 \rho(z) dS dz = \rho_0 h dS, \text{ soit } \sigma = \rho_0 h.$$

3) Cette situation limite n'est qu'une idéalisation du cas envisagé, et  $\sigma_0$  coïncide avec la densité surfacique de charges définie précédemment. Notons que l'écriture  $h \rightarrow 0$  n'a de signification qu'à l'échelle macroscopique :  $h$  est de l'ordre de  $\ell$  (longueur mésoscopique).

**7**

Nous pouvons penser aux symétries suivantes :

- invariance par translation, parallèlement à l'axe  $(Oz)$ , d'une longueur multiple entier du pas  $p$  de l'hélice ;
- symétrie par rapport à un plan contenant l'axe  $(Oz)$ , ou plus généralement symétrie de révolution autour de  $(Oz)$  ;
- symétrie par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe  $(Oz)$ , coupant l'hélice en deux parties de longueurs égales.

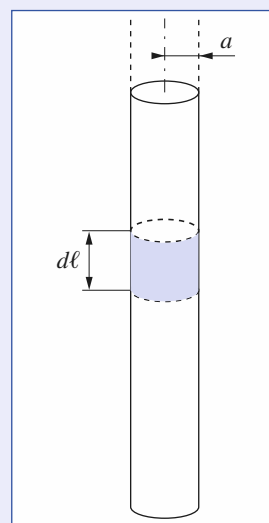
De fait, un examen plus attentif nous montre que l'hélice **finie** ne possède **aucune** de ces symétries élémentaires.

L'hélice infinie ne possède que la première des trois symétries évoquées précédemment.

**8**

Un élément  $d\ell$  de longueur du fil porte la charge :  $dq = \lambda d\ell$  et un élément de longueur du tube porte la charge  $dq = \rho \pi a^2 d\ell$ .

En comparant les deux expressions de la charge élémentaire, on en déduit que  $\lambda = \rho \pi a^2$ .



# Champ électrostatique

# 2

## Historique

*Après avoir jeté les bases de la théorie de la résistance des matériaux (1773), étudié le frottement solide (1779), puis décrit les lois de la torsion (1784), Charles-Augustin Coulomb (1736-1806) met au point une balance de torsion très sensible qui lui permet de décrire l'interaction entre particules chargées statiques.*

*La loi qu'il énonce en 1785, et qui porte son nom, a depuis été vérifiée avec une précision croissante.*

*Le champ électrostatique est la grandeur qui permet de décrire les effets de charges électriques statiques sur l'espace qui les entoure.*

## O B J E C T I F S

- Interaction électrostatique.
- Champ électrostatique.
- Propriétés de symétrie.

## P R É R E Q U I S

- Distribution de charges :
  - modélisations ;
  - symétries.

## Loi de Coulomb

### 1.1. Force d'interaction entre charges statiques

Deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$ , immobiles aux points  $M_1$  et  $M_2$ , exercent l'une sur l'autre une force :

- proportionnelle au produit des charges ;
- inversement proportionnelle au carré de la distance les séparant ;
- dirigée parallèlement à  $M_1M_2$ .

Cette force est répulsive si les charges sont de même signe, attractive sinon.

**La force de Coulomb exercée par la charge  $q_1$  sur la charge  $q_2$  (les deux charges étant dans le vide) est  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{1 \rightarrow 2}}{(M_1 M_2)^2}$ .**

$\vec{e}_{1 \rightarrow 2}$  désigne le vecteur unitaire dirigé de  $M_1$  vers  $M_2$  (doc. 1).

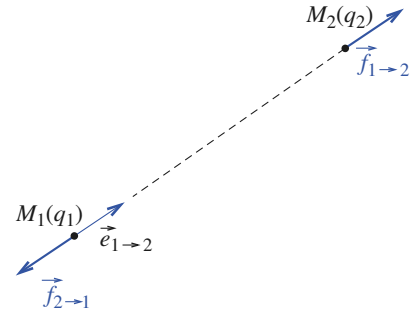
Elle est opposée à la force exercée par  $q_2$  sur  $q_1$  :  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$  ; elle obéit au principe de l'action et de la réaction.

Notons l'analogie formelle avec la loi d'attraction gravitationnelle, en remplaçant les masses gravitationnelles  $m_1$  et  $m_2$  par les charges  $q_1$  et  $q_2$ , et la constante de gravitation changée de signe  $-G$  par la constante d'interaction électrostatique

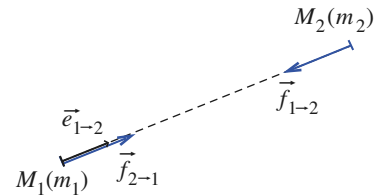
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} : \vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{e}_{1 \rightarrow 2}}{(M_1 M_2)^2}.$$

La constante  $\epsilon_0$ , permittivité électrique du vide, est voisine de  $\frac{1}{36\pi 10^9}$  et se mesure en  $F \cdot m^{-1}$ ,  $F$  désignant le farad (unité de capacité).

La permittivité électrique  $\epsilon$  de l'air étant très voisine de  $\epsilon_0$  ( $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ , avec  $\epsilon_r = 1,0006$ ), la loi de Coulomb reste valable dans l'air.



**Doc. 1.** Forces d'interaction électrostatique entre deux charges statiques ( $q_1 q_2 > 0$ ).



**Doc. 2.** Forces d'interaction gravitationnelle entre deux masses statiques.

## Application 1

### Intensité des forces électrostatiques et gravitationnelles

La constante de gravitation vaut  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  SI.

La constante d'interaction électrostatique vaut :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}.$$

1) Précisez les unités du Système International correspondant à ces deux constantes.

2) Comparer les interactions gravitationnelles et électrostatiques entre deux électrons.

Données : charge  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C et masse  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg.

1) Une force s'exprimant en  $kg \cdot m \cdot s^{-2}$ , nous avons :  
 $[G] = [force \times distance^2 \times masse^{-2}]$   
 $= kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$

$$\text{et } \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] = [force \times distance^2 \times charge^{-2}]$$

$$= kg \cdot C^{-2} \cdot m^3 \cdot s^{-2}.$$

En réalité,  $\epsilon_0$  s'exprime en farad par mètre, où le farad est une unité de capacité et la constante précédente s'évalue en  $F^{-1} \cdot m$ .

2) La dépendance de ces interactions en fonction de la distance séparant les deux électrons étant la même pour les deux interactions, nous avons simplement :

$$\frac{f_e}{f_g} = \left( \frac{e}{m} \right)^2 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \right) = 4,2 \cdot 10^{42}.$$

Cet ordre de grandeur justifie que pour l'étude de mouvements de particules chargées, il est en général tout à fait inutile de prendre en compte les forces de gravitation.

## 1.2. Champ d'une charge ponctuelle

La force exercée par  $q_1$  sur  $q_2$  se met sous la forme :

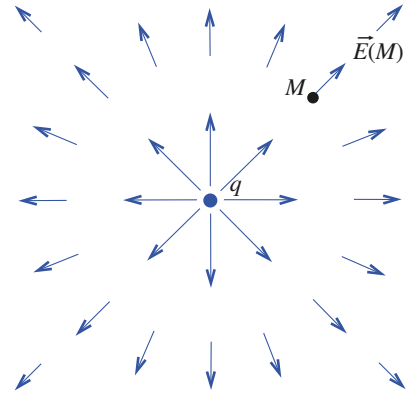
$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1(M_2), \text{ avec } \vec{E}_1(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2^3}.$$

$\vec{E}_1(M_2)$  est le champ électrostatique créé par la charge  $q_1$  (charge source) au point  $M_2$  dans le vide (ou dans l'air).

Le champ créé par  $q_1$  caractérise l'influence de celle-ci sur l'espace qui l'entoure.

Ainsi, le champ électrostatique créé dans l'espace par une particule de charge  $q$ , immobile au point origine  $O$  du repère de coordonnées sphériques, a pour expression (doc. 3) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}.$$



Doc. 3. Champ d'une charge ponctuelle ( $q > 0$ ).

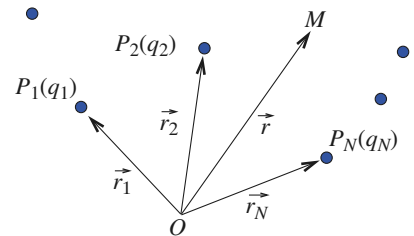
# 2 Champ d'une distribution

## 2.1. Principe de superposition

L'expérience conduit à postuler que les interactions électrostatiques ont des effets linéaires.

Par exemple, la force subie par une charge  $q$  de la part d'un ensemble de  $N$  charges  $q_1, q_2, \dots, q_N$  est la somme des  $N$  forces qu'exercent individuellement les charges  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) lorsqu'elles sont mises seules en présence de la charge  $q$ . Le champ créé par les  $N$  charges est donc la somme des  $N$  champs créés par chaque charge.

Nous postulons donc la *linéarité des effets*, ce qui constitue le **principe de superposition**.



Doc. 4. Distribution de charges ponctuelles.

## 2.2. Champs créés par des distributions de charges

### 2.2.1. Charges ponctuelles

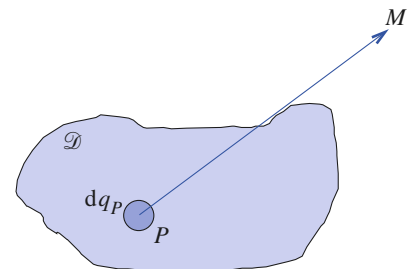
Utilisant le principe de superposition, nous avons immédiatement :

Le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé en  $M$  par diverses charges  $q_i$  situées aux points  $P_i$  est donné par :

$$\vec{E}(q_i, i = 1, \dots, N)(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}.$$

### 2.2.2. Généralisation aux distributions de charges

Nous appliquerons le principe de superposition à une distribution de charges  $\mathcal{D}$  après l'avoir décomposée en un ensemble de fragments élémentaires chargés (mésoscopiques) assimilés à des charges ponctuelles.



Doc. 5. Distribution de charges  $\mathcal{D}$ .

Notons  $P$  un point décrivant l'espace occupé par la distribution. Une partie élémentaire de  $\mathcal{D}$ , située au voisinage de  $P$ , contient une charge  $dq_P$  et crée un champ élémentaire  $d\vec{E}$  au point d'observation  $M$ . Nous obtenons le champ total créé en  $M$  par la distribution  $\mathcal{D}$  par superposition des champs de chacune de ses parties élémentaires selon :

$$\vec{E}_{\mathcal{D}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{P \in \mathcal{D}} dq_P \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{P \in \mathcal{D}} dq_P \frac{\vec{PM}}{PM^3}.$$

On écrira cette expression plus rigoureusement sous la forme :

$$\vec{E}_{\mathcal{D}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{PM}}{PM^3} dq_P.$$

Il nous reste à préciser l'élément d'intégration  $dq_P$  en fonction de la nature de la distribution considérée.

### 2.2.2.1. Distribution volumique

Un volume élémentaire  $d\tau$  contient une charge :

$$dq_P = \rho(P) d\tau;$$

nous écrivons donc :

$$\vec{E}_{\mathcal{D}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\tau.$$

### 2.2.2.2. Distribution surfacique

Une surface élémentaire  $dS$  contient une charge :

$$dq_P = \sigma(P) dS,$$

et le champ créé en  $M$  par  $\mathcal{D}$  est :

$$\vec{E}_{\mathcal{D}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\mathcal{D}} \sigma(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3} dS.$$

### 2.2.2.3. Distribution linéique

Une longueur élémentaire  $d\ell$  contient une charge :

$$dq_P = \lambda(P) d\ell,$$

soit :

$$\vec{E}_{\mathcal{D}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} \lambda(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\ell.$$

### 2.3. Le champ électrostatique est-il toujours défini ?

Les expressions précédentes ne sont *a priori* applicables qu'aux cas des distributions d'extension finie (distributions physiques), pour assurer la convergence des intégrales. Il existe toutefois des cas de distributions d'extension infinie pour lesquels ces intégrales convergent.

Dans le cas d'une distribution volumique de charges  $\rho(P)$  finie, d'extension quelconque, l'intégrale :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\tau$$

converge toujours, quel que soit le point  $M$ .

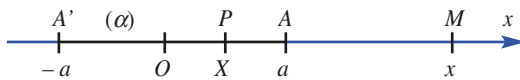
Il n'en est plus de même pour les distributions surfaciques et linéiques : le champ  $\vec{E}(M)$  n'est pas défini *sur* ces distributions.

Prenons l'exemple de l'Application suivante.

## Application 2

### Champ créé par un segment uniformément chargé

Sur l'axe  $Ox$ , une charge est répartie uniformément avec la densité linéique  $\lambda$  entre les points  $A'(-a)$  et  $A(a)$ . Déterminer le champ  $\vec{E}(M)$  créé par cette distribution en un point  $M$  de l'axe  $(Ox)$ , extérieur au segment  $A'A$ .



Doc. 6.

Notons  $x$  l'abscisse du point  $M$  et  $X$  l'abscisse d'un point  $P$  pris sur la distribution de charges. Associons au point  $P$  la charge élémentaire  $dq_P = \lambda dX$ .

En un point  $M$  tel que  $x > a$ , la charge  $dq_P$  crée en  $M$  le champ élémentaire :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dX}{(x-X)^2} \vec{e}_x.$$

En superposant les champs créés par chacune des parties élémentaires de la distribution, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}_x \int_{-a}^a \frac{dX}{(X-x)^2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}_x \left( -\frac{1}{a-x} + \frac{1}{-a-x} \right) \\ &= \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_x}{x^2 - a^2} \end{aligned} \quad (1)$$

expression valable pour  $x > a$ .

En revanche, en un point  $M$  tel que  $x < -a$ , le champ élémentaire  $d\vec{E}$  est dirigé vers les  $x$  négatifs :

$$d\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dX}{(x-X)^2} \vec{e}_x$$

et l'intégration conduit alors à :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_x}{x^2 - a^2} \quad (2)$$

expression valable pour  $x < -a$ .

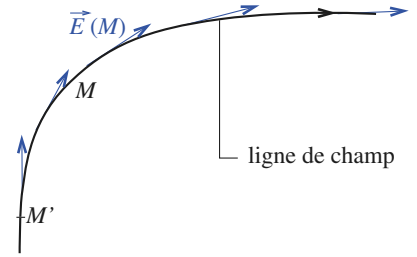
À noter : Quand  $x$  tend vers  $a$  ou  $-a$ , nous constatons que les expressions (1) et (2) tendent vers l'infini, preuve que le champ n'est pas défini par ces expressions *sur* la distribution.

Dans l'Application précédente, il est impossible de calculer le champ électrique en un point du segment  $AA'$ .

Il en est de même lors d'une distribution surfacique de charges (cf. Application 8). Rappelons que ces modélisations linéiques et surfaciques n'existent que parce que localement la densité volumique de charge  $\rho$  est très grande, voire « infinie ».

C'est le caractère « infini » de  $\rho$  qui nous interdit de définir le champ électrostatique en un point d'une distribution linéique ou surfacique.

**Le champ électrostatique en un point des sources n'est pas défini lorsque ces sources sont modélisées par une densité surfacique ou linéique des charges.**



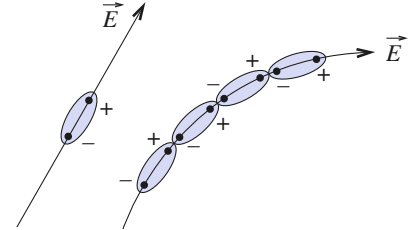
Doc. 7. Ligne de champ.

## 3 Topographie du champ

### 3.1. Lignes de champ

#### 3.1.1. Définition

**Le champ est continuellement tangent à des courbes appelées *lignes de champ* (doc. 7). Ces lignes sont orientées par le sens du champ.**



Doc. 8. Matérialisation d'une ligne de champ.

#### 3.1.2. Mise en évidence expérimentale des lignes de champ

La visualisation des lignes de champ électrostatique peut s'obtenir en saupoudrant des particules isolantes, neutres (grains de semoule ou graines légères) à la surface d'un fluide dans lequel (et à la surface duquel) existe un champ électrique  $\vec{E}$ .

Ces particules ont la propriété de s'aligner parallèlement au champ  $\vec{E}$  grâce à l'apparition d'une dissymétrie de charges due au champ  $\vec{E}$  (doc. 8).

La répartition des charges permet de plus aux grains de s'aligner les uns derrière les autres en « suivant » les lignes de champ (les charges de signes opposés s'attirent).

La présence du liquide permet aux grains de s'orienter plus « facilement » que sur une surface solide.

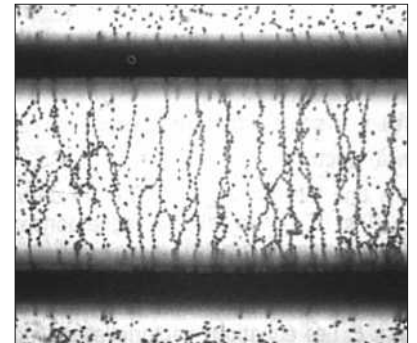
Chaque particule est alors assimilable à un élément  $d\vec{M}$  parallèle au champ local en  $M$ .

Sur le document 9, nous visualisons des lignes de champ par ce procédé.

#### 3.1.3. Équation d'une ligne de champ

La définition des lignes de champ nous permet d'affirmer qu'un élément de longueur  $d\vec{M}$  le long d'une ligne de champ est parallèle au champ  $\vec{E}$ . L'équation différentielle (vectorielle) d'une ligne de champ est donc :

$$d\vec{M} \wedge \vec{E} = \vec{0}.$$



Doc. 9. Entre deux plaques parallèles, un liquide isolant supporte des graines très légères. Lorsque les plaques sont sous tension, les graines sont alignées selon la direction du champ électrostatique.



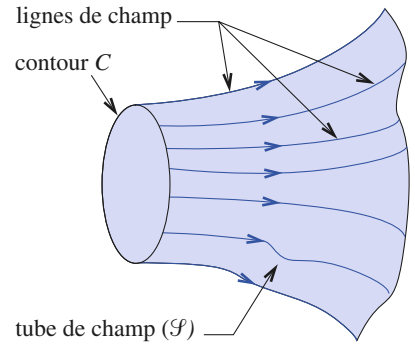
Nous obtiendrons la ligne de champ issue d'un point initial donné par intégration de cette équation différentielle.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes, nous écrirons :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}.$$

### 3.2. Tube de champ

L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée (ou contour)  $C$  engendre une surface  $\mathcal{S}$  appelée *tube de champ*, représentée sur le document 10.



Doc. 10. Tube de champ.

### 3.3. Points de champ nul, points singuliers

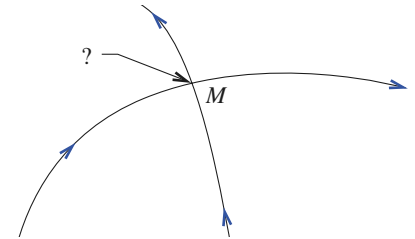
Deux lignes de champ ne se coupent pas en un point  $M$  où le champ électrostatique est défini et non nul (doc. 11) ; sinon la direction du champ, donc le champ lui-même, ne serait pas défini en ce point.

Deux lignes de champ peuvent se couper en  $M$  si :

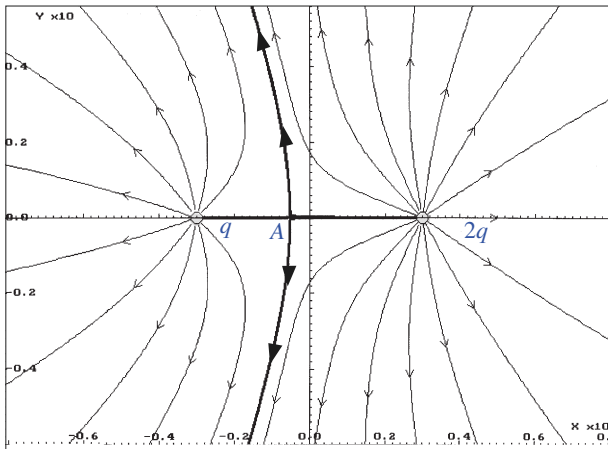
- le champ est nul au point  $M$  :  $M$  est appelé *point de champ nul* (ou *point d'arrêt*) ;
- le champ n'est pas défini au point  $M$  : il y a une charge ponctuelle en  $M$ , ou bien  $M$  appartient à une surface ou à une ligne chargée.

Quelques lignes de champ d'un système de deux charges ponctuelles  $q$  et  $Q$  sont représentées sur les documents 12a (cas  $Q = 2q > 0$ ) et 12b (cas  $Q = -2q < 0$ ).

Nous pouvons observer que les lignes de champ divergent à partir des charges positives, convergent vers les charges négatives, ou « aboutissent » à l'infini. Elles se coupent au niveau des charges ainsi qu'aux points de champ nul  $A$  et  $A'$ .

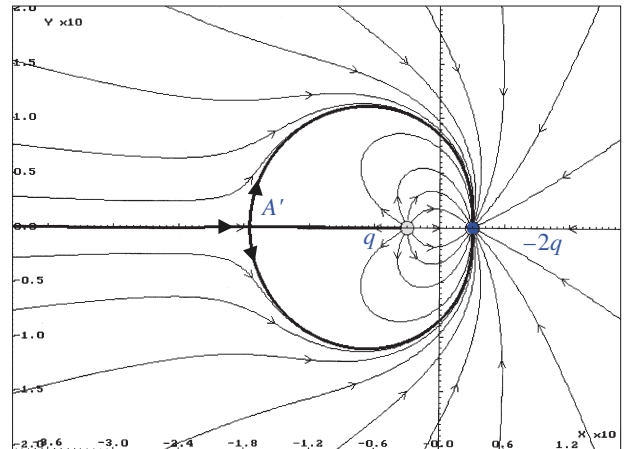


Doc. 11. En  $M$ , le champ  $\vec{E}$  est soit nul soit non défini.



Doc. 12. Lignes de champ d'un système de deux charges ponctuelles  $q$  et  $Q$ .

a.  $Q = 2q$ .



b.  $Q = -2q$ .

# Application 3

Sur le document 12, il apparaît que le champ est nul en  $A$  et en  $A'$ . Déterminer les abscisses de ces points en fonction de  $a$ .

Notons  $(Ox)$  l'axe portant les charges et choisissons l'origine  $O$  à égale distance des charges dont les abscisses sont  $a$  pour la charge  $Q$  et  $-a$  pour la charge  $q$ . Les points d'arrêt sont sur l'axe  $(Ox)$  puisque les champs des deux charges doivent être colinéaires afin de pouvoir s'annuler.

En un point d'arrêt d'abscisse  $-a < x < a$ , nous avons :

$$-\frac{Q}{(x-a)^2} + \frac{q}{(x+a)^2} = 0$$

d'où l'équation du second degré :

$$(Q-q)x^2 + 2a(Q+q)x + (Q-q)a = 0 \quad (1)$$

dont le discriminant réduit est :  $\Delta' = 4Qq$ . Le point d'arrêt n'existe que si  $Q$  et  $q$  sont de même signe donc ici  $Q = 2q$ . L'équation (1) s'écrit alors :

$$x^2 + 6ax + a^2 = 0.$$

La solution comprise entre  $-a$  et  $a$  est :

$$x = (-3 + \sqrt{8})a = -0,172a.$$

De même, hors de cet intervalle, les points d'arrêt satisfont à la relation :

$$\frac{Q}{(x-a)^2} + \frac{q}{(x+a)^2} = 0$$

ce qui conduit à l'équation du second degré :

$$(Q+q)x^2 + 2a(Q-q)x + (Q+q)a = 0 \quad (2)$$

dont le discriminant réduit est cette fois :  $\Delta' = -4Qq$ . Le point d'arrêt n'existe que si  $Q$  et  $q$  sont de signes contraires.

Donc  $Q = -2q$  et l'équation (2) s'écrit encore :

$$x^2 + 6ax + a^2 = 0.$$

La solution extérieure à  $[-a, a]$  est cette fois :

$$x = (-3 - \sqrt{8})a = -5,83a.$$

La vérification de ces résultats peut être effectuée directement sur les simulations du document 12.

► Pour s'entraîner : ex. 10.

## 4 Propriétés de symétries du champ

### 4.1. Utilisation des symétries et antisymétries

Le calcul du champ à partir des intégrales est souvent assez pénible. Il convient alors d'utiliser les symétries des distributions, quand elles existent, pour le simplifier.

Certaines simplifications (éliminations de certaines coordonnées du point de calcul  $M$ , annulation de composantes du champ...) peuvent alors être effectuées sans aucun calcul, à l'aide de considérations de symétries ; c'est pourquoi nous étudions ici les propriétés de symétrie et d'antisymétrie du champ électrostatique.

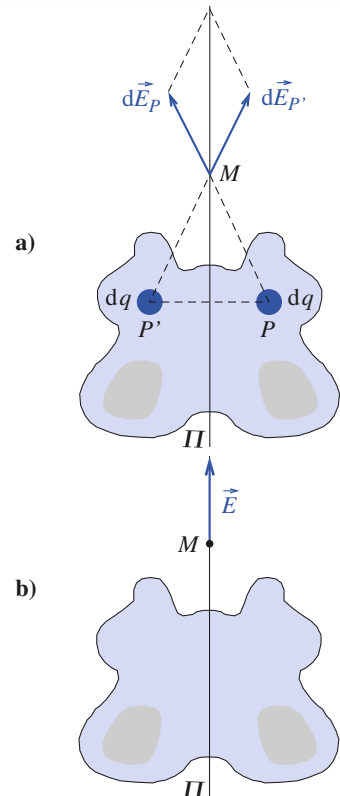
### 4.2. Symétries élémentaires

#### 4.2.1. Symétrie plane

Soit une distribution  $\mathcal{D}$  invariante par symétrie plane  $\mathcal{S}$  par rapport à un plan  $\Pi$ .

En un point  $M$  du plan de symétrie, considérons les champs élémentaires  $d\vec{E}_P(M)$  et  $d\vec{E}_{P'}(M)$  créés par les deux éléments de même volume  $d\tau$  associés aux points  $P$  et  $P' = \mathcal{S}(P)$ . Leur somme  $d\vec{E}_P + d\vec{E}_{P'}$  est un vecteur parallèle au plan  $\Pi$ . Cette propriété est valable pour tous les couples de points symétriques  $P$  et  $P'$  qui décrivent l'ensemble de la distribution. Par conséquent :

**Sur un plan-miroir  $\Pi$  d'une distribution de charge  $\mathcal{D}$ , le champ électrostatique créé est parallèle au plan  $\Pi$ .**



Doc. 13. Symétrie plane.

- a. Contributions élémentaires de  $P$  et  $P'$ .  
b. Champ total sur le plan-miroir.

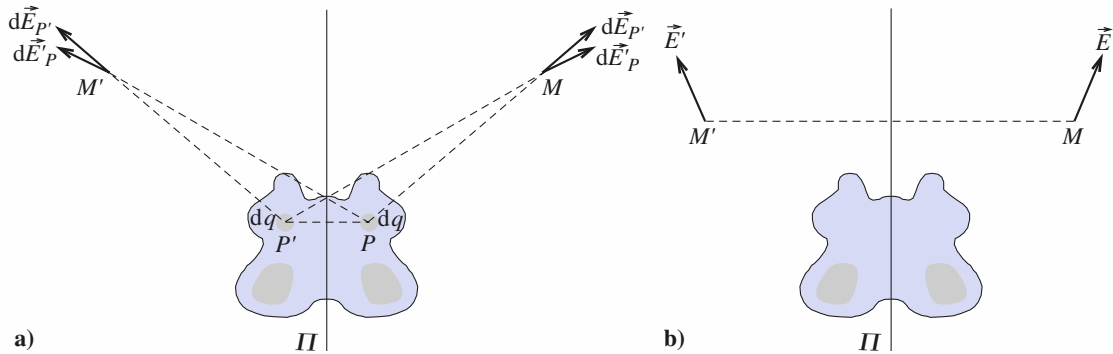
# Application 4

## Symétrie plane et champ électrostatique

À l'aide d'un raisonnement analogue au précédent, comparer le champ électrostatique en un point  $M$  et en son symétrique  $M'$  par rapport au plan-miroir  $\Pi$  d'une distribution, lorsque le point  $M$  occupe une position quelconque dans l'espace.

Le document 14 met en évidence la propriété recherchée : le champ  $\vec{E}'$  au point  $M'$  est le symétrique vectoriel du champ  $\vec{E}$  au point  $M$ .

Le résultat précédent est ainsi vérifié.



Doc. 14. Symétrie plane et champ électrostatique.

De même (cf. Application 4), nous pouvons vérifier que :

**Aux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport à un plan-miroir  $\Pi$  d'une distribution de charges  $\mathcal{D}$ , les champs électrostatiques  $\vec{E}$  et  $\vec{E}'$  sont symétriques l'un de l'autre.**

Remarque : Dans l'Application 2, nous vérifions également que  $E(x) = -E(-x)$  pour  $|x| > a$ .

### 4.2.2. Antisymétrie plane

Pour une distribution  $\mathcal{D}$  possédant un plan d'antisymétrie  $\Pi^*$  et pour un point  $M$  de ce plan, il suffit de changer le sens du champ élémentaire  $d\vec{E}_{P'}$  dans les raisonnements précédents. Nous avons alors (doc. 15a et b) :

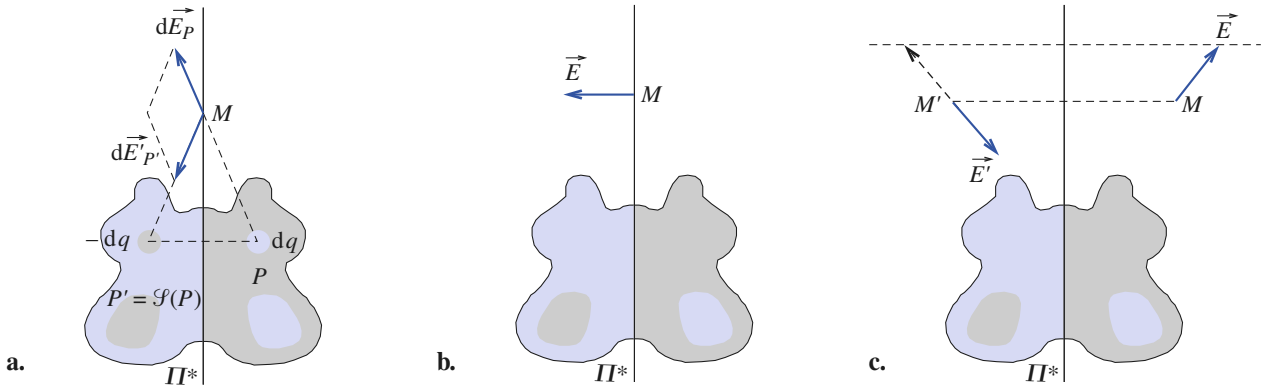
**Sur un plan-antimiroir  $\Pi^*$  d'une distribution  $\mathcal{D}$ , le champ électrostatique créé est perpendiculaire au plan  $\Pi^*$ .**

Plus généralement, en reprenant l'Application 4, nous pouvons aussi affirmer (doc. 15c) :

**Au point  $M'$  symétrique du point  $M$  par rapport au plan-antimiroir  $\Pi^*$  d'une distribution de charges  $\mathcal{D}$ , le champ électrostatique  $\vec{E}'$  est l'opposé du symétrique du champ  $\vec{E}$  créé par la distribution en  $M$ .**

### Exemple de plan-miroir $\Pi$

Sur le document 16a, quatre charges ponctuelles sont placées dans le plan  $(xOy)$  –  $-q$  en  $(2, 2)$  et  $(-2, 2)$ ,  $2q$  en  $(1, -1)$  et  $(-1, -1)$ . Le plan  $(yOz)$  est plan-miroir de cette distribution. Quelques lignes de champ ont été tracées sur le plan  $(xOy)$ .



**Doc. 15.** Antisymétrie plane.

Nous constatons que les lignes de champ qui approchent le plan ( $yOz$ ) lui sont en général tangentes : sur le plan-miroir, le champ électrostatique est tangent au plan. Notons qu'au point  $A$ , où se coupent quatre lignes de champ perpendiculaires, deux de ces lignes sont perpendiculaires au plan-miroir. Ceci ne contredit pas l'appartenance du champ à ce plan, car le point  $A$  est un point de champ nul. Le point  $A$  est un autre point de champ nul.

Comme nous l'avons vu précédemment, en deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport au plan ( $yOz$ ), les champs électrostatiques  $\vec{E}$  et  $\vec{E}'$  sont symétriques.

### Exemple de plan-antimiroir $\Pi^*$

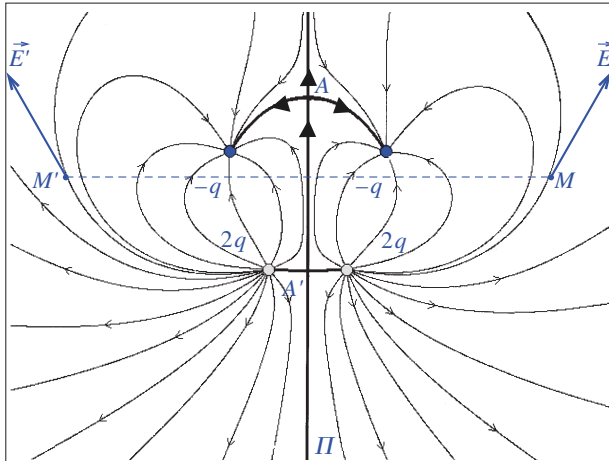
Sur le document 16b, quatre charges ponctuelles sont placées dans le plan ( $xOy$ ) :  $q$  en  $(2, 2)$ ,  $-q$  en  $(-2, 2)$ ,  $-2q$  en  $(1, -1)$  et  $2q$  en  $(-1, -1)$ . Le plan ( $yOz$ ) est plan-antimiroir de cette distribution. Quelques lignes de champ ont été tracées sur le plan ( $xOy$ ).

Les lignes de champ coupent le plan ( $yOz$ ) perpendiculairement : sur le plan-antimiroir, le champ électrostatique est orthogonal au plan.

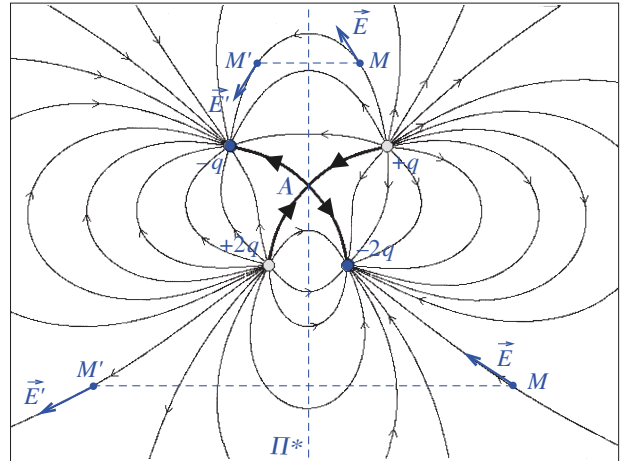
Notons qu'au point  $A$  se coupent quatre lignes de champ non perpendiculaires à ( $yOz$ ). Le point  $A$  est un point de champ nul, et le caractère orthogonal à ( $yOz$ ) du champ n'est pas mis en défaut.

Plus généralement, au point  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport au plan ( $yOz$ ), le champ électrostatique  $\vec{E}'$  est l'opposé du symétrique du champ  $\vec{E}$  en  $M$ .

### ► Pour s'entraîner : ex. 2.



**Doc. 16a.** Symétrie des champs électrostatiques  $\vec{E}$  et  $\vec{E}'$  par rapport au plan de symétrie  $\Pi = (y, O, z)$ .

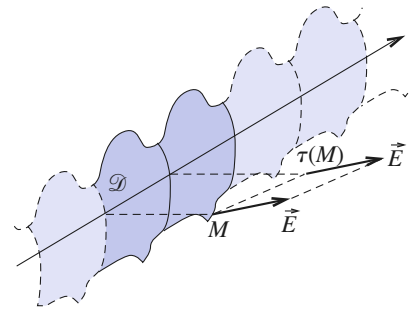


**Doc. 16b.** Le champ électrostatique  $\vec{E}'$  est l'opposé du symétrique de  $\vec{E}$  par rapport au plan d'antisymétrie  $\Pi^* = (y, O, z)$ .

### 4.2.3. Invariance par translation

Lorsqu'une distribution  $\mathcal{D}$  est invariante par une translation de  $\Delta z$  parallèlement à l'axe ( $Oz$ ), un observateur percevra la même distribution s'il est au point de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  ou en un point translaté du précédent de coordonnées  $(x, y, z + n\Delta z)$ , où  $n$  est un entier. Le champ sera donc identique en ces deux points :

$$\vec{E}(x, y, z + n\Delta z) = \vec{E}(x, y, z) \quad (\text{doc. 17}).$$



Doc. 17. Distribution invariante par translation.

## Application J

### Distribution invariante par translation parallèlement à un axe

Indiquer la forme du champ électrostatique créé par une distribution invariante par toute translation parallèlement à ( $Oz$ ).

L'invariance par toute translation implique que le champ est le même en tous points de coordonnées  $(x, y, z)$  quelle que soit la valeur de  $z$ , donc  $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)$ .

Tout plan perpendiculaire à l'axe ( $Oz$ ) est un plan de symétrie de la distribution, et, sur ce plan, le champ est parallèle au plan.

Finalement, le champ est de la forme :

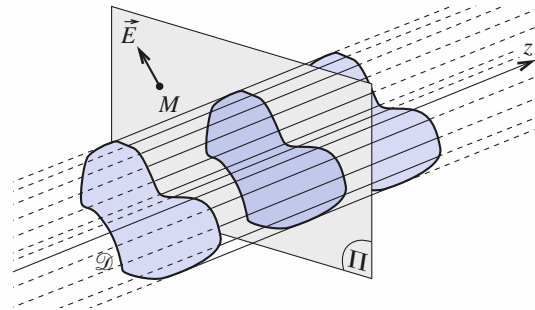
$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) = E_x(x, y) \vec{e}_x + E_y(x, y) \vec{e}_y.$$

Doc. 18. ►

Distribution invariante par translation parallèlement à un axe.

### Remarque

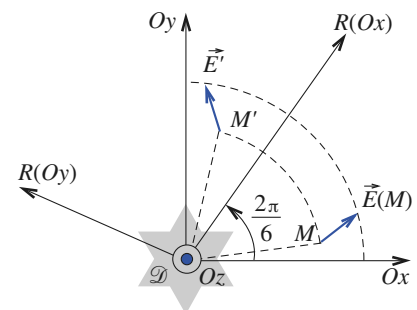
Cette forme est simplifiée, mais ne constitue pas la forme la plus générale du champ créé par une distribution invariante par translation. Le cas d'un champ électrostatique est en fait plus restrictif : le champ statique  $\vec{E}$  possède des propriétés supplémentaires, que nous n'exploitons pas ici, qui font que les composantes  $E_x(x, y)$  et  $E_y(x, y)$  ne sont pas indépendantes. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 3.



Considérons maintenant une distribution  $\mathcal{D}$  invariante par une rotation  $\mathcal{R}$  d'angle  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  ( $n$  entier) autour de l'axe ( $Oz$ ). Deux observateurs placés aux points  $M$  et  $M' = \mathcal{R}(M)$  percevront la même distribution (le document 19 a été tracé avec  $n = 6$ ).

Les champs électrostatiques détectés aux points  $M$  et  $M'$  ont les mêmes composantes dans les systèmes de coordonnées  $(Ox, Oy, Oz)$  et  $(\mathcal{R}(Ox), \mathcal{R}(Oy), \mathcal{R}(Oz))$  respectivement.

Le champ au point  $M'$  est ainsi le même qu'au point  $M$ , à une rotation d'angle  $\alpha$  autour du vecteur  $\vec{e}_z$  près.



Doc. 19. Distribution invariante par rotation.

# Application 6

## Champ d'une distribution de symétrie de révolution

Indiquer la forme du champ d'une distribution possédant la symétrie de révolution par rapport à l'axe  $(Oz)$ .

Pour une distribution de révolution autour de l'axe  $(Oz)$ , tout plan contenant cet axe est plan de symétrie, donc en coordonnées cylindriques, la composante orthoradiale  $E_\theta$  est nulle :

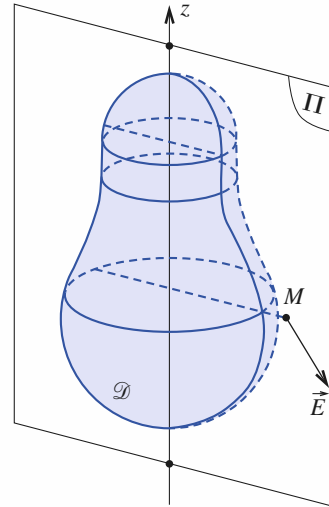
$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + E_z(r, \theta, z) \vec{e}_z.$$

L'invariance par rotation d'un angle quelconque autour de l'axe  $(Oz)$  indique de plus que les coordonnées cylindriques du champ ne dépendent pas de  $\theta$ . Ainsi, le champ d'une distribution à symétrie de révolution par rapport à l'axe  $(Oz)$  a la forme :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, z) \vec{e}_r + E_z(r, z) \vec{e}_z.$$

Notons que le vecteur champ dépend encore de l'angle  $\theta$  par l'orientation de  $\vec{e}_r$ .

**Remarque :** De même que pour l'Application 5, signalons que les composantes  $E_r(r, z)$  et  $E_z(r, z)$  d'un champ électrostatique ne sont pas indépendantes.



**Doc. 20.** Champ d'une distribution à symétrie de révolution :  $\vec{E}$  est dans un plan contenant l'axe  $z'z$ .

### 4.2.5. Le champ électrostatique est un vecteur polaire

Les études précédentes nous amènent à une conclusion simple : lors d'opérations de symétrie (symétrie plane, translation, rotation autour d'un axe) appliquées à la distribution de charges  $\mathcal{D}$ , le champ électrostatique subit la même opération.

Nous appelons *vecteur polaire* un vecteur dont le champ a les mêmes propriétés de symétrie que ses sources.

Pour qualifier cette propriété, nous trouvons aussi le terme « vrai vecteur », par opposition à « pseudo-vecteur ».

Nous reviendrons sur cette distinction lors de l'étude du champ magnétique.

**Le champ électrostatique est un objet tridimensionnel ayant les propriétés de symétrie d'un vecteur polaire ou « vecteur vrai ».**

**Cela signifie qu'il a les mêmes propriétés de symétrie que la distribution des charges qui le créent.**

Le terme « opération de symétrie » désigne ici une **isométrie**, c'est-à-dire un déplacement qui laisse inchangées les distances.

# Application 7

## Champ d'une circonférence chargée en un point de son axe

Étant donné une circonférence, de centre  $O$ , de rayon  $R$ , uniformément chargée avec la densité linéique  $\lambda$ , déterminer le champ  $\vec{E}(M)$  en un point  $M$  de son axe.

L'axe du disque est un axe de révolution pour la distribution de charges. Une rotation autour de cet axe conserve le champ en chacun de ses points, donc :

$$\vec{E}(M) = E_z \vec{e}_z.$$

Soit  $(R, \theta)$  les coordonnées polaires d'un point  $P$  de la circonférence. L'élément de longueur associé à  $P$  porte la charge élémentaire  $dq = \lambda R d\theta$  ; le champ élémentaire associé s'écrit :

$$d\vec{E} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 \rho^2} \vec{e}$$

avec  $\rho = PM$  et  $\vec{e}$  vecteur unitaire de l'axe  $PM$ .

D'où la composante axiale de ce champ élémentaire :

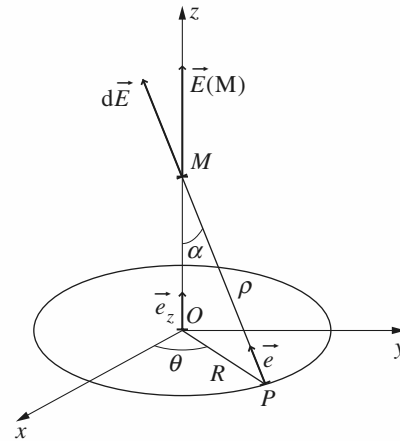
$$dE_z = d\vec{E} \cdot \vec{e}_z = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\alpha)}{\rho^2} d\theta$$

et, par intégration sur la circonférence :

$$E_z = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\alpha)}{\rho^2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{\cos(\alpha)}{\rho^2} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

En conclusion, le champ créé s'établit à :

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z.$$



Doc. 21. Champ d'une circonférence chargée.

## 4.3. Symétries multiples

Ces cas correspondent à l'existence de plusieurs symétries élémentaires. Les cas de distributions invariantes par translation parallèlement à un axe ou de révolution autour d'un axe en font partie.

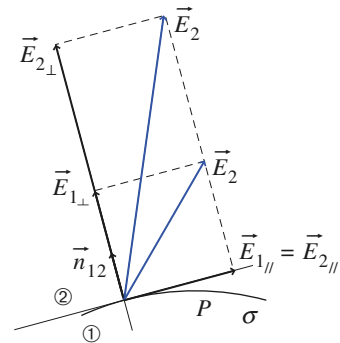
Citons encore deux cas de symétrie élevée que nous traiterons comme application directe de l'utilisation des propriétés de symétrie élémentaires :

- le champ d'une *distribution à symétrie cylindrique d'axe (Oz)* (la répartition de charges n'est fonction que de la distance à l'axe (Oz)) est, en coordonnées cylindriques, de la forme  $\vec{E}(r, \theta, z) = E(r) \vec{e}_r$  ;
- le champ d'une *distribution à symétrie sphérique de centre O* est, en coordonnées sphériques, de la forme  $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r) \vec{e}_r$ .

► Pour s'entraîner : ex. 3 et 4.

## 4.4. Discontinuités du champ à la traversée d'une distribution surfacique

Nous avons déjà signalé que le champ électrostatique n'était pas défini sur les distributions surfaciques. En outre, à la traversée d'une surface électrisée, de la face ① vers la face ②, la composante normale du champ subit une discontinuité et la composante tangentielle est conservée (doc. 22).



Doc. 22. Discontinuités du champ à la traversée d'une distribution surfacique.



# Application 8

## Champ d'un disque uniformément chargé

Déterminer le champ  $\vec{E}(M)$  en un point de l'axe d'un disque de rayon  $R$  uniformément chargé avec la densité surfacique  $\sigma$  uniforme.

L'axe du disque est un axe de révolution pour la distribution des charges donc, comme cela a été vu dans l'Application 7, le champ est colinéaire à cet axe :

$$\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z.$$

Notons  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires d'un point  $P$  du disque et  $d^2S = r dr d\theta$  l'élément de surface (infinitement petit d'ordre deux) associé en coordonnées polaires (doc. 23).

La charge élémentaire  $d^2q = \sigma d^2S = \sigma r dr d\theta$ , localisée en  $P$ , crée en  $M$  le champ élémentaire :

$$d^2\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{\rho^2} \vec{e}.$$

La composante axiale de ce champ est :

$$d^2E_z = d^2\vec{E} \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{\rho^2} \cos \alpha.$$

Il nous faudra deux intégrations pour obtenir l'expression de  $E_z$ .

a) En maintenant  $r$  constant, intégrons sur  $\theta$ , ce qui revient à calculer le champ créé en  $M$  par une bande circulaire de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  :

$$dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{r dr}{\rho^2} \cos \alpha \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{\rho^2} \cos \alpha.$$

**Remarque :** Nous aurions pu aussi utiliser les résultats de l'Application 7.

b) Nous devons maintenant intégrer sur  $r$ . Il est commode pour cela, compte tenu de la dépendance de  $\rho$  et de  $\alpha$  à  $r$ , de prendre comme variable d'intégration  $\alpha$ .

• Pour  $z > 0$ , il vient :  $\rho = \frac{z}{\cos \alpha}$  et  $r = z \tan \alpha$ .

Donc  $dr = z \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$  et, après simplification :

$$dE_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha.$$

Par intégration, il vient :

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\alpha_{\max}} \sin \alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_{\max}),$$

d'où l'expression du champ en  $M$  :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \cos \alpha_{\max}\right) \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \vec{e}_z.$$

• En un point symétrique de  $M$  par rapport au disque, nous devrions avoir  $E_z(-z) = -E_z(z)$ , ce qui n'est pas le cas de l'expression précédente, établie avec la restriction  $z > 0$ . En reprenant les calculs pour  $z < 0$ , on voit que l'expression du champ valable pour tout  $z$  est :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{signe}(z) \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \vec{e}_z$$

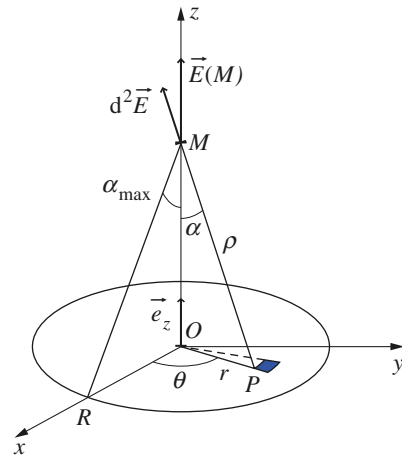
c'est-à-dire :

• si  $z > 0$  :  $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \vec{e}_z$

• si  $z < 0$  :  $\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \vec{e}_z.$

• En traversant le disque dans le sens des  $z$  croissants, la composante tangentielle du champ est conservée et sa composante normale subit la discontinuité :

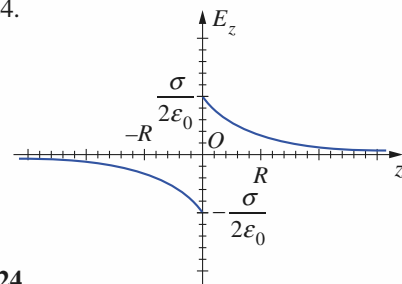
$$\vec{E}_{0^+} - \vec{E}_{0^-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z.$$



Doc. 23. Champ d'un disque uniformément chargé.

**Remarque :** Il nous est impossible de définir le champ électrostatique en un point du disque.

Le tracé du graphe de  $E_z(z)$  est donné sur le document 24.



Doc. 24.



Nous admettrons les résultats mis en évidence dans l'Application précédente.

$$\vec{E}_{2\perp} - \vec{E}_{1\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{1//} = \vec{E}_{2//}$$

ou encore :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}.$$

## 5 Champ gravitationnel

• L'analogie entre la loi de Coulomb :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{1 \rightarrow 2}}{r^2}$$

et celle de Newton :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -Gm_1 m_2 \frac{\vec{e}_{1 \rightarrow 2}}{r^2}$$

nous permet de conduire l'étude de la gravitation et de l'électrostatique sur le même modèle, en remplaçant les charges  $q_1$ ,  $q_2$  par les masses  $m_1$ ,  $m_2$  et la constante électrostatique  $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  par  $-G$  où  $G$  est la constante universelle de gravitation.

• Une masse ponctuelle  $m_0$  (masse source) placée en un point  $O$ , crée en tout point  $M$  de l'espace, un champ gravitationnel  $\vec{E}_g$  défini par (doc. 25) :

$$\vec{E}_g(M) = -Gm_0 \frac{\vec{e}_{1 \rightarrow 2}}{r^2} = -Gm_0 \frac{\vec{e}}{r^2}$$

et la force qui s'exerce sur une masse  $m$  (masse d'essai) placée en  $M$  est :

$$\vec{f}(M) = m\vec{E}_g(M).$$

Cette force est toujours attractive, c'est-à-dire dirigée de  $M$  vers  $O$ .

• Nous postulons encore la *linéarité des effets*, ce qui se traduira par le **principe de superposition**.

Le champ de gravitation  $\vec{E}_g$  créé en  $M$  par un ensemble de masses ponctuelles  $m_i$  situées en des points  $P_i$  est donné par :

$$\vec{E}_g(M) = -G \sum_{i=1}^N m_i \frac{\vec{P_i M}}{P_i M_i^3}.$$

Dans le cas d'une distribution volumique ( $D$ ), ce champ est donné par la relation :

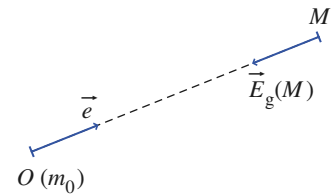
$$\vec{E}_g(M) = -G \iiint_D \mu(P) \frac{\vec{P M}}{P M^3} d\tau.$$

• Le champ de gravitation est défini et continu en tout point de l'espace, sauf sur les masses ponctuelles et sur les distributions surfaciques et linéiques.

• Les lignes de champ gravitationnelles, définies par l'équation différentielle :

$$\vec{E}_g(M) \wedge d\vec{M} = 0$$

ont les mêmes propriétés que celles du champ électrostatique, mis à part le fait qu'elles partent de l'infini ou des points de champ nul pour aboutir sur les masses.



**Doc. 25.** Champ gravitationnel créé en  $M$  par la masse  $m_0$  en  $O$  :

$$\vec{E}_g(M) = -Gm_0 \frac{\vec{e}}{r^2}.$$

# CQFR

## ● LOI DE COULOMB

La force de Coulomb, force d'interaction électrostatique exercée par la charge  $q_1$  sur la charge  $q_2$  (les deux charges étant dans le vide) est :  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{1 \rightarrow 2}}{(M_1 M_2)^2}$ .

## ● CHAMP D'UNE DISTRIBUTION

• Le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé en  $M$  par un ensemble de charges  $q_i$  situées en des points  $P_i$  est donné par :

$$\vec{E}_{(q_i, i=1, \dots, N)}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{P_i M}}{P_i M^3}.$$

• Distribution volumique :

$$\vec{E}_{\mathcal{D}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P) \frac{\vec{P M}}{P M^3} d\tau.$$

• Distribution surfacique :

$$\vec{E}_{\mathcal{D}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\mathcal{D}} \sigma(P) \frac{\vec{P M}}{P M^3} dS.$$

• Distribution linéique :

$$\vec{E}_{\mathcal{D}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} \lambda(P) \frac{\vec{P M}}{P M^3} d\ell.$$

• Le champ est continuellement tangent à des courbes appelées « lignes de champ ». Ces lignes sont orientées par le sens du champ.

• L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée (ou contour)  $C$  engendre une surface  $\mathcal{S}$  appelée « tube de champ ».

• Le champ est défini et continu en tout point de l'espace lorsque la densité volumique de charge  $\rho(P)$  est finie.

• Le champ électrostatique en un point de sources n'est pas défini lorsque ces sources sont modélisées par une densité surfacique ou linéique de charge.

À la traversée d'une distribution surfacique, la composante tangentielle du champ est conservée et la composante normale subit une discontinuité :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}.$$

## ● SYMÉTRIES DU CHAMP

• Le champ électrostatique est un objet tridimensionnel ayant les propriétés de symétrie d'un vecteur polaire ou vecteur « vrai ».

### • Symétrie plane

Sur un plan-miroir  $\Pi$  d'une distribution de charges  $\mathcal{D}$ , le champ électrostatique créé est parallèle au plan  $\Pi$ .

Aux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport à un plan-miroir  $\Pi$  d'une distribution de charges  $\mathcal{D}$ , les champs électrostatiques  $\vec{E}$  et  $\vec{E}'$  sont symétriques l'un de l'autre.

### • Antisymétrie plane

Sur un plan-antimiroir  $\Pi^*$  d'une distribution de charges  $\mathcal{D}$ , le champ électrostatique créé est perpendiculaire au plan  $\Pi^*$ .

Au point  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport au plan-antimiroir  $\Pi^*$  d'une distribution de charges  $\mathcal{D}$ , le champ électrostatique  $\vec{E}'$  est l'opposé du symétrique du champ  $\vec{E}$  créé par la distribution en  $M$ .

# Contrôle rapide

## Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Comment s'exprime le champ créé en  $M$  par une charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$ .
- ✓ Qu'est-ce que le principe de superposition pour le champ électrique ?
- ✓ Exprimer le champ  $\vec{E}(M)$  créé par une distribution de  $N$  charges ponctuelles  $q_i$  placées en  $P_i$ .
- ✓ Que signifie une ligne de champ, un tube de champ ?
- ✓ Pourquoi deux lignes de champ ne peuvent-elles pas se couper en un point où le champ est défini et non nul ?
- ✓ Dans quel plan se trouve le vecteur champ  $\vec{E}(M)$  :
  - d'une distribution invariante par translation parallèlement à un axe ( $\Delta$ ) ;
  - d'une distribution de symétrie de révolution.
- ✓ Que peut-on affirmer, de façon générale, du champ créé par une distribution volumique de charges d'extension finie ?
- ✓ Que peut-on dire du champ à la traversée d'une distribution surfacique ?

## Du tac au tac (Vrai ou faux)

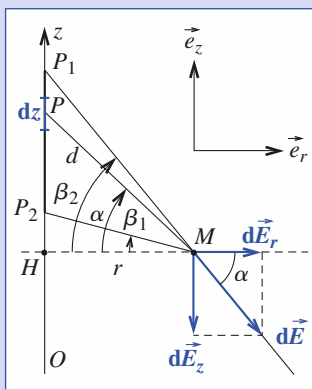
1. Le champ  $\vec{E}(M)$  créé par une distribution continue de charges d'extension finie, est défini et continu en tout point de l'espace.  
☐ Vrai ☐ Faux
2. Un disque, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , porte une charge  $q$  uniformément répartie. Le champ créé par ce disque en  $M$  est :
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$
avec  $r = OM$  et  $\vec{e}_r$  vecteur unitaire dirigé de  $O$  vers  $M$ .  
☐ Vrai ☐ Faux
3. Le vecteur champ électrostatique est un vecteur polaire.  
☐ Vrai ☐ Faux
4. Sur un plan anti-miroir d'une distribution de charges, le champ est nul.  
☐ Vrai ☐ Faux
5. À la traversée d'une distribution linéique uniforme de densité  $\lambda$ , le champ subit une discontinuité d'amplitude  $\frac{\lambda}{\epsilon_0}$ .  
☐ Vrai ☐ Faux
6. Les lignes de champ partent des charges positives et aboutissent soit sur une charge négative soit à l'infini.  
☐ Vrai ☐ Faux
7. Par un point de l'espace ne peut passer qu'une seule ligne de champ.  
☐ Vrai ☐ Faux
8. Sur l'axe de révolution d'une distribution de charges, le champ est nul.  
☐ Vrai ☐ Faux

► Solution, page 36.

# Exercices

## 1 Champ créé par un segment chargé

1) Calculer en un point  $M$  de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  le champ créé par un segment de l'axe  $(Oz)$ , de charge linéique uniforme  $\lambda$ , compris entre les points  $P_1$  et  $P_2$  d'abscisses  $z_1$  et  $z_2$ , repérés par les angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .



2) Examiner le cas du fil rectiligne infini uniformément chargé.

## 2 Champ créé par une sphère chargée en son centre

Supposons que l'on puisse charger une sphère de centre  $O$  avec la charge surfacique  $\sigma = \sigma_0 \cos^6 \theta$  (coordonnées sphériques d'axe  $(Oz)$  avec origine en  $O$ ). Quelle est la valeur de son champ au point  $O$  ?

## 3 Champ d'une distribution à symétrie cylindrique

Indiquer la forme du champ créé par une distribution possédant la symétrie cylindrique d'axe  $(Oz)$ .

## 4 Champ d'une distribution à symétrie sphérique

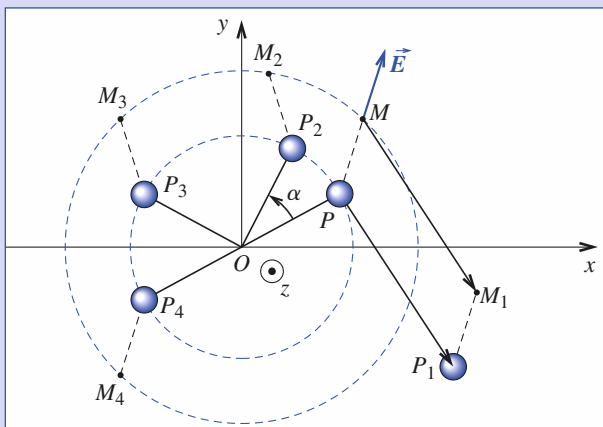
Même question pour une distribution possédant la symétrie sphérique de centre  $O$ .

## 5 Symétries et invariances

Soit un plan repéré par les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . Une charge  $q$  placée en  $P$  crée un champ électrostatique  $\vec{E}$  au point  $M$ . Nous faisons subir la même transformation aux points  $P$  et  $M$ .

Étudier le champ  $\vec{E}$  au cours de cette transformation, dans les cas suivants :

cas 1	$P, M$	translation	$P_1, M_1$
cas 2	$P, M$	rotation d'angle $\alpha$	$P_2, M_2$
cas 3	$P, M$	symétrie par rapport à $(yOz)$	$P_3, M_3$
cas 4	$P, M$	symétrie par rapport au point $O$	$P_4, M_4$



## 6 Champ créé par une sphère uniformément chargée en surface

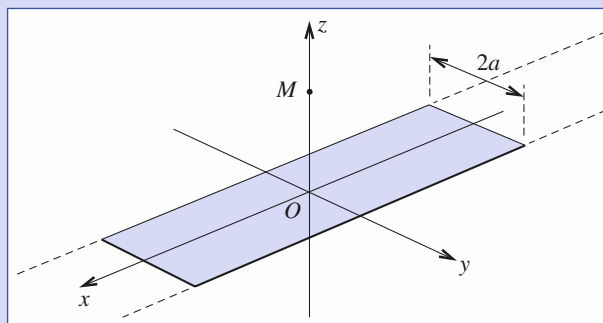
Soit une sphère de centre  $O$  et de rayon  $a$  portant des charges réparties uniformément en surface (densité surfacique de charges  $\sigma$ ).

1) Déterminer le champ au centre  $O$  de la sphère en utilisant des considérations de symétrie.

2) Étudier le champ  $\vec{E}$  (orientation et paramètres dont il dépend) en tous points de l'espace.

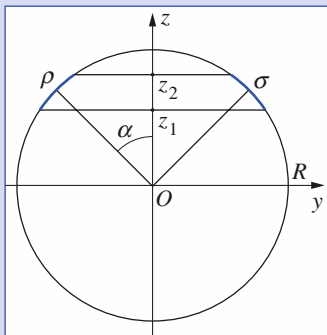
## 7 Champ d'un ruban chargé

Le ruban surfacique infini représenté sur le schéma porte une charge surfacique  $\sigma_0$  uniforme. Calculer le champ électrostatique créé par le ruban au point  $M(0, 0, z)$ .



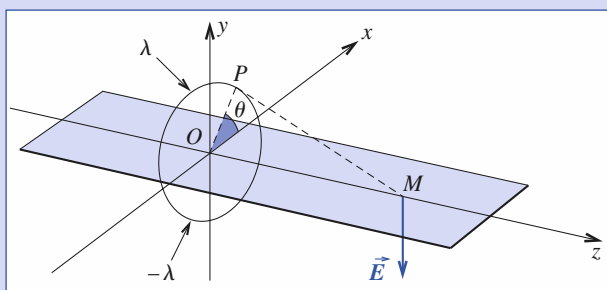
## 8 Champ au centre d'une sphère partiellement chargée

Calculer le champ créé en son centre  $O$  par une sphère de rayon  $R$  portant la charge surfacique  $\sigma$  répartie uniformément sur sa surface entre deux plans de cote  $z_1$  et  $z_2$  ( $-R \leq z_1 \leq z \leq z_2 \leq R$ ). Examiner le cas de la demi-sphère chargée.



## 9 Champ d'un cerceau chargé $+\lambda$ ou $-\lambda$ par moitié sur son axe

Un cerceau de rayon  $R$ , de centre  $O$ , d'axe  $(Oz)$  porte la charge surfacique  $\lambda$ , signe  $(y)$ ,  $\lambda$  étant une constante. Déterminer la direction du champ créé par le cerceau en un point  $M$  de l'axe  $(Oz)$ . Calculer le champ au point  $M$ .

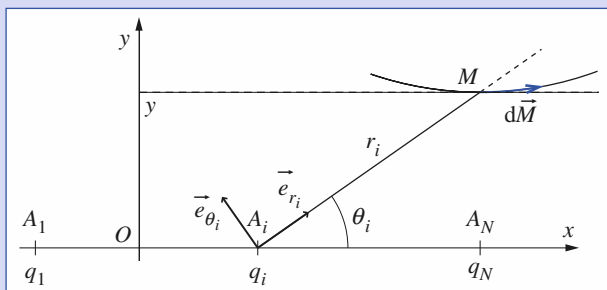


## 10 Équation d'une ligne de champ pour un ensemble de charges

$N$  charges  $q_1, \dots, q_N$  sont réparties sur l'axe  $(Oz)$ . Montrer que l'équation d'une ligne de champ est de la forme :

$$\sum_{i=1}^N q_i \cos \theta_i = \text{cte},$$

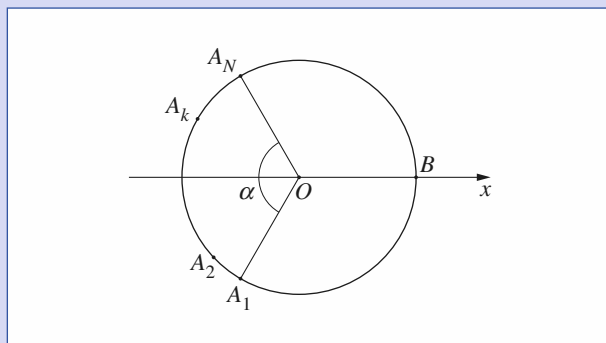
où les angles  $\theta_i$  sont définis sur le schéma suivant :



## 11 Champ créé par $N$ charges ponctuelles réparties sur un arc de cercle

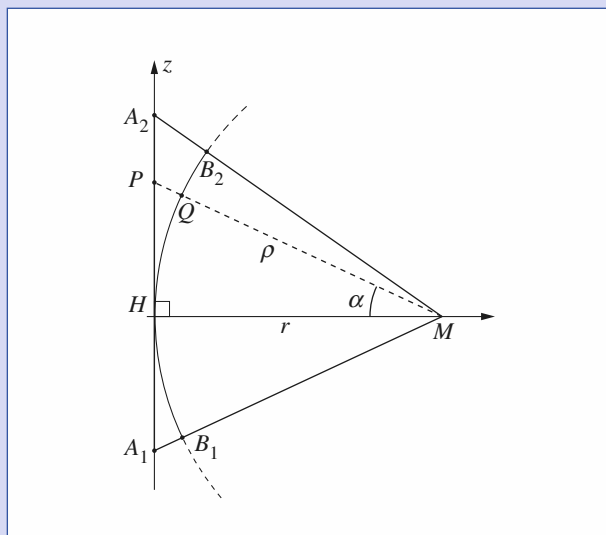
On considère une distribution de  $N$  charges ponctuelles  $q$ , équidistantes sur un arc de cercle  $A_1A_N$  de rayon  $R$  et de centre  $O$ . On note  $\alpha$  l'angle sous lequel la distribution est vue du point  $O$ .

- 1) Déterminer le champ en  $O$ .
- 2) Que vaut le champ en  $O$  quand les  $N$  charges sont régulièrement réparties sur tout le cercle ?



## 12 Équivalence entre deux distributions de charges

Montrer que le segment  $A_1A_2$  portant la densité linéique de charges  $\lambda$ , crée en  $M$  le même champ que l'arc de cercle  $B_1B_2$  de centre  $M$ , de rayon  $r = MH$  et portant la même densité linéique de charges  $\lambda$ .



# Corrigés

**Solution du tac au tac, p. 33.**

- |           |                              |
|-----------|------------------------------|
| 1. Vrai ; | 5. Faux ;                    |
| 2. Faux ; | 6. Vrai ;                    |
| 3. Vrai ; | 7. Vrai si $\vec{E}$ non nul |
| 4. Faux ; | 8. Faux.                     |

**1**

1) Le champ créé en  $M$  par un élément de longueur  $dz$  du fil de position repérée par  $\alpha$ , s'écrit :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda dz \frac{(\cos \alpha \vec{e}_r - \sin \alpha \vec{e}_z)}{d^2}.$$

Le champ en  $M$  est donc contenu dans le plan  $(OM, Oz)$ , et nous avons :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \lambda dz \frac{(\cos \alpha \vec{e}_r - \sin \alpha \vec{e}_z)}{d^2},$$

avec  $dz = d(r \tan \alpha) = \frac{rd\alpha}{\cos^2 \alpha}$  et  $d = \frac{r}{\cos \alpha}$ . Il vient alors :

$$\vec{E} = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \right] [(\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \vec{e}_r + (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \vec{e}_z].$$

2) Le cas du fil infini s'obtient en prenant la limite  $\beta_1$  tend vers  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\beta_2$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ , soit  $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$ .

**2**

La distribution de charges est de révolution autour de l'axe  $(Oz)$ . Au point  $O$  appartenant aux deux plans de symétrie  $(xOz)$  et  $(yOz)$ , le champ électrostatique doit être parallèle à ces deux plans, donc à l'axe  $(Oz)$ .

Le plan  $(xOy)$  est aussi un plan de symétrie de la distribution de charges (changer  $z$  en  $-z$  revient à changer  $\theta$  en  $\pi - \theta$ ). Au point  $O$ , appartenant à ce plan de symétrie, le champ électrostatique doit être parallèle à ce plan.

Nous obtenons ainsi sans calcul  $\vec{E}(O) = \vec{0}$ .

**3**

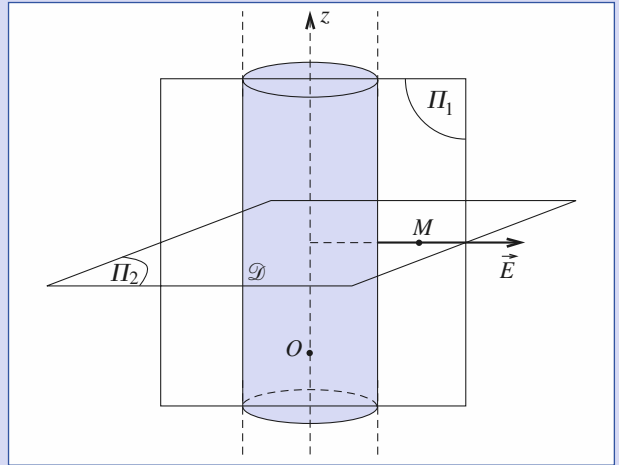
Deux plans de symétrie contiennent un point  $M$  : le plan  $\Pi_1$  contenant  $M$  et l'axe  $(Oz)$  qui est un axe de révolution de la distribution, et le plan  $\Pi_2$  contenant  $M$  et perpendiculaire à l'axe  $(Oz)$ .

En  $M$ , le champ  $\vec{E}$  est parallèle à ces deux plans, donc radial. Soit en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E(r, \theta, z) \vec{e}_r.$$

La distribution étant invariante par translation parallèlement à  $(Oz)$ , et par rotation autour de  $(Oz)$ , nous obtenons deux simplifications supplémentaires :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r, \theta) = E(r) \vec{e}_r.$$



**4**

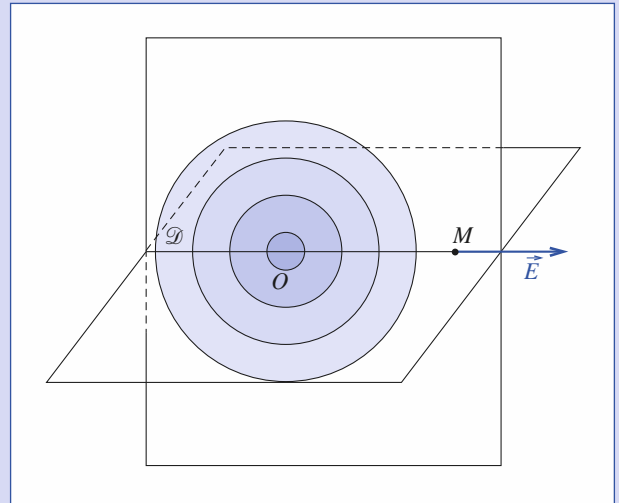
Considérons deux plans perpendiculaires contenant le centre de symétrie  $O$  et le point  $M$ , qui sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Ces plans contiennent le champ au point  $M$ . Nous en déduisons en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r.$$

La distribution étant invariante par toute rotation d'axe contenant le point  $O$ , nous obtenons :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r) \vec{e}_r.$$

La norme du champ dépend de  $r$ , sa direction de  $\theta$  et  $\varphi$ .



**5**

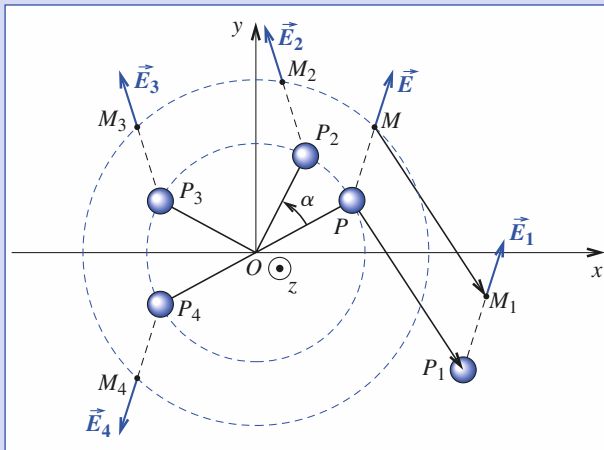
$$\vec{E}_1 = \vec{E};$$

$\vec{E}_2$  est obtenu par rotation d'un angle  $\alpha$  de  $\vec{E}$  autour de  $(Oz)$ ;

$\vec{E}_3$  est symétrique de  $\vec{E}$  par rapport à  $(yOz)$ ;

$$\vec{E}_4 = -\vec{E}.$$

Nous remarquons que le champ  $\vec{E}$  subit la même transformation que la distribution de charges.



**6** 1) Tout plan contenant le centre  $O$  de la sphère est un plan de symétrie de charges.  $\vec{E}$  est donc porté par l'intersection de ces plans qui se réduit ici à un point, d'où  $\vec{E}$  est nul en  $O$ .

2) Étudions le champ  $\vec{E}$  en un point  $M$  de l'espace. Les symétries des charges **vis-à-vis d'un plan contenant le point  $M$**  sont les suivantes : tous les plans contenant les points  $O$  et  $M$  sont des plans de symétrie de charges.  $\vec{E}$  à leur intersection est porté par  $OM$ , donc  $\vec{E} = E \vec{e}_r$ .

La symétrie sphérique des charges impose que ce champ dépend seulement de :

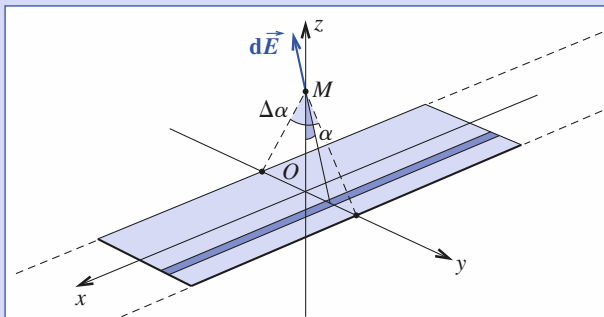
$$OM = r, \text{ soit } \vec{E} = E(r) \vec{e}_r.$$

(Nous verrons que le champ  $\vec{E}$  est de plus nul en tous points intérieurs à la sphère.)

## 7 • Recherche de l'orientation du champ

Le plan  $(xOz)$  est un plan de symétrie de charges, donc le champ électrostatique est dans ce plan. Le plan  $(xOy)$  est aussi un plan de symétrie de charges, donc le champ électrostatique est aussi dans ce plan. Le champ  $\vec{E}$  est donc porté par l'intersection de ces deux plans  $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$ .

La distribution de charges est invariante par translation suivant l'axe  $(Ox)$  : ce champ ne dépend pas de  $x$ . Nous avons donc  $\vec{E} = E_z(z) \vec{e}_z$ .



### • Calcul du champ

Nous avons vu dans l'exercice 1 que le champ d'un fil rectiligne infini portant la charge linéique  $\lambda$  est  $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$ . Utilisons ce résultat en décomposant le ruban en une succession de fils infinis de largeur  $dy$  et portant une charge linéique élémentaire

$d\lambda = \sigma_0 dy$ , comme indiqué sur le schéma. La projection de ce champ élémentaire sur  $(Oz)$  est donnée par :

$$dE_z = \frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha}{r} dy.$$

Sachant que  $r = \frac{z}{\cos \alpha}$  et  $y = z \tan \alpha$  (soit  $dy = z \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$ ), le champ cherché vaut :

$$E_z = \frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0 z} \int_{\text{largeur du ruban}} \cos^2 \alpha dy = \frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \int_{\text{largeur du ruban}} d\alpha = \frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \Delta \alpha,$$

$\Delta \alpha$  représentant l'angle total sous lequel nous voyons la largeur du ruban du point  $M$ .

$$\text{Soit } \vec{E} = \frac{\sigma_0}{\pi\epsilon_0} \arctan\left(\frac{a}{z}\right) \vec{e}_z.$$

### • Vérification

La composante du champ suivant  $(Oy)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \int_{\text{largeur du ruban}} \frac{\sin \alpha dy}{r} = -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\Delta \alpha}{2}}^{\frac{\Delta \alpha}{2}} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\cos \alpha} \\ &= -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\cos(\frac{\Delta \alpha}{2})}{\cos(-\frac{\Delta \alpha}{2})} \right) = 0. \end{aligned}$$

## 8 • Utilisation des symétries

Le point  $O$  appartient aux plans de symétrie  $(xOz)$  et  $(yOz)$  de la distribution de charges : le champ est porté par l'axe  $(Oz)$ , soit  $\vec{E}(O) = E \vec{e}_z$ .

### • Calcul du champ

Le champ cherché est la superposition des champs élémentaires créés par des spires de même axe  $(Oz)$ . Ces spires sont des portions de surface, sur la sphère, délimitées par deux cônes de demi-angle au sommet  $\alpha$  et  $\alpha + d\alpha$ . La densité linéique  $d\lambda$  de charges sur ces spires est :

$$d\lambda \cdot 2\pi R \sin \alpha = \sigma \cdot 2\pi R \sin \alpha \cdot R d\alpha \quad \text{soit} \quad d\lambda = \sigma R d\alpha$$

Sachant que le champ élémentaire d'une telle spire de rayon  $r = R \sin \alpha$  est donné (cf. Application 7) par :

$$dE_z = -\frac{d\lambda r}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \alpha}{R^2},$$

nous obtenons :

$$dE_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} d(\sin 2\alpha),$$

$$\text{soit :} \quad \vec{E} = -\frac{\sigma(z_2^2 - z_1^2)}{4\epsilon_0 R^2} \vec{e}_z.$$

Pour la sphère complète ( $-z_1 = z_2 = R$ ), nous trouvons naturellement un champ nul au centre, et pour la demi-sphère ( $z_1 = 0$  et  $z_2 = R$ ), nous obtenons :

$$\vec{E}(O) = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \vec{e}_z.$$

## 9 • Utilisation des symétries

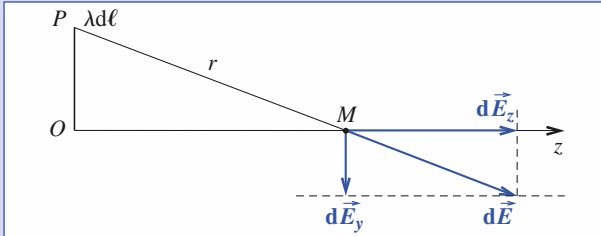
$M$  appartient au plan d'antisymétrie  $(xOz)$  de la distribution de charges. Le champ en  $M$ , perpendiculaire à ce plan, est parallèle à  $(Oy)$  :  $\vec{E}(z) = E_y(z) \vec{e}_y$ .

# Corrigés

## • Calcul du champ

Notons  $z$  ( $z > 0$ ) l'abscisse du point  $M$  et repérons le point  $P$  décrivant le cerceau comme indiqué sur le schéma de l'énoncé.

La contribution des deux demi-cerceaux suivant ( $Oy$ ) est identique ; le champ total est donc égal à deux fois la contribution suivant ( $Oy$ ) du demi-cerceau supérieur.



La contribution au champ  $d\vec{E}_y = dE_y \cdot \vec{e}_y$  dû à un élément de longueur  $d\ell = R d\theta$ , situé en  $P$  ( $R \cos \theta, R \sin \theta, 0$ ), portant la charge  $\lambda d\ell$ , est égale à :

$$dE_y(M) = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M} \cdot \vec{e}_y}{PM^2}, \text{ avec } PM^2 = R^2 + z^2 \text{ et } \vec{e}_{P \rightarrow M} \cdot \vec{e}_y = -\frac{R \sin \theta}{PM}.$$

Nous obtenons donc, pour l'ensemble des deux demi-cerceaux :

$$E_y(M) = -\frac{2\lambda R^2}{4\epsilon_0 PM^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\frac{\lambda R^2}{\pi\epsilon_0 PM^3}.$$

10

Par raison de symétrie, les lignes de champ sont des courbes planes situées dans des plans ( $xOy$ ) passant par la droite support des charges. L'équation différentielle d'une ligne de champ est :  $\vec{E}(M) \wedge d\vec{M} = \vec{0}$  soit encore  $\sum_i \vec{E}_i(M) \wedge d\vec{M} = \vec{0}$

où  $\vec{E}_i(M)$  est le champ créé en  $M$  par la charge  $q_i$ . Exprimons les produits vectoriels  $\vec{E}_i(M) \wedge d\vec{M}$  en utilisant, pour chacun d'eux, les coordonnées polaires de

$$\text{pôle } A_i : \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{e}_{ri}}{r_i^2} \wedge (dr_i \vec{e}_{ri} + r_i d\theta_i \vec{e}_{\theta i}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{e}_z \sum_i q_i \frac{d\theta_i}{r_i} = \vec{0}.$$

Il apparaît ainsi que l'équation différentielle d'une ligne de champ se simplifie en :

$$\sum_i q_i \frac{d\theta_i}{r_i} = 0.$$

Multiplions cette équation différentielle par  $y$  (facteur intégrant) et remarquons que

$$\frac{y}{r_i} = \sin \theta_i ; \text{ il vient : } \sum_i q_i \sin \theta_i d\theta_i = 0.$$

Une intégration évidente donne le résultat cherché :

$$\sum_i q_i \cos \theta_i = \text{cte.}$$

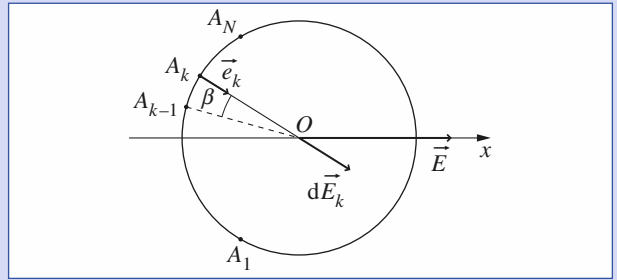
11

1) Soit  $Ox$  la bissectrice de l'angle  $(A_1OA_N)$  : par raison de symétrie, le champ  $\vec{E}$  en  $O$  est porté par l'axe ( $Ox$ ) et il est dirigé du côté des  $x$  croissants si  $q > 0$  et dans le sens opposé si  $q < 0$ .

La charge  $q$ , placée en  $A_k$ , crée en  $O$  le champ :  $\vec{E}_k = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_k$  et le champ

$$\text{créé par les } N \text{ charges est : } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_1^N \vec{e}_k.$$

Comme nous connaissons déjà la direction et le sens de  $\vec{E}$ , il nous suffit d'en connaître la norme. Pour calculer la norme de  $\sum_1^N \vec{e}_k$ , construisons la somme vectorielle de ces  $N$  vecteurs unitaires.



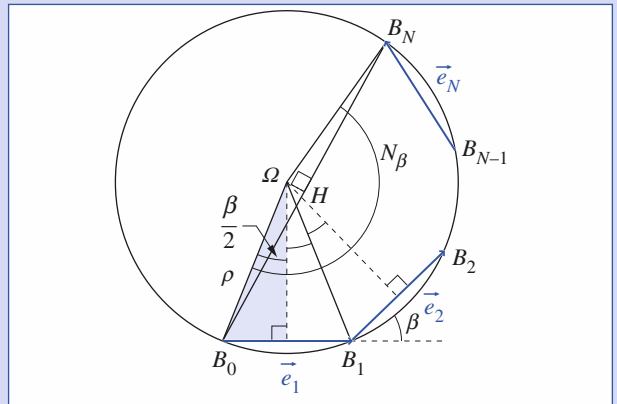
Notons  $\beta$  l'angle sous lequel est vu de  $O$  l'arc de cercle délimité par deux charges consécutives :  $(N-1)\beta = \alpha$ .

Les extrémités  $B_0, B_1, \dots, B_N$  de ces  $N$  vecteurs unitaires se trouvent sur un cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $\rho$  tel que :  $\rho = \frac{1}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$ .

La norme  $\sum_1^N \vec{e}_k$  est celle du vecteur  $\overrightarrow{B_0 B_N}$  soit :

$$\|\overrightarrow{B_0 B_N}\| = 2\rho \sin \left( \frac{N\beta}{2} \right) = \frac{\sin \left( \frac{N\beta}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\beta}{2} \right)}.$$

$$\text{En définitive, le champ en } O \text{ s'écrit : } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{\sin \left( \frac{N\beta}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\beta}{2} \right)} \vec{e}_x.$$



2) Si les  $N$  charges sont régulièrement réparties sur le cercle, alors  $N\beta = 2\pi$  et le champ en  $O$  est nul, comme on pouvait s'y attendre.

12

L'élément de longueur  $dz$  situé en  $P$  sur le segment  $A_1A_2$  crée le champ :

$$d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz}{\rho^2} \vec{e}_P. \text{ Comme } \rho = \frac{r}{\cos \alpha} \text{ et } z = r \tan \alpha, \text{ il vient :}$$

$$dz = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha} \text{ et } d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{rd\alpha}{r^2} \vec{e}_P.$$

En remarquant que  $d\alpha$  est l'angle sous lequel  $dz$  est vu du point  $M$ , on en déduit que les charges  $\lambda dz$  et  $\lambda r d\alpha$  créent en  $M$  le même champ élémentaire  $d\vec{E}$ . En conséquence, le segment  $A_1A_2$  et l'arc de cercle  $B_1B_2$  créent en  $M$  le même champ  $\vec{E}(M)$ . On peut ajouter, en considérant l'arc de cercle, que le champ  $\vec{E}(M)$  est, par raison de symétrie, porté par la bissectrice de l'angle  $(A_1OA_2)$ .



# Potentiel électrostatique

# 3

## Introduction

*Le champ électrostatique  
peut être caractérisé simplement  
à l'aide d'une fonction  
que nous appellerons  
potentiel électrostatique.*

*Le choix de ce nom sera justifié  
par l'interprétation de cette fonction  
en terme d'énergie potentielle  
d'une charge soumise  
aux effets d'un champ électrostatique*

## O B J E C T I F S

- Circulation du champ électrostatique.
- Potentiel électrostatique.
- Énergie potentielle d'interaction électrostatique.

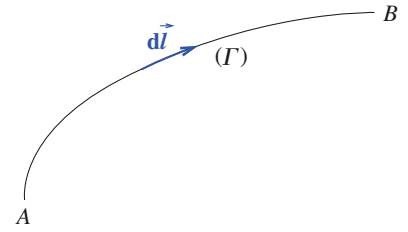
## P R É R E Q U I S

- Champ électrostatique.
- Gradient.

## Circulation du champ électrostatique

### 1.1. Définition

Considérons une courbe  $\Gamma$  liant deux points  $A$  et  $B$ . La circulation  $C$  d'un champ de vecteurs  $\vec{E}$ , sur cette courbe, de  $A$  à  $B$ , est définie par  $C_{AB}(\Gamma) = \int_{A(\Gamma)}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ , où  $d\vec{\ell}$  désigne le déplacement élémentaire le long de la courbe  $\Gamma$  (doc. 1).



**Doc. 1.** Courbe  $\Gamma$  liant deux points  $A$  et  $B$ .

### 1.2. Circulation du champ d'une charge ponctuelle

#### 1.2.1. Conservation de la circulation du champ

Le champ  $\vec{E}$  créé par une charge ponctuelle  $q$  placée au point  $O$ , que nous prendrons comme origine, est en coordonnées sphériques  $\vec{E}(\vec{M}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ .

La circulation élémentaire  $\vec{E} \cdot d\vec{r}$  associée à un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  est :

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(-\frac{1}{r}\right).$$

La circulation de  $A$  à  $B$  sur la courbe  $\Gamma$  (ne passant pas par  $O$ ) s'écrit donc :

$$\int_{A(\Gamma)}^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Elle ne dépend pas du choix du chemin  $\Gamma$  (ne passant pas par  $O$ ) suivi pour aller de  $A$  à  $B$ .

La circulation du champ, d'un point  $A$  à un point  $B$ , se conserve lorsque nous passons d'un chemin  $\Gamma$  à un chemin  $\Gamma'$  reliant ces deux points : la circulation du champ créée par une charge est conservative :  $C_{AB}(\Gamma) = C_{AB}(\Gamma')$ .

#### 1.2.2. Champ de gradient

La circulation élémentaire du champ est  $\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV(\vec{r})$ , avec :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cte}.$$

Nous pouvons identifier le champ créé par la charge ponctuelle à un champ de gradient  $\vec{E} = -\text{grad } V(\vec{r})$ .

### 1.3. Circulation du champ d'une distribution

#### 1.3.1. Circulation conservative du champ

Le principe de superposition nous permet d'obtenir le champ créé par une distribution en effectuant l'addition des champs créés par chacune des parties élémentaires de la distribution.

En conséquence, la circulation  $\int_{A(\Gamma)}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  a la même valeur pour tous les chemins reliant  $A$  à  $B$ , ce qui signifie que :

**La circulation du champ électrostatique est conservative.**

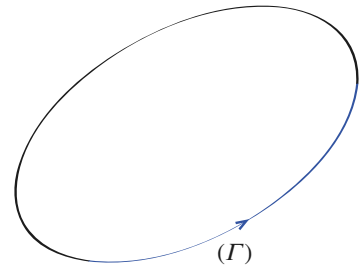
Ou, ce qui est équivalent :

**La circulation du champ électrostatique sur un contour (courbe fermée) est nulle :**

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

**Le résultat est indépendant du contour.**

Signalons une conséquence de cette propriété qu'il faut avoir à l'esprit lors du tracé de lignes de champ : *une ligne de champ électrostatique ne peut pas avoir la forme d'une boucle fermée sur elle-même*. En effet, la circulation du champ sur cette boucle, orientée par le champ, ne pourrait être que strictement positive (à moins que le champ ne soit nul sur toute la boucle ou non défini en certains points, ce qui interdit alors de la définir comme une ligne de champ), ce qui est en contradiction avec la propriété précédente.



**Doc. 2.** Contour  $(\Gamma)$ .

## 2 Potentiel électrostatique

### 2.1. Circulation du champ et potentiel

#### 2.1.1. Fonction potentiel

La circulation du champ électrostatique étant conservative, nous pouvons définir, indépendamment du chemin suivi pour calculer la circulation du champ de  $A$  à  $B$ , la grandeur  $C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ . Nous pouvons de même définir la fonction  $V(\vec{r})$  par  $V_B = V_A + \int_A^B -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ , la valeur de cette fonction au point  $A$  pouvant être fixée arbitrairement (constante d'intégration).

Nous conviendrons d'appeler la grandeur  $V$  *fonction potentiel électrostatique*, définie à une constante près.

**La différence de potentiel entre deux points  $A$  et  $B$  est :**

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

Ainsi, l'expression du potentiel  $V(M)$  (s'annulant à l'infini) créée par une charge ponctuelle  $q$  en  $O$  est :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

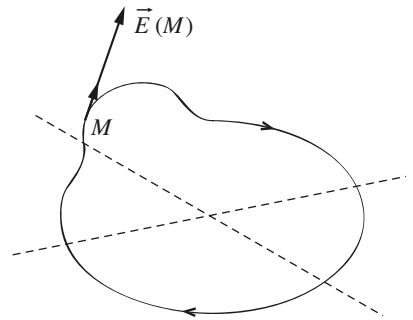
**Le champ électrostatique est un champ de gradient s'écrivant :**

$$\vec{E}(M) = -\text{grad}_M V(M).$$

Le calcul du gradient se trouve dans l'*Annexe*.

Nous pouvons ainsi remarquer :

**Un champ de vecteur  $\vec{E}$  à circulation conservative est un champ de gradient.**



**Doc. 3.** Il n'existe pas de ligne de champ fermée.

# Application 1

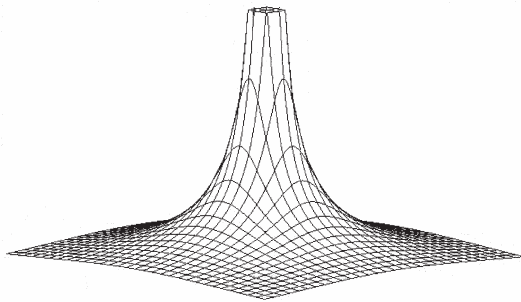
## Potentiel d'un fil rectiligne infini

Déterminer le potentiel associé à un fil rectiligne infini portant la charge linéique uniforme  $\lambda$ . (Le champ de cette distribution a été calculé au chapitre 2 exercice 1.)

Nous avons vu que le champ de cette distribution a pour expression en coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ) confondu avec le fil  $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$ .

L'expression d'un déplacement élémentaire étant :

$$d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \cdot \vec{e}_\theta + dz \cdot \vec{e}_z$$



Doc. 4. Potentiel d'une charge ponctuelle :

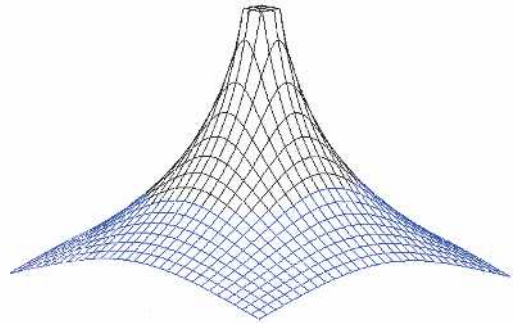
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ à l'infini, } V = 0.$$

en coordonnées cylindriques, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V_B &= V_A + \int_A^B -\vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= V_A + \int_A^B -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = V_A - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{r}{r_A} \right]. \end{aligned}$$

Remarquons que pour ce modèle de distribution infinie, il ne nous est pas possible de choisir le potentiel nul à l'infini. Si nous choisissons par exemple  $V_A = 0$  à distance  $r_A = R$  du fil, nous aurons :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{r}{R} \right].$$



Doc. 5. Potentiel d'un fil infini  $V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{r}{R} \right]$ .

Nous visualisons l'équipotentielle 0 à distance finie  $R$  du fil. À l'infini,  $V$  est infini.

► Pour s'entraîner : ex. 1.

## 2.1.2. Champ de gradient

La circulation élémentaire du champ s'identifie ainsi au signe près à la différentielle (exacte) de la fonction  $V(M)$  :

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) dz = -dV.$$

Remarque : Le choix du signe moins est pour l'instant arbitraire ; nous verrons cependant qu'il est bien adapté à une association directe entre le potentiel électrostatique et la notion d'énergie potentielle.

## 2.1.3. Invariance de jauge

Le potentiel électrostatique créé n'est pas unique.

**Le potentiel électrostatique est défini à une constante près.**

$V'(\vec{r}) = V(\vec{r}) + V_0$  ( $V_0$  étant une constante arbitraire) est un autre potentiel acceptable.

Ce choix d'origine, appelé aussi *choix de jauge*, ne modifie pas le champ, grandeur physique mesurable par ses effets (force de Coulomb) :

**Le champ électrostatique est invariant de jauge, c'est-à-dire de la référence de potentiel.**

# Application 2

## Équation différentielles locales vérifiées par les composantes d'un champ électrostatique

Le champ électrostatique :  $\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix}$

est un champ de gradient, c'est-à-dire qu'il dérive d'un potentiel  $V(M) = V(x, y, z)$ .

1) a) Rappeler les relations liant les composantes du champ au potentiel.

b) Sachant que, par exemple :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y},$$

en déduire un ensemble de relations liant les dérivées partielles des composantes de  $\vec{E}$  par rapport aux coordonnées d'espace.

2) a) Le champ électrostatique est-il un champ à circulation conservative ?

b) En faisant circuler le champ électrostatique sur un contour élémentaire constitué d'un rectangle de côté  $dx$  et  $dy$  dans un plan  $z$  constant (parallèle au plan  $(Ox, Oy)$ ), montrer que :  $\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$ .

En déduire les autres relations trouvées précédemment.

1) a) Les relations demandées sont  $\vec{E}(M) = -\text{grad}_M V(M)$ , qui conduisent à :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

b) Sachant que  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)$ , on en déduit :

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Les autres relations sont obtenues par permutation circulaire :

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}.$$

2) a) Le champ électrostatique est un vecteur à circulation conservative, c'est-à-dire que la circulation de ce champ sur tout contour (courbe fermée) est nulle.

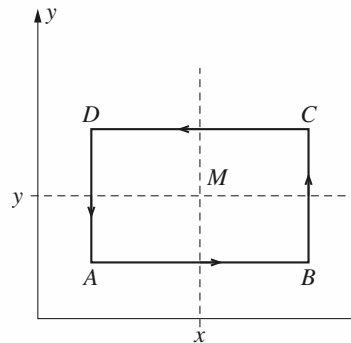
b) La circulation du champ électrostatique sur un contour élémentaire orienté (doc. 6.) constitué d'un rectangle de côtés  $dx$  et  $dy$  dans un plan  $z$  constant (parallèle au plan  $(Ox, Oy)$ ), et de centre  $M(x, y, z)$  donne :

• Circulation sur  $AB \rightarrow +E_x \left( x, y - \frac{dy}{2}, z \right) dx$  (1)

• Circulation sur  $BC \rightarrow +E_y \left( x + \frac{dx}{2}, y, z \right) dy$  (2)

• Circulation sur  $CD \rightarrow -E_x \left( x, y + \frac{dy}{2}, z \right) dx$  (3)

• Circulation sur  $DA \rightarrow -E_y \left( x - \frac{dx}{2}, y, z \right) dy$  (4)



◀ Doc. 6. Contour choisi pour faire circuler le champ.

En regroupant les termes deux à deux, cela donne :

$$(1) + (3) \rightarrow -\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial y} dx dy ;$$

$$(2) + (4) \rightarrow +\frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial x} dx dy .$$

La somme de ces deux expressions est nulle, ce qui conduit à :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

On en déduit aisément les autres relations par permutation circulaire :

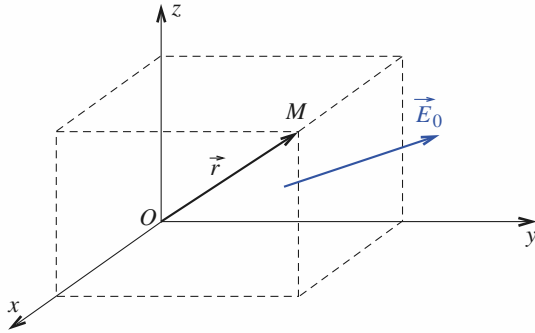
$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}.$$

Ces propriétés sont valables pour tous les champs électrostatiques.

# Application 3

## Potentiel associé à un champ uniforme

- 1) Calculer  $\text{grad}(\vec{E}_0 \cdot \vec{OM})$ , où  $\vec{E}_0$  désigne une constante vectorielle.
- 2) Exprimer le potentiel associé à un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}_0$ .



Doc. 7.

- 1) En exprimant le produit scalaire à dériver à l'aide des coordonnées cartésiennes, nous avons ( $\vec{r} = \vec{OM}$ ) :

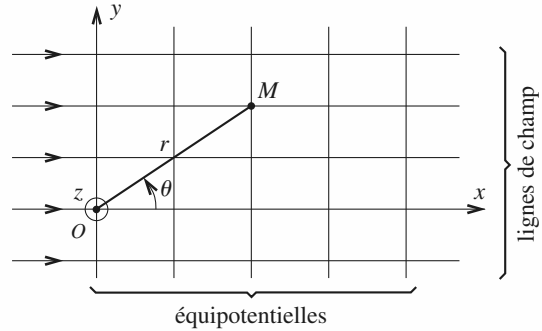
$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(E_{0x}x + E_{0y}y + E_{0z}z) = E_{0x}.$$

La composante du gradient suivant ( $Ox$ ) étant égale à  $E_{0x}$ , celle sur ( $Oy$ ) sera égale à  $E_{0y}$  et celle sur ( $Oz$ ) à  $E_{0z}$ .

Nous obtenons donc :

$$\text{grad}(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) = \vec{E}_0.$$

Le résultat final est indépendant du système de coordonnées choisi pour effectuer le calcul.



Doc. 8.  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ .

- 2) Il suffit d'utiliser l'expression du potentiel en fonction de la circulation du champ, ce qui nous donne

$$V_B = V_A + \int_A^B -\vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - \vec{E}_0 \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A),$$

$$\text{soit : } V(\vec{r}) = -E_0 r \cos \theta + \text{cte}.$$

Ce résultat est en accord avec le calcul élémentaire précédent.

## 3 Potentiel créé par une distribution de charges

### 3.1. Superposition des effets

L'opérateur gradient étant un opérateur linéaire, nous pouvons aussi obtenir le potentiel électrostatique d'une distribution, par superposition des potentiels créés par les charges élémentaires  $\delta q_P$  de la distribution :

$$\delta V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q_P}{PM} \quad (\text{référence de potentiel nulle à l'infini}).$$

L'expression intégrale du potentiel, s'annulant à l'infini, créé par une distribution de charges  $\mathcal{D}$  d'extension finie est de la forme :

$$V(M) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q_P}{PM}.$$

L'élément de charge reste à préciser pour le type de la distribution  $\mathcal{D}$  considérée, et nous utiliserons selon le cas envisagé l'une des expressions suivantes donnant, à une constante près, le potentiel électrostatique créé par  $\mathcal{D}$ .

### 3.2. Expressions du potentiel

#### ■ Ensemble de charges ponctuelles

Pour des charges  $q_i$  placées en des points  $P_i$  :

$$V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M}.$$

#### ■ Distribution volumique de charges

$$V(M) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P) d\tau}{PM}.$$

#### ■ Distribution surfacique de charges

$$V(M) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P) dS}{PM}.$$

#### ■ Distribution linéique de charges

$$V(M) = \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P) dl_P}{PM}.$$

#### Remarques

- Ces expressions ne sont a priori applicables que dans le cas de distributions d'extension finie afin d'assurer une signification aux intégrales. Elles correspondent dans ce cas au choix de potentiel nul à l'infini.
- L'application de la dernière expression au cas du fil infini étudié dans l'Application 1 conduirait à une divergence logarithmique de l'intégrale, alors que l'intégrale correspondant au champ converge. Nous avons vu comment lever cette difficulté, et observé l'impossibilité de fixer  $V=0$  à l'infini pour ce modèle.
- Un autre problème de convergence de l'intégrale apparaît, si nous nous intéressons au calcul du potentiel, en un point de la distribution, c'est-à-dire en un point tel que  $PM=0$  lors du calcul de l'intégrale. Dans le cas d'une distribution volumique, l'intégrale converge s'il n'y a pas de charges à l'infini.

### 3.3. Potentiel d'un disque uniformément chargé sur son axe

Déterminons le potentiel  $V(M)$  d'un disque, de rayon  $R$  uniformément chargé avec la densité  $\sigma$ , en un point  $M$  de son axe.

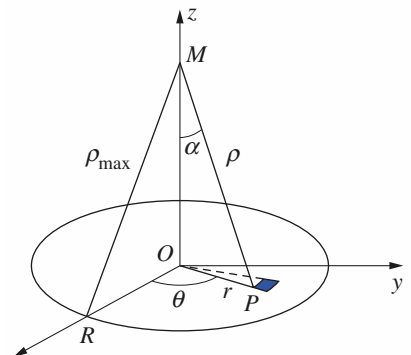
Notons  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires d'un point  $P$  du disque et  $d^2S = r dr d\theta$  l'élément de surface associé à ce point. La charge élémentaire  $d^2q = \sigma r dr d\theta$  (infinitésimale d'ordre deux) localisée en  $P$ , crée le potentiel élémentaire :

$$d^2V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{\rho}.$$

Une première intégration sur  $\theta$  fait apparaître la contribution à  $V(M)$  d'une bande circulaire de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  :

$$dV = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{r dr}{\rho} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{\rho}.$$

Nous devons maintenant intégrer sur  $r$ . La dépendance de  $\rho$  à  $r$  ne s'exprimant pas simplement, nous prendrons comme variable d'intégration l'angle  $\alpha$  :  $r = z \tan \alpha$  et  $\rho = \frac{z}{\cos \alpha}$ .



Doc. 9. Potentiel d'un disque chargé.

Après simplification, l'expression à intégrer s'écrit :

$$dV = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \frac{\sin \alpha \cdot d\alpha}{\cos^2 \alpha} = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \frac{d(\cos \alpha)}{\cos^2 \alpha}.$$

d'où :

$$V = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{\cos \alpha_{\max}} - 1 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\rho_{\max} - |z|) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - |z|).$$

À la traversée de la surface chargée, le champ subit une discontinuité alors que le potentiel est continu. Ce dernier résultat est général et nous l'admettons.

**Le potentiel est continu quand il est défini.**

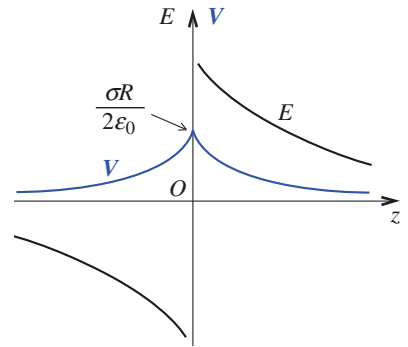
#### Remarque

Notons que la connaissance de la valeur du potentiel sur l'axe ne permet pas a priori de déterminer le champ sur celui-ci :  $V(0, 0, z)$  est connue, et nous ne pouvons que calculer :

$$E_z(0, 0, z) = \frac{\partial V(0, 0, z)}{\partial z}.$$

Toutefois, l'axe  $(Oz)$  étant un axe de révolution de la distribution, nous avons sur celui-ci  $E_x = E_y = 0$ , ce qui achève la détermination du champ sur l'axe, en accord avec le résultat établi au chapitre 2.

► Pour s'entraîner : ex. 2 et 7.



**Doc. 10.** Le potentiel est continu à la traversée d'une surface chargée.

## 4 Topographie du potentiel électrostatique

### 4.1. Surfaces équipotentielles d'une distribution

#### 4.1.1. Définition

Une surface équipotentielle, de potentiel  $V_0$ , est définie par l'équation  $V(M) = V_0$ . Deux surfaces équipotentielles correspondant à des potentiels distincts ne peuvent pas avoir d'intersection.

#### 4.1.2. Surfaces équipotentielles et lignes de champ

Considérons deux points très proches appartenant à une même surface équipotentielle de potentiel  $V_0$  (doc. 11). Notons  $M$  le premier, le second, noté  $N$ , étant obtenu à partir de celui-ci par un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  d'orientation quelconque dans le plan tangent en  $M$  à la surface équipotentielle.

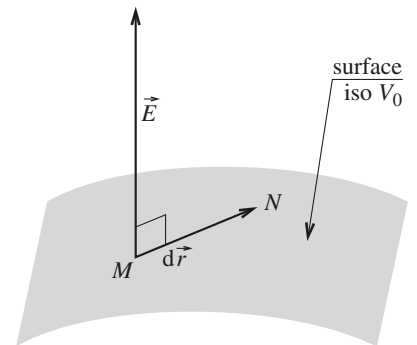
Par définition du potentiel  $V(N) = V(M) - \vec{E}(M) \cdot d\vec{r}$ , et par définition de la surface  $V(N) = V(M)$ . Le champ électrostatique est donc normal à la surface équipotentielle (propriété du gradient, cf. l'Annexe).

**Remarque** : Plus généralement, une surface définie par  $f(\vec{r}) = \text{cte}$  admet le vecteur  $\text{grad } f$  comme vecteur normal.

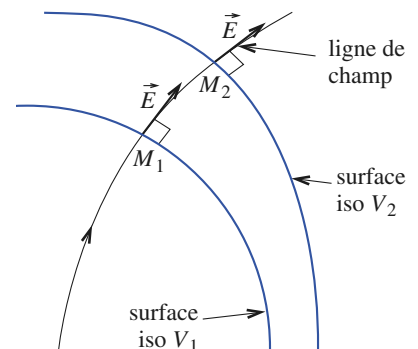
Considérons maintenant une ligne de champ recontrant deux surfaces équipotentielles, de potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , aux points  $M_1$  et  $M_2$  (doc. 12). Si le champ oriente la ligne de  $M_1$  vers  $M_2$ , nous avons :

$$V_2 - V_1 = V(M_2) - V(M_1) = \int_{M_1}^{M_2} -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} < 0.$$

**Le champ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles et les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.**



**Doc. 11.** Sur la surface  $\text{iso-}V_0$  :  $V(M) = V(N)$ .



**Doc. 12.**  $\vec{E}$  est orienté dans le sens des potentiels décroissants :  $V_1 > V_2$ .



# Application 4

## Surface de potentiel nul d'un système de deux charges ponctuelles

1) En choisissant le potentiel nul à l'infini, caractériser complètement la surface équipotentielle  $V=0$  d'un système de deux charges ponctuelles  $Q (> 0)$  en  $O$  et  $-q (< 0)$  au point d'abscisse  $d$  sur l'axe  $(Oz)$ .

2) Sur le document 13, les traces des surfaces équipotentielle ont été dessinées dans un plan contenant l'axe  $(Oz)$ .

L'équipotentielle  $V=0$  figure en bleu. Quelle est la charge la plus élevée en valeur absolue ?

Évaluer le rapport  $\left| \frac{Q}{q} \right|$ .

3) Donner l'allure des lignes de champ si  $Q > 0$ .

1) Le potentiel créé en un point  $M$  de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  est  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}$ , avec  $r' = \left[ r^2 - 2dr \cos \theta + d^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ .

La surface de potentiel nul correspond à  $\frac{r}{r'} = \frac{Q}{q}$  (ce qui n'a de sens que si  $Q$  et  $q$  sont de même signe, c'est-à-dire que les charges sont de signe opposé).

Si  $q = Q$ , il s'agit du plan médiateur des deux charges.

Si  $q \neq Q$ , il s'agit d'une sphère. En coordonnées cartésiennes son équation est :

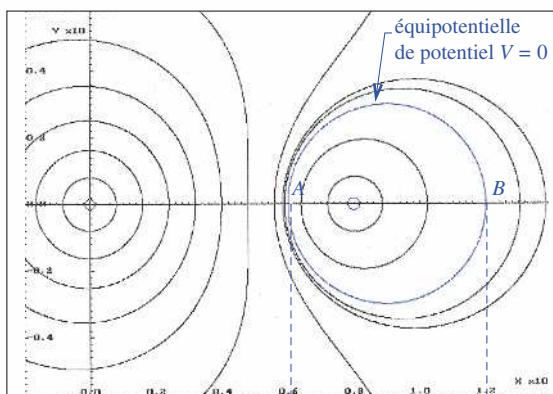
$$x^2 + y^2 + \left[ z + \frac{d}{\left( \frac{q^2}{Q^2} - 1 \right)} \right]^2 = \left[ \frac{q}{Q} - \frac{Q}{q} \right]^2$$

son centre est au point d'abscisse  $z_C = \frac{d}{1 - \frac{q^2}{Q^2}}$  sur

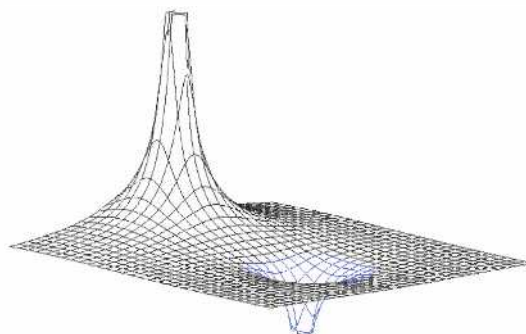
l'axe  $(Oz)$  et son rayon est  $R = \frac{d}{\left| \frac{Q}{q} - \frac{q}{Q} \right|}$ .

2) L'équipotentielle  $V=0$  entoure la charge  $-q$ . L'abscisse  $z_C$  de son centre est positif donc  $Q > q$ . Nous pouvons lire que le rapport  $\frac{R}{z_C}$ , égal à  $\left| \frac{q}{Q} \right|$ , vaut  $\frac{1}{3}$ .

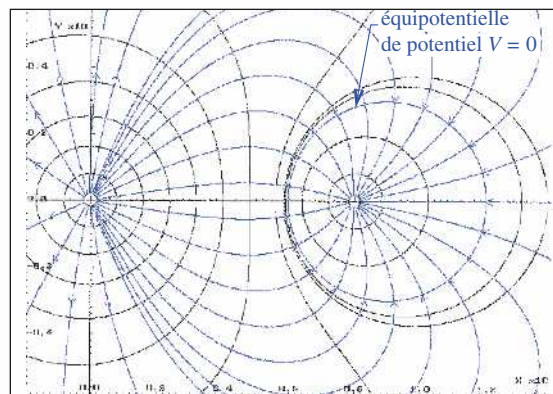
3) Le document 15 donne l'allure des lignes de champ.



Doc. 13. L'équipotentielle de potentiel  $V=0$  est un cercle de diamètre  $AB$ , avec  $A(+6)$  et  $B(+12)$ .



Doc. 14. Nous visualisons sur ce schéma l'équipotentielle circulaire  $V=0$  (en noir  $V>0$  et en bleu  $V<0$ ).



Doc. 15. Allure des lignes de champ.

► Pour s'entraîner : ex. 6, 8 et 9.

#### Remarques

• L'orthogonalité des lignes de champ aux surfaces équipotentielles est à retenir pour effectuer des tracés qualitatifs de lignes de champ et de coupes de surfaces équipotentielles sur une figure.

Attention cependant : le champ électrostatique est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles : mais nous pourrions rencontrer le cas d'une ligne de champ non perpendiculaire à une surface équipotentielle, lorsque le point qu'elle atteint sur cette surface est un point de champ nul.

• Sur une carte de lignes équipotentielles, les régions de champ intense sont caractérisées par des lignes équipotentielles rapprochées. En effet, si  $|V_2 - V_1|$  est faible, il est possible d'évaluer le champ en  $M_1$  par l'expression :  $|V_2 - V_1| \approx E(M_1) \cdot M_1 M_2$ . Plus  $M_1 M_2$  est faible, plus  $E(M_1)$  est intense. Ainsi sur le document 13, le module du champ est plus intense en A qu'en B :  $|\vec{E}(A)| > |\vec{E}(B)|$ .

## 4.2. Considérations de symétrie

### 4.2.1. Champ scalaire

La circulation élémentaire  $\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  fait intervenir le produit des deux vecteurs (polaires), et possède les propriétés de symétrie d'un *champ scalaire*.

Nous pourrions choisir la jauge (constante d'intégration) de façon à obtenir un potentiel  $V(\vec{r})$  ayant les propriétés de symétrie de la distribution de charges.

Par exemple, dans le cas d'une distribution  $\mathcal{D}$  admettant un plan d'antisymétrie  $\Pi^*$ , nous prendrions  $V = 0$  sur ce plan. En un point  $M$  et en son symétrique  $M'$  par rapport au plan  $\Pi^*$ , le potentiel prend alors des valeurs opposées.

Dans le cas d'une distribution  $\mathcal{D}$  admettant un plan de symétrie  $\Pi$ , le potentiel a la même valeur en un point  $M$  et en son symétrique  $M'$  par rapport au plan  $\Pi$ .

Les propriétés de symétrie du potentiel peuvent aussi s'obtenir à l'aide de celles du champ créé par la distribution étudiée. Pour les symétries usuelles, les propriétés du potentiel s'obtiennent intuitivement comme l'illustrent les exemples qui suivent.

### 4.2.2. Invariances

Étudions l'expression générale du potentiel pour diverses invariances.

• Pour une *distribution invariante par toute translation parallèlement à l'axe (Oz)*, le potentiel ne peut dépendre que des variables de position  $x$  et  $y$ . Ceci peut être confirmé par le résultat obtenu au chapitre 2, donnant la forme du champ :

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) = E_x(x, y)\vec{e}_x + E_y(x, y)\vec{e}_y.$$

• Pour une *distribution possédant la symétrie de révolution par rapport à l'axe (Oz)*, il apparaît immédiatement que la fonction potentiel ne dépend que des variables  $r$  et  $z$  des coordonnées cylindriques d'axe (Oz), en accord avec le champ déjà obtenu :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z.$$

• Pour une *distribution possédant la symétrie cylindrique d'axe (Oz)*, la fonction potentiel ne peut dépendre que de la distance  $r$  à l'axe (Oz) :

$$V(\vec{r}) = V(r, \theta, z) = V(r),$$

en accord avec la forme du champ :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E(r)\vec{e}_r.$$

- Pour une *distribution possédant la symétrie sphérique de centre  $O$* , la fonction potentiel ne dépend que de la distance  $r$  au point  $O$  :

$$V(\vec{r}) = V(r, \theta, \varphi) = V(r).$$

Le champ est d'ailleurs de la forme :  $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r) \vec{e}_r$ .

## 5 Énergie potentielle d'interaction électrostatique

### 5.1. Énergie potentielle d'une charge placée dans un champ

#### 5.1.1. Travail de la force électrostatique

Le travail élémentaire de la force  $\vec{f} = q\vec{E}$  lors d'un déplacement  $d\vec{M}$  de celle-ci est :

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{M} = q\vec{E} \cdot d\vec{M} = -q \operatorname{grad} V \cdot d\vec{M} = -q dV = -d(qV).$$

Le travail de cette force correspondant à un déplacement de la charge  $q$  d'un point  $A$  à un point  $B$  est ainsi  $W_{AB} = -q(V_B - V_A)$ .

#### 5.1.2. Énergie potentielle

Ce travail ne dépend pas du chemin suivi et s'identifie à la variation d'une fonction d'état qui ne dépend que de la position de la particule.

L'énergie potentielle d'interaction entre une charge  $q$  et un champ électrostatique  $\vec{E}$  créant le potentiel  $V$  est  $\mathcal{E}_P = qV$ .

La force de Coulomb  $\vec{f} = q\vec{E}$  exercée par le champ électrostatique dérive de cette énergie potentielle, définie (comme le potentiel électrostatique) à une constante près :

$$\vec{f} = q\vec{E} = -\operatorname{grad} \mathcal{E}_P.$$

Ainsi, ce champ de force est un champ de gradient et, à ce titre, la force électrostatique est une force conservative : son travail entre deux points  $A$  et  $B$  ne dépend pas du chemin suivi.

En effet, le travail élémentaire est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle :

$$\vec{f} \cdot d\vec{M} = q\vec{E} \cdot d\vec{M} = -d\mathcal{E}_P.$$

Le travail de la force électrostatique entre  $A$  et  $B$  est :

$$W_{AB} = -\mathcal{E}_{P(B)} + \mathcal{E}_{P(A)} = -\Delta \mathcal{E}_P.$$

## Application J

### Travail de l'opérateur déplaçant la charge

*Quel est le travail fourni par un opérateur qui déplace très lentement une charge  $q$  dans un champ électrostatique  $\vec{E}$  donné ?*

L'opérateur déplace la charge sans lui fournir d'énergie cinétique : si la vitesse de déplacement est très lente,

la force  $\vec{f}_{op}$  qu'il applique à la charge sert à compenser la force exercée par le champ  $\vec{E}$  sur celle-ci, d'où  $\vec{f}_{op} = -q\vec{E}$ .

Lorsque l'opérateur déplace la charge de  $d\vec{M}$ , il fournit à la charge le travail élémentaire :

$$\delta W_{op} = \vec{f}_{op} \cdot d\vec{M} = d(qV) = +d\mathcal{E}_P.$$

## 5.2. Énergie d'interaction de deux charges ponctuelles

### 5.2.1. Travail de constitution du système de deux charges

L'opérateur cherche à présent à amener deux charges  $q_1$  et  $q_2$  aux positions finales  $M_1$  et  $M_2$  depuis une situation d'interaction nulle où les charges sont infiniment éloignées, sans leur fournir d'énergie cinétique.

#### 5.2.1.1. Cas particulier

Imaginons tout d'abord une transformation particulière très simple à étudier. Dans un premier temps, l'opérateur amène la charge  $q_1$  seule depuis l'infini jusqu'au point  $M_1$  sans avoir d'énergie à fournir.

Par la suite  $q_1$  est fixe, donc  $q_1$  ne reçoit pas de travail.

Amenant  $q_2$  au point  $M_2$ , en la déplaçant dans le champ électrostatique créé par  $q_1$ , l'opérateur fournit le travail  $W_{\text{op}} = q_2 V_1(M_2)$ , où  $V_1(M_2)$  désigne le potentiel (pris nul à l'infini) créé par  $q_1$  au point  $M_2$  :

$$V_1(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 M_1 M_2}.$$

Le travail de constitution du système est donc :

$$W_{\text{op}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 M_1 M_2}.$$

#### 5.2.1.2. Cas général

La force exercée par  $q_1$  sur  $q_2$  est  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{(M_1 M_2)^3}$ , opposée à la force exercée par  $q_2$  sur  $q_1$ . L'opérateur doit compenser ces deux forces.

Lorsqu'il déplace  $q_1$  de  $d\vec{M}_1$  et  $q_2$  de  $d\vec{M}_2$ , il fournit le travail élémentaire :

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{op}} &= \vec{f}_{\text{op} \rightarrow q_1} \cdot d\vec{M}_1 + \vec{f}_{\text{op} \rightarrow q_2} \cdot d\vec{M}_2 \\ &= -\vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{M}_1 \vec{M}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{M_1 M_2}\right). \end{aligned}$$

Le travail total fourni par l'opérateur s'identifie ainsi au résultat obtenu dans le cas particulier simple étudié précédemment.

### 5.2.2. Énergie potentielle d'interaction

L'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre les charges  $q_1$  et  $q_2$  est :

$$\mathcal{E}_{P12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2}.$$

En notant  $V_1(M_2)$  le potentiel créé par la charge  $q_1$  au point  $M_2$  et  $V_2(M_1)$  le potentiel créé par la charge  $q_2$  au point  $M_1$ , nous pouvons aussi écrire cette énergie sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{P12} &= q_1 V_2(M_1) = q_2 V_1(M_2) \\ &= \frac{1}{2} [q_1 V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2)]. \end{aligned}$$

# Application 6

## Interaction responsable de la cohésion d'un atome

1) Les solides et les liquides ont tous une masse volumique  $\mu$  de l'ordre de grandeur du  $\text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$  (à peu près 1 pour l'eau liquide et la glace, pour le mercure 13,6, ...). Quel est l'ordre de grandeur  $d$  de la taille d'un atome ou d'une molécule ?

2) L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène (dans son état fondamental) est égale à 13,6 eV.

Pour rendre compte, au moins en première approximation, de la structure de l'atome, faudra-t-il invoquer les forces de gravitation (la constante de gravitation vaut  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$ , et la masse de l'électron est  $m_e = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ ), l'interaction électromagnétique, ou bien les interactions forte ou faible (de portée très réduite, de l'ordre de  $10^{-15} \text{ m}$ ) ?

1) Les liquides et les solides sont extraordinairement peu compressibles, les atomes étant « au contact » à l'intérieur de ces milieux. La masse molaire  $M$  des corps cités en exemple est de l'ordre de quelques dizaines de grammes ( $18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  pour l'eau).

Assimilant l'espace occupé par un atome ou une molécule simple à un volume de l'ordre de  $d^3$ , nous évaluons  $d$  en écrivant :

$\frac{M}{\mu} = \text{volume occupé par une mole} \approx N_A d^3$ , soit :

$$d \approx \left( \frac{10 \cdot 10^{-3}}{10^3 \times 6 \cdot 10^{23}} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 10^{-10} \text{ m}.$$

(Nous savons, en effet, que la taille d'un atome ou d'une molécule élémentaire est de l'ordre de  $10^{-10} \text{ m}$ .)

2) Imaginons un électron se déplaçant au voisinage d'un proton, à une distance de l'ordre de  $10^{-10} \text{ m}$  telle que les interactions forte et faible soient négligeables ; il nous reste à comparer les ordres de grandeur des énergies d'interaction gravitationnelle et électromagnétique avec l'ordre de grandeur caractéristique donné par l'énergie d'ionisation de l'atome.

Calculons donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{P(électromagnétique)}} &\approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \\ &\approx 2 \cdot 10^{-18} \text{ J} \approx 10 \text{ eV}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{P(gravitationnelle)}} &\approx \frac{2 \cdot 10^{-30} m_e^2 G}{d} \\ &\approx 10^{-57} \text{ J} \approx 6 \cdot 10^{-39} \text{ eV}. \end{aligned}$$

Il faudra donc bâtir un modèle d'atome où les charges positives du noyau et le nuage électronique environnant sont liés par l'interaction électromagnétique.

## 6 Conducteurs en équilibre électrostatiques et condensateurs

### 6.1. Conducteurs en équilibre électrostatique

Un conducteur est un corps qui contient des *charges libres*, c'est-à-dire des particules chargées capables de se déplacer sous l'action de forces appliquées. En électrostatique, la seule force considérée est la force électrostatique :  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

Un conducteur est en *équilibre électrostatique* quand ses charges libres n'ont aucun mouvement d'ensemble dans un référentiel lié au conducteur :

**Le champ électrostatique  $E(P)$  est alors nul dans tout le volume du conducteur.**

Il est possible de démontrer (et nous admettrons le résultat) que :

**En un point  $P$  situé à l'intérieur d'un conducteur, la densité volumique de charge  $\rho(P)$  est nulle dans un conducteur en équilibre électrostatique.**

**La charge d'un conducteur en équilibre électrostatique est donc superficielle et elle est caractérisée par la densité surfacique de charges  $\sigma(Q)$ .**

Notons  $\sigma(Q)$  et  $\vec{n}(Q)$  respectivement la densité surfacique et le vecteur unitaire de la normale sortante en  $Q$  pris à la surface du conducteur en équilibre électrostatique. Considérons, en outre, les points  $M$  et  $P$  au voisinage immédiat de  $Q$ , situés sur le support de  $\vec{n}(Q)$ , le premier à l'extérieur et le second à l'intérieur du conducteur (doc. 16). À la traversée de la surface en  $M$ , le champ subit une discontinuité (cf. chapitre 2, § 4.4) :

$$\vec{E}(M) - \vec{E}(P) = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{n}(Q).$$

Comme  $\vec{E}(P) = 0$ , il en résulte que :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{n}(Q), M \text{ étant à l'extérieur, au voisinage immédiat de } Q.$$

**En un point  $M$  situé au voisinage immédiat d'un point  $Q$  de la surface extérieure d'un conducteur, où la densité surfacique est  $\sigma(Q)$ , le champ vaut :**

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{n}(Q).$$

Par ailleurs, de la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$  nous en déduisons que *le potentiel  $V(M)$  est constant dans un conducteur en équilibre électrostatique*. La continuité du potentiel à la traversée des surfaces chargées, nous permet d'affirmer que :

**La surface d'un conducteur est une surface équipotentielle.**

Les lignes de champ sont donc normales à la surface des conducteurs en équilibre électrostatique.

Sur le document 17, un conducteur porté au potentiel  $V$  est placé en présence d'une charge ponctuelle  $Q > 0$ . À l'équilibre électrostatique, on observe sur le conducteur une ligne neutre ( $\sigma = 0$ ) (en pointillés) séparant une région où  $\sigma < 0$  (en bleu) d'une autre où  $\sigma > 0$ . Concernant le conducteur, on voit que les lignes de champ partent des régions chargées positivement et qu'elles aboutissent sur des régions chargées négativement.

## 6.2. Condensateur plan

Considérons un ensemble de deux plaques métalliques parallèles ( $A_1$ ) et  $A_2$ , reliées à une source de tension constante  $U = V_1 - V_2$ . Notons  $e$  la distance entre les deux plaques et  $S$  l'aire des surfaces en regard (doc. 18).

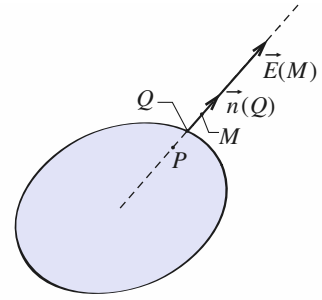
Quant  $e$  est faible devant les dimensions latérales des plaques, cet ensemble des deux plaques est appelé *condensateur* et les plaques métalliques baptisées *armatures*.

Dans ces conditions, nous constatons que le champ est beaucoup plus intense dans la région interarmatures. Pour la suite, nous négligerons les effets de bord, c'est-à-dire les effets liés à la présence d'un champ faible à l'extérieur du condensateur. Cette approximation est excellente dans les conditions où nous la faisons.

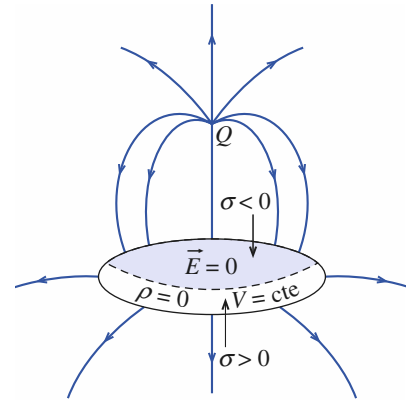
Cela étant, nous observons que les lignes de champ sont parallèles, ce qui est la caractéristique d'un *champ uniforme* :  $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$  ( $E_z = \text{cte}$ ).

En outre, les lignes de champ partent de l'une des armatures pour aboutir sur l'autre, cela signifie que les densités surfaciques des deux faces en regard sont de signes opposés. Comme le champ est uniforme, cela signifie plus précisément que ces densités surfaciques sont uniformes et opposées.

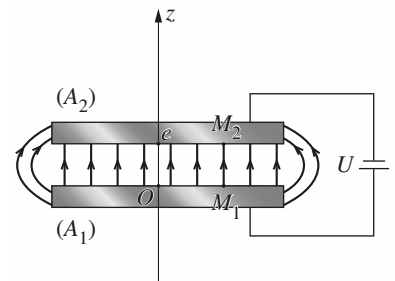
**Les armatures d'un condensateur portent, sur leurs faces en regard, des charges opposées.**



**Doc. 16.**  $\vec{E}(M) = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{n}(Q)$ .  
 $M$  est au voisinage immédiat de  $Q$ .



**Doc. 17.** Influence d'une charge  $Q (> 0)$  sur un conducteur.



**Doc. 18.** Condensateur plan.

Dans le cas du *document* 18, notons  $q$  la charge positive de l'armature ( $A_1$ ), il vient :

$$q = \sigma S = \varepsilon_0 E_z S .$$

La circulation du champ électrostatique entre les deux plaques, calculée le long d'une ligne de champ, s'écrit :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_z \int_0^z dz = E_z e .$$

En éliminant  $E_z$  entre les deux relations précédentes, il vient :

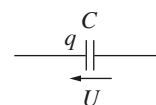
$$q = \frac{\varepsilon_0 S}{e} U .$$

**Les charges  $\pm q$  des armatures d'un condensateur sont proportionnelles à la tension  $U$  appliquée entre les armatures.**

Le facteur de proportionnalité  $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$  est appelé **capacité du condensateur plan**. Il s'évalue en farad (F).

#### Remarque

Lorsqu'on utilise la relation  $q = CU$ , il convient de rappeler sur le symbole du condensateur (*doc. 19*) la définition de  $U$  (flèche de tension) et l'armature portant la charge  $q$  (armature associée à l'extrémité de la flèche des tensions).



**Doc. 19.** Symbole d'un condensateur.



### ● CIRCULATION DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

• La circulation du champ électrostatique est conservative : la circulation du champ électrostatique sur un contour (courbe fermée) est nulle :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

### ● POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE

La différence de potentiel entre deux points  $A$  et  $B$  est :  $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ .

Le potentiel électrostatique est défini à une constante près.

Le champ électrostatique est invariant de jauge, c'est-à-dire de la référence du potentiel.

### ● CHAMP DE GRADIENT

Le champ électrostatique est un champ de gradient s'écrivant :  $\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}_M V(M)$ .

Un champ de vecteur  $\vec{E}$  à circulation conservative est un champ de gradient.

Le champ est perpendiculaire aux surfaces équipotentiels et les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

### ● POTENTIEL D'UNE DISTRIBUTION D'EXTENSION FINIE

L'expression intégrale du potentiel, s'annulant à l'infini, créé par une distribution de charges  $\mathcal{D}$  d'extension finie est de la forme :

$$V(M) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q_P}{PM}.$$

Le potentiel est continu quand il est défini.

### ● ÉNERGIE POTENTIELLE

L'énergie potentielle d'interaction entre une charge  $q$  et un champ électrostatique  $\vec{E}$  créant le potentiel  $V$  est :

$$\mathcal{E}_P = qV.$$

L'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre deux charges  $q_1$  et  $q_2$  en  $M_1$  et  $M_2$  est :

$$\mathcal{E}_{P12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 M_1 M_2}.$$

### ● CONDUCTEURS EN ÉQUILIBRE ÉLECTROSTATIQUES ET CONDENSATEURS

Le champ électrostatique  $E(P)$  est alors nul dans tout le volume du conducteur.

En un point  $P$  situé à l'intérieur d'un conducteur, la densité volumique de charge  $\rho(P)$  est nulle pour un conducteur en équilibre électrostatique.

La charge d'un conducteur en équilibre électrostatique est superficielle et elle est caractérisée par la densité surfacique de charges  $\sigma(Q)$ .

En un point  $M$  situé au voisinage immédiat d'un point  $Q$  de la surface extérieure d'un conducteur, où la densité surfacique est  $\sigma(Q)$ , le champ vaut :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{n}(Q).$$

La surface d'un conducteur est une surface équipotentielle.

Les armatures d'un condensateur portent, sur leurs faces en regard, des charges opposées ; les charges  $\pm q$  des armatures d'un condensateur sont proportionnelles à la tension  $U$  appliquée entre les armatures.

La capacité d'un condensateur plan de surface  $S$  et d'épaisseur  $e$  est égale à :  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ , elle s'évalue en farad (F).



# Contrôle rapide

## Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Établir l'expression du potentiel  $V(M)$  (s'annulant à l'infini) créé en  $M$  par une charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$ .
- ✓ Pourquoi le champ  $\vec{E}(M)$  est-il à circulation conservative ?
- ✓ Une distribution de charges crée dans l'espace un potentiel  $V(x) = -E_0x$ . Quelles sont les surfaces équipotentielles de cette distribution et quel est le champ  $\vec{E}(M)$  créé ?
- ✓ Démontrer que les lignes de champ coupent orthogonalement les surfaces équipotentielles.
- ✓ Établir l'expression de l'énergie d'interaction  $\mathcal{E}_P$  entre une charge  $q$  et un champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  créant un potentiel  $V(M)$ .
- ✓ Établir l'expression de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_P$  de deux charges  $q_1$  et  $q_2$  placées respectivement en  $M_1$  et  $M_2$ .

## Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Deux surfaces équipotentielles peuvent se couper dans une région où le champ est défini et non nul.  
☐ Vrai ☐ Faux
2. À la traversée d'une surface chargée, le potentiel subit une discontinuité.  
☐ Vrai ☐ Faux
3. Dans un champ de potentiel  $V(M)$ , l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_P$  d'un système de deux charges  $q_1$  et  $q_2$ , placées respectivement en  $M_1$  et  $M_2$ , est :  
$$\mathcal{E}_P = q_1 V(M_1) + q_2 V(M_2).$$
☐ Vrai ☐ Faux
4. Le potentiel est défini à l'intérieur d'une distribution volumique d'extension finie.  
☐ Vrai ☐ Faux
5. Le potentiel est défini sur une distribution linéique.  
☐ Vrai ☐ Faux
6. La forme des surfaces équipotentielles est déterminée par les symétries des distributions de charges.  
☐ Vrai ☐ Faux
7. En un point  $M_0$  où le champ est nul, le potentiel  $V(M_0)$  est nul.  
☐ Vrai ☐ Faux
8. En un point  $M_0$  où le potentiel est nul, une charge ponctuelle  $q$  n'est soumise à aucune force.  
☐ Vrai ☐ Faux

► Solution, page 57.

# Exercices

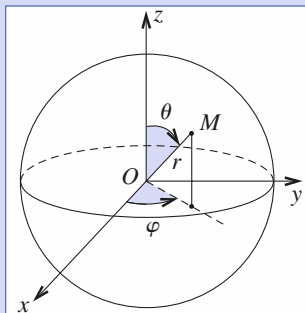
## 1 Potentiel créé par une circonférence chargée

Déterminer le potentiel créé en un point de son axe par une circonférence, de rayon  $R$ , uniformément chargée avec la densité  $\lambda$ . On prendra  $V_\infty = 0$ .

## 2 Potentiel créé au centre d'une sphère

Une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  porte une charge  $Q$  répartie avec la densité surfacique  $\sigma = g(\theta) h(\phi)$  en coordonnées sphériques.

Évaluer le potentiel électrostatique créé par la sphère en son centre.



## 3 Accélération d'électrons par une différence de potentiel

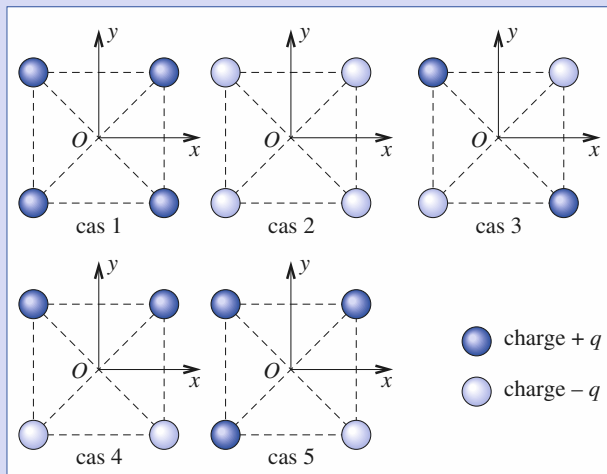
Les électrons émis par le filament chauffé d'un écran d'oscilloscope ont une vitesse négligeable et sont accélérés par une différence de potentiel  $V_0$ .

- 1) Quelle est la vitesse atteinte par les électrons accélérés ?
- 2) À quelle condition peut-on considérer le résultat précédent, obtenu par la mécanique classique, comme satisfaisant ?

Donnée :  $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ .

## 4 Les valeurs de $E$ et $V$ sont-elles liées ?

Soit quatre charges disposées au sommet d'un carré dont la longueur de la diagonale est  $2a$ . Calculer  $E$  et  $V$  au centre du carré dans les configurations suivantes :



## 5 Équilibre d'une charge dans le champ électrostatique de deux charges fixes

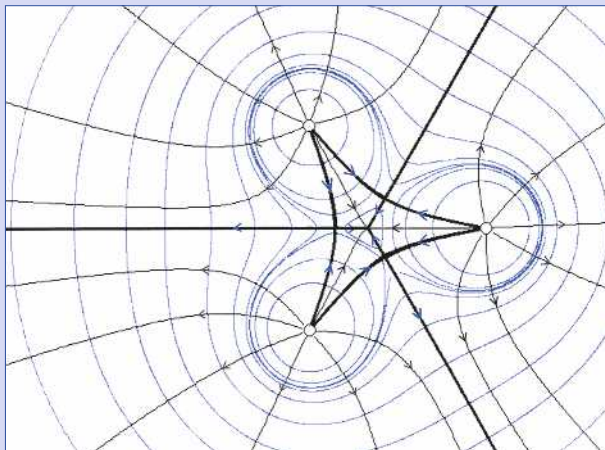
Soit un plan repéré par les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  et deux charges  $q$  fixes, identiques, placées en  $A(-a, 0)$  et  $B(a, 0)$ .

Étudier la position d'équilibre et la stabilité d'une charge  $Q$  pouvant se déplacer dans ce plan. On supposera  $q > 0$ .

## 6 Trois charges au sommet d'un triangle équilatéral

Considérons trois charges identiques ( $q > 0$ ) au sommet d'un triangle équilatéral de côté  $a$ .

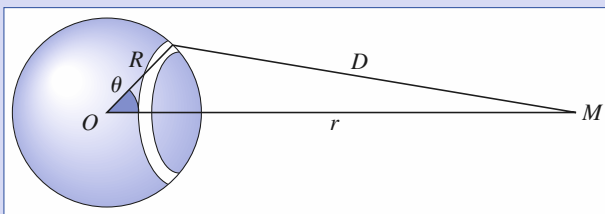
- 1) Trouver un point évident de champ nul. Quelle est la valeur du potentiel en ce point ?
- 2) La simulation suivante, représentant les lignes de champ et les équipotentiels, montre qu'il existe trois autres points de champ nul. Mesurer leurs positions et estimer la valeur du potentiel en ces points.



## 7\* Potentiel d'une sphère uniformément chargée en surface

Soit une sphère de rayon  $R$ , de centre  $O$  et de charge surfacique uniforme  $\sigma$ . La référence de potentiel sera prise nulle à l'infini.

- 1) Calculer le potentiel en  $O$ .



2) En utilisant le découpage suggéré sur le *schéma*, calculer le potentiel en un point  $M$  intérieur ou extérieur à cette sphère.

## 8 Surfaces équipotentielles d'une ligne bifilaire

Soit deux fils rectilignes infinis, parallèles à l'axe  $(Oz)$  et d'équations cartésiennes respectives  $x = +a$  et  $x = -a$ , de charges linéiques uniformes  $+\lambda$  et  $-\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). On note  $A_1$  et  $A_2$  leurs intersections respectives avec le plan  $(xOy)$ .

Un point  $M$  est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  et on note  $r_1$  et  $r_2$  les distances entre  $M$  et le premier fil d'une part,  $M$  et le second fil d'autre part.

Nous choisirons l'origine des potentiels au point  $O$  origine du repère. Caractériser en coordonnées cartésiennes la surface équipotentielle de cette distribution. Représenter qualitativement les lignes de champ et les traces des surfaces équipotentielles dans le plan  $(xOy)$ .

## 9\* Ligne dipolaire

Considérons comme dans l'exercice 8 une ligne bifilaire constituée de deux fils rectilignes infinis, parallèles à l'axe

$(Oz)$ , d'équations cartésiennes  $x = \pm a$  et de charges linéiques uniformes  $\pm \lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

La ligne dipolaire est obtenue comme la limite de cette distribution lorsque  $a$  tend vers zéro, en maintenant le produit  $(2a)\lambda$  constant. Nous noterons alors  $K = \frac{\lambda a}{\pi \epsilon_0}$ , la constante caractérisant cette ligne.

Un point  $M$  est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Pour obtenir le comportement limite de la ligne bifilaire, nous considérerons par la suite que la distance  $r$  du point  $M$  à l'axe  $(Oz)$  est très grande devant  $a$  et nous nous contenterons d'obtenir les expressions du potentiel et du champ de la ligne en ne retenant que l'ordre le plus bas non trivial de leurs développements en puissances du rapport  $\frac{a}{r}$ .

1) Exprimer dans ces conditions le potentiel créé par une ligne dipolaire.

2) En déduire son champ.

3) Quelles sont les équations des surfaces équipotentielles et des lignes de champ de la ligne dipolaire ? Les représenter qualitativement.

# Corrigés

**Solution du tac au tac, p. 55.**

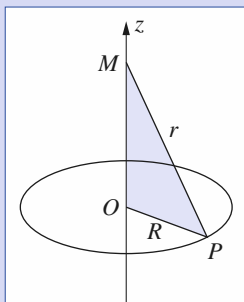
- |           |           |
|-----------|-----------|
| 1. Faux ; | 5. Faux ; |
| 2. Faux ; | 6. Vrai ; |
| 3. Faux ; | 7. Faux ; |
| 4. Vrai ; | 8. Faux.  |

1) Toutes les charges de la circonférence se trouvent à la même distance  $r$  du point  $M$ , donc  $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  où  $q = 2\pi R\lambda$  est la charge de la circonférence.

En explicitant l'expression précédente, il vient :

$$V(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}.$$

La fonction potentiel  $V(z)$  est une fonction paire, c'est-à-dire que le potentiel est le même en deux points symétriques par rapport au plan de la distribution.



2) Quelle que soit la répartition exacte des charges à la surface de la sphère, celles-ci sont toutes à la distance  $R$  du point  $O$ . Le potentiel créé en  $O$  est donc :

$$V(O) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

3) 1) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique aux électrons de charge  $-e$  :  $\Delta \mathcal{E}_K = W = -\Delta \mathcal{E}_P = +eV_0$ . La vitesse initiale étant négligeable, la vitesse atteinte après accélération vaut :

$$v = \left[ \frac{2eV_0}{m} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

2) Ce résultat reste valable tant que  $v$  reste très petite devant  $c$ . Nous devons donc vérifier que :  $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m v^2 \ll m c^2$ .

L'énergie  $eV_0$  fournie par le champ accélérateur doit rester faible devant l'énergie de masse de l'électron  $m_e c^2$ , soit :

# Corrigés

$$V_0 \ll \frac{m_e c^2}{e} = 5,11,10^5 \text{ V.}$$

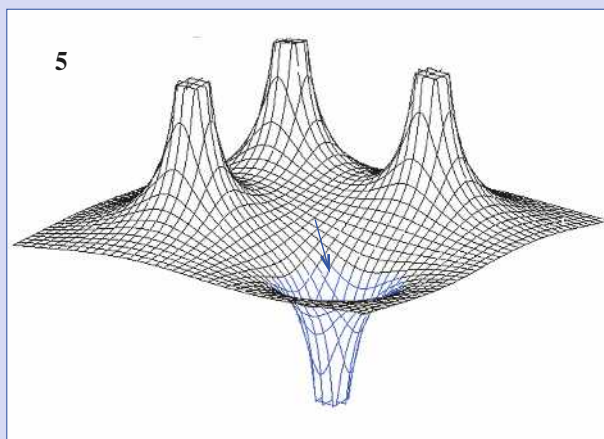
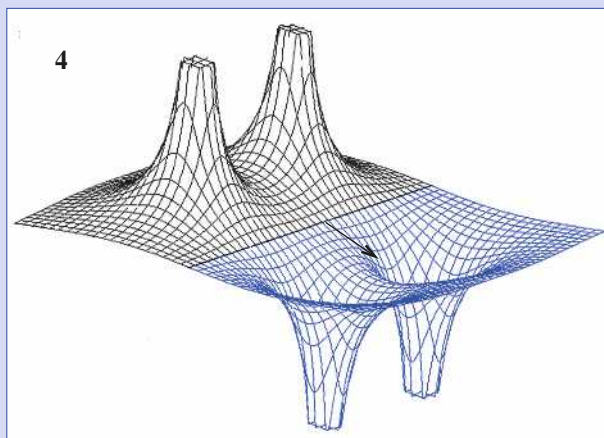
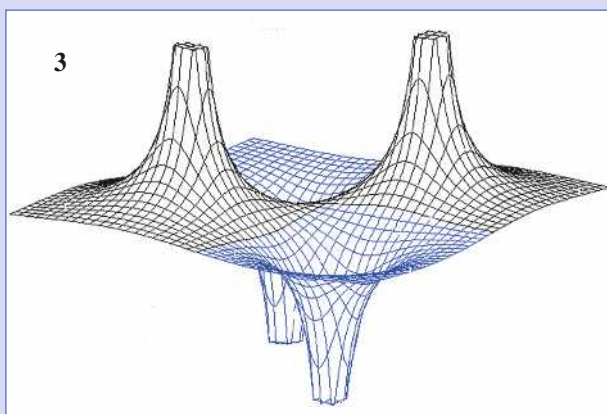
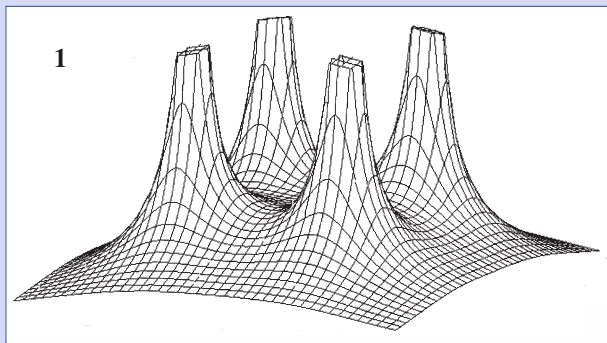
Les tensions accélératrices des oscilloscopes n'excédant pas quelques milliers de volts, le traitement classique est largement suffisant pour étudier le mouvement des électrons accélérés.

4

Pour déterminer le potentiel, nous posons  $V_\infty = 0$ .

cas étudié	potentiel au centre	champ électrostatique au centre	
		composante $E_x$	composante $E_y$
1	$4 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$	0	0
2	$-4 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$	0	0
3	0	0	0
4	0	0	$-2\sqrt{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$
5	$2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$	$\sqrt{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$	$-\sqrt{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$

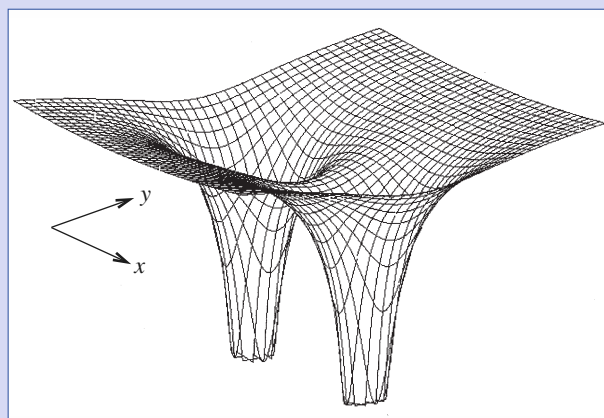
Sur les diverses représentations de potentiel suivantes, nous visualisons les cas où le champ  $\vec{E}$  est nul (extremum de potentiel, on dit aussi que le potentiel est stationnaire), et les cas où ce champ est non nul (il est alors dirigé vers les potentiels décroissants). Ces visualisations représentent aussi l'énergie potentielle d'une charge positive dans cette configuration de champ : cette particule se dirigera vers les potentiels décroissants.



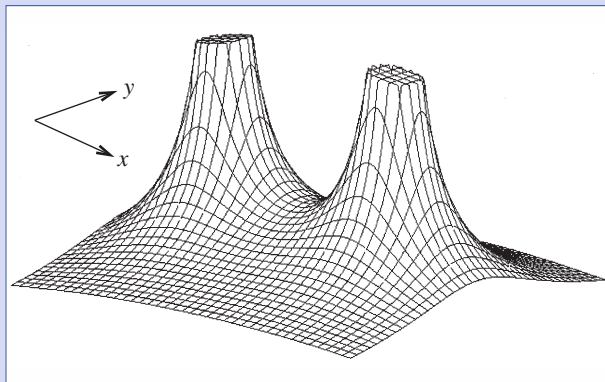
5

La position d'équilibre de la charge  $Q$  est en  $O(0, 0)$ , quel que soit le signe de cette charge : c'est le seul point de champ nul.

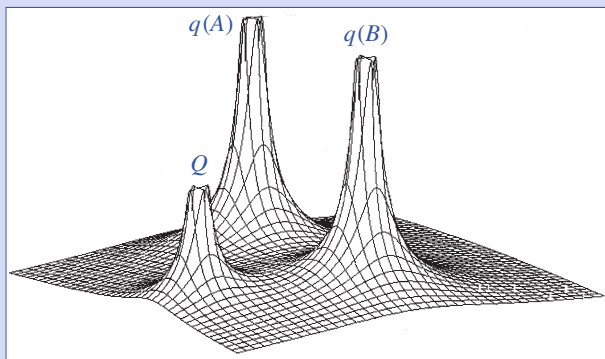
- $Q < 0$  : l'énergie potentielle de cette charge (égale à  $QV(M)$ , le potentiel  $V(M)$  étant celui créé par les deux charges  $q$  en  $A$  et  $B$ ) ne présente pas de minimum dans ce plan. À la rigueur, si le mouvement de la charge était limité à l'axe  $(Oy)$ , la position d'équilibre  $O$  serait stable.



- $Q > 0$  : l'énergie potentielle de cette charge ne présente pas de minimum dans ce plan. À la rigueur, si le mouvement de la charge était limité à l'axe (Ox), la position d'équilibre  $O$  serait stable.



**Remarque :** Le potentiel apparaissant dans les expressions précédentes est celui créé par les deux charges fixes  $q$  en A et B. Les documents permettent de visualiser l'allure de l'énergie potentielle  $QV(M)$  dans le plan (xOy). Une charge ne pouvant exercer de force sur elle-même, c'est bien le potentiel créé par les deux charges  $q$  en A et B qu'il faut considérer, et non pas le potentiel total représenté ci-dessous pour  $q$  et  $Q > 0$ .



- 6** 1) Au centre  $O$  du triangle, le champ électrostatique est nul, et le potentiel est égal à :

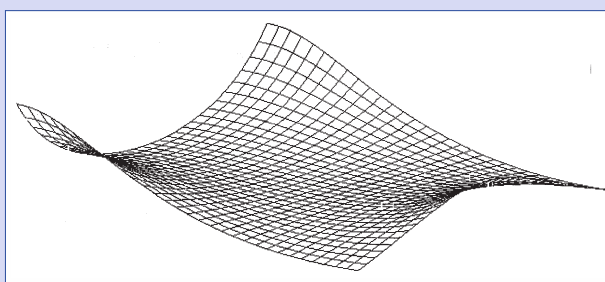
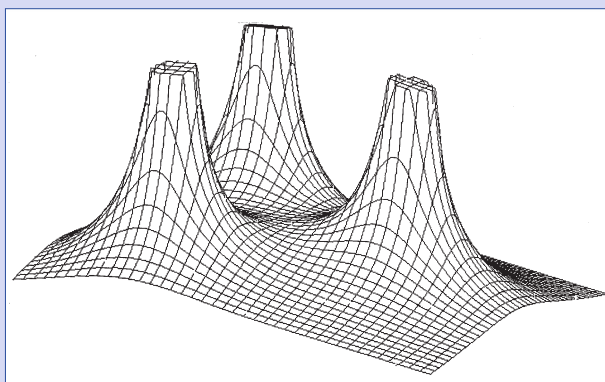
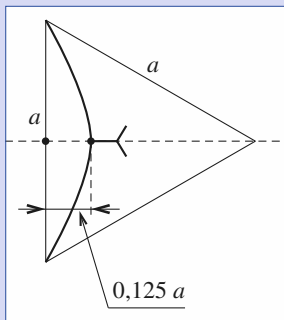
$$V(Q) = 3\sqrt{3} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} = 5,20 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

- 2) Les coordonnées de ces points sont (par lecture sur le schéma ci-contre) sur les hauteurs à  $0,125 a$  de la base (la valeur exacte est  $0,125 a$ ).

Le potentiel a pour valeur en ces points :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left( \frac{1}{0,875} + \frac{2}{\sqrt{0,25 + (0,125)^2}} \right) = 5,31 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Le potentiel varie très peu au centre du triangle.  
Les représentations suivantes permettent de le vérifier.



Il existe bien un minimum de potentiel.

- 7** 1) Le potentiel du point  $O$  est égal à  $V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$  (où  $Q$  représente la charge totale de la sphère), car toutes les charges sont à la distance  $R$  du point  $O$ .  
Soit  $V(O) = \frac{R\sigma}{\epsilon_0}$ .

- 2) Le potentiel est donné par la formule :

$$\begin{aligned} V(M) &= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{ds}{D} = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{R d\theta \cdot 2\pi R \sin \theta}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \theta + R^2}} \\ &= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \left[ \frac{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \theta + R^2}}{rR} \right]_{\theta=0}^{\pi} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r} (|r+R| - |r-R|) \end{aligned}$$

$V(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$  (constant) à l'intérieur de la sphère : le champ électrostatique est

donc nul à l'intérieur de cette sphère ;  $V(M) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$  à l'extérieur.

Remarquons la continuité du potentiel à la traversée de la surface chargée. De plus, en notant  $Q = 4\pi R^2 \sigma$  la charge totale de la sphère, le potentiel à l'extérieur de la sphère est identique à celui créé par une charge ponctuelle  $Q$  placée en  $O$  :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

- 8** Compte tenu du choix d'origine des potentiels, et connaissant le potentiel créé par un fil rectiligne infini (cf. Application 1), le potentiel électrostatique créé par la ligne est :

$$V(M) = \left( \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \right) \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right).$$



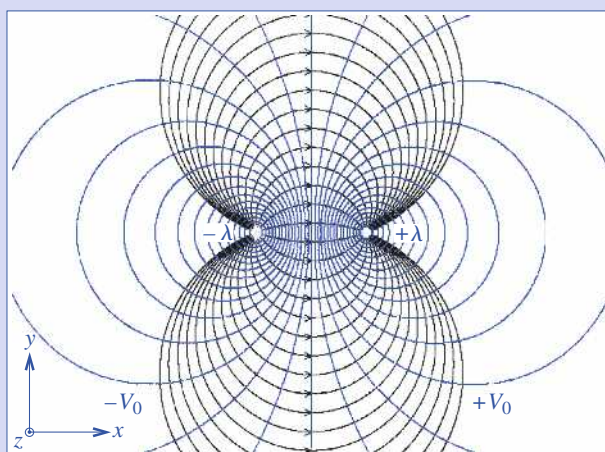
# Corrigés

Les surfaces équipotentielles caractérisées par  $\frac{r_2}{r_1} = \text{cte}$ , sont donc des cylindres d'axe parallèle à  $(Oz)$  si le potentiel est non nul ; l'équipotentielle  $V=0$  correspond au plan  $(yOz)$ .

Notant  $k = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$ , l'équation cartésienne du cylindre de potentiel  $V_0$  est :

$$\left[x + \frac{a(1+k^2)}{(1-k^2)}\right]^2 + y^2 = \left[\frac{2ak}{(1-k^2)}\right]^2.$$

Son centre est au point d'abscisse  $\frac{a(k^2+1)}{(k^2-1)}$  de l'axe  $(Ox)$ , son rayon vaut  $\frac{2a}{\left|\frac{k^2-1}{k}\right|}$ .

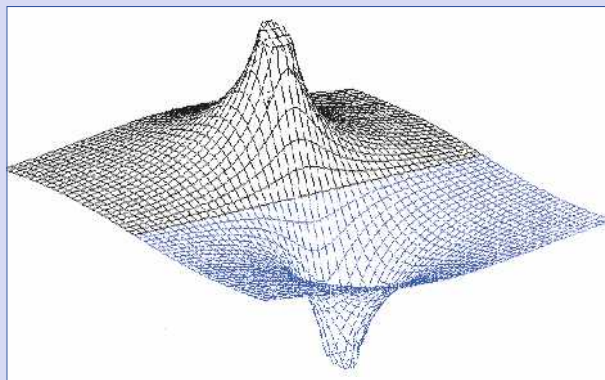


Les cylindres de potentiel  $V_0$  et  $-V_0$  sont symétriques l'un et l'autre par rapport au plan  $(yOz)$ , passer de l'un à l'autre revient à changer  $k$  en  $\frac{1}{k}$ . Lorsque  $k$  (donc le potentiel) tend vers  $+\infty$ , le cylindre tend vers le fil rectiligne chargé  $+\lambda$  ; lorsque  $k$  tend vers  $0$ , le cylindre tend vers le fil chargé  $-\lambda$ .

Les traces des cylindres équipotentiels sont, sur la figure, des cercles entourant l'un ou l'autre des fil. Les lignes de champ s'en déduisent graphiquement car elles sont parallèles au plan du document et perpendiculaires aux surfaces équipotentielles, orientées du fil chargé positivement vers le fil chargé négativement.

L'évolution du potentiel dans l'espace est présentée ci-dessous.

Nous visualisons l'équipotentielle  $V=0$  perpendiculaire à l'axe des deux fils.



9 1) Nous avons obtenu (exercice 8) le potentiel de la ligne :

$$V(M) = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\right) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

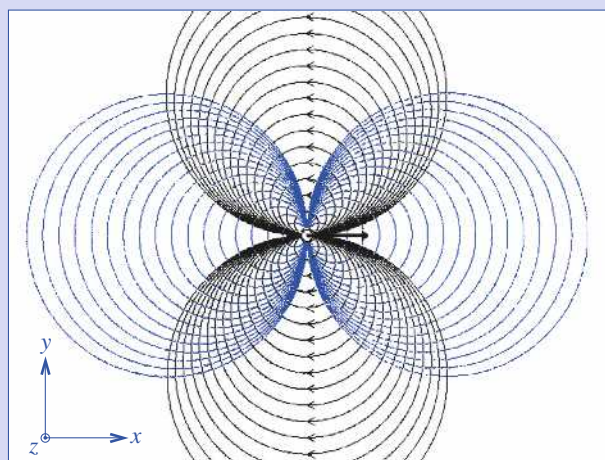
avec  $r_1 = [r^2 - 2r \cos \theta + a^2]^{\frac{1}{2}}$  et  $r_2 = [r^2 + 2r \cos \theta + a^2]^{\frac{1}{2}}$ .

Le développement du potentiel en puissance de  $\frac{a}{r}$  donne à l'ordre le plus bas non nul :

$$V = \frac{K \cos \theta}{r}.$$

2) Le champ électrostatique de la ligne dipolaire s'en déduit :

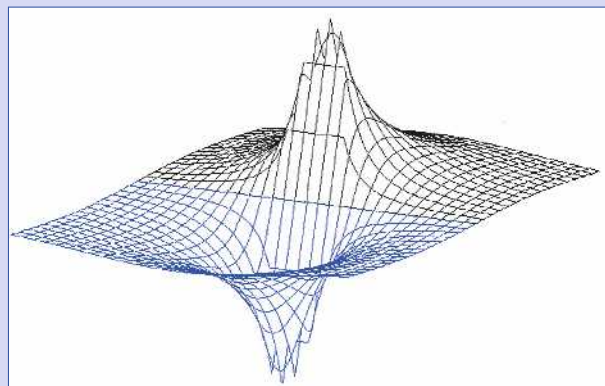
$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(\vec{r}) = K \left( \frac{\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^2} \right).$$



3) L'équation d'une équipotentielle est de la forme  $r = r_0 \cos \theta$ . Il s'agit d'un cylindre de base circulaire, d'axe parallèle à  $(Oz)$  et coupant  $(Ox)$ , tangent à  $(Oz)$ . Les lignes de champ sont contenues dans des plans parallèles à  $(xOy)$ . Pour un déplacement élémentaire  $d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$  le long d'une ligne de champ :

$$d\vec{r} \wedge \vec{E} = K \left( \frac{\sin \theta dr - r \cos \theta d\theta}{r^2} \right) \vec{e}_z = -K d\left(\frac{\sin \theta}{r}\right) \vec{e}_z$$

est nul, donc l'équation d'une ligne de champ est de la forme  $r = r_0 \sin \theta$ . Il s'agit d'un cercle d'axe parallèle à  $(Oz)$  et coupant  $(Oy)$ , tangent à  $(Oz)$ . La figure ci-dessus représente, dans un plan  $z = \text{cte}$ , quelques lignes de champ et traces de surfaces équipotentielles. Dans ce plan, le passage des lignes de champ aux traces des équipotentiels se fait par rotation de la figure de  $90^\circ$  autour de l'axe  $(Oz)$ .



La figure ci-dessus montre le tracé du potentiel créé par cette ligne dipolaire, très semblable à celui obtenu dans l'exercice 8.

# Le théorème de Gauss

# 4

## Introduction

*Le champ électrostatique (ou gravitationnel) est lié linéairement à ses sources par une loi en  $\frac{\vec{e}_r}{r^2}$ .*

*Son flux à travers une surface fermée s'exprime alors très simplement en fonction de la charge (ou la masse) contenue à l'intérieur de cette surface.*

*Ce résultat, que nous allons établir et exploiter, porte le nom de théorème de Gauss, astronome, physicien et mathématicien allemand (1777-1855).*

*Ses travaux, considérables, allèrent, pour la seule physique, de la mécanique (céleste) à l'électromagnétisme, en passant par l'optique géométrique.*

### O B J E C T I F S

- Théorème de Gauss.
- Utilisation.

### P R É R E Q U I S

- Champ électrostatique, champ gravitationnel
- Potentiel électrostatique.

## Flux du champ d'une charge

### 1.1. Vecteur surface

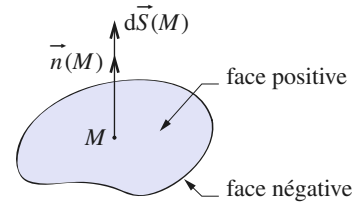
Considérons une surface élémentaire « plane »  $dS$  contenant le point  $M$ . Elle possède deux faces (l'une d'entre elle sera nommé *face négative* et l'autre *face positive*) et une orientation bien définie dans l'espace.

Pour décrire complètement une telle surface, nous devons distinguer ses deux faces et indiquer son orientation. Pour ce faire, nous associerons à tout élément de surface  $dS$  un vecteur unitaire  $\vec{n}(M)$  dont la direction est normale à la surface  $dS$  et dont le sens est celui qui amène de la face négative à la face positive (doc. 1a).

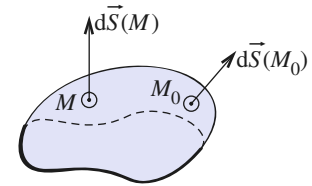
Une description plus complète, nous conduit à introduire un vecteur surface élémentaire  $d\vec{S}(M) = \vec{n}(M)dS$ , dont la norme est égale à l'aire de chacune des faces de  $dS$ .

Lorsque la surface n'est plus élémentaire, les orientations des éléments de surface  $d\vec{S}(M)$  sont définies par continuité à partir de l'orientation de l'un d'entre eux  $d\vec{S}(M_0)$  (doc. 1b).

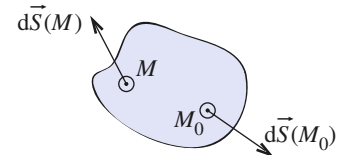
Dans le cas d'une surface fermée (doc. 1c), les vecteurs unitaires  $\vec{n}(M)$  sont toujours dirigés vers l'extérieur (normale sortante).



Doc. 1a. Définition du vecteur surface élémentaire  $d\vec{S}(M)$ .



Doc. 1b.



Doc. 1c. Pour une surface fermée, la normale est dirigée vers l'extérieur.

### 1.2. Flux du champ électrostatique

#### 1.2.1. Définition

Soit  $\vec{E}(M)$  le champ électrostatique créé en  $M$  par une certaine distribution de charges  $\mathcal{D}$ . Le flux élémentaire de  $\vec{E}(M)$  à travers  $d\vec{S}(M)$  est le scalaire  $d\phi$  défini par :

$$d\phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M).$$

Le flux de  $\vec{E}(M)$  à travers une surface ( $S$ ) s'obtient par intégration de  $d\phi$  sur ( $S$ ) :

$$\Phi = \int_{(S)} d\phi.$$

#### 1.2.2. Flux créé par une charge ponctuelle

La charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$  (doc. 2), crée en  $M$  le champ  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$  dont le flux à travers  $d\vec{S}(M)$  est :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}(M)}{r^2}.$$

Pour interpréter le produit scalaire  $\vec{e}_r \cdot d\vec{S}$ , considérons la surface d'aire  $d\Sigma$ , projeté de  $dS$  sur un plan orthogonal à  $\vec{e}_r$ .  $d\Sigma$  représente également l'aire découpée sur une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r = OM$  par un cône de sommet  $O$  et qui s'appuie sur le contour définissant  $dS$ . L'aire  $d\Sigma$  est une aire algébrique, positive quand du point  $O$  on voit la face négative de  $dS$ , négative dans le cas contraire.

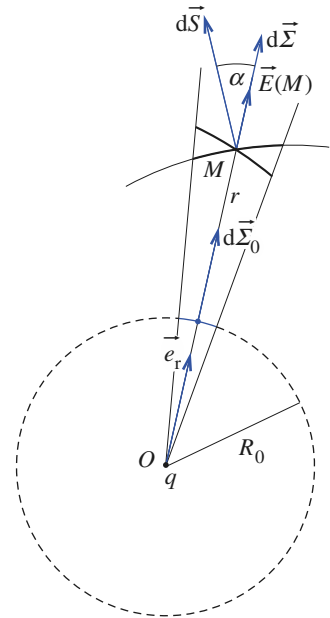
Donc nous pouvons écrire :  $\vec{e}_r \cdot d\vec{S} = dS \cos \alpha = d\Sigma$  soit :  $d\Phi = \frac{qd\Sigma}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

Considérons maintenant une sphère de rayon  $R_0$ , centrée en  $O$ . Le cône de sommet  $O$  qui s'appuie sur le contour de  $dS$  découpe sur cette sphère une pastille d'aire  $d\Sigma_0$  telle que  $\frac{d\Sigma_0}{R_0^2} = \frac{d\Sigma}{r^2}$ .

En effet, si nous multiplions par  $\lambda$  (coefficient positif quelconque) le rayon d'une sphère, toutes les dimensions mesurées sur celle-ci sont multipliées par  $\lambda$  et les aires par  $\lambda^2$  : l'aire découpée par un cône de centre  $O$  sur une sphère de centre  $O$  est proportionnelle au carré de son rayon.

Finalement :

$$d\Phi = \frac{qd\Sigma_0}{4\pi\epsilon_0 R_0^2}.$$



Doc. 2.  $d\Sigma$  est le projeté de l'aire élémentaire  $dS$  sur un plan orthogonal à  $\vec{e}_r$  et passant par  $M$ .



### 1.2.3. Flux à travers une surface fermée contenant la charge

Soit  $(S)$  une surface fermée entourant la charge  $q$  placée en  $O$  et  $(\Sigma)$  la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  (doc. 3). Le flux élémentaire du champ créé par la charge  $q$  à travers  $d\vec{S}(M)$  est :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}(M)}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma}{R^2}$$

où  $d\Sigma$  est l'élément de surface découpé, sur la sphère  $(\Sigma)$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ , par le cône de sommet  $O$  s'appuyant sur le contour de  $dS$ .

Par intégration sur  $(S)$ , il vient :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{(S)} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_{(S)} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

**Le flux (sortant) du champ créé par une charge  $q$ , à travers une surface fermée  $(S)$  contenant cette charge, est :**

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{(S)} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

### 1.2.4. Flux à travers une surface fermée ne contenant pas la charge

Soit  $q$  une charge placée en  $O$ , à l'extérieur de la surface fermée  $(S)$ . Un cône élémentaire de sommet  $O$  découpe sur  $(S)$  un nombre pair d'éléments de surface telles que  $dS_1, dS_2$ , etc. La moitié de ces surfaces présentent au point  $O$  leurs faces négatives et l'autre moitié leurs faces positives (doc. 4).

Associations ces éléments de surface deux à deux tels, par exemple,  $dS_1$  et  $dS_2$  et notons respectivement  $d\phi_1$  et  $d\phi_2$  les flux à travers ces surfaces. Ces flux élémentaires sont de signes opposés et, en outre, avec les notations du document 4, nous pouvons écrire ( $r_1 = OM_1$  et  $r_2 = OM_2$ ) :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}_1}{r_1^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma}{R^2} \quad \text{et} \quad d\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}_2}{r_2^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma}{R^2}$$

donc :  $d\phi_1 + d\phi_2 = 0$ . Par intégration sur  $(S)$ , il vient :

**Le flux du champ créé par une charge  $q$ , à travers une surface fermée  $(S)$  ne contenant pas cette charge, est nul :**

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{(S)} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = 0.$$

## 1.3. Flux du champ de gravitation

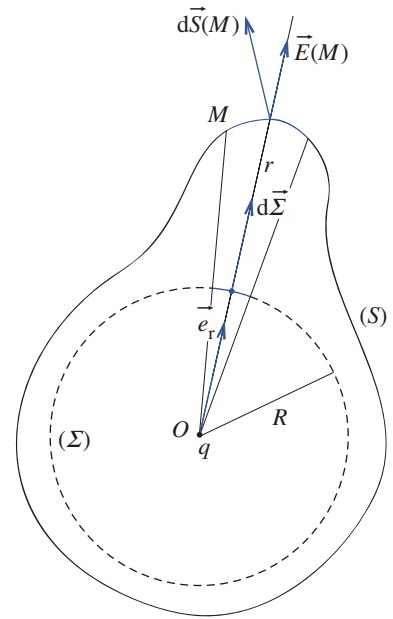
Les différentes expressions du flux de gravitation s'obtiennent par analogie avec les expressions correspondantes établies en électrostatique. Il suffit, d'une part, de remplacer les charges  $q$  par les masses  $m$  et, d'autre part, de remplacer la constante électrostatique  $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  par la constante de gravitation changée de signe  $-G$ .

Champ de gravitation créé par une masse  $m$  ponctuelle :

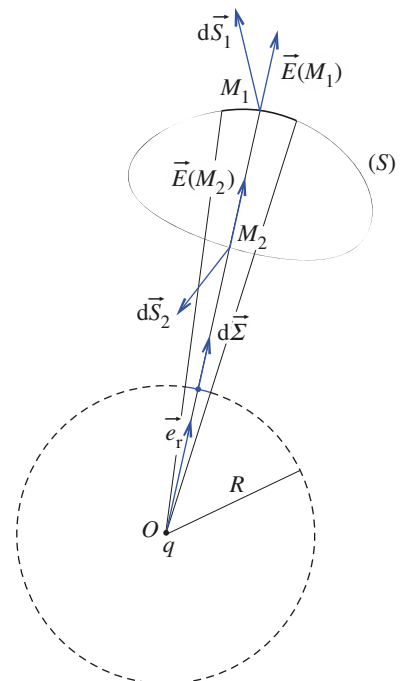
$$\vec{E}_g = -Gm \frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$

Flux élémentaire créé par une masse  $m$  ponctuelle :

$$d\Phi = \vec{E}_g \cdot d\vec{S}(M) = -Gm \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}(M)}{r^2} = -Gm \frac{d\Sigma}{R^2}.$$



**Doc. 3.** La charge  $q$  est à l'intérieur de la surface  $(S)$  fermée.



**Doc. 4.** La charge  $q$  est à l'extérieur de la surface  $(S)$  fermée.

Flux à travers une surface fermée contenant la masse  $m$  :

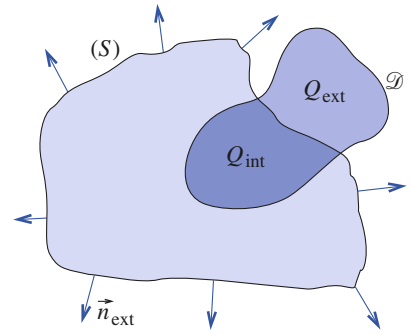
$$\Phi = -Gm \int_{(S)} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}(M)}{r^2} = -4\pi Gm.$$

Flux à travers une surface fermée ne contenant pas la masse  $m$  :

$$\Phi = -Gm \int_{(S)} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}(M)}{r^2} = 0.$$

## 2 Théorème de Gauss

Pour une distribution de charges  $\mathcal{D}$ , les résultats précédents permettent, par utilisation du principe de superposition, de calculer le flux sortant du champ créé à travers une surface fermée  $S$ . Pour une charge élémentaire  $dq$  de  $\mathcal{D}$ , la contribution au flux total est  $\frac{dq}{\epsilon_0}$  si  $dq$  est à l'intérieur de  $S$ , et nulle si  $dq$  est à l'extérieur de  $S$  (doc. 5).



**Doc. 5.** Le flux de  $\vec{E}$  (créé par  $Q_{\text{int}} + Q_{\text{ext}}$ ) à travers  $(S)$  ne dépend que de  $Q_{\text{int}}$ .

**Le flux sortant du champ d'une distribution  $\mathcal{D}$  à travers une surface fermée  $S$  est égal à la charge de  $\mathcal{D}$  située à l'intérieur de  $S$  divisée par  $\epsilon_0$  :**

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \text{ avec } d\vec{S} = \vec{n}_{\text{ext}} dS.$$

Pour le champ gravitationnel, le théorème de Gauss s'énonce de façon analogue :

**Le flux sortant du champ d'une distribution  $\mathcal{D}$  de masses à travers une surface fermée  $S$  est égal à la masse  $M_{\text{int}}$  située à l'intérieur de  $S$  multipliée par  $-4\pi G$  :**

$$\Phi_g = \oint_S \vec{e}_g \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}.$$

*Remarque :* Le caractère remarquable de ce résultat est dû seulement au fait que la dépendance du champ à la distance  $r$  d'observation est une loi en  $\frac{\vec{e}_r}{r^2}$ .

## 3 Conséquences du théorème de Gauss

### 3.1. Propriétés générales d'un champ électrostatique

Ayant postulé la loi de Coulomb et la linéarité, nous avons montré que le champ électrostatique était :

- un champ de circulation nulle sur un contour fermé, c'est-à-dire un champ de gradient ;
- un champ lié à ses sources (les charges) par le théorème de Gauss.

Il est possible de montrer que, réciproquement, ces deux propriétés permettent de retrouver la loi de Coulomb.

**Le théorème de Gauss et le caractère conservatif de la circulation permettent une étude complète du champ électrostatique.**

L'application suivante illustre l'étude du comportement local du champ à l'aide de ces outils.

# Application 1

## Champ au voisinage de l'axe de révolution d'une distribution

Nous avons déjà calculé le champ créé sur son axe par un disque de rayon  $R$  portant la charge surfacique uniforme  $\sigma$  :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left( 1 - \frac{|z|}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right) \vec{e}_z.$$

Cherchons maintenant à déterminer l'expression du champ à faible distance, notée  $r$ , de l'axe du disque. Nous nous contenterons d'établir l'écart entre ce champ et sa valeur sur l'axe à l'ordre un en  $r$ .

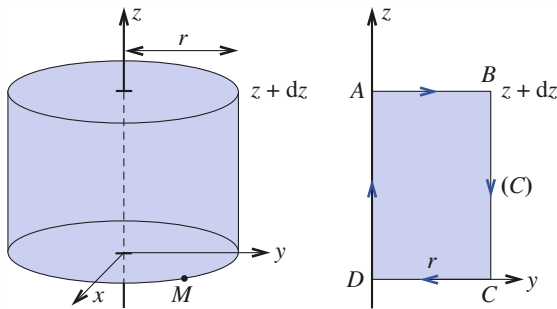
1) En utilisant les symétries du problème, simplifier a priori les composantes, en coordonnées cylindriques d'axe  $(z'z)$ , du champ électrostatique créé par le disque en un point quelconque.

2) En utilisant une surface de Gauss ayant la forme d'un petit cylindre d'axe  $(z'z)$ , de rayon  $r$  et de hauteur  $dz$  (doc. 6), montrer que la composante radiale du champ est liée à la valeur du champ sur l'axe par :

$$E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dE_{z(\text{axe})}}{dz}.$$

3) Considérant le petit contour rectangulaire  $(C)$  représenté sur le document 6, évaluer :

$$E_z(r, z) - E_{z(\text{axe})}.$$



Doc. 6.

1) Notons  $M$  le point de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Le plan contenant le point  $M$  et l'axe  $(z'z)$  est un plan de symétrie de la distribution de charges, par conséquent  $E_\theta = 0$ . La distribution possède de plus la symétrie de révolution autour de l'axe  $(z'z)$ , donc :

$$\vec{E} = E_r(r, z) \vec{e}_r + E_z(r, z) \vec{e}_z.$$

2) Appliquons le théorème de Gauss à la surface fermée proposée. Elle ne contient aucune charge créant le champ étudié. Nous obtenons, en ne considérant que les termes d'ordre d'approximation le plus simple :

$$\pi r^2 E_z(0, z + dz) - \pi r^2 E_z(0, z) + 2\pi r dz \cdot E_r(r, z) = 0,$$

ceci nous donne bien :

$$E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \left( \frac{dE_{z(\text{axe})}(z)}{dz} \right) + \dots$$

3) La circulation du champ électrostatique sur le contour fermé  $(C)$  est nulle. De plus, compte tenu du résultat précédent, nous constatons que les contributions à cette circulation des parties  $AB$  et  $CD$  du contour sont d'ordre deux en  $r$ . Nous en déduisons :

$$-E_z(r, z) dz + E_{z(\text{axe})}(z) dz = 0$$

à des termes d'ordre supérieur ou égal à deux en  $r$  près.

Ce résultat pourrait être obtenu par des considérations de symétrie : tout plan contenant l'axe  $(z'z)$  est un plan-miroir de la distribution, donc  $E_z$  est une fonction paire de  $y$  (donc de  $r$ ) et son développement limité ne peut pas contenir de termes en puissance impaire de  $y$  (donc de  $r$ ).

Regroupant les résultats de 2) et 3), nous pouvons écrire au voisinage de l'axe :

$$\vec{E}(r, z) = E_{z(\text{axe})}(z) \vec{e}_z + r \left[ -\left( \frac{1}{2} \frac{dE_{z(\text{axe})}(z)}{dz} \right) \vec{e}_r + 0 \vec{e}_z \right] + \dots$$

## 3.2. Conservation du flux du champ

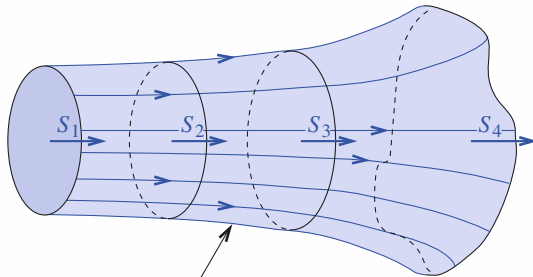
En l'absence de charges, le flux du champ électrostatique est conservatif : le flux est le même à travers toutes les sections d'un même tube de champ.

# Application 2

## En l'absence de charges, le flux du champ électrostatique est conservatif

1) Montrer qu'en l'absence de charges le flux du champ électrostatique est le même à travers toutes les sections  $S_1, S_2 \dots$  (doc. 7) d'un même tube de champ. Les surfaces étant toutes orientées dans le même sens.

2) Sur le document 7, où le tube de champ a tendance à s'évaser lorsque nous nous déplaçons en suivant les lignes de champ, quel est le comportement qualitatif attendu pour la norme du champ électrostatique à l'intérieur du tube ?



tube de champ

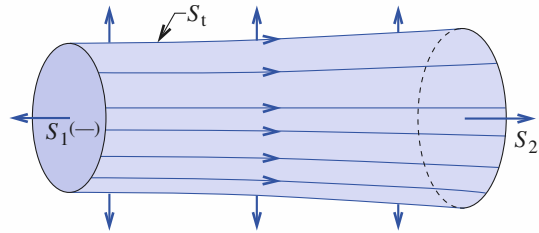
Doc. 7.

1) Considérons deux sections  $S_1$  et  $S_2$  du tube (doc. 8), et notons  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  les flux du champ à travers ces deux sections. Soit  $S$  la surface fermée (avec les normales orientées vers l'extérieur) constituée de la réunion de  $S_1^{(-)}$  (notée ainsi à cause du changement d'orientation),  $S_2$  et  $S_t$ , la surface du tronçon tube permettant de refermer le tout. Le champ étant tangent aux parois du tube, son flux à travers  $S_t$  est nul, donc :

$$\Phi_{(S)} = \Phi_1^{(-)} + \Phi_2 = -\Phi_1 + \Phi_2.$$

Par hypothèse, la surface  $S$  ne renferme aucune charge, donc  $\Phi_{(S)} = 0$  et  $\Phi_1 = \Phi_2$ . La conservation du flux du champ le long du tube vide de charges est ainsi prouvée.

2) Le flux est conservatif et si la section du tube augmente, la norme du champ doit diminuer.



Doc. 8.

## 3.3. Extrema du potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique ne possède pas d'extremum en dehors des charges.

# Application 3

## Existe-t-il des extrema de potentiel dans une zone sans charge ?

Montrer qualitativement que le potentiel électrostatique ne possède pas d'extremum en dehors des charges.

Imaginons une région vide de charges, où le potentiel électrostatique posséderait un extremum en un point  $M$ . Supposons qu'il s'agisse, par exemple, d'un maximum (au moins local). Les lignes de champ passant par le point  $M$  doivent toutes diverger à partir de celui-ci,

car elles sont orientées dans le sens des potentiels décroissants. Le flux du champ électrostatique à travers une petite surface fermée contenant le point est ainsi positif, ce qui contredit l'hypothèse d'absence de charges dans la région du point  $M$ . Ce raisonnement par l'absurde s'applique, de même, à un cas de potentiel minimal en  $M$  et prouve que le potentiel électrostatique ne possède pas d'extremum en dehors des charges.

# 4 Calcul d'un champ électrostatique à l'aide du théorème de Gauss

## 4.1. Principe du calcul

Le résultat du théorème de Gauss est remarquablement simple dans sa formulation. Pour une distribution de charges connue, on peut penser calculer le flux du champ à travers une surface fermée, puis en déduire l'expression du champ. Cette méthode est séduisante puisqu'elle permet de s'affranchir du calcul du champ (ou du potentiel) à l'aide d'expressions intégrales généralement assez contraignantes. Elle n'est toutefois envisageable que lorsque le lien entre le calcul du flux et le champ reste élémentaire : champ électrostatique d'expression déjà bien simplifiée, surface de géométrie simple..., c'est-à-dire lorsque la distribution de charges possède de bonnes symétries.

*Le calcul d'un champ électrostatique à l'aide du théorème de Gauss n'est en général envisageable que dans des cas de distributions de charges à symétries élevées tels que ceux développés ici.*

Dans ces conditions, le principe de calcul correspond à la démarche suivante :

**Le théorème de Gauss constitue un outil de calcul rapide du champ électrostatique créé par une distribution de charges possédant une symétrie élevée : après détermination de la forme du champ, à l'aide de considérations de symétrie, l'application du théorème de Gauss à une surface fermée, de géométrie adaptée aux symétries du problème, permet de déterminer l'amplitude du champ.**

### 4.1.1. Première étape : considérations de symétries

Il faut obtenir, à l'aide des symétries de la distribution, la forme du champ électrostatique :

- utilisation de plans de symétrie ou antisymétrie pour déterminer sa direction ;
- utilisation d'invariance par rotation ou translation pour réduire la dépendance de ses composantes vis-à-vis des coordonnées (un choix de coordonnées adapté à la symétrie du problème est évidemment indispensable).

### 4.1.2. Deuxième étape : choix de la surface de Gauss

La forme obtenue pour le champ détermine le choix d'une surface de Gauss rendant élémentaire le calcul du flux. Cette surface, dite de Gauss, doit être fermée et elle doit passer par le point  $M$  où on veut calculer le champ.

### 4.1.3. Troisième étape : application du théorème de Gauss

L'application du théorème de Gauss achève la détermination du champ électrostatique.

## 4.2. Distribution à symétrie plane

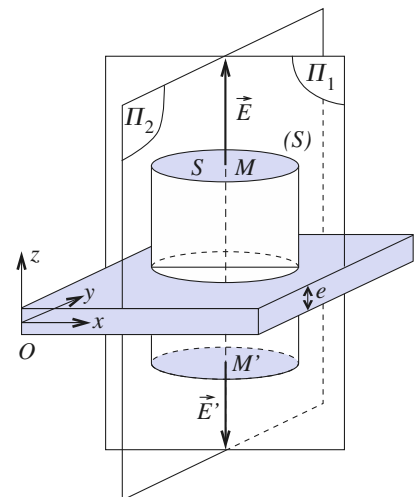
À titre d'exemple, nous nous intéressons à la détermination du champ créé par une couche plane infinie, d'épaisseur  $e$  et de charge volumique  $\rho$  uniforme (doc. 9).

### 4.2.1. Première étape : utilisation des symétries de la distribution

Celle-ci est invariante par symétrie par rapport aux plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  contenant le point  $M$  où nous cherchons à déterminer le champ, donc (doc. 10) :

$$\vec{E}(x, y, z) = E(x, y, z) \vec{e}_z.$$

L'invariance du problème par translation parallèlement à  $(Ox)$ , ou bien  $(Oy)$ , nous permet la simplification supplémentaire  $\vec{E}(x, y, z) = E(z) \vec{e}_z$ .



**Doc. 9.** Utilisation des symétries et choix de la « surface de Gauss ».  $M'$  est le symétrique de  $M$  par rapport au plan  $(xOy)$ .

Notons aussi que le plan  $(xOy)$  est un plan de symétrie de la distribution. Au point  $M'$ , symétrique du point  $M$  par rapport à ce plan, le champ  $\vec{E}'$  est symétrique du champ  $\vec{E}$  en  $M$  : la fonction  $E(z)$  est impaire :  $E(-z) = -E(z)$ .

#### 4.2.2. Deuxième étape : choix de la « surface de Gauss »

Une surface fermée ( $S$ ) permettant un calcul aisé du flux doit posséder des parties planes à  $z = \text{cte}$ , le caractère impair de  $E(z)$  nous conduisant naturellement au choix du document 9. Le flux du champ à travers cette surface fermée est :

$$\Phi = SE(z) - SE(-z) = 2SE(z).$$

#### 4.2.3. Troisième étape : application du théorème de Gauss

Appliquons le théorème de Gauss à cette surface :

- cas 1 :  $0 \leq |z| \leq \frac{e}{2}$  :  $2SE(z) = \frac{2\rho Sz}{\epsilon_0}$  ;
- cas 2 :  $|z| \geq \frac{e}{2}$  :  $2SE(z) = \frac{\rho Se}{\epsilon_0}$ .

Nous en déduisons :

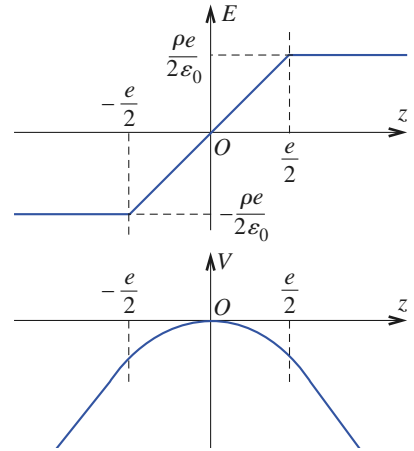
- si  $0 \leq |z| \leq \frac{e}{2}$  :  $\vec{E} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{e}_z$  ;
- si  $\frac{e}{2} \leq |z|$  :  $\vec{E} = \frac{\rho e}{2\epsilon_0} \text{signe}(z) \vec{e}_z$ ,

c'est-à-dire  $E(z > \frac{e}{2}) = \frac{\rho e}{2\epsilon_0}$  et  $E(z < -\frac{e}{2}) = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0}$ .

Nous pouvons en déduire le potentiel créé, en faisant par exemple le choix  $V=0$  sur le plan  $z=0$ .  $E_x$  et  $E_y$  étant nuls, le potentiel ne dépend que de la variable  $z$ , avec  $\frac{dV}{dz} = -E_z$ . Raccordant le potentiel par continuité aux extrémités des intervalles caractéristiques, nous avons :

- si  $0 \leq |z| \leq \frac{e}{2}$  :  $V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}$  ;
- si  $\frac{e}{2} \leq |z|$  :  $V = -\frac{\rho e(4|z| - e)}{8\epsilon_0}$ .

Et la fonction potentiel  $V(z)$  est paire (doc. 10).



Doc. 10. Champ  $E$  et potentiel  $V$  créés par une onde plane infinie d'épaisseur  $e$  et de charge volumique  $\rho$  uniforme.

## Application 4

1) Déterminer le champ créé par une nappe plane infinie de charge surfacique  $\sigma$  uniforme.

2) Reprenant l'expression du champ électrostatique créé sur son axe par un disque de rayon  $R$  portant une charge surfacique  $\sigma$  uniforme, évaluer la hauteur  $h$  maximale pour laquelle nous pouvons assimiler le disque à un plan infini sans commettre une erreur relative supérieure à 1 % pour le calcul du champ.

1) Les propriétés de symétrie utilisées pour le cas de la couche sont encore valables, donc :

$$\vec{E}(x, y, z) = E(z) \vec{e}_z, \text{ avec } E(-z) = -E(z).$$

L'application du théorème de Gauss au même type de surface nous donne  $E(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

Finalement  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{signe}(z) \vec{e}_z$ .

2) En un point d'abscisse  $z$  de l'axe du disque, nous avons obtenu :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{|z|}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right) \text{signe}(z) \vec{e}_z.$$

Nous pouvons confondre cette valeur avec :  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{signe}(z)$ ,

avec une précision relative inférieure à 1 % si  $|z| < h$ , avec  $\frac{h}{(R^2 + h^2)^{1/2}} = 0,01$ , soit :  $h \approx \frac{R}{100}$ .

### 4.3. Distribution à symétrie cylindrique

L'exemple de distribution à symétrie cylindrique que nous allons traiter correspond à un cylindre d'axe noté  $(Oz)$  et de rayon  $R$  à l'intérieur duquel se trouve une charge volumique uniformément répartie  $\rho$ .

#### 4.3.1. Première étape : utilisation des symétries de la distribution

En un point  $M$  de l'espace passent deux plans de symétrie de la distribution :  $\Pi_1$  qui contient le point  $M$  et l'axe  $(Oz)$ , et  $\Pi_2$  perpendiculaire à  $(Oz)$  qui contient le point  $M$  (doc. 12). Nous en déduisons, en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$  :

$$\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{e}_r.$$

Les invariances du problème par translation parallèlement à  $(Oz)$  et par rotation autour de cet axe amènent les simplifications supplémentaires  $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ .

#### 4.3.2. Deuxième étape : choix de la surface de Gauss

Une surface  $(S)$  cylindrique d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r$ , fermée par deux disques séparés par une hauteur arbitraire  $h$  (doc. 11), constitue une surface de Gauss adaptée à la géométrie du problème. Le flux du champ à travers cette surface fermée s'écrit simplement  $\Phi = 2\pi r h E(r)$ , puisque ce flux est nul à travers les deux disques.

#### 4.3.3. Troisième étape : application du théorème de Gauss

La charge intérieure à cette surface est :

$$Q_{\text{int}} = \rho \pi r^2 h, \text{ si } r < R \text{ et } Q_{\text{int}} = \rho \pi R^2 h, \text{ si } r > R.$$

Nous en déduisons :

- $r < R$  :  $\vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$  ;
- $r > R$  :  $\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$ .

Les inégalités pouvant être étendues au sens large puisque le champ créé par cette distribution volumique est continu.

*Remarque : Le calcul du champ à l'aide du théorème de Gauss est remarquablement simple. Pour un cylindre chargé de hauteur finie, le théorème de Gauss serait bien entendu applicable, mais malheureusement inutilisable (les plans parallèles à  $(xOy)$  ne sont plus des plans de symétrie de la distribution de charges).*

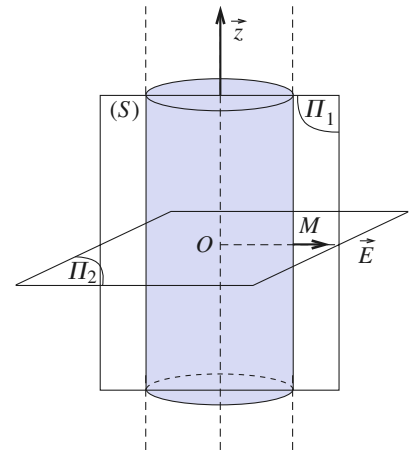
Utilisant  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) \vec{e}_\theta - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \vec{e}_z$ , nous obtenons

$V(r, \theta, z) = V(r)$ , et en raccordant la solution par continuité en  $r = R$  :

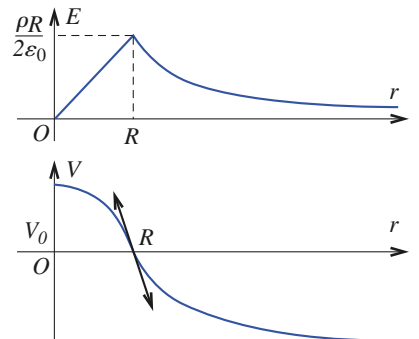
- $r < R$  :  $V = \frac{\rho(R^2 - r^2)}{2\epsilon_0} + V_0$  ;
- $r > R$  :  $V = -\left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\right) \ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0$ .

$V_0$  étant une constante arbitraire (indétermination du potentiel) ; notons qu'il est impossible de fixer  $V = 0$  à l'infini car il y a des charges à l'infini.

$E(r)$  et  $V(r)$  sont représentés sur le document 12. Une représentation de  $V(r)$  dans l'espace est donnée sur le document 13.



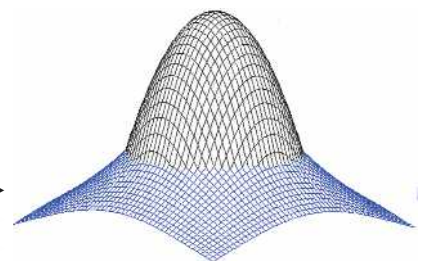
Doc. 11. Surface de Gauss pour une distribution à symétrie cylindrique.



Doc. 12. Champ et potentiel d'un cylindre infini ( $V = 0$  pour  $r = R$ ).

Doc. 13. ►

Potential créé par un cylindre uniformément chargé en volume. L'équipotentielle  $V = 0$  est choisie sur la surface du cylindre.





# Application 5

## Fil infini de charge linéique uniforme

Reprendre l'étude précédente avec un fil infini portant une densité linéique de charge uniforme.

Les considérations de symétrie conduisent encore à :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r \quad \text{et} \quad V(M) = V(r).$$

Appliquons le théorème de Gauss à la même surface fermée. Nous avons :  $E 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$  ; il vient alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r}.$$

Il y a des charges à l'infini, donc pour la détermination du potentiel, nous devons prendre une référence de potentiel nulle à distance finie (en  $r = a$  par exemple) ; cela donne :

$$V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{a}\right).$$

### Remarques

- Le champ n'est évidemment pas défini sur le fil, car cette distribution linéique correspond à une distribution volumique locale tendant vers l'infini.
- Comme précédemment, le théorème de Gauss est valable pour le champ électrostatique créé par un segment uniformément chargé, mais totalement inapplicable pour le calcul de ce champ !

# Application 6

## Cylindre infini de charge surfacique uniforme

Reprendre l'étude précédente pour un cylindre infini portant la charge surfacique uniforme  $\sigma$ .

Les considérations de symétrie conduisent encore à  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$  et  $V = V(r)$ . Appliquons le théorème de Gauss à la même surface fermée. Nous avons maintenant :

$$Q_{\text{int}} = 0, \text{ si } r < R \quad \text{et} \quad Q_{\text{int}} = 2\pi R h \sigma, \text{ si } r > R.$$

Il vient alors :

- $r < R$  :  $\vec{E} = \vec{0}$ . Il est remarquable de trouver que le champ est nul partout à l'intérieur de la cavité chargée en surface.
- $r > R$  :  $\vec{E} = \left(\frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}\right) \vec{e}_r$ .

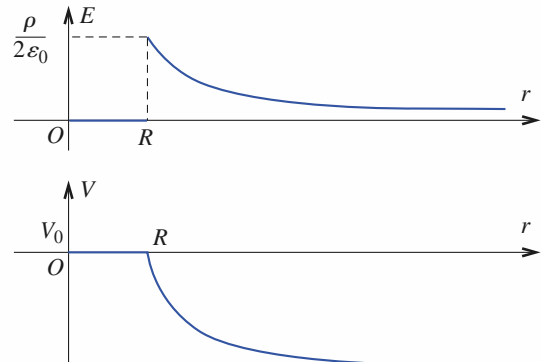
Les inégalités restent strictes, le champ électrostatique subissant la discontinuité normale (attendue !)  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  à la traversée de la surface chargée. Le potentiel s'en déduit :

- $r < R$  :  $V(r) = V_0$  ;
- $r > R$  :  $V(r) = V_0 + \left(\frac{\sigma R}{\epsilon_0}\right) \ln\left(\frac{R}{r}\right)$ .

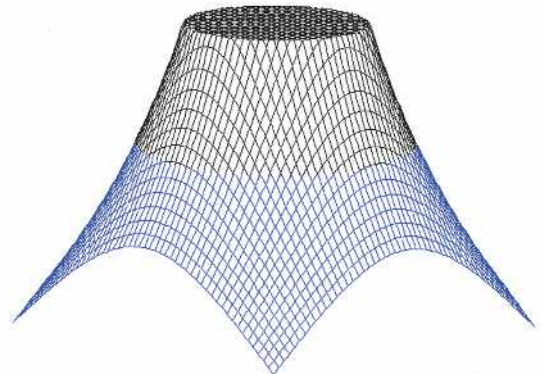
Remarquons que pour  $r = R$ , le champ électrique n'est pas défini : la répartition surfacique de charge correspond à une répartition volumique locale infinie.

Doc. 15. ►

Potential créé par un cylindre uniformément chargé en surface ( $\sigma > 0$ ). On visualise l'équipotentielle de potentiel  $V = 0$  pour  $r > R$  ( $V_0 > 0$ ).



Doc. 14. Par convention  $V = V_0$  pour  $r = R$ .



► Pour s'entraîner : ex. 1 et 7.



#### 4.4. Distribution à symétrie sphérique

L'exemple type traité correspond à une charge volumique  $\rho$  distribuée uniformément à l'intérieur d'une boule de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Nous noterons :

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

la charge totale de cette boule (doc. 16).

##### 4.4.1. Première étape : utilisation des symétries de la distribution

Considérant deux plans perpendiculaires  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  contenant le centre de symétrie  $O$  et le point  $M$  où nous cherchons à déterminer le champ, nous obtenons en coordonnées sphériques  $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$  (doc. 16).

L'invariance de la distribution par rotation autour de tout axe contenant le centre  $O$  apporte la simplification  $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r) \vec{e}_r$ .

##### 4.4.2. Deuxième étape : choix de la surface de Gauss

La surface fermée adaptée à cette géométrie est naturellement une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Le flux du champ à travers cette surface est  $\Phi = 4\pi r^2 E(r)$ .

##### 4.4.3. Troisième étape : application du théorème de Gauss

La charge intérieure à cette surface est :

$$Q_{\text{int}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho, \text{ si } r < R \text{ et } Q_{\text{int}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho, \text{ si } r > R.$$

Nous obtenons ainsi le champ continu de cette distribution volumique :

- $r \leq R$  :  $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{e}_r$  ;
- $r \geq R$  :  $\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ .

Notons qu'à l'extérieur de la boule chargée, le champ créé est identique à celui d'une charge  $q$  placée au centre de la sphère.

Remarque :  $\rho$  étant fini, le champ est partout continu et défini, même pour  $r = R$ .

Le potentiel, continu en  $r = R$ , s'en déduit :

- $r \leq R$  :  $V(r) = \frac{\rho(3R^3 - r^2)}{6\epsilon_0} + V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3R^2 - r^2}{2R^3} + V_0$  ;
- $r \geq R$  :  $V(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + V_0$ .

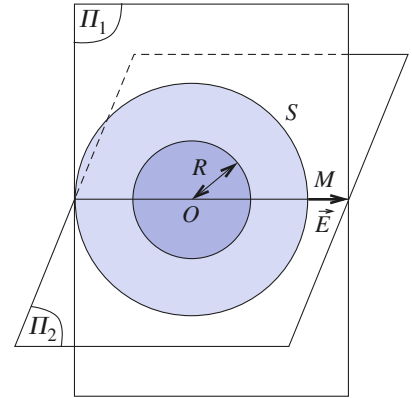
Aucune charge ne se trouvant à l'infini, nous pouvons convenir que  $V(r \rightarrow \infty) = 0$  d'où  $V_0 = 0$ .

$E(r)$  et  $V(r)$  sont représentés sur le document 17.

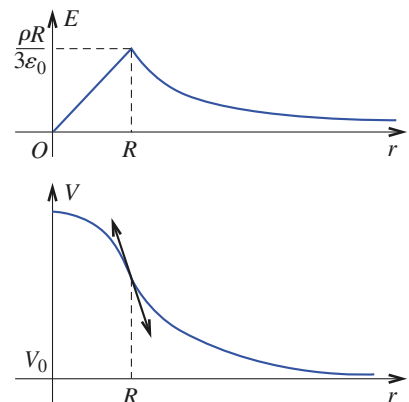
##### 4.4.4. Cas d'une distribution de masses

Le cas d'une distribution de masses à symétrie sphérique se traite de façon analogue. Notons  $\mu$  la masse volumique uniforme à l'intérieur d'une sphère de rayon  $R$  et  $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \mu$  la masse totale de cette sphère. En remplaçant  $q$  par  $m$  et

$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  par  $-G$ , il vient :



Doc. 16. Surface de Gauss sphérique par une distribution à symétrie sphérique.



Doc. 17. Champ et potentiel d'une boule chargée.

• Champ créé par cette distribution volumique :

$$r \leq R : \vec{E}_g = -\frac{4\pi G}{3} \mu r \vec{e}_r = -Gm \frac{r}{R^3} \vec{e}_r.$$

$$r \geq R : \vec{E}_g = -\frac{4\pi G}{3} \mu \frac{R^3}{r^2} \vec{e}_r = -Gm \frac{1}{r^2} \vec{e}_r.$$

• Potentiel créé par la sphère :

$$r \leq R : V = -\frac{2\pi G}{3} \mu (3R^2 - r^2) + V_0 = -Gm \frac{(3R^2 - r^2)}{2R^2} + V_0.$$

$$r \geq R : V = -\frac{4\pi G}{3} \mu \frac{R^3}{r} + V_0 = -Gm \frac{1}{r} + V_0.$$

À l'extérieur de la sphère, le champ et le potentiel de gravitation sont identiques à ceux créés par une masse  $m$  placée au centre de la sphère.

## Application 7

### Sphère de charge surfacique uniforme

Reprendre cette étude pour une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  portant la charge surfacique uniforme  $\sigma$ . Sa charge est notée  $q = 4\pi R^2 \sigma$ .

La symétrie sphérique du problème conduit à :

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r \text{ et } V = V(r).$$

L'application du théorème de Gauss à la sphère de rayon  $r$ , avec  $Q_{\text{int}} = 0$ , si  $r < R$  et  $Q_{\text{int}} = 4\pi R^2 \sigma = q$ , si  $r \geq R$ .

Il en résulte que :

$$\bullet \ r \leq R : \vec{E} = \vec{0};$$

$$\bullet \ r \geq R : \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

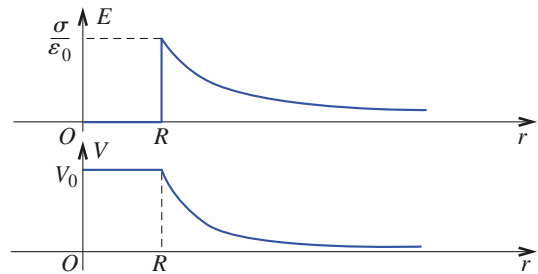
La discontinuité normale  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  du champ est obtenue en  $r = R$ .

Le potentiel, continu en  $r = R$ , s'en déduit :

$$\bullet \ r \leq R : V(r) = V_0 + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R};$$

$$\bullet \ r \geq R : V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + V_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} + V_0.$$

On pourrait, ici, choisir  $V = 0$  à l'infini ce qui donnerait  $V_0 = 0$ .



Doc. 18. Allures de  $E(r)$  et  $V(r)$ .

► Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.

## C Q F R

## ● THÉORÈME DE GAUSS

- Le flux sortant du champ d'une distribution  $\mathcal{D}$  à travers une surface fermée ( $S$ ) est égal à la charge de  $\mathcal{D}$  située à l'intérieur de  $S$  divisée par  $\epsilon_0$  :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \text{ avec } d\vec{S} = \vec{n}_{\text{ext}} dS.$$

- Le théorème de Gauss et le caractère conservatif de la circulation permettent une étude complète du champ électrostatique.
- En l'absence de charges, le flux du champ électrostatique est conservatif : le flux est le même à travers toutes les sections d'un même tube de champ.
- Le potentiel électrostatique ne possède pas d'extremum en dehors des charges.
- Le flux sortant du champ de gravitation d'une distribution  $\mathcal{D}$  de masses, à travers une surface fermée  $S$  est égal à la masse  $M_{\text{int}}$  située à l'intérieur de ( $S$ ) multipliée par  $-4\pi G$  :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}_g \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}.$$

- À l'extérieur d'un astre à symétrie de révolution, le champ de gravitation est le même que celui créé par un point matériel placé au centre de l'astre et dont la masse est celle de l'astre.

## ● DÉTERMINATION D'UN CHAMP À L'AIDE DU THÉORÈME DE GAUSS

Le théorème de Gauss constitue un outil de calcul rapide du champ électrostatique créé par une distribution de charges possédant une symétrie élevée : après détermination de la forme du champ, à l'aide de considérations de symétrie, l'application du théorème de Gauss à une surface fermée, *de géométrie adaptée aux symétries du problème*, permet de déterminer l'amplitude du champ.

# Contrôle rapide

## Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Donner l'expression du flux élémentaire  $d\Phi$  du champ électrique  $\vec{E}$  créé par une charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$ .
- ✓ Énoncer le théorème de Gauss pour le champ électrostatique.
- ✓ Énoncer le théorème de Gauss pour le champ de gravitation.
- ✓ Démontrer que le potentiel électrostatique ne possède pas d'extremum en une région vide de charges.
- ✓ Démontrer qu'en l'absence de charges, le flux du champ électrostatique est conservatif.
- ✓ Montrer qu'en l'absence de charges, lorsque la section d'un tube de champ diminue, le champ augmente en norme.
- ✓ Qu'appelle-t-on surface de Gauss et comment la détermine-t-on ?
- ✓ Calculer rapidement le champ électrostatique créé par :
  - une sphère uniformément chargée en volume ;
  - un cylindre infini uniformément chargé en volume ;
  - un plan uniformément chargé en surface ;
  - un fil rectiligne infini.

## Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Une charge ponctuelle  $q$ , placée dans le champ d'une distribution de charges, ne trouve aucune position d'équilibre stable.  
☐ Vrai ☐ Faux
2. Le flux  $\Phi$  à travers une surface fermée ( $S$ ) tracée dans une distribution volumique de charges  $\rho(M)$  est :  $\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(M) d\tau$ .  
☐ Vrai ☐ Faux
3. Le flux  $\Phi$  à travers une surface fermée ( $S$ ) portant une distribution surfacique de charges  $\sigma(M)$  est :  $\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \oiint \sigma(M) d\tau$ .  
☐ Vrai ☐ Faux
4. Le flux du champ électrique à travers une surface ouverte ne peut jamais être nul.  
☐ Vrai ☐ Faux
5. Soit ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) deux surfaces ouvertes qui s'appuient sur la même courbe fermée ( $C$ ). Le flux du champ électrostatique est le même à travers ces deux surfaces, en l'absence de charges comprises entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ).  
☐ Vrai ☐ Faux
6. Le champ de gravitation créé par la Terre, supposée à symétrie sphérique, est le même que celui créé par un point matériel placé au centre de la Terre et dont la masse est celle de la Terre.  
☐ Vrai ☐ Faux
7. À l'extérieur d'un astre de masse  $M$  à symétrie sphérique, l'énergie potentielle d'un point matériel de masse  $m$  situé à la distance  $r$  est :  $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{GMm}{r} + V_0$ .  
☐ Vrai ☐ Faux

► Solution, page 77.

# Exercices

## 1 Champ créé par un fil rectiligne infini

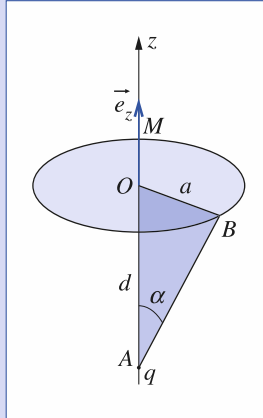
Examiner le cas d'un fil rectiligne infini en l'obtenant comme une limite à définir du cas du cylindre infini.

## 2 Flux du champ créé par une charge à travers un disque

Une charge ponctuelle  $q$  est placée en  $A$  sur l'axe  $(Oz)$  d'un disque de centre  $O$  et de rayon  $a$ .

Le disque est orienté par le vecteur unitaire  $\vec{e}_z$  et on note  $\alpha$  le demi-angle au sommet du cône de sommet  $A$  et de base le disque.

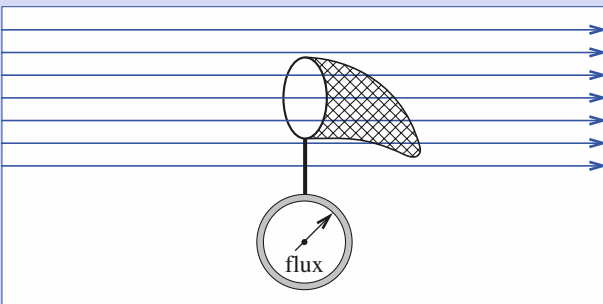
La distance  $AO$  est notée  $d$ .  
Calculer le flux  $\Phi$  du champ créé par la charge  $q$  à travers le disque.



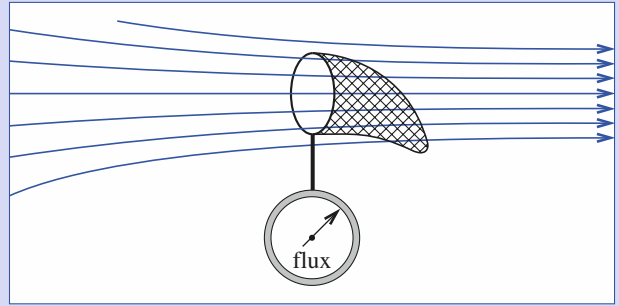
## 3 Flux : analogie avec un filet à papillon

Soit un « filet à papillon » d'ouverture circulaire  $R$  (donc de section  $\Sigma = \pi R^2$ ) et dont le filet a une surface totale  $S$  ; il est placé dans un champ électrostatique  $\vec{E}$ . Dans la zone de l'espace considérée, il n'y a aucune charge. Ce filet permet d'accéder à la valeur moyenne du champ, en lisant le flux entrant (valeur donnée par le filet) de ce champ à travers « ce filet à champ ».

- 1) Le champ  $\vec{E}$  est uniforme.  
Comment faut-il placer ce filet pour mesurer  $\vec{E}$  ?  
La surface du filet est-elle gênante ?  
Est-il possible de connaître la direction du champ  $\vec{E}$  ?



- 2) Le champ  $\vec{E}$  est non uniforme dans une zone sans charge.  
Où placer ce filet pour capter le maximum de flux ?  
Où le champ est-il maximum ?

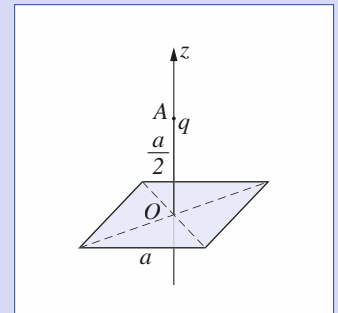


## 4 Flux du champ créé par une charge à travers un carré

Une charge ponctuelle  $q$  est placée en  $A$  sur l'axe d'un carré de côté  $a$ . La distance entre la charge et le plan est :

$$AO = \frac{a}{2}.$$

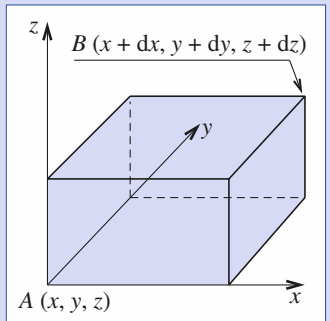
Calculer le flux  $\Phi$  du champ créé par la charge  $q$  à travers le carré.



## 5 Loi locale de Maxwell-Gauss, équation de Poisson

Nous établirons ici l'expression de ces lois en coordonnées cartésiennes.

Considérons le parallélépipède rectangle élémentaire représenté sur le schéma. Les points  $A$  et  $B$  ont pour coordonnées cartésiennes respectives  $(x, y, z)$  et :  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ .



La charge volumique du milieu est notée  $\rho$ .

En appliquant le théorème de Gauss au parallélépipède, établir :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

En déduire l'équation différentielle liant le potentiel à la densité volumique de charges, appelée équation de Poisson.

## 6 Double couche chargée

Calculer le champ et le potentiel pour une double couche chargée  $\rho = \rho_0$  pour  $0 < z < e$  et  $\rho = -\rho_0$  pour  $-e < z < 0$ . On prendra  $V = 0$  sur le plan  $(x, y)$  ( $z = 0$ ).

# Exercices

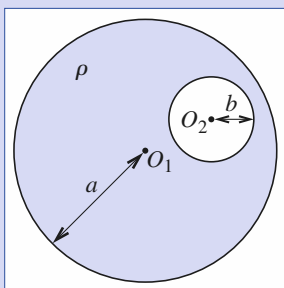
## 7 Distribution cylindrique correspondant à un champ donné

Un champ à symétrie cylindrique  $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$  a pour expression  $\vec{E} = (Ar) \vec{e}_r$ , si  $r < a$  et  $\vec{E} = \left(\frac{B}{r}\right) \vec{e}_r$ , si  $r > a$ .

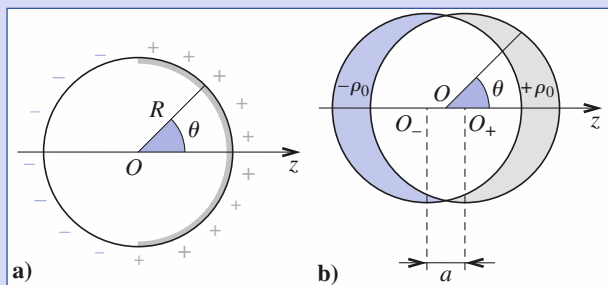
Déterminer la distribution de charges qui crée ce champ, puis le potentiel électrostatique associé.

## 8 Cavity dans une boule uniformément chargée

Une boule de rayon  $a$  portant la charge volumique uniformément répartie  $\rho$  possède une cavité sphérique de rayon  $b$  vide de charges. Déterminer le champ dans la cavité.



## 9 Couches de glissement



Le schéma a) représente une sphère de centre  $O$  et rayon  $R$  portant la charge surfacique  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ .

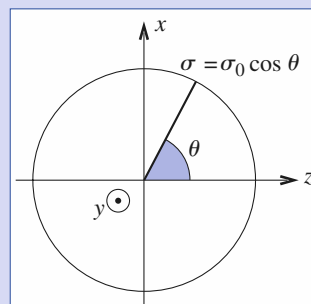
Le schéma b) représente deux boules de rayon  $R$ , de centres respectifs  $O_+$  et  $O_-$  d'abscisses  $+\frac{a}{2}$  et  $-\frac{a}{2}$  sur l'axe  $(Oz)$ , chargées uniformément avec les densités volumiques respectives  $+\rho_0$  et  $-\rho_0$ .

Montrer que la première distribution peut être obtenue comme la limite de la seconde lorsque la distance  $a$  tend vers zéro, à condition d'imposer une relation particulière liant  $\rho_0$ ,  $a$  et  $\sigma_0$ .

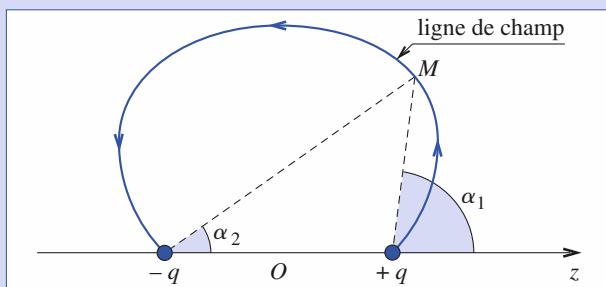
## 10 Champ créé par une sphère

Une boule de rayon  $a$  porte la charge surfacique :  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  sur sa surface, avec  $\sigma_0 > 0$ . Cette répartition de charges est à symétrie de révolution autour de l'axe  $(Oz)$ .

Déterminer le champ à l'intérieur de la sphère.



## 11 Lignes de champ d'un doublet de charges dans l'approximation dipolaire



Deux charges opposées  $-q$  et  $+q$  sont placées sur l'axe  $(Oz)$  aux points d'abscisses  $-\frac{a}{2}$  et  $+\frac{a}{2}$  respectivement.

À l'aide du théorème de Gauss, montrer que l'équation d'une ligne de champ telle que celle représentée sur la figure est  $\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 = \text{cte}$ .

## 12 Nuage électronique et énergie d'ionisation

Un système de charges crée le potentiel à symétrie sphérique :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \quad (q > 0).$$

Calculer  $Q(r)$ , charge comprise dans la sphère de rayon  $r$ .

Caractériser la distribution de charges correspondant à ce potentiel.

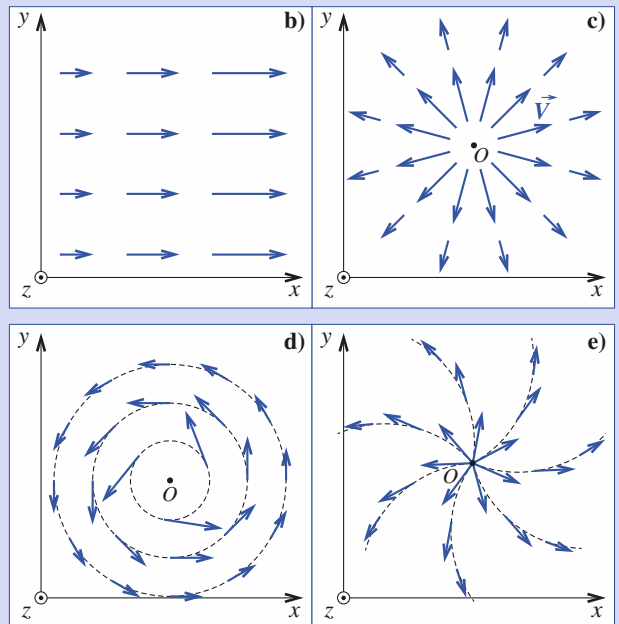
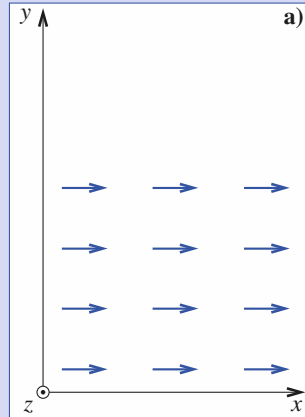
Définir, puis exprimer l'énergie de liaison de ce système.

## 13 Allure des lignes du champ électrostatique $\vec{E}$

Les schémas ci-après représentent, dans un plan  $(x, y)$  ( $z = \text{cte}$ ), quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme :

$$\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y) \vec{e}_x + E_y(x, y) \vec{e}_y.$$

Préciser, dans chaque cas, s'il peut s'agir d'un champ électrostatique, et si oui, indiquer si des charges sont présentes dans la région représentée.



## Corrigés

**Solution du tac au tac, p. 74.**

1. Vrai ;
2. Vrai ;
3. Faux ;

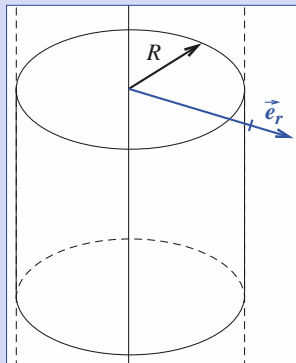
4. Faux ;
5. Vrai ;
6. Vrai ;
7. Vrai.

**1** Le cylindre infini porte une charge  $\lambda = \pi R^2 \rho$  par unité de longueur. Gardant ce terme constant en faisant tendre  $R$  vers 0, nous obtenons une distribution limite correspondant à un fil rectiligne infini portant la charge linéique  $\lambda$ .

Le cas  $r > R$  étant alors le seul utilisable, nous constatons que :

$$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

peut aussi s'écrire :  $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$ . Nous retrouvons le résultat établi au chapitre 3, ainsi que celui de l'Application 5 du présent chapitre.



**2** Considérons la sphère de centre  $A$  et de rayon :

$$R = \sqrt{d^2 + a^2}.$$

La circonférence  $(C)$  du disque est tracée sur cette sphère. D'après ce qui a été vu en § 1.2.2., le flux à travers le disque est égal au flux à travers la calotte sphérique délimitée par la circonférence  $(C)$  :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Sigma}{R^2}$$

où  $\Sigma$  est l'aire de la calotte sphérique.

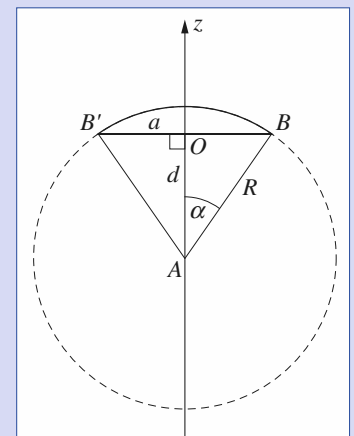
En coordonnées sphériques, l'élément d'aire sur une sphère de rayon  $R$  est :

$$d^2\Sigma = R^2 \sin\theta d\theta R d\varphi,$$

ce qui donne par intégration sur la calotte sphérique :

$$\Sigma = R^2 \int_0^\alpha \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2(1 - \cos\alpha).$$

En conclusion :  $\Phi = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\alpha).$

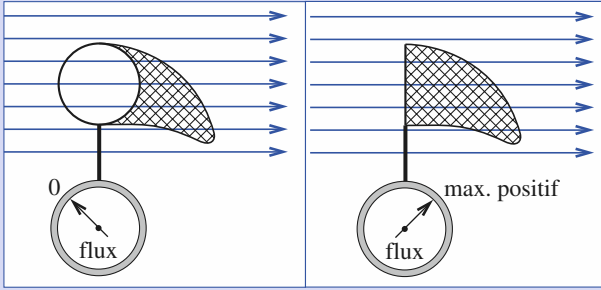


# Corrigés

3

## Commentaire

Dans une zone sans charge, donc dans une zone où le flux du champ  $\vec{E}$  est conservatif, la surface  $S$  du filet de ce « filet à papillon » n'intervient jamais dans le nombre de papillons captés, donc dans la valeur du flux capté. Ce flux ne dépend que du contour sur lequel s'appuie cette surface, donc de la section circulaire de l'ouverture du filet.



1) Il faut que la normale à l'ouverture circulaire du filet soit parallèle au champ pour obtenir un flux extremum. Si le signe du flux entrant (valeur lue) est positif et maximum,  $\vec{E}$  est perpendiculaire à l'ouverture du filet et entrant.

2) Nous sommes dans une zone de l'espace sans charge. Le flux du champ  $\vec{E}$  est donc conservatif, c'est-à-dire que le flux de  $\vec{E}$  à travers un tube de champ est invariant. Le champ est donc d'autant plus important que les lignes de champ se resserrent. Pour avoir un flux maximum, il faut donc déplacer l'ouverture du filet vers la droite, là où les lignes de champ se resserrent.

4

Complétons la figure en faisant de  $A$  le centre d'un cube de côté  $a$ . Le flux

à travers les six faces du cube est  $\Phi_t = 6\Phi$ . Pour évaluer  $\Phi_t$ , il suffit de considérer une sphère ( $S$ ) de centre  $A$  et de rayon  $R$  arbitraire. D'après la remarque du § 1.2.2., le flux à travers le cube est égal au flux à travers la sphère ( $S$ ).

Donc  $\phi_t = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R^2}{R^2} = \frac{q}{\epsilon_0}$  et, en définitive, le flux à travers le carré est :  $\phi = \frac{q}{6\epsilon_0}$ .

5

Considérons la surface fermée enveloppant le parallélépipède et appliquons le théorème de Gauss.

Le flux sortant du champ à travers cette surface fermée élémentaire est donné par (en ne faisant apparaître que les termes « utiles », c'est-à-dire en se limitant aux termes de même ordre non nul) :

$$+dx dy \cdot E_z(x, y, z+dz) + dy dz \cdot E_x(x+dx, y, z) + dx dz \cdot E_y(x, y+dy, z) - dx dy \cdot E_z(x, y, z) - dy dz \cdot E_x(x, y, z) - dx dz \cdot E_y(x, y, z).$$

Cette quantité est égale à la charge élémentaire située à l'intérieur de ce volume :

$$dx dy dz \cdot \left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right), \text{ soit } dx dy dz \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right) dx dy dz.$$

En utilisant la relation  $\vec{E} = -\text{grad } V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\vec{e}_x - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\vec{e}_y - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\vec{e}_z$ , nous

en déduisons  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  appelée équation de Poisson.

6

Chacune des couches crée un champ  $\vec{E}_i$  et le champ  $\vec{E}$  de la double couche s'obtient par superposition des deux champs :  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Les champs  $\vec{E}_i$  s'obtiennent par application du théorème de Gauss comme indiqué en § 4.2.

• Couche (1) de densité  $\rho_0$  :

$$0 \leq z \leq e : \vec{E}_1 = \frac{\rho_0 \left(z - \frac{e}{2}\right)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

sinon :

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \text{ signe } \left(z - \frac{e}{2}\right) \vec{e}_z.$$

• Couche (2) de densité  $-\rho_0$  :

$$-e \leq z \leq 0 : \vec{E}_2 = \frac{-\rho_0 \left(z + \frac{e}{2}\right)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

sinon :

$$\vec{E}_2 = \frac{-\rho_0}{2\epsilon_0} \text{ signe } \left(z + \frac{e}{2}\right) \vec{e}_z.$$

Au total :

$$e \leq z : \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$$

$$0 \leq z \leq e : \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} (z - e) \vec{e}_z$$

$$-e \leq z \leq 0 : \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{-\rho_0}{\epsilon_0} (z + e) \vec{e}_z$$

$$z \leq -e : \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}.$$

Le champ est nul en dehors de la double couche.

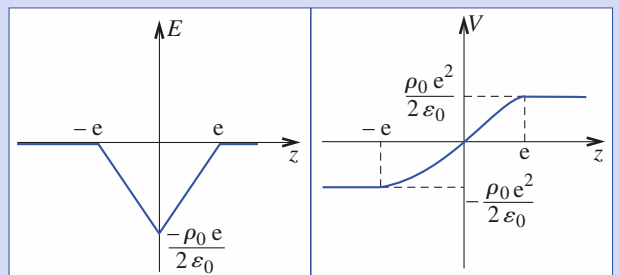
Nous en déduisons l'expression du potentiel (raccordement par continuité aux changements de zone) :

$$e \leq z : V = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} e^2$$

$$0 \leq z \leq e : V = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (2ez - z^2)$$

$$-e \leq z \leq 0 : V = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (2ez + z^2)$$

$$z \leq -e : V = \frac{-\rho_0}{2\epsilon_0} e^2$$





7

Le système est à symétrie de révolution cylindrique. Nous pouvons donc chercher une répartition de charges ayant cette symétrie. Notons  $Q(r, h)$  la charge contenue dans un cylindre d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ . L'application du théorème de Gauss à la surface fermée cylindrique délimitant cette charge nous donne :

$$\frac{Q(r, h)}{\varepsilon_0} = 2\pi r h E(r)$$

(le flux sortant de  $E$  à travers les bases de ce cylindre est nul), soit :

- si  $r < a$  :  $Q(r, h) = 2\pi \varepsilon_0 A r^2 h$  ;
- si  $r > a$  :  $Q(r, h) = 2\pi \varepsilon_0 B h$  .

Déterminons la densité volumique de charges en considérant la charge. La charge  $Q(r + dr, h) - Q(r, h)$  est contenue entre deux cylindres de rayons  $r$  et  $r + dr$  et de hauteur  $h$  :

$$2\pi r dr h \rho(r) = Q(r + dr, h) - Q(r, h) = \frac{dQ(r, h)}{dr} dr .$$

Nous obtenons ainsi :

- si  $r < a$  :  $\rho(r) = 2\varepsilon_0 A$  ;
- si  $r > a$  :  $\rho(r) = 0$  .

La quantité  $Q(r, h)$  subit une discontinuité éventuelle en  $r = a$  . Cela correspond à une charge surfacique  $\sigma$ , répartie sur le cylindre de rayon  $a$  :

$$2\pi a \sigma = Q(r = a^+) - Q(r = a^-), \text{ soit } \sigma = \varepsilon_0 \left( \frac{B}{a} - Aa \right) .$$

8

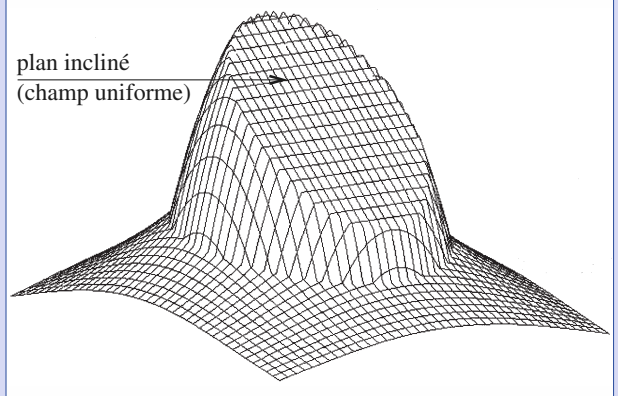
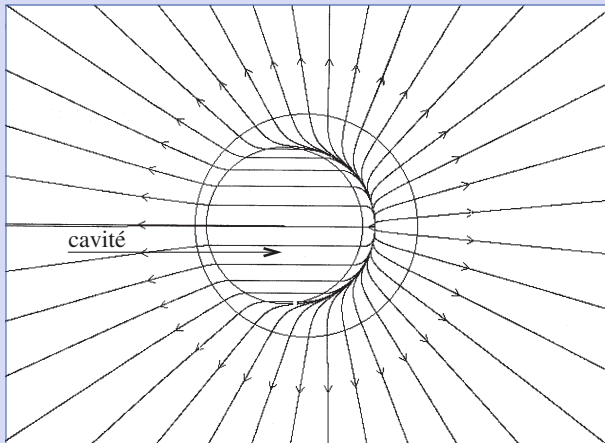
Cette distribution correspond à la superposition de deux distributions  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

$\mathcal{D}_1$  correspondant à une charge volumique  $\rho$  uniformément répartie dans la sphère de centre  $O_1$  et de rayon  $a$ , et  $\mathcal{D}_2$  à une charge volumique  $-\rho$  dans la sphère de centre  $O_2$  et de rayon  $b$ . Dans la cavité, donc à l'intérieur de ces deux sphères,  $\mathcal{D}_1$  crée le

$$\text{champ } \vec{E}_1(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{O_1 M} \text{ et } \mathcal{D}_2 \text{ le champ } \vec{E}_2(M) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{O_2 M} .$$

$$\text{Le champ total dans la cavité est donc égal à } \vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{O_1 O_2} .$$

Il est uniforme dans la cavité.

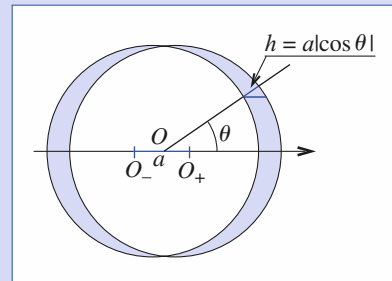


Les simulations ci-dessus montrent le tracé des lignes de champ et des équipotentielles du système de charges, ainsi que les variations du potentiel : le champ est bien uniforme à l'intérieur de la cavité.

9

Dans le cas a), notons  $dS$  l'élément de surface dans la direction  $(\theta, \varphi)$  en coordonnées sphériques d'axe  $(Oz)$ . Cet élément de surface porte la charge :

$$dq = \sigma dS = \sigma_0 \cos \theta dS .$$



Dans le cas b), évaluons l'élément de volume  $d\tau$  dans la même direction  $(\theta, \varphi)$ , lorsque  $a \ll R$  :  $d\tau = h dS = a |\cos \theta| dS$ .

Cet élément de volume contient la charge :  $dq = \rho_0 a \cos \theta dS$ .

En comparant les deux expressions de la charge  $dq$ , nous pouvons considérer la sphère chargée comme limite de l'ensemble des deux boules, lorsque  $a \ll R$ , en imposant la condition :  $\rho_0 a = \text{cte} = \sigma_0$  .

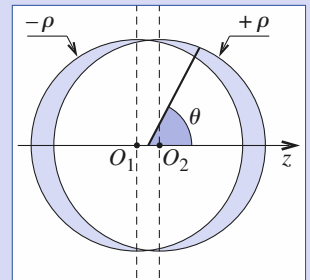
10

Cette distribution correspond à la superposition de deux distributions  $\mathcal{D}_1$  et

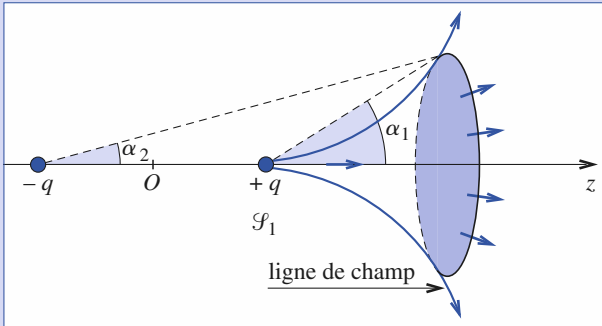
$\mathcal{D}_2$ .  $\mathcal{D}_1$  correspondant à une charge volumique  $-\rho$  ( $\rho > 0$ ) uniformément répartie dans une sphère de centre  $O_1$  et de rayon  $a$ , et  $\mathcal{D}_2$  à une charge volumique uniforme  $\rho$  répartie dans une sphère de centre  $O_2$  et de même rayon  $a$ . L'équivalence des répartitions est obtenue lorsque  $\sigma_0 = \lim(\rho O_1 O_2)$  quand  $O_1 O_2$  tend vers zéro, et simultanément  $\rho$  vers l'infini. Les résultats de l'exercice précédent indiquent que le champ dans la cavité est :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\rho O_1 O_2}{3\varepsilon_0} = -\frac{\sigma_0 \vec{e}_z}{3\varepsilon_0} .$$

Il est uniforme dans la cavité.



11



## • Le flux du champ est conservatif en l'absence de charges

L'ensemble des lignes de champ est de révolution autour de l'axe  $(Oz)$ . Soit un tube de champ engendré par la rotation d'une ligne de champ autour de l'axe  $(Oz)$ . Le flux du champ est le même à travers les sections  $S_1$  et  $S_2$  du tube dans la mesure où il n'y a pas de charges dans le tronçon du tube de champ situé entre ces deux sections.

## • Écrivons la conservation du flux du champ à travers ce tube de champ

Le flux du champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par une charge  $q$  ponctuelle à travers un disque  $S$  quelconque est donné par  $\Phi = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha)$  (cf. exercice 2).

Le flux de  $\vec{E}$  dû aux deux charges  $-q$  et  $+q$  à travers la surface  $S_2$  s'écrit donc :

$$\Phi = \frac{q \left[ 2\pi(1 - \cos \alpha_1) - 2\pi(1 - \cos \alpha_2) \right]}{2\epsilon_0}$$

soit :

$$\Phi = \frac{q 2\pi(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)}{2\epsilon_0},$$

d'où l'équation  $\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 = \text{cte}$ . (Notons que cette équation est à rapprocher de l'équation  $\sum_{i=1}^N q_i \cos \theta_i = \text{cte}$  obtenue dans l'exercice 10 chapitre 2, sans utiliser le théorème de Gauss.)

12

Le champ électrostatique créé par cette distribution de charges est :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{2}{ar} + \frac{2}{a^2} \right) e^{-\frac{2r}{a}} \vec{e}_r.$$

Appliquons le théorème de Gauss à la sphère de rayon  $r$  et centre  $O$  :

$$Q(r) = \epsilon_0 \oint_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 4\pi r^2 (\vec{E} \cdot \vec{e}_r) = q \left( 1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right).$$

La répartition de charges est de symétrie sphérique autour du point  $O$ . La charge contenue entre les sphères de centre  $O$  et de rayons  $r$  et  $r + dr$  est  $4\pi r^2 \rho(r) dr$ ,

s'identifie à  $Q(r + dr) - Q(r) = \left[ \frac{dQ(r)}{dr} \right] dr$ , donc :

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dQ(r)}{dr} = -\frac{q}{a^3} e^{-\frac{2r}{a}}.$$

Cette densité de charges est toujours négative, alors que la charge totale de la distribution est  $Q(r \rightarrow \infty) = 0$ . N'oublions cependant pas la singularité du potentiel à l'origine, où il se comporte asymptotiquement comme le potentiel d'une charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$  :  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ . Nous avons  $Q(r \rightarrow 0) = q$ , ce qui prouve bien

la présence d'une charge ponctuelle positive  $q$  en  $O$  entourée par un halo de charges négatives de densité volumique  $\rho(r)$  et de charge globale  $-q$ .

L'énergie de liaison est l'énergie à fournir pour séparer la charge  $+q$  du nuage de charge négative  $-q$ , en l'emmenant depuis le point  $O$  jusqu'à l'infini. Cette énergie d'ionisation vaut :  $q(V_-(\infty) - V_-(O)) = -qV_-(O)$ , où  $V_-(O)$  désigne le potentiel créé par le nuage négatif seul au point  $O$ , égal à :

$$V_-(O) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( V(r) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Par conséquent  $\mathcal{E}_{\text{liaison}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$

13

## • Cas a

La circulation de ce champ est conservative (nulle sur toute courbe fermée). Il s'agit d'un champ uniforme  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$ . Le potentiel dont il dérive est égal à  $-E_0 x$ .

Le flux de ce champ à travers toute surface fermée est nul ; il n'y a pas de charges créant ce champ dans la zone représentée, car son flux est conservatif.

## • Cas b

La circulation de ce champ est conservative. Les lignes de champ sont encore rectilignes mais correspondent à un champ non uniforme. Le potentiel dont il dérive est donné par :

$$V(x) = V(O) - \int_0^x E(x) dx.$$

Le flux du champ à travers un parallélépipède rectangle de volume :

$$d\tau = dx dy dz \text{ est égal à } dy dz [E(x + dx) - E(x)] = dx dy dz \frac{dE(x)}{dx}.$$

Dans la zone représentée, il y a des charges réparties avec la densité :

$$\rho(x) = \epsilon_0 \frac{dE(x)}{dx}.$$

## • Cas c

Si la fonction  $E(r)$  n'est pas continue sur une surface cylindrique, il existe sur cette surface de discontinuité une répartition de charges surfaciques  $\sigma$  telle que :

$$\sigma(r) = \epsilon_0 (E_{r+} - E_{r-}).$$

## • Cas d et e

Dans les deux cas la circulation du champ sur un cercle de centre  $O$  sera non nulle. La circulation n'est donc pas conservative. Ce n'est pas un champ de nature électrostatique. Nous verrons dans les chapitres suivants que le champ est de nature magnétostatique dans le **cas d**.

Le **cas e** représente la superposition de deux champs : l'un de nature électrostatique, l'autre de nature magnétostatique.

# Dipôle électrostatique

# 5

## Introduction

*Les atomes, les molécules et les milieux matériels  
sont électriquement neutres.*

*Parfois, les barycentres des charges positives  
et des charges négatives apparaissent décalés.*

*L'entité observée, le milieu étudié  
sont alors dits polarisés.*

*Les propriétés électriques d'une entité polarisée  
peuvent être décrites,  
en première approximation,  
à l'aide d'un modèle élémentaire :  
le doublet de charges.*

*Celles d'un milieu polarisé le seraient  
à l'aide d'une répartition  
de doublets microscopiques  
(en seconde année).*

## O B J E C T I F S

- Modèle du dipôle.
- Champ et potentiel dipolaires.
- Actions exercées par un champ sur un dipôle.

## P R É R E Q U I S

- Champ électrostatique.
- Potentiel électrostatique.

## Le modèle du dipôle

### 1.1. Moment dipolaire

#### 1.1.1. Moment dipolaire d'une distribution de charges globalement neutre

Considérons dans la distribution  $\mathcal{D}$  l'ensemble des charges positives dont la somme est notée  $+q$  et l'ensemble des charges négatives dont la somme vaut  $-q$ ,  $q$  étant supposée non nulle.

Nous pouvons définir  $A^+$ , le barycentre des charges positives de  $\mathcal{D}$ , et  $A^-$  le barycentre des charges négatives de  $\mathcal{D}$ .

Le moment dipolaire de la distribution est par définition :  $\vec{p} = q\overrightarrow{A^-A^+}$ .

Il s'évalue en coulomb.mètre (C.m).

#### 1.1.2. Doublet de charges

Le modèle le plus simple de dipôle est un doublet de charges opposées et séparées par une distance que nous noterons  $d$  (doc. 1).

**Un objet non chargé mais polarisé crée à grande distance un potentiel et un champ analogues (en première approximation) à ceux d'un doublet de charges de moment dipolaire  $\vec{p}$  non nul ( $q > 0$ ) :**

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad \text{et} \quad \vec{d} = \overrightarrow{A^-A^+}.$$

### 1.2. Objets polaires

#### 1.2.1. Molécules polaires

Ces molécules présentent au repos une séparation de charges.

Une molécule diatomique telle que le chlorure d'hydrogène HCl possède une *liaison polaire* (doc. 2). Son nuage électronique est asymétrique, les électrons se trouvant préférentiellement au voisinage de l'atome de chlore.

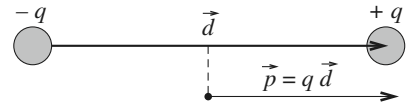
Des édifices moléculaires plus complexes présenteront de même une polarité permanente : la molécule d'eau H<sub>2</sub>O, triangulaire, possède un moment dipolaire résultant de la polarité des liaisons OH. De même la molécule d'ammoniac NH<sub>3</sub>, pyramidale, possède trois liaisons NH polarisées (doc. 3). Dans les molécules polyatomiques, la présence de doublets libres sur certains atomes doit parfois être prise en compte.

#### 1.2.2. Polarisation due à un champ appliqué

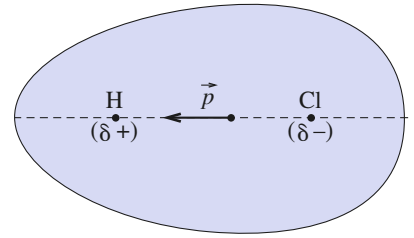
Un atome et une molécule peuvent aussi être polarisés par l'action d'un champ appliqué : en effet, celui-ci déplace en sens opposé les charges positives et négatives. Les nuages électroniques sont déformés par ce champ appliqué, les longueurs et les angles des liaisons chimiques peuvent être modifiés. Ces modifications, généralement faibles, correspondent à une apparition ou à un changement de la polarité (doc. 4). On parle d'atomes ou de molécules *polarisables*.

##### Remarques

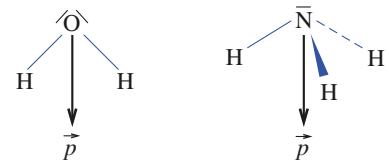
Les atomes, les ions, les molécules (polaires ou non au repos) et plus généralement les milieux matériels sont susceptibles d'être polarisés par un champ appliqué. Ainsi un certain nombre de phénomènes liés à la polarisation peuvent être observés dans la matière.



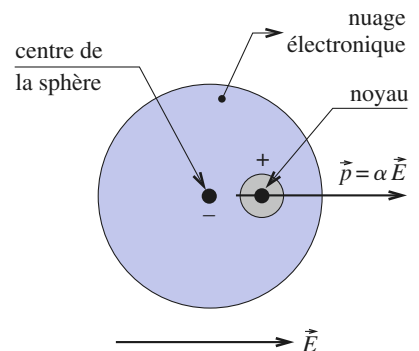
Doc. 1. Doublet de charges.



Doc. 2. Molécule diatomique.



Doc. 3. Moments dipolaires des molécules H<sub>2</sub>O et NH<sub>3</sub>.



Doc. 4. Polarisation d'un atome placé dans un champ  $\vec{E}$  :

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}, \quad \text{avec} \quad \alpha > 0.$$

- Les ions d'un cristal ionique se trouvent déplacés par l'action d'un champ appliqué par rapport à leur position au repos (en sens opposé pour des charges de signes opposés), ce qui fait apparaître de nouveaux moments dipolaires. Ce phénomène porte le nom de polarisation ionique.
- Nous verrons aussi qu'un dipôle tend à s'orienter parallèlement au champ qui lui est appliqué. Un matériau contenant des entités polaires susceptibles de s'orienter peut ainsi être polarisé lorsqu'un champ lui est appliqué (une compétition s'engage entre l'effet d'orientation du champ appliqué et la tendance au désordre liée à l'agitation thermique). On parle alors de polarisation d'orientation.

► Pour s'entraîner : ex. 2.

### 1.2.3. Unité de moment dipolaire en chimie

Les entités chimiques ont des charges de l'ordre de  $q = 10^{-19}$  C et des dimensions de l'ordre de  $\ell = 10^{-10}$  m. Une unité de moment dipolaire adaptée aux besoins des chimistes doit être de l'ordre de  $p = q\ell = 10^{-29}$  C.m. C'est pour cette raison que les chimistes utilisent le **debye** (symbole : D), bien que cette unité de moment dipolaire appartienne à un système d'unités actuellement abandonné.

$$1\text{D} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{ C.m.}$$

On trouvera, sur le document 5, quelques moments de molécules polaires.

## 2 Potentiel et champ créés par un dipôle

Nous nous limiterons au calcul et à la représentation de ces grandeurs pour le modèle du doublet.

### 2.1. Approximation dipolaire

Si nous nous intéressons aux effets produits par le dipôle, l'approximation dipolaire consiste à supposer la distance à laquelle nous observons le champ créé par le dipôle très grande devant ses dimensions :  $r \gg d$ .

Dans ces conditions, nous mènerons les calculs en ne déterminant que les termes d'ordre le plus bas en  $\left(\frac{d}{r}\right)$ .

### 2.2. Potentiel du dipôle

La distribution considérée (doublet) étant d'extension finie, nous pouvons choisir le potentiel nul à l'infini, et l'écrire, avec les notations du document 6 :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Utilisant les coordonnées sphériques d'axe ( $Oz$ ) indiquées sur le document 6, nous

avons  $r_1 = \left[ r^2 - dr \cos \theta + \frac{d^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$  et  $r_2 = \left[ r^2 + dr \cos \theta + \frac{d^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$ .

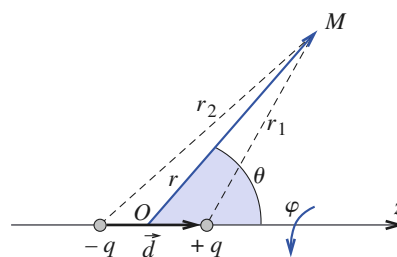
Dans l'approximation dipolaire, nous écrirons à l'ordre un en  $\left(\frac{d}{r}\right)^{(*)}$  :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos \theta + \dots \right) - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos \theta + \dots \right) \right).$$

**Remarque :** Notons que pour ce modèle de dipôle, le second terme non nul est proportionnel à  $\frac{1}{r^4}^{(**)}$ .

H <sub>2</sub> O	NH <sub>3</sub>	HCl
1,85 D	1,47 D	1,08 D

Doc. 5. Moments de molécules polaires.



Doc. 6. Le point M est repéré par son vecteur position  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  ou par ses coordonnées sphériques :  $(r, \theta, \varphi)$ .

Développement limité de  $(1+x)^\alpha$

Pour  $|x| \ll 1$ , nous pouvons écrire :

(\*)  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$  à l'ordre un ;

(\*\*)  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3$

à l'ordre trois.

La charge totale de ce système étant nulle, le terme en  $\frac{1}{r}$  du potentiel s'annule ; le premier terme non nul du développement limité est proportionnel à  $\frac{d}{r^2}$ . Il décroît beaucoup plus vite à grande distance que le potentiel d'une charge seule :

$$V(M) = \frac{q d \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

**En utilisant l'expression du moment dipolaire, le potentiel électrostatique créé par un dipôle placé au point  $O$ , à l'ordre le plus bas en puissances de  $\frac{d}{r}$ , est :**

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Du fait de la symétrie de révolution de la distribution autour de l'axe ( $Oz$ ), ce potentiel ne dépend pas de l'angle  $\varphi$ .

#### Remarque

Pour une distribution de charges quelconque existant dans une zone réduite de l'espace au voisinage d'un point  $P$ , étudions le potentiel créé en  $M$  ( $r = PM$  étant grand devant les dimensions de la zone des charges) par cette distribution.

- Si la charge totale  $q$  de cette distribution est non nulle, le terme prépondérant du potentiel est  $\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r}$ . Soit un potentiel en  $\frac{1}{r}$ .
- Si la charge  $q$  est nulle, le terme précédent n'existe pas : il faut s'intéresser au moment dipolaire  $\vec{p}$  de cet ensemble de charges. Si  $\vec{p}$  est non nul, le terme prépondérant du potentiel est  $\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$ . Soit un potentiel en  $\frac{1}{r^2}$ .
- Si la charge  $q$  et le moment dipolaire  $\vec{p}$  sont nuls, les termes précédents n'existent pas : il faudrait alors pousser plus loin le développement du potentiel  $V(M)$ .

## 2.3. Champ du dipôle

### 2.3.1. Expression en coordonnées sphériques

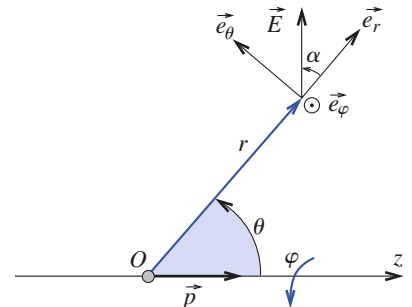
Le développement de l'expression  $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \left( \frac{\vec{e}_1}{r_1^2} - \frac{\vec{e}_2}{r_2^2} \right)$  est délicat et nous déterminons le champ en calculant le gradient du potentiel qui vient d'être obtenu. En coordonnées sphériques (cf. Annexe) :

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \\ E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \end{cases}$$

Le plan contenant  $OM$  et l'axe ( $Oz$ ) est un plan de symétrie de la distribution, il est naturel de trouver  $\vec{E} \cdot \vec{e}_\varphi = 0$  (doc. 7).

**L'expression du champ du dipôle est :**

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{2p \cos \theta \cdot \vec{e}_r + p \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta}{r^3}.$$



**Doc. 7.** Orientation de  $\vec{E}$  créé par un dipôle  $\vec{p}$ .

### 2.3.2. Expression intrinsèque

Le moment dipolaire  $\vec{p}$  peut s'écrire  $\vec{p} = p (\cos \theta \cdot \vec{e}_r - \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)$ .

Nous pouvons alors donner de  $\vec{E}(M)$  une expression sous une forme intrinsèque (pour un dipôle en  $O$ , sans référence à un choix d'axes particulier).

**Sous forme intrinsèque, le champ du dipôle est :**

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p})}{r^3}.$$

**Ou bien :** 
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5} \right).$$

#### Remarques

- Le champ d'un dipôle (en  $\frac{1}{r^3}$ ) décroît plus vite que celui d'une charge ponctuelle (en  $\frac{1}{r^2}$ ).

- La seule caractéristique du dipôle qui apparaît dans les expressions du potentiel  $V(M)$  et dans celle du champ  $\vec{E}(M)$  est son moment dipolaire  $\vec{p}$ .

Un dipôle est entièrement caractérisé par son moment dipolaire.

## Application 1

### Autres caractéristiques du champ d'un dipôle

En utilisant les notations du document 7, déterminer la norme de  $\vec{E}(M)$  et son inclinaison  $\alpha$  sur le support du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ .

En notant  $E$  la norme de  $\vec{E}$ , il vient :

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

L'inclinaison  $\alpha$  (doc. 7) de  $\vec{E}$  sur le support de  $\overrightarrow{OM}$  est déterminée par :

$$\tan \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \tan \theta.$$

► Pour s'entraîner : ex. 5, 6 et 7.

## 2.4. Topographie de $E$ et $V$

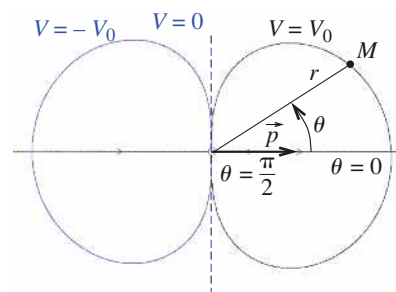
### 2.4.1. Équation et description qualitative

La distribution de charges d'un dipôle, dont le moment dipolaire  $\vec{p}$  est sur l'axe ( $Oz$ ), admet cet axe comme *axe de révolution*. De ce fait, l'équation du potentiel  $V(M)$  ne dépend pas de la coordonnée  $\varphi$  et les surfaces équipotentielles sont de révolution autour de ( $Oz$ ). Une représentation graphique de leurs traces dans un plan de symétrie ( $\varphi = \text{cte}$ ) contenant l'axe ( $Oz$ ) est dès lors suffisante (doc. 8).

La ligne équipotentielle  $V = V_0$  a pour équation polaire :  $r^2 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 V_0} \cos \theta$ .

C'est l'équation d'une courbe fermée, symétrique par rapport à l'axe ( $Oz$ ) et passant par l'origine.

Le signe de  $\cos \theta$  reste constant sur la ligne équipotentielle. Si  $V_0 > 0$ , cette ligne équipotentielle se situe dans le demi-plan  $z > 0$ , du côté de la charge positive.



Doc. 8. Équipotentielles  $\pm V_0$  du dipôle.



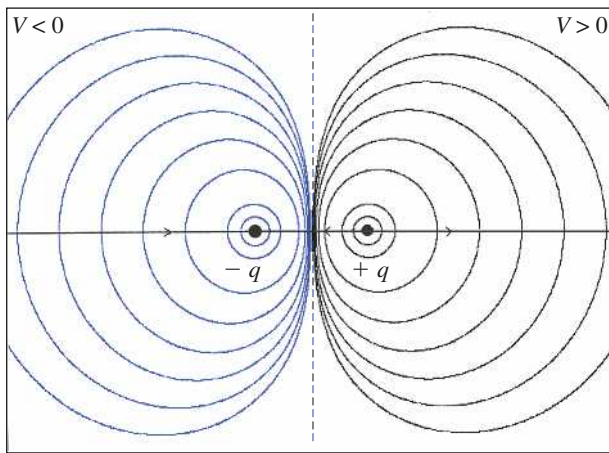
Le plan médiateur ( $xOy$ ) du doublet correspond à l'équipotentielle  $V = 0$ . Ce plan médiateur est un plan d'*antisymétrie* de la distribution de charges, donc la ligne équipotentielle  $V = -V_0$  est symétrique de la ligne  $V = V_0$  par rapport au plan médiateur.

Sur les lignes équipotentielles, la distance au point  $O$  est maximale sur l'axe ( $Oz$ ). À l'inverse, cette distance s'annule lorsque  $\theta$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ . Les lignes équipotentielles sont tangentes au plan médiateur ( $xOy$ ) du dipôle.

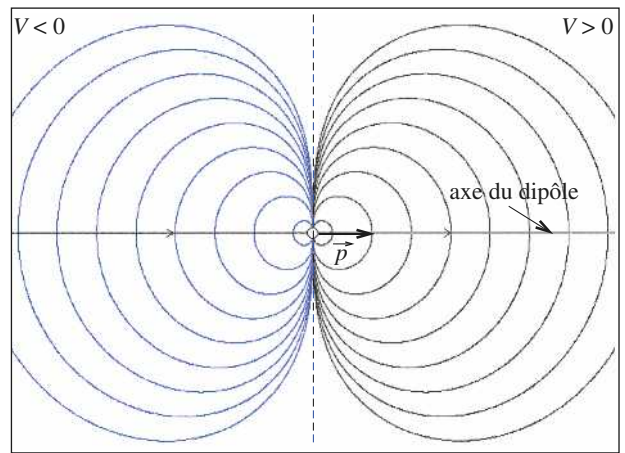
Cette dernière constatation n'a cependant pas de réalité physique : au voisinage de l'origine, l'approximation dipolaire ne s'applique plus, et l'équipotentielle  $V = V_0$  passe « quelque part » entre le point  $O$  et la charge  $+q$  (doc. 9).

### 2.4.2. Représentation

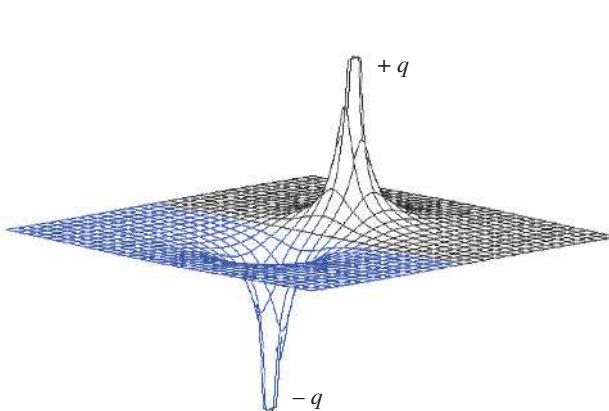
Sur le document 9 sont représentées les traces de quelques équipotentielles du système de deux charges dans un plan contenant l'axe ( $Oz$ ). Le document 10 reprend ce tracé en utilisant la formule du potentiel dipolaire. Nous constatons que les deux figures sont semblables, sauf au voisinage du dipôle où l'approximation dipolaire n'est pas valable : la différence entre le doublet de charges et l'entité idéale apparaît nettement à courte distance.



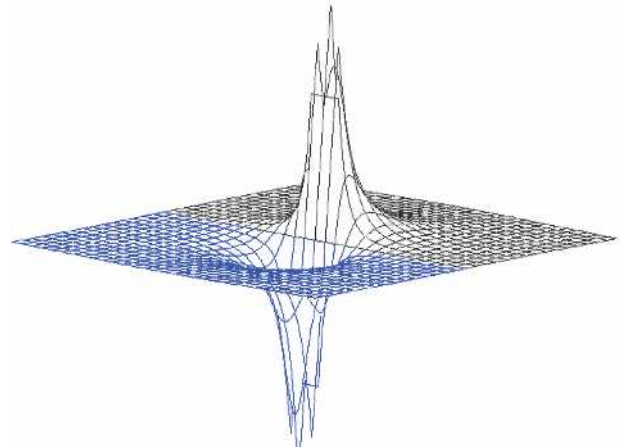
Doc. 9. Équipotentielles d'un doublet  $(-q, +q)$ .



Doc. 10. Équipotentielles d'un dipôle.



Doc. 11. Visualisation du potentiel créé par deux charges  $-q$  et  $+q$  (en noir  $V > 0$ , en bleu  $V < 0$ ).



Doc. 12. Visualisation du potentiel du dipôle dans l'espace (en noir  $V > 0$ , en bleu  $V < 0$ ).

### 2.4.3. Lignes de champ

#### 2.4.3.1. Équation

Par définition, pour un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  le long d'une ligne de champ, nous aurons  $d\vec{r} \wedge \vec{E} = \vec{0}$ . Utilisant les coordonnées sphériques du champ et l'expression  $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$  d'un déplacement élémentaire,

nous obtenons :

$$\begin{cases} r \sin\theta d\varphi \cdot E_\theta = 0 \\ r \sin\theta d\varphi \cdot E_r = 0 \\ dr \cdot E_\theta - r d\theta \cdot E_r = 0. \end{cases}$$

Hors les lignes de champ situées sur l'axe ( $Oz$ ) ( $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ ), les deux premières équations imposent  $\varphi = \text{cte}$ . En effet, le système est de révolution autour de l'axe ( $Oz$ ) et les lignes de champ sont tracées dans les *plans de symétrie* passant par cet axe.

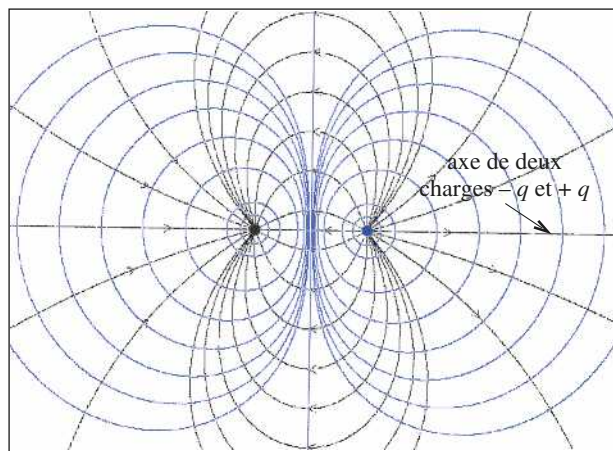
La dernière équation s'explique en  $\sin\theta \cdot dr = 2r \cdot \cos\theta \cdot d\theta$ , ce qui donne, par intégration, l'équation des lignes de champ :

$$r = \text{cte} \sin^2\theta.$$

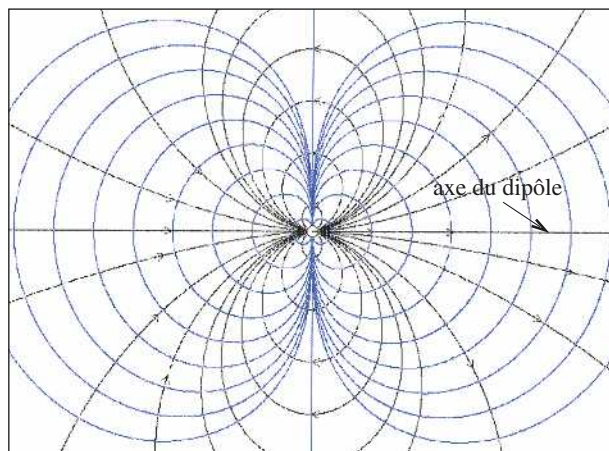
#### 2.4.3.2. Description qualitative et représentation

Les lignes de champ sont donc des courbes planes tracées dans des plans contenant l'axe de révolution ( $Oz$ ). Elles sont, en outre, symétriques par rapport au plan médiateur ( $xOy$ ), qui est un *plan d'antisymétrie* qu'elles coupent orthogonalement. Enfin, sur les lignes de champ, la distance au point  $O$  est maximale sur le plan médiateur. Les lignes de champ sont tangentes à l'axe ( $Oz$ ). Cette dernière caractéristique géométrique est sans réalité physique car, au voisinage du point  $O$ , l'approximation dipolaire n'est plus vérifiée.

Sur les *documents* 13 et 14, on trouve les cartes des lignes de champ et des lignes équipotentielle respectivement pour un doublet de deux charges opposées et pour un dipôle. On vérifie que les deux cartes sont équivalentes lorsque la distance d'observation est grande devant la taille du dipôle.



Doc. 13. Équipotentielle et lignes de champ d'un doublet.



Doc. 14. Équipotentielle et lignes de champ d'un dipôle.

► Pour s'entraîner : ex. 3.

## 2.5. Généralisation

Le modèle du dipôle s'applique en fait à toute distribution de charges de charge totale nulle.

Considérons un ensemble de  $N$  particules chargées, de position  $P_i$  et de charges  $q_i$  ( $i \in (1 \dots N)$ ) telles que  $\sum_{i=1}^N q_i = 0$  (doc. 15).

Notons  $\vec{a}_i = \overrightarrow{OP_i}$  le vecteur-position du point  $P_i$ .

$\vec{OM} = r \vec{e}_r$  est le vecteur-position du point  $M$  et nous effectuons les calculs dans l'approximation dipolaire :  $r \gg a_i$  pour tout  $i$ .

Le potentiel en un point  $M$  est :

$$V = \sum_{i=1}^N V_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{1}{P_i M} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P_i M} = r \vec{e}_r - \vec{a}_i$$

$$\text{soit :} \quad P_i M^2 = r^2 - 2r \vec{e}_r \cdot \vec{a}_i + a_i^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{P_i M} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{a_i^2}{r^2} - 2 \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{a}_i}{r} \right) \right]$$

En se limitant au premier ordre en  $\frac{a_i}{r}$  :

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{a}_i}{r} \right] \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{r} + \frac{\left( \sum_{i=1}^N q_i \vec{a}_i \right) \cdot \vec{e}_r}{r^2} \right]$$

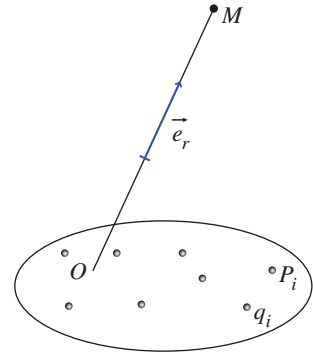
Si nous définissons le moment dipolaire de la distribution par :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \overrightarrow{OP_i},$$

alors, le potentiel en  $M$  se met sous la même forme que celui d'un doublet de charges :

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Nous avons montré que le modèle élémentaire du doublet peut en fait s'appliquer à toute distribution globalement neutre et de moment dipolaire  $\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \overrightarrow{OP_i}$  non nul.



Doc. 15. Distribution de charges.

## 3 Actions d'un champ électrostatique sur un dipôle

Nous supposons dans un premier temps que le dipôle est rigide, c'est-à-dire que la distance  $AB$  reste fixe et les charges constantes.

Les actions mécaniques exercées sur le dipôle seront caractérisées par leur résultante  $\vec{F}$  et leur moment  $\vec{\Gamma}_O$  calculé par rapport à un point  $O$  donné.

### 3.1. Champ uniforme

#### 3.1.1. Force

Les forces exercées sur les charges  $+q$  et  $-q$  par le champ uniforme sont opposées. Par conséquent :

**La résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle placé dans un champ uniforme est nulle :**

$$\vec{F} = \vec{0}.$$

Le dipôle est donc soumis à un couple de forces.

La connaissance du moment en un point et de la résultante des forces permet d'exprimer le moment en tout autre point, car nous pouvons montrer que :

$$\vec{\Gamma}_{O'} = \vec{\Gamma}_O + \vec{F} \wedge \vec{OO'}.$$

### 3.1.2. Moment

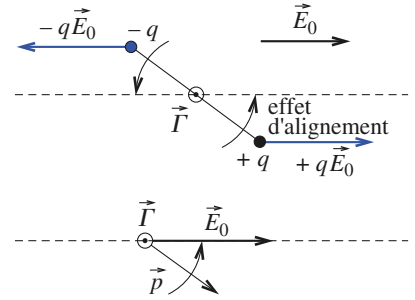
Calculons par exemple ce moment par rapport au point  $O$ , milieu des deux charges :

$$\vec{\Gamma}_O = \left(\frac{\vec{d}}{2}\right) \wedge (q\vec{E}_0) + \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) \wedge (-q\vec{E}_0) = q\vec{d} \wedge \vec{E}_0.$$

Pour un couple (force résultante nulle), le moment est indépendant du point où il est évalué. Il vaut donc en tout point :  $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$ .

En observant le *document* 16, nous pouvons résumer l'influence du champ appliqué en disant que :

**Dans un champ uniforme, le dipôle subit un couple de moment  $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$  qui tend à l'aligner parallèlement au champ appliqué dans le même sens que celui-ci.**



**Doc. 16.** Dipôle dans un champ uniforme.

## 3.2. Cas d'un champ non uniforme

Soit une zone de l'espace où existe un champ électrique  $\vec{E}(M)$  : plaçons dans ce champ un dipôle, et cherchons l'action de ce champ.

Le dipôle de moment dipolaire  $\vec{p} = q\vec{NP}$  est constitué d'une charge  $-q$  en  $N$  où existe initialement un champ  $\vec{E}(N)$ , et une charge  $+q$  en  $P$  où existe le champ  $\vec{E}(P)$ . Appelons  $O$  le centre du vecteur  $\vec{NP}$  de composantes  $\vec{NP} = (\delta x, \delta y, \delta z)$  (*doc.* 17). Les composantes du moment dipolaire sont donc  $\vec{p} : (q\delta x, q\delta y, q\delta z)$ .

### 3.2.1. Approximation du calcul

Dans le cas d'actions subies par le dipôle, l'approximation dipolaire consiste à supposer la taille  $d = \|\vec{NP}\|$  du dipôle faible devant la distance  $L_c$ , longueur caractéristique de variation du champ électrostatique appliqué ; on supposera, par exemple, que le champ électrostatique varie de  $\|\vec{E}(M_1)\|$  à  $\|\vec{E}(M_2)\| \approx 2\|\vec{E}(M_1)\|$  sur une distance de l'ordre de  $L_c$  (*doc.* 17).

Calculons ainsi un ordre de grandeur de :

$$\frac{\|\vec{E}(P) - \vec{E}(N)\|}{\|\vec{E}(O)\|} = \frac{\|\delta \vec{E}\|}{\|\vec{E}(O)\|};$$

la composante suivant  $x$  de  $\delta \vec{E}$  peut s'écrire :

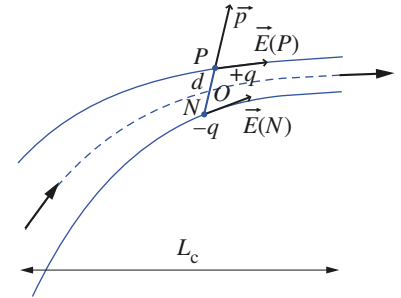
$$\delta E_x \approx \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_O \delta x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)_O \delta y + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)_O \delta z = \vec{NP} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_O (E_x).$$

La quantité  $\|\overrightarrow{\text{grad}}_O (E_x)\|$  étant de l'ordre de grandeur de  $\left|\frac{E_{Ox}}{L_c}\right|$ , nous pouvons écrire :

**Dans l'approximation dipolaire, les variations relatives du champ extérieur appliqué sur un dipôle sont négligeables, de l'ordre de  $\frac{d}{L_c}$ , rapport entre la taille du dipôle et la distance caractéristique de variation du champ :**

$$\frac{\|\vec{E}(M) - \vec{E}(O)\|}{\|\vec{E}(O)\|} \approx \frac{d}{L_c} < 1, \text{ pour } \|\vec{OM}\| \approx d.$$

Cherchons les effets de ce champ légèrement non uniforme à l'échelle du dipôle.



**Doc. 17.** Dans l'approximation dipolaire,  $d \ll L_c$ .

### 3.2.2. Moment en O des forces s'exerçant sur le dipôle

Le moment  $\vec{\Gamma}_O$  en O des forces s'exerçant sur le dipôle est égal à :

$$\vec{\Gamma}_O = q (\vec{OP} \wedge \vec{E}(P) - \vec{ON} \wedge \vec{E}(N))$$

avec  $\vec{OP} = -\vec{ON} = \frac{\vec{NP}}{2}$ , on obtient en notant  $\vec{\delta E}(P) = \vec{E}(P) - \vec{E}(O)$  et  $\vec{\delta E}(N) = \vec{E}(N) - \vec{E}(O)$  :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_O &= q (\vec{OP} \wedge (\vec{E}(O) + \vec{\delta E}(P)) - \vec{ON} \wedge (\vec{E}(O) + \vec{\delta E}(N))) \\ &= q \vec{NP} \wedge \vec{E}(O) + q \frac{\vec{NP}}{2} \wedge (\vec{\delta E}(P) + \vec{\delta E}(N)) \\ &= \vec{p} \wedge \vec{E}(O) + \vec{p} \wedge \frac{\vec{\delta E}(P) + \vec{\delta E}(N)}{2} \end{aligned}$$

Les calculs précédents ont montré que les normes de  $\vec{\delta E}(P)$  et  $\vec{\delta E}(N)$  sont négligeables devant celle de  $\vec{E}(O)$ , donc nous écrivons :

**Dans un champ non uniforme, le moment en O des forces s'exerçant sur un dipôle est égal à :**

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}(O).$$

**Dans un champ électrique, le dipôle s'aligne sur la ligne de champ qui passe par son centre.**

### 3.2.3. Force

#### 3.2.3.1. La force est-elle nulle ?

La force s'exerçant sur le dipôle est :

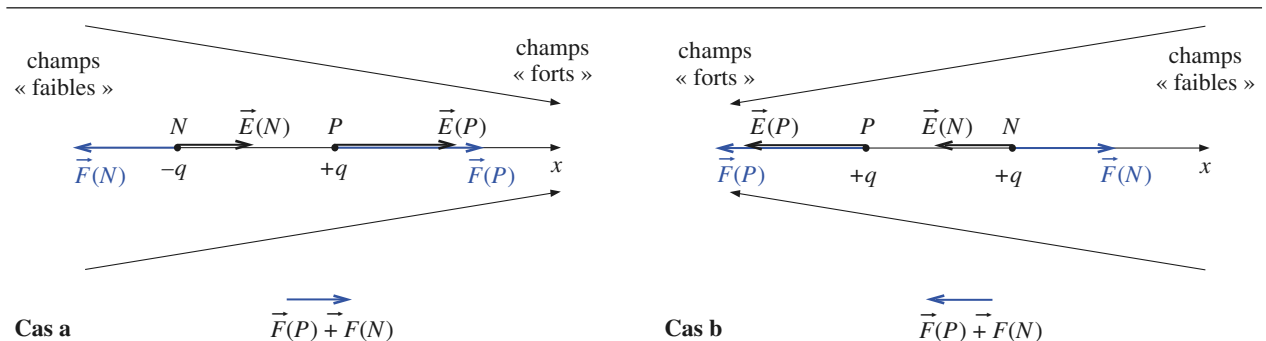
$$\vec{F} = -q\vec{E}(N) + q\vec{E}(P) = q(\vec{E}(P) - \vec{E}(N)).$$

Comme le champ est non uniforme, cette quantité est non nulle :

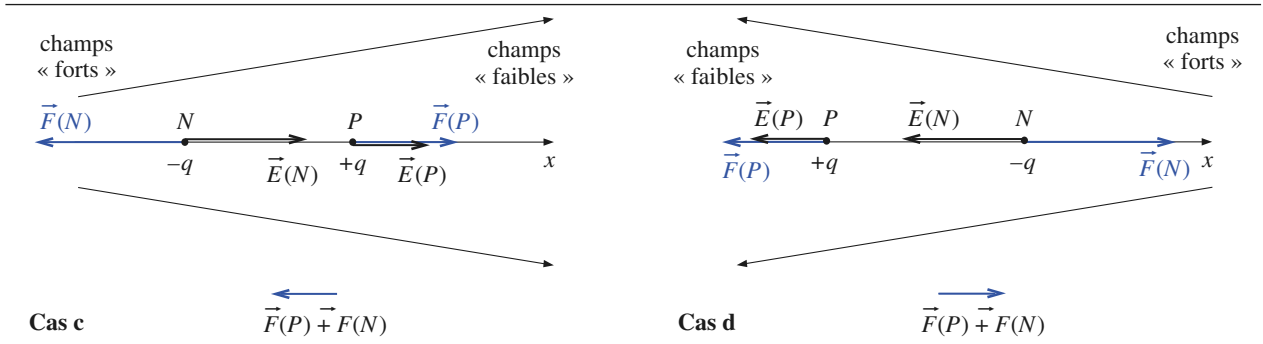
**En présence d'un champ non uniforme, une force non nulle s'exerce sur le dipôle.**

#### 3.2.3.2. Mise en évidence de l'orientation de cette force

S'il n'y a pas de contraintes extérieures l'empêchant d'évoluer, le dipôle s'aligne sur la ligne de champ passant par son centre (*doc. 18*) ( $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  sont alors parallèles et de même sens). Examinons les diverses situations où nous avons fait apparaître les lignes de champs, avec les orientations du champ : le dipôle, orienté parallèlement à  $\vec{E}$  et dans le même sens, est toujours attiré par les champs forts.



Doc. 18.



**Doc. 18.** Sur ces divers documents a, b, c et d, le dipôle, orienté parallèlement à  $\vec{E}$  et dans le même sens, est toujours attiré par les champs forts.

### 3.2.3.3. Cas général

La composante  $F_x$  (par exemple) de la force  $\vec{F} = q(\vec{E}(P) - \vec{E}(N))$  s'exerçant sur le dipôle est donnée par :

$$F_x = q(E_x(P) - E_x(N)) = q \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial E_x}{\partial y} \delta y + \frac{\partial E_x}{\partial z} \delta z \right).$$

Les composantes du moment dipolaire étant  $q\delta x$ ,  $q\delta y$  et  $q\delta z$ , cela donne :

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

Nous avons vu dans l'Application 2 du chapitre 3 que :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

on obtient donc :

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

relation qui s'écrit :

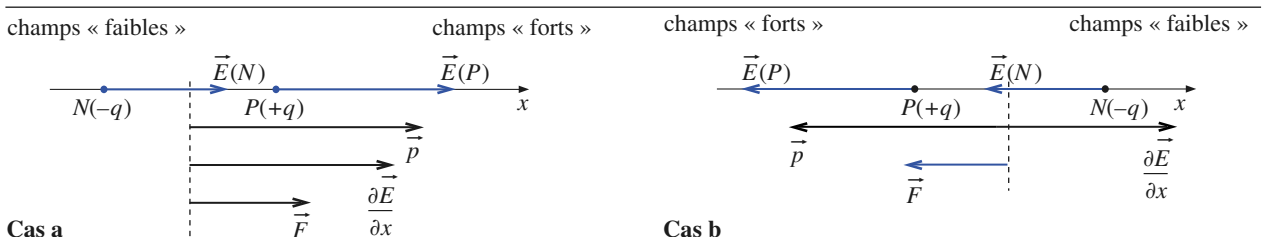
$$F_x = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}.$$

On a donc :  $\vec{F} = \left( \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \right) \vec{e}_x + \left( \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \right) \vec{e}_y + \left( \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \right) \vec{e}_z$

### 3.2.4. Interprétation

Retrouve-t-on l'orientation de la force précédente, c'est-à-dire que les dipôles, une fois alignés sur le champ local, sont attirés par les champs forts ?

Examinons le document 19 sur lequel nous avons repris les quatre cas du document 18. Les forces obéissent bien, en orientation, à l'expression précédente en considérant les diverses orientations des champs et des gradients de champ.

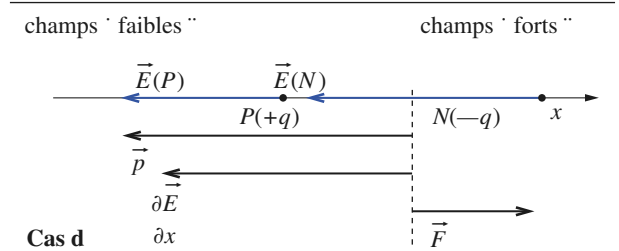
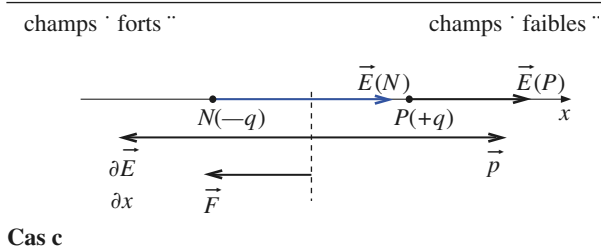


Cas a

Cas b

**Doc. 19.**





**Doc. 19.** Sur ces divers documents a, b, c et d, le dipôle orienté parallèlement à  $\vec{E}$  et dans le même sens est toujours attiré par les champs forts, conforme à l'expression de la force en  $\vec{F} = \left( \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \right) \vec{e}_x$ .

Dans un champ électrique uniforme ou non, un dipôle a tendance à s'aligner sur la ligne de champ qui passe par son centre ; le dipôle, orienté parallèlement au champ local et dans le même sens, est alors attiré par les champs forts.

## Application 2

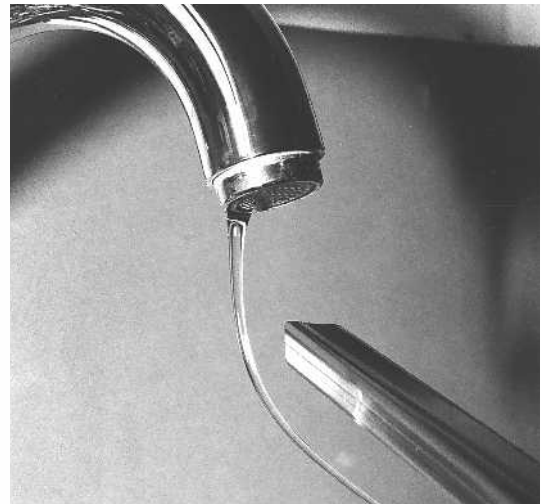
### Une expérience à expliquer

Un morceau de matière plastique, frotté sur un chiffon sec, est approché d'un filet d'eau coulant d'un robinet. Le résultat, assez spectaculaire, de cette expérience est représenté sur le document 20.

Comment interpréter ce phénomène ?

La tige de plastique est électrisée, et ses charges créent un champ électrostatique dont l'intensité croît lorsque l'on s'approche du matériau chargé.

L'eau est constituée de molécules  $\text{H}_2\text{O}$  polaires. Sous l'effet du champ de la tige chargée, ces dipôles s'orientent dans le sens du champ, et sont attirés alors vers les zones de champ plus intense. Le filet d'eau dévie ainsi nettement de la verticale pour se rapprocher de la tige chargée.



Doc. 20.

► Pour s'entraîner : ex. 1.

### 3.3. Cas d'un dipôle non rigide

Si le dipôle n'est pas rigide, ses caractéristiques dépendent du champ appliqué. Sous l'action du champ, les répartitions de charges (de l'atome ou de la molécule par exemple) sont modifiées. Le moment dipolaire dépend du champ électrostatique :  $\vec{p} = \vec{p}(\vec{E})$ .

Une fois le champ établi, les caractéristiques du dipôle sont bien déterminées et son moment dipolaire connu. Les calculs précédents sont donc applicables en considérant pour  $\vec{p}$ , la valeur du moment dipolaire en présence du champ  $\vec{p}(\vec{E})$ . Pour le calcul de la force, nous pouvons raisonner avec ce moment dipolaire comme s'il était rigide.



*Remarque :* La matière, sous l'action d'un champ appliqué, acquiert généralement une polarisation (densité volumique de dipôles) de même sens que le champ appliqué, de sorte que la matière dévie vers les zones de champ fort. (Cf. l'Application 2 précédente.)

► Pour s'entraîner : ex. 4.

## 4 Énergie potentielle d'interaction

### 4.1. Énergie potentielle d'interaction entre un dipôle rigide et un champ extérieur

Dans une distribution de charges ponctuelles, si les interactions entre les charges sont neutralisées par des contraintes, l'énergie potentielle de la distribution dans un champ électrostatique extérieur est la somme des énergies potentielles de chacune des charges de la distribution.

Dans le cas d'un dipôle *rigide*, l'interaction électrostatique entre les deux charges est neutralisée par la structure du dipôle qui maintient ces deux charges à une distance  $d$  constante.

L'énergie potentielle d'un tel dipôle est donc due uniquement à l'interaction entre les deux charges  $\pm q$  et le champ extérieur.

Nous avons vu (chapitre 2) que l'énergie potentielle d'une charge  $q$  dans un champ créant le potentiel  $V$  est :  $\mathcal{E}_p = qV$ . Cela étant, l'énergie potentielle du dipôle *rigide* est :

$$\mathcal{E}_p = qV\left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right) - qV\left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right).$$

Comme nous sommes fondés à écrire :

$$V\left(\vec{r} \pm \frac{\vec{d}}{2}\right) = V(\vec{r}) \pm \overrightarrow{\text{grad}}(V(\vec{r})) \cdot \frac{\vec{d}}{2}$$

il vient :

$$\mathcal{E}_p = q \overrightarrow{\text{grad}}(V(\vec{r})) \cdot \vec{d} = p \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(V(\vec{r})) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}).$$

**L'énergie potentielle d'interaction entre un dipôle rigide et le champ appliqué est :**

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Notons que le travail fourni par un opérateur lors d'un déplacement élémentaire du dipôle rigide s'écrit :

$$\delta W_{\text{op}} = d\mathcal{E}_p = d(-\vec{p} \cdot \vec{E}) = -\vec{p} \cdot d\vec{E} - d\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Il serait possible, à partir de cette expression, de retrouver la force et le moment s'exerçant sur un dipôle.

*Remarque :* Dipôle rigide signifie  $\|\vec{p}\| = \text{cte}$ . Nous n'aurons  $\vec{p} = \overrightarrow{\text{cte}}$  que si le dipôle subit une translation.

# Application 3

## Action exercée par un fil infini chargé sur un dipôle

Soit un dipôle placé dans le champ électrostatique d'un fil rectiligne infini portant la densité linéique  $\lambda$  ; le dipôle est en un point  $M$ , à une distance  $r$  du fil, orienté radicalement dans un plan perpendiculaire au fil.

1) Déterminer la résultante  $\vec{F}$  et le moment  $\vec{\Gamma}_{(M)}$  en  $M$  des actions exercées par le fil sur le dipôle.

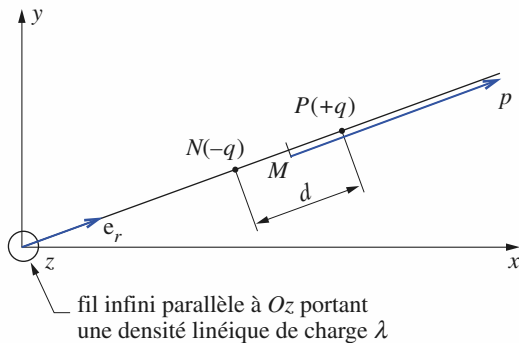
2) Calculer l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  du dipôle.

3) Quelle relation lie  $\vec{F}$  et  $\mathcal{E}_p$ .

1) Rappelons que le champ créé par le fil rectiligne infini est radial, orienté suivant  $\vec{e}_r$ , et varie en  $\frac{1}{r}$  ; il est donné par l'expression suivante :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r}.$$

Le moment résultant se calcule immédiatement : comme le dipôle est aligné parallèlement au champ, le moment  $\vec{\Gamma}_{(M)}$  des forces s'exerçant sur le dipôle est nul.



Doc. 21.

Pour le calcul de la résultante  $\vec{F}$  des forces appliquées, nous pouvons utiliser la méthode vue au § 3.2.3. : soit  $d$  la distance entre les deux charges  $-q$  et  $+q$  de ce dipôle de moment  $p = qd$  ; la résultante des forces s'exerçant sur les deux charges du dipôle est :

$$\vec{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{ON} + \frac{1}{OP} \right) \vec{e}_r.$$

Avec  $ON = r - \frac{d}{2}$ ,  $OP = r + \frac{d}{2}$ , et en se plaçant dans l'approximation dipolaire, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \left( \left( r + \frac{d}{2} \right)^{-1} - \left( r - \frac{d}{2} \right)^{-1} \right) \vec{e}_r \approx \frac{\lambda q d}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \\ &= - \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r. \end{aligned}$$

Cette force orientée suivant  $-\vec{e}_r$  attire le dipôle vers l'axe ( $Oz$ ) où existent les champs intenses.

2) L'énergie potentielle du dipôle est donnée par l'expression  $\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}(M)$ , ce qui donne :

$$\mathcal{E}_p = - \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

3) Lors d'une translation élémentaire  $d\vec{M} = dr\vec{e}_r$  du dipôle sur la ligne de champ, la variation d'énergie potentielle  $d\mathcal{E}_p$  est opposée au travail de la force  $\vec{F}$ , ce qui donne :  $d\mathcal{E}_p = -\vec{F} \cdot d\vec{e}_r$ , soit :

$$d \left( - \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r} \right) = - \left( - \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr,$$

ce qui est bien vérifié.

## CQFR

### ● LE MOMENT DIPOLAIRE

Un objet non chargé, mais polarisé, crée un potentiel et un champ analogues (en première approximation) à ceux d'un doublet de charges de moment dipolaire  $\vec{p}$  non nul ( $q > 0$ ) :  $\vec{p} = q\vec{d}$  et  $\vec{d} = A\vec{A}^\dagger$ .

### ● POTENTIEL ET CHAMP DU DIPÔLE

• En utilisant l'expression du moment dipolaire, le potentiel électrostatique créé par un dipôle placé au point  $O$ , à l'ordre le plus bas en puissances de  $\frac{d}{r}$ , est :  $V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$ .

## C Q F R

• L'expression du champ du dipôle est :  $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3}$ .

• Sous forme intrinsèque, le champ du dipôle est :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{r^3} \right) \quad \text{ou encore :} \quad \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{OM}) \cdot \vec{OM} - \vec{p} OM^2}{OM^5}.$$

### ● INTERACTION D'UN DIPÔLE AVEC UN CHAMP APPLIQUÉ

• La résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle placé dans un champ uniforme est nulle :  $\vec{F} = \vec{0}$ .

• Le moment des forces s'exerçant sur un dipôle soumis en  $M$  à un champ appliqué  $\vec{E}(M)$  pratiquement uniforme est :  $\vec{\Gamma}(M) = \vec{p} \wedge \vec{E}(M)$ .

• Dans un champ non uniforme, le dipôle subit principalement un moment qui tend à l'aligner parallèlement au champ appliqué, dans le même sens que celui-ci. Une fois aligné, le dipôle subit encore une force qui tend à le déplacer vers les zones de champ intense.

• L'énergie potentielle d'interaction entre un dipôle rigide et le champ appliqué est :  $\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ .

## Contrôle rapide

### Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Définir le moment dipolaire  $\vec{p}$  d'une distribution de charges globalement neutre et en donner l'unité.
- ✓ Définir l'approximation dipolaire.
- ✓ Calculer le potentiel  $V(M)$  créé par un dipôle se plaçant dans l'approximation dipolaire.
- ✓ Établir l'expression du champ  $\vec{E}(M)$  créé par un dipôle, dans l'approximation dipolaire.
- ✓ Démontrer que dans un champ uniforme  $\vec{E}_0$ , un dipôle (rigide ou pas) est soumis à un couple  $\vec{\Gamma}$  dont on déterminera le moment.
- ✓ Établir l'expression de la force  $\vec{F}$  appliquée à un dipôle soumis à un champ légèrement non uniforme.
- ✓ Établir l'expression de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  d'un dipôle rigide placé dans un champ  $\vec{E}$ .

### Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Toute distribution de charges dont la charge totale est nulle se comporte comme un dipôle.

☐ Vrai

☐ Faux

2. À grande distance, le potentiel d'une distribution dipolaire est en  $\frac{1}{r^2}$  parce que la charge totale de la distribution est nulle.

☐ Vrai

☐ Faux

3. Dans un champ uniforme, le moment résultant  $\vec{\Gamma}$  des forces appliquées à un dipôle est indé-

pendant du point où on l'évalue, parce que la résultante  $\vec{F}$  des forces appliquées est nulle.

☐ Vrai

☐ Faux

4. Dans un champ légèrement non uniforme, le dipôle n'est encore soumis qu'à un couple.

☐ Vrai

☐ Faux

5. Un dipôle est rigide lorsque son moment dipolaire est constant :  $\vec{p} = \text{cte}$ .

☐ Vrai

☐ Faux

► Solution, page 97.

# Exercices

## 1 Force subie par le dipôle dans un cas unidimensionnel

Un dipôle, placé en un point de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , est soumis au champ  $\vec{E} = E(x) \vec{e}_x$ . Calculer à l'aide du modèle du doublet puis la force subie par le dipôle lorsque :

- 1)  $\vec{p}$  est parallèle à  $\vec{e}_x$  et de même sens que  $\vec{e}_x$  ;
- 2)  $\vec{p}$  est perpendiculaire à  $\vec{e}_x$  .

## 2 L'atome de Thomson, modèle de polarisation linéaire

Dans ce modèle, un atome d'hydrogène est représenté par un noyau de charge  $+e$  occupant une boule de rayon  $R$  à l'intérieur de laquelle la charge  $e$  est uniformément répartie. L'électron, de charge  $-e$ , est susceptible d'évoluer à l'intérieur de la boule chargée positivement.

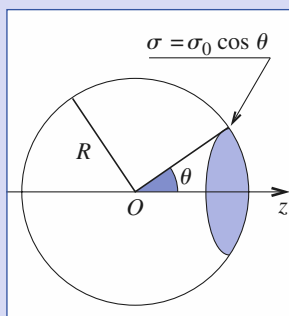
- 1) Quelle est la force subie par l'électron évoluant à l'intérieur de la sphère de rayon  $R$  ? Quelle est sa position d'équilibre ?
- 2) Quelle est la nature de la trajectoire de l'électron, supposée interne à la boule ? Quelle est la valeur du moment dipolaire moyen de cet atome ?
- 3) Un champ  $\vec{E}_0$  est appliqué à cet atome, le noyau étant supposé immobile. Si l'électron reste encore à l'intérieur de la sphère de rayon  $R$ , quelles sont les modifications apportées aux résultats précédents par l'existence du champ appliqué ? Montrer en particulier que le moment dipolaire moyen est de la forme  $\langle \vec{p} \rangle = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_0$ , où le facteur  $\alpha$  est appelé polarisabilité de l'atome. Quelle est la dimension de  $\alpha$  ? Son ordre de grandeur ?
- 4) Pour quelle valeur du champ appliqué aura-t-on l'ionisation de cet atome ?

## 3 Champ et potentiel créés par une sphère

Une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  porte une charge surfacique  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ .

Déterminer le champ et le potentiel créé par cette distribution à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère (on prendra  $V=0$  en  $O$ ).

Commenter le comportement du champ en  $r=R$ .



Indication : On utilisera l'équivalence entre cette distribution et la superposition de deux distributions de charges correspondant à deux boules chargées uniformément  $-\rho$  et  $+\rho$ , de rayon  $R$ , de centres  $O_1$  et  $O_2$  sur l'axe  $(Oz)$  et d'abscisses  $-a$  et  $+a$  respectivement, à la limite  $a$  tend vers 0 avec  $\rho a = \text{cte} = \sigma_0$ . Cette équivalence a été vue exercice 9 chapitre 4.

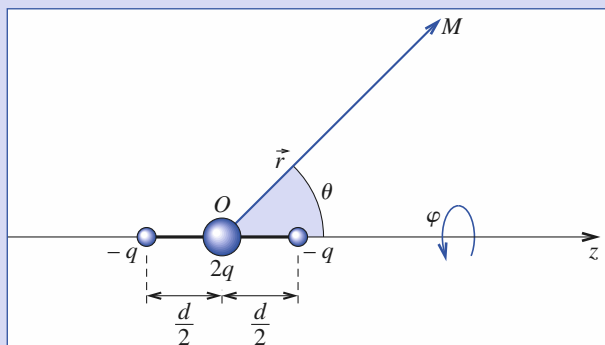
## 4 Forces de Van der Waals

Une molécule non polarisable de moment électrique  $p_0 = p_0 e_x$  est placée en  $O$ . En un point  $M$  de l'axe  $(Ox)$  se trouve une molécule polarisable de polarisabilité  $\alpha$  et de moment électrique permanent nul. Dans le champ  $\vec{E}(M)$  créé par la molécule placée en  $O$ , la molécule polarisable acquiert un moment dipolaire induit  $\vec{p}_i = \alpha \vec{E}(M)$ .

Calculer la force  $\vec{F}$  qui s'exerce sur la molécule polarisable.

## 5 Champ et potentiel d'un quadrupôle

Calculer le premier terme non nul du potentiel créé à grande distance par la distribution représentée sur le schéma.



## 6 Champ de quatre charges

Quatre charges sont disposées dans le plan  $(xOy)$  :

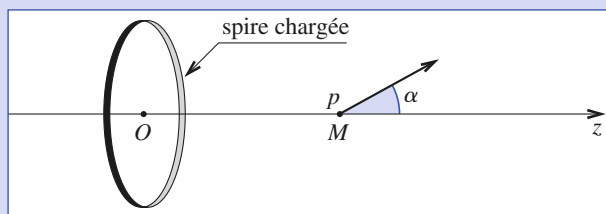
$q$  en  $(a, 0)$  et en  $(-a, 0)$  ;  $-q$  en  $(0, a)$  et en  $(0, -a)$ .

Calculer le champ créé par la distribution de charges pour  $r \gg a$ , puis pour  $r \ll a$ , dans le plan  $(xOy)$ . (On se limitera aux premiers termes non nuls des développements limités.)

## 7 Interaction d'une spire et d'un dipôle

Le cerceau, de rayon  $R$ , porte la charge linéique  $\lambda$  uniforme.

- 1) Calculer le champ électrostatique créé par le cerceau sur son axe, ainsi qu'au voisinage de celui-ci.



2) Quelles sont les actions mécaniques exercées par la spire sur le dipôle placé en  $M$  ?

On proposera trois méthodes pour effectuer ce calcul.

3) On prend désormais  $\alpha = 0$ . Le dipôle peut coulisser sans frottement sur l'axe horizontal. Déterminer la ou les positions d'équilibre. Discuter leur stabilité et calculer éventuellement

la période des petites oscillations du dipôle de masse  $m$  le long de l'axe.

## 8 Calcul de la force instantanée d'interaction entre deux dipôles

Soit un dipôle  $\vec{p}_1$  au point  $O$  et un dipôle  $\vec{p}_2$  au point  $M$  ( $\vec{OM} = \vec{r}$ ). Le dipôle  $\vec{p}_1$  crée le champ électrostatique  $\vec{E}_1$ , et le dipôle  $\vec{p}_2$  le champ électrostatique  $\vec{E}_2$ .

1) Quelle est l'énergie potentielle d'interaction existant entre ces deux dipôles ?

2) Quelle est la force subie par  $\vec{p}_2$  de la part de  $\vec{p}_1$  ?

# Corrigés

**Solution du tac au tac, p. 95.**

1. Vrai si  $\vec{p} \neq \vec{0}$

2. Vrai

3. Vrai

4. Faux

5. Faux

1

1) Utilisant le modèle du doublet, nous avons :

$$\vec{F} = -qE \left( x - \frac{d}{2} \right) \vec{e}_x + qE \left( x + \frac{d}{2} \right) \vec{e}_x = qd \frac{dE(x)}{dx} \vec{e}_x.$$

Expression de la forme  $\left( \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \right) \vec{e}_x$  trouvée dans le cours.

Lorsque le dipôle est dans le même sens que le champ, nous pouvons constater que le dipôle est attiré dans le sens où la norme du champ augmente, donc il est attiré par les champs forts.

2) Lorsque le dipôle est perpendiculaire au champ, par exemple  $\vec{p} = p \cdot \vec{e}_y$ , le calcul précédent donne immédiatement  $\vec{F} = 0$ .

2

1) La charge  $e$ , répartie uniformément à l'intérieur de la sphère, correspond à

$$\text{la charge volumique } \rho = \frac{3e}{4\pi R^3}.$$

Le champ en un point  $M$  ( $\vec{OM} = \vec{r}$ ) intérieur à la sphère vaut

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}.$$

L'électron est donc soumis à la force centrale de rappel linéaire vers le point  $O$  :

$$\vec{f} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}.$$

Elle est nulle en  $O$ , position d'équilibre stable de l'électron.

2) L'équation du mouvement de l'électron à l'intérieur de la sphère est :

$$m\ddot{\vec{r}} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} = \vec{0}.$$

Pour des conditions initiales  $\vec{r}_0$  et  $\vec{v}_0$  données, l'équation du mouvement est  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega t$ , où  $\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$ . La trajectoire est une ellipse de centre  $O$ .

Le moment dipolaire instantané de l'atome est  $\vec{p} = -e\vec{r}$ . Sa valeur moyenne est nulle.

3) Le champ  $\vec{E}_0$  exerce la force supplémentaire  $-e\vec{E}_0$  sur l'électron. S'il reste à l'intérieur de la sphère, l'électron aura la même trajectoire, décalée d'un vecteur constant : l'ellipse sera centrée en  $\langle \vec{r} \rangle = \frac{-4\pi\epsilon_0 R^3}{e} \vec{E}_0$ . La polarisabilité de l'atome s'en déduit  $\alpha = 4\pi R^3$ , homogène à un volume, et en ordre de grandeur de  $R^3$  avec  $R = 0,1 \text{ nm}$ .

4) La force de rappel est maximale pour  $r = R$ , de norme  $f_{\max} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ .

(À l'extérieur de la sphère, elle décroît comme  $\frac{1}{r^2}$  à partir de cette valeur.) Elle ne peut plus compenser la force exercée par le champ  $\vec{E}_0$  lorsque la norme de celui-ci dépasse  $E_{0\max} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ . Il y a alors ionisation de l'atome.

Pour  $R = 0,1 \text{ nm}$ , ce champ est de l'ordre de  $10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  (considérable, le champ disruptif de l'air sec vaut environ  $3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ). Les champs que nous appliquons aux atomes sont généralement beaucoup plus faibles, et n'ont alors que des effets de faible perturbation sur l'atome, donc linéaires en première approximation. Ce modèle d'atome, bien qu'assez étrange, a l'agréable propriété de rendre compte d'une polarisation linéaire (conforme à l'expérience) et donne un ordre de grandeur de la polarisabilité en bon accord avec les valeurs usuelles pour la polarisation électronique.

# Corrigés

3

À l'intérieur de la sphère, les deux distributions de charges créent les champs :

$$\vec{E}_1(M) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O_1M} \text{ et } \vec{E}_2(M) = +\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O_2M},$$

$$\text{soit au total } \vec{E}(M) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O_1O_2} = -\frac{\rho a}{3\epsilon_0} \vec{e}_z.$$

À la limite quand  $a$  tend vers 0, nous obtenons :

$$\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ uniforme à l'intérieur de la sphère.}$$

$$\text{Le potentiel s'en déduit } V(M) = \left(\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\right) z = \left(\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\right) r \cos \theta.$$

À l'extérieur de la sphère, nous savons que les deux boules chargées créent le même champ que si toutes leurs charges  $\pm q = \pm \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$  étaient concentrées en  $O_1$  et  $O_2$ . À la limite quand  $a$  tend vers 0, le champ vu à une distance supérieure à  $R$  du point  $O$  correspond au champ d'un dipôle placé en  $O$  et de moment dipolaire :

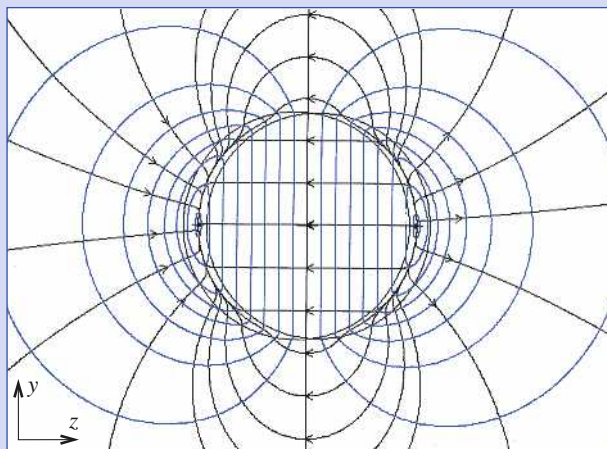
$$\vec{p} = q \vec{O_1O_2} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho a \vec{e}_z = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma_0 \vec{e}_z.$$

Le calcul du potentiel puis celui du champ a été effectué dans le cours et nous donne :

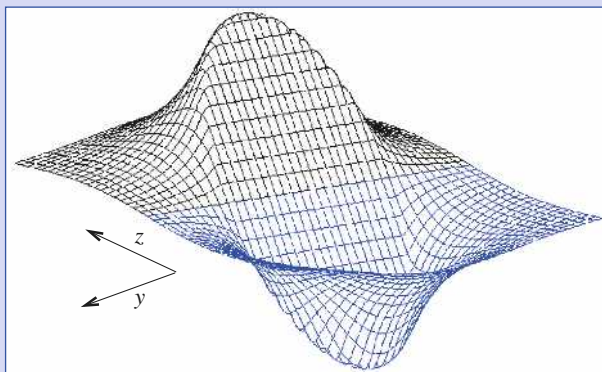
$$V = \frac{R^3 \sigma_0 \cos \theta}{3\epsilon_0 r^2} \text{ et } \vec{E} = \begin{cases} E_r = \frac{2R^3 \sigma_0 \cos \theta}{3\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{R^3 \sigma_0 \sin \theta}{3\epsilon_0 r^3} \end{cases}.$$

Nous vérifions que le potentiel est continu sur la sphère, que la composante tangentielle du champ est continue ( $E_\theta$ ), et que la discontinuité de la composante normale ( $E_r$ ) est bien égale à  $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}$ .

Sur les simulations suivantes, nous visualisons les équipotentielles et les lignes de champ ainsi que l'évolution du potentiel dans un plan contenant l'axe ( $Oz$ ).



Lignes de champ et équipotentielles d'une sphère chargée :  
 $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ , avec  $\sigma_0 > 0$ .



Évolution du potentiel créé par une sphère chargée  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  ( $\sigma_0 > 0$ ). Nous visualisons la surface plane inclinée correspondant à la zone de champ uniforme.

4

La molécule placée en  $O$  crée le champ :  $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_0}{x^3} \vec{e}_x = E(x) \vec{e}_x$ .

Ce champ induit, dans la molécule polarisable, un moment électrique en déplaçant le barycentre des charges négatives ( $-q$ ) en  $M_-(x - \frac{a}{2})$ . Le moment induit résultant est alors :  $\vec{p}_i = \alpha \vec{E}(M) = q M_+ \vec{M}_+$ .

Dans l'hypothèse  $a \ll x$ , nous sommes fondés à écrire :  $E(x \pm \frac{a}{2}) = E(x) \pm \frac{dE}{dx} \frac{a}{2}$  ce qui donne pour l'expression de la force exercée sur la molécule polarisable :

$$\vec{F} = q \left[ \left( E(x + \frac{a}{2}) - E(x - \frac{a}{2}) \right) \vec{e}_x \right] = q \frac{dE}{dx} a \cdot \vec{e}_x.$$

Comme  $q = \frac{p_i}{a} = \frac{\alpha E}{a}$ , il vient après simplification :

$$\vec{F} = \alpha E \frac{dE}{dx} \vec{e}_x = -\frac{3\alpha}{4\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{p_0^2}{r^7} \vec{e}_x.$$

C'est une force attractive en  $\frac{1}{r^7}$ . De telles forces s'exercent entre molécules et sont appelées forces de Van der Waals.

5

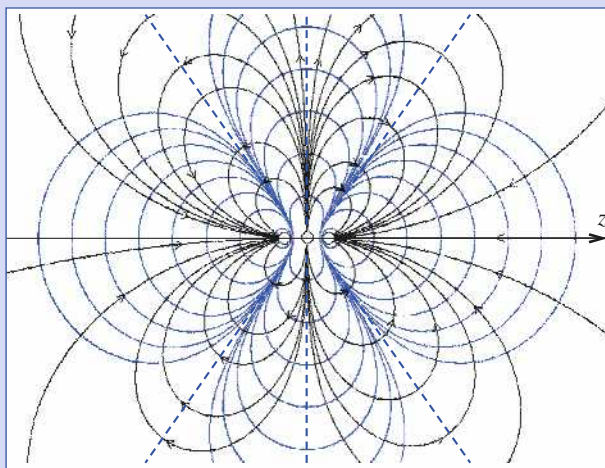
La charge totale est nulle et le moment dipolaire  $\vec{p}$  est aussi nul. Il faudra calculer le développement limité du potentiel jusqu'à l'ordre trois en  $\frac{1}{r}$  (au moins !).

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 2 - \left( 1 + \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left( 1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 2 - \left( 1 - \frac{d}{2r} \cos \theta - \frac{d^2}{8r^2} + \frac{3d^2}{8r^2} \cos^2 \theta + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{d}{2r} \cos \theta - \frac{d^2}{8r^2} + \frac{3d^2}{8r^2} \cos^2 \theta + \dots \right) \right) \\ &\approx \frac{qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1 - 3\cos^2 \theta}{4}. \end{aligned}$$

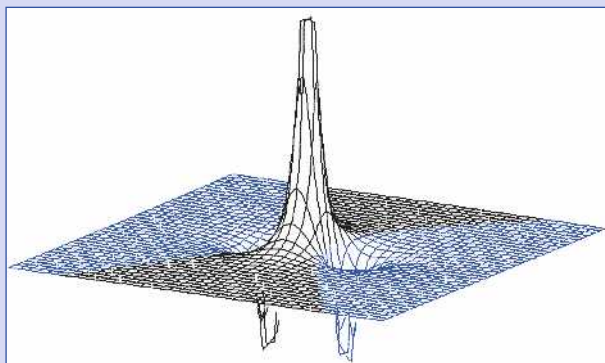
Le premier terme non nul est de type quadrupolaire. Les simulations suivantes présentent l'allure des lignes de champ et des équipotentielles, ainsi que l'allure du potentiel. Nous visualisons bien les équipotentielles :

$$V = 0, \text{ pour } \theta = \pm \frac{\pi}{3} \text{ et } \theta = \pm \frac{2\pi}{3}.$$





Lignes de champ et équipotentiels vues par le système de charges  $(-q, 2q, -q)$ .



Évolution du potentiel créé par le système de charges  $(-q, 2q, -q)$ .

Ce potentiel tend très vite vers zéro (terme en  $\frac{1}{r^3}$ ).

6

Le potentiel créé en un point  $M$  de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans le plan  $(xOy)$  est, à une constante près :

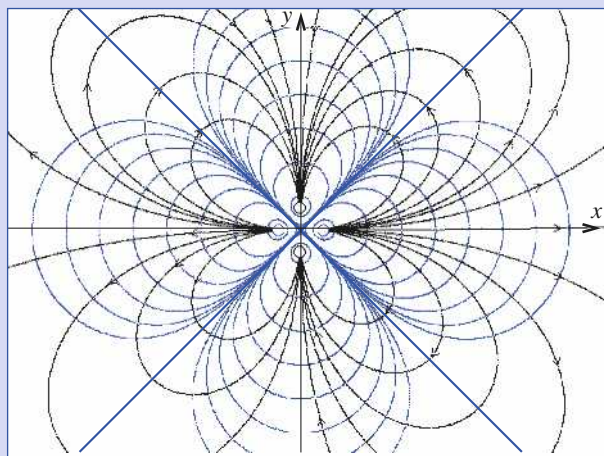
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(r^2 - 2ar \cos \theta + a^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} + \frac{(r^2 + 2ar \cos \theta + a^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{(r^2 - 2ar \sin \theta + a^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{(r^2 + 2ar \sin \theta + a^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} \right]$$

À une distance  $r$  de l'origine grande devant  $a$ , nous devons mener le développement du potentiel au moins jusqu'à l'ordre deux, car la charge et le moment dipolaire de cette distribution sont nuls :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( 1 + \frac{a \cos \theta}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2 \cos^2 \theta}{2r^2} \right) + \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2 \cos^2 \theta}{2r^2} \right) - \left( 1 + \frac{a \sin \theta}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2 \sin^2 \theta}{2r^2} \right) - \left( 1 - \frac{a \sin \theta}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2 \sin^2 \theta}{2r^2} \right) \right] = \frac{3qa^2(2\cos^2 \theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

et le champ électrostatique vaut :

$$\vec{E} = \frac{3qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} [3(2\cos^2 \theta - 1)\vec{e}_r + 2\sin 2\theta \cdot \vec{e}_\theta].$$

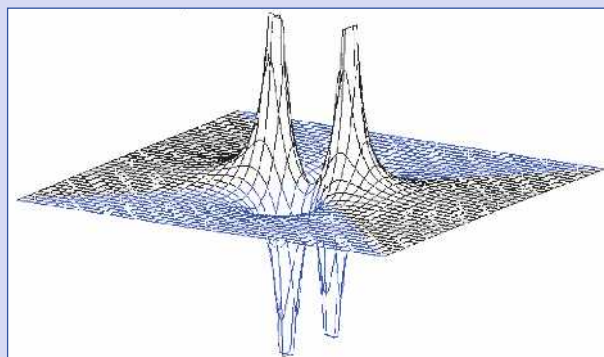


Lignes de champ et équipotentiels créés par les quatre charges.

À distance  $r$  faible devant  $a$ , le développement du potentiel est identique au précédent, en intervertissant  $a$  et  $r$ ,

$$V = \frac{3qr^2(2\cos^2 \theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

et le champ est :  $\vec{E} = \frac{3qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} [-2(2\cos^2 \theta - 1)\vec{e}_r + 2\sin 2\theta \cdot \vec{e}_\theta]$ .



Évolution du potentiel créé par quatre charges. Le potentiel tend vite vers zéro (termes en  $\frac{1}{r^3}$ ).

Les simulations précédentes présentent l'allure des lignes de champ et des équipotentiels, ainsi que l'allure du potentiel. Nous visualisons bien les équipotentiels  $V = 0$  pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$  et  $\theta = \pm \frac{3\pi}{4}$ .

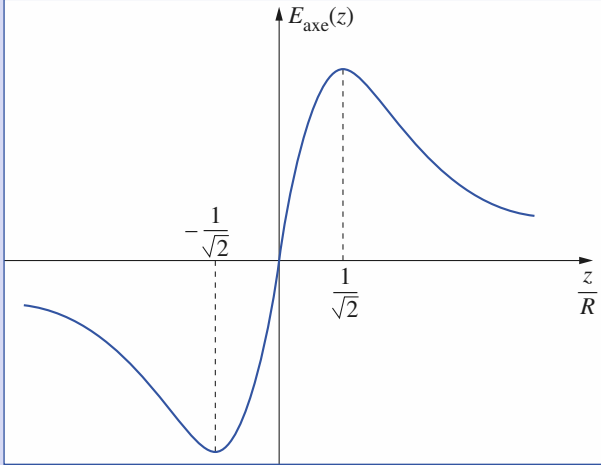
7

1) Sur l'axe, le champ du cerceau est porté par l'axe  $(Oz)$  par raison de symétrie. En n'oubliant pas de projeter les champs élémentaires sur l'axe  $(Oz)$ , on trouve sans difficulté :



$$\vec{E}_{\text{axe}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}},$$

dont l'allure des variations apparaît sur le schéma ci-après.



Variations du champ sur l'axe.

Le champ passe par deux extrema pour :

$$\frac{z}{R} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ où } \frac{dE_{\text{axe}}(z)}{dz} = 0.$$

Au voisinage de l'axe, nous aurons à l'ordre un en  $r$  (cf. Application 1, chapitre 4) :

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, z) &= E_{\text{axe}}(z) \vec{e}_z - \frac{r}{2} \left( \frac{dE_{\text{axe}}}{dz} \right)_z + \dots \\ &= \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{[z^2 + R^2]^{3/2}} \vec{e}_z + r \frac{R^2 - 2z^2}{[z^2 + R^2]^{5/2}} \vec{e}_r + \dots \right) \end{aligned}$$

2) En première approximation, le dipôle subit un couple de moment :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} = -p E_{\text{axe}}(z) \sin \alpha \vec{e}_\alpha$$

qui tend à l'aligner sur l'axe ( $Oz$ ).

Il est toujours possible de revenir au modèle du doublet ( $\vec{p} = q\vec{d}$ ) pour calculer la force subie par le dipôle :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q \left( E_{\text{axe}} \left( z + \frac{d \cos \alpha}{2} \right) \vec{e}_z - \frac{d \sin \alpha}{4} \left( \frac{dE_{\text{axe}}}{dz} \right)_z \vec{e}_r \right) \\ &\quad - q \left( E_{\text{axe}} \left( z - \frac{d \cos \alpha}{2} \right) \vec{e}_z - \frac{d \sin \alpha}{4} \left( \frac{dE_{\text{axe}}}{dz} \right)_z \vec{e}_r \right), \end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat :

$$\vec{F} = p \left( \cos \alpha \vec{e}_z - \frac{\sin \alpha}{2} \vec{e}_r \right) \frac{dE_{\text{axe}}(z)}{dz}.$$

3) Pour un dipôle  $\vec{p} = p \vec{e}_z$ , la force subie est (dans le cas où  $\alpha = 0$ ) :

$$\vec{F} = p \frac{dE_{\text{axe}}(z)}{dz} \vec{e}_z;$$

$$\frac{dE_{\text{axe}}(z)}{dz} \text{ s'annule pour deux valeurs de } z :$$

$$z = + \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ et } z = - \frac{R}{\sqrt{2}} : \text{ il existe donc deux positions d'équilibre.}$$

Exprimons l'énergie potentielle,  $\mathcal{E}_p$  du dipôle :  $\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p E_{\text{axe}}(z)$  : la position d'équilibre stable correspond à un minimum d'énergie potentielle, donc à un maximum de  $E_{\text{axe}}(z)$ , c'est-à-dire à  $z = + \frac{R}{\sqrt{2}}$  ;  $z = - \frac{R}{\sqrt{2}}$  est une position d'équilibre instable.

$$\text{Étudions le mouvement du dipôle au voisinage de } z = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ et posons } z = \frac{R}{\sqrt{2}} + \varepsilon_z.$$

Pour un dipôle de masse  $m$  coulissant sur l'axe ( $Oz$ ) soumis uniquement à la force précédente selon ( $Oz$ ), l'équation du mouvement linéarisée au voisinage de la position d'équilibre est :

$$m \left( \frac{d^2 \varepsilon_z}{dt^2} \right) = - \frac{8p\lambda}{9\sqrt{3} \epsilon_0 R^3} \varepsilon_z.$$

C'est une équation d'oscillateur harmonique, cette position d'équilibre est stable.

L'autre position ( $z = - \frac{R}{\sqrt{2}}$ ) est en revanche instable.

## 8

1) L'énergie potentielle d'interaction entre les deux dipôles est donnée par la formule :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2 = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1.$$

Le champ créé par le dipôle  $\vec{p}_1$  en  $\vec{r}$  est :

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}_1}{r^5} \right).$$

L'énergie potentielle d'interaction est donc égale à :

$$-\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r}) + r^2(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)}{r^5} \right).$$

Remarquons que cette relation est bien symétrique en  $p_1 \leftrightarrow p_2$ .

2) Calculons la force exercée par le dipôle  $\vec{p}_1$  sur le dipôle  $\vec{p}_2$ . Sachant que :

$$\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{\vec{e}_r}{r^2} \text{ et } \text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{p},$$

la force exercée par le premier dipôle sur le second s'en déduit :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= - \text{grad} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r}) + r^2(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)}{r^5} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p}_1)(\vec{p}_2 \cdot \vec{r}) + 3(\vec{p}_2)(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}) - 2\vec{r}(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)}{r^5} \right) \\ &\quad + \frac{5\vec{r}}{r^7} (-3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r}) + r^2(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)) \\ &= \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_1(\vec{p}_2 \cdot \vec{e}_r) + \vec{p}_2(\vec{p}_1 \cdot \vec{e}_r) + \vec{e}_r[\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 5(\vec{p}_1 \cdot \vec{e}_r)(\vec{p}_2 \cdot \vec{e}_r)]}{r^4}. \end{aligned}$$

La force instantanée est donc en  $\frac{1}{r^4}$ .

# Distributions de courants

# 6

## Introduction

*En électrostatique, les charges sont immobiles.  
Leur mise en mouvement donne  
naissance à des courants électriques,  
à l'origine de l'apparition du champ magnétique.*

*Nous décrirons ici les distributions de courants,  
leurs modélisations et leurs symétries remarquables  
comme nous l'avons fait au chapitre 1  
pour les distributions de charges.*

## O B J E C T I F S

- Décrire les distributions de courants.
- Reconnaître leurs propriétés de symétrie.

## P R É R E Q U I S

- Distributions de charges.
- Symétries remarquables d'un champ de vecteurs (champ électrostatique).

## Mouvements de charges

### 1.1. Courant électrique

Étant donné un référentiel  $\mathcal{R}$ , on appelle *courant électrique* tout mouvement d'ensemble (mouvement ordonné) de particules chargées dans ce référentiel.

### 1.2. Intensité électrique

Considérons une surface  $S$  liée au référentiel  $\mathcal{R}$ , munie en tout point  $M$  d'une normale orientée par un vecteur unitaire  $\vec{n}$  (doc. 1). Notons  $\delta Q_m$  la charge mobile traversant cette surface entre les instants  $t$  et  $t + \delta t$ , comptée positivement dans le sens choisi par l'orientation de  $S$ .

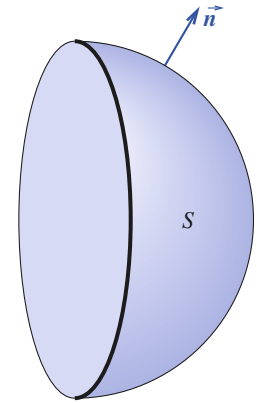
#### Remarque

L'intervalle de temps élémentaire  $\delta t$  est infinitésimal si  $\frac{\delta t}{T} \ll 1$ ,  $T$  étant une durée caractéristique du phénomène étudié (par exemple la période pour un courant sinusoïdal).

L'intensité  $I(S, t)$  du courant électrique à travers une surface  $S$  est liée à la charge  $\delta Q_m$  qui traverse  $S$  entre les instants  $t$  et  $t + \delta t$  par la relation  $\delta Q_m = I(S, t) \delta t$ .

L'intensité, grandeur électrique, dépend de l'orientation de  $S$ .

Elle s'exprime en ampère (symbole : A), unité de base du Système International d'unités.



Doc. 1. Surface  $S$  orientée par un vecteur unitaire  $\vec{n}$ .

### 1.3. Conservation de la charge électrique

#### 1.3.1. Cas d'un système fermé

Un système fermé est un système qui n'échange pas de matière avec le milieu qui l'entoure.

Pour un tel système, l'expérience montre que la charge reste constante.

#### 1.3.2. Cas d'un système ouvert

Un système ouvert peut échanger de la matière avec le milieu qui l'entoure. Il est donc susceptible de recevoir ou de céder des charges électriques.

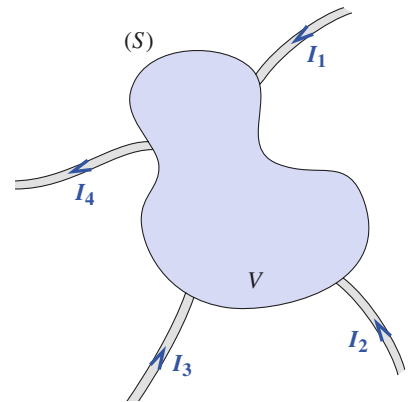
Considérons un tel système occupant un volume  $V$ . La conservation de la charge électrique impose que l'évolution de la charge contenue dans  $V$  soit due uniquement aux transferts de charges entre le système et l'extérieur, donc qu'elle soit liée aux courants électriques entrant ou sortant à travers la surface fermée  $S$  délimitant son volume  $V$ .

Pour le cas représenté sur le document 2, en notant  $Q_V$  la charge contenue dans le volume  $V$ , la conservation de la charge se traduit par :

$$\delta Q_V = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4) \delta t.$$

### 1.4. Divers courants électriques

Le classement suivant est traditionnel.



Doc. 2. L'évolution  $\delta Q_V$  de la charge contenue dans le volume  $V$  pendant le temps  $\delta t$  est égale à :

$$\delta Q_V = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4) \delta t.$$

### 1.4.1. Les courants de conduction

Ils sont associés au *déplacement d'ensemble* d'électrons dans les métaux, d'ions dans les solutions d'électrolytes, d'électrons ou de lacunes électroniques (« trous ») dans les semi-conducteurs.

Pour un conducteur métallique fixe dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$ , ce sont les électrons dits de conduction qui autorisent l'existence d'un courant électrique.

Leur densité particulière  $n_e$  (nombre par unité de volume) est élevée, de l'ordre de  $10^{29} \text{ m}^{-3}$ . Un volume mésoscopique  $d\tau$ , bien que macroscopiquement très petit, contient un nombre  $n_e d\tau$  important d'électrons de conduction.

Les électrons de conduction, indicés  $k$ , sont animés de vitesses  $\vec{V}_k$ . Pour le volume  $d\tau$ , nous définirons la *vitesse d'ensemble* des porteurs par  $\vec{v} = \frac{1}{n_e d\tau} \sum_k \vec{V}_k$ . Cette vitesse est une *grandeur nivelée*, ou *valeur moyenne spatiale*.

Les vitesses  $\vec{V}_k$ , de l'ordre de  $10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , résultent d'une agitation désordonnée à laquelle se superpose un mouvement d'ensemble à vitesse  $\vec{v}$  (dû par exemple à l'application d'un champ électrique au conducteur). Leur valeur est sans commune mesure avec l'ordre de grandeur de la vitesse d'ensemble des électrons de conduction (cf. application 1). Leur partie aléatoire  $\vec{V}_k - \vec{v}$  évolue très rapidement aux échelles de temps  $T$  caractérisant les expériences usuelles :

**Le courant électrique de conduction résulte d'un mouvement d'ensemble (ou de dérive) des porteurs de charges dans un support matériel fixe.**

## Application 1

### Vitesse d'ensemble des porteurs de charges dans un conducteur

Un fil de cuivre cylindrique et plein, de rayon  $r = 1 \text{ mm}$ , est parcouru par un courant statique (indépendant du temps) d'intensité  $I = 5 \text{ A}$ .

Il y a en moyenne un électron de conduction par atome de cuivre.

Évaluer la vitesse d'ensemble, supposée uniforme, des charges mobiles dans ce métal.

Données :

Masse volumique  $\mu = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Masse molaire  $M = 63,6 \text{ g}$ .

La densité particulière des électrons de conduction est  $n_e = N_A \frac{\mu}{M}$  ( $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , nombre d'Avogadro). A.N. :  $n_e = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

La charge  $\delta Q_m$  traversant une section  $\vec{S} = S \vec{e}_z$  du fil pendant l'intervalle de temps  $\delta t$  (doc. 3) est contenue dans un tronçon cylindrique de section et de longueur  $v \delta t$ , de volume  $d\tau = S v \delta t = \pi r^2 v \delta t$ .

Nous en déduisons  $\delta Q_m = -n_e e \pi r^2 v \delta t$ .

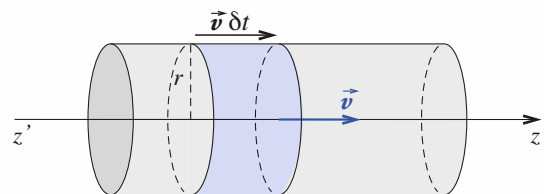
Le courant électrique est donc  $I = -n_e e \pi r^2 v$ .

La vitesse d'ensemble des porteurs de charges mobiles est de sens opposé à celle du courant et sa norme est :

$$|v| = \frac{1}{n_e e \pi r^2} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cette vitesse d'ensemble, de l'ordre de  $0,1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ , est très nettement inférieure à la vitesse  $|\vec{V}_k|$  de chaque électron mobile.

La vitesse calculée correspond à la valeur moyenne spatiale des vitesses  $\vec{V}_k$ .



Doc. 3.

### 1.4.2. Les courants de convection

De tels courants sont obtenus par déplacement dans un référentiel donné d'un support matériel portant des charges. C'est le cas d'un disque chargé qui tourne autour de son axe, mouvement donnant naissance à des courants annulaires (ou orthoradiaux).

### 1.4.3. Les courants particuliers

À un faisceau de particules chargées (électrons ou ions dans les tubes à vide) est associé un courant électrique dit particulier.

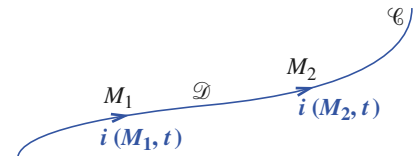
## 2 Distributions de courants

### 2.1. Courants filiformes

#### 2.1.1. Conducteur filiforme

Un fil conducteur de faible section à l'échelle macroscopique peut être assimilé à une courbe  $\mathcal{C}$  (sans épaisseur). Dans cette modélisation, la seule information à laquelle nous avons accès est la quantité de charge passant au point  $M$  par unité de temps, c'est-à-dire à l'intensité  $i(M, t)$  (doc. 4).

L'intensité  $i(M, t)$  du courant dépend en général à la fois du point  $M$  et du temps. La flèche tracée sur le schéma indique l'orientation du vecteur unitaire normal à une section du fil. Ainsi,  $i(M, t) > 0$  correspond à un écoulement de charges positives dans le sens de la flèche ou à un écoulement de charges négatives dans le sens opposé.



Doc. 4. Courant filiforme.

#### 2.1.2. Cas du régime statique ou indépendant du temps

Considérons le fil représenté sur le document 4. Pendant la durée élémentaire  $dt$  la variation élémentaire de la charge électrique  $q_{12}$  comprise entre  $M_1$  et  $M_2$  est :

$$dq_{12} = \delta q_{\text{entrant en } M_1} - \delta q_{\text{sortant en } M_2} = i(M_1)dt - i(M_2)dt \text{ soit :}$$

$$\frac{dq_{12}}{dt} = i(M_1) - i(M_2)$$

En régime permanent, toutes les grandeurs sont constantes, et en particulier  $q_{12}$ , donc :

$$\frac{dq_{12}}{dt} = 0 \text{ soit : } i(M_1) = i(M_2).$$

**En régime permanent, l'intensité d'un courant filiforme a la même valeur en tout point d'un fil sans dérivation.**

Imaginons maintenant un fil  $AB$  non fermé. La charge ne pouvant s'accumuler ni en  $A$  ni en  $B$ , nous pouvons affirmer :  $i(A) = i(B) = 0$ .

Comme, en régime permanent, le courant est uniforme dans le fil, ce courant est nul partout. Nous pouvons donc affirmer que :

**En régime permanent, un courant filiforme ne peut exister que sur un circuit fermé.**

Le modèle de courant filiforme ne donne aucun renseignement sur la façon dont les mouvements de charges se répartissent à l'intérieur du fil. Il peut être nécessaire de disposer d'une description plus fine : c'est le modèle du courant volumique.

Par ailleurs, il arrive que les fils d'un circuit soient jointifs et se répartissent sur une surface (fils d'un bobinage de solénoïde, par exemple). Les effets de ces courants seront plus faciles à étudier en modélisant le circuit par une nappe de courants surfaciques.

Les deux paragraphes qui suivent introduisent des notions qui, bien que n'étant pas au programme de première année, éclairent la notion de courant électrique.

## 2.2. Courants volumiques

### 2.2.1. Vecteur densité volumique de courants

Considérons un ensemble de particules de charges  $q$ , de densité particulière  $n$  et ayant un mouvement d'ensemble à vitesse  $\vec{v}$ .

Nous appellerons *densité volumique de charges mobiles* la quantité :

$$\rho_m = nq.$$

#### Remarque

$\rho_m = nq$  désigne la densité volumique de charges mobiles (en  $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$ ), à ne pas confondre avec  $\rho$ , densité totale de charges, qui prend également en compte les charges qualifiées de fixes (par exemple les ions formant le réseau cristallin dans un conducteur métallique).

**Le vecteur densité volumique de courant associé à un mouvement d'ensemble à vitesse  $\vec{v}$  est :**

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m\vec{v}.$$

**Ce vecteur, dont la valeur s'exprime en  $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ , est par construction une grandeur nivelée.**

Pour un tel mouvement, la charge mobile  $\delta Q_m$  traversant entre les instants  $t$  et  $t + \delta t$  la surface élémentaire  $d\vec{S}$ , représentée sur le document 5, est contenue à la date  $t$  dans le cylindre oblique de hauteur  $v\delta t$  et de volume  $d\tau = \vec{v}\delta t \cdot d\vec{S}$ . Par conséquent :

$$\delta Q_m = nq d\tau = nq\vec{v}\delta t \cdot d\vec{S}.$$

L'intensité  $dI$  traversant l'élément de surface  $d\vec{S}$  est :

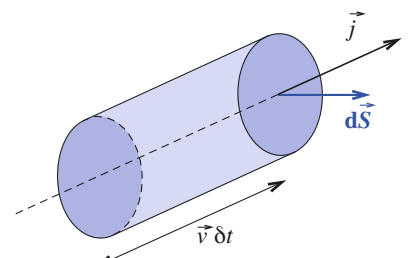
$$dI = nq\vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

**L'intensité du courant électrique traversant une surface  $S$  est égale au flux du vecteur densité volumique de courants  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  à travers cette surface :**

$$I(S, t) = \iint_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}.$$

Lorsqu'il existe différents types de porteurs de charges (électrolyte par exemple), les contributions au courant électrique de chaque type, indicé  $\alpha$ , s'ajoutent. Le vecteur densité résultant est alors :

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} \vec{j}_{\alpha} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \vec{v}_{\alpha}.$$



**Doc. 5.** Les particules qui traversent la surface  $dS$  pendant le temps  $\delta t$  sont situées dans un cylindre de base  $dS$  et de génératrice  $\vec{v}\delta t$ .

### 2.2.2. Lignes et tubes de courant

Une ligne de courant est une ligne en tout point de laquelle le vecteur densité volumique de courant est tangent.

Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour  $C$  (doc. 6).

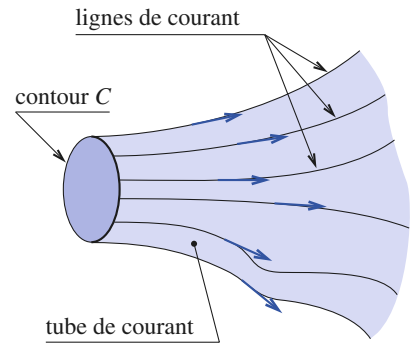
#### 2.1.3. Flux conservatif de $\vec{j}$ en régime permanent statique

En régime permanent, la charge contenue à l'intérieur d'une surface fermée  $S$  (fixe) n'évolue pas. L'intensité traversant cette surface est donc nulle, c'est-à-dire que le flux sortant de  $\vec{j}$  à travers  $S$  est nul.

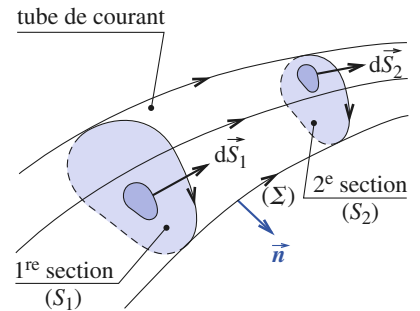
Appliquons ce résultat à une surface fermée obtenue par la réunion de deux sections  $S_1$  et  $S_2$  d'un même tube de courant et de la surface  $\Sigma$  du tube joignant ces surfaces (doc. 7).

Comme il n'y a aucun mouvement de charges à travers la surface  $\Sigma$  ( $\vec{j} \cdot \vec{n} = 0$ ), l'intensité traversant la surface  $S_1$  ( $I_1 = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}_1$ ) est égale à celle traversant  $S_2$  ( $I_2 = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}_2$ ).

En régime permanent statique (indépendant du temps), le vecteur  $\vec{j}$  a un flux conservatif : le courant électrique est le même à travers toutes les sections d'un même tube de courant.



Doc. 6. Lignes et tube de courant s'appuyant sur un contour  $C$ .



Doc. 7. Tube de courant.

### 2.3. Courants surfaciques

#### 2.3.1. Vecteur densité surfacique de courants

Lorsque la distribution de courants se trouve confinée dans une écorce d'épaisseur  $h$  faible à l'échelle macroscopique, nous pouvons assimiler celle-ci à une distribution surfacique de courants.

Considérons une section élémentaire  $dS = h d\ell$  (doc. 8) de l'écorce, orientée selon le vecteur unitaire  $\vec{u}$ ,  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{u}$ . Pour  $h$  faible, le vecteur  $\vec{j}$  est dans le plan tangent à la nappe et le courant traversant  $dS$  est  $dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot \vec{u} h d\ell$ .

Pour une épaisseur  $h$  très faible, nous envisagerons la représentation limite «  $h$  tend vers zéro » à courant  $dI$  constant pour un élément de longueur  $d\ell$  donné. Le produit  $\vec{j} \cdot h$ , maintenu constant lors de cette opération, sera noté  $\vec{j}_S$ , vecteur densité surfacique de courants. Sa norme se mesure en  $A \cdot m^{-1}$ .

Lorsque les courants circulent sur des nappes surfaciques, le vecteur densité surfacique de courants  $\vec{j}_S$  associé est défini par :

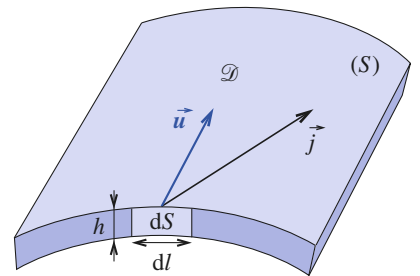
$$dI = \vec{j}_S \cdot \vec{u} d\ell,$$

$dI$  étant l'intensité traversant l'élément de longueur  $d\ell$  tracé sur la surface.

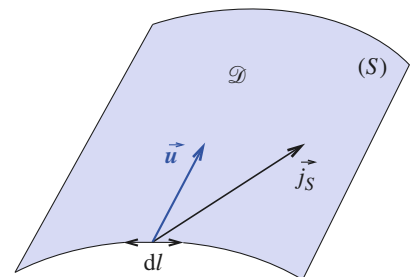
Le vecteur  $\vec{j}_S$ , dont la valeur s'exprime en  $A \cdot m^{-1}$ , est par construction une grandeur nivelée.

#### 2.3.2. Densité surfacique de courant associée à une distribution de courants filiformes en surface

Considérons le circuit filiforme hélicoïdal d'un bobinage « simple couche » d'un solénoïde parcouru par un courant  $I$  (doc. 9).



Doc. 8a. Écorce orientée pour  $h$  faible.



Doc. 8b.  $h$  très faible.

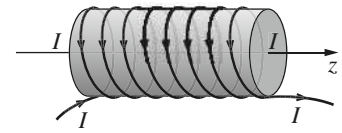
Si les fils sont très rapprochés les uns des autres (ou jointifs) il est avantageux de modéliser ce circuit hélicoïdal par un empilement de courants circulaires placés les uns à côté des autres.

Notons  $n = \frac{1}{a}$  le nombre de circuits circulaires par unité de longueur le long de l'axe ( $Oz$ ). Nous pouvons encore pousser la modélisation en effectuant une opération de nivelage, substituant à l'empilement des courants circulaires, un courant surfacique de densité :

$$\vec{j}_S = nI \vec{e}_\theta.$$

Cette façon de procéder a l'avantage considérable de simplifier les calculs des grandeurs liées au circuit hélicoïdal.

Cette situation se retrouve pour de nombreux circuits filiformes répartis en surface et leur modélisation par une distribution de courants surfacique apporte souvent une grande commodité de calcul.



Doc. 9. Solénoïde « simple couche ».

## 3 Symétries des distributions de courants

### 3.1. Symétries usuelles

Nous allons étudier l'influence d'opérations simples (déplacements) sur une distribution de courants  $\mathcal{D}$ , comme nous l'avons fait pour les distributions de charges vues en électrostatique.

**Les distributions de courants peuvent présenter des symétries remarquables. Les symétries élémentaires sont les symétries et les antisymétries planes, l'invariance par translation selon un axe et l'invariance par rotation autour d'un axe.**

#### 3.1.1. Symétrie plane

Nous considérons une distribution de courants telle que le plan ( $xOy$ ) noté  $\Pi$ , soit un plan de symétrie (ou plan-miroir) de la distribution.

Notons  $M'(x, y, -z)$  le symétrique du point  $M(x, y, z)$  par rapport au plan  $\Pi$ .

##### 3.1.1.1. Courants filiformes (doc. 10)

La distribution de courants filiformes est invariante par symétrie par rapport au plan  $\Pi$  si les circuits **orientés** sont inchangés par cette symétrie et si l'intensité en  $M$  est égale à l'intensité en  $M'$ .

##### 3.1.1.2. Courants volumiques (doc. 11)

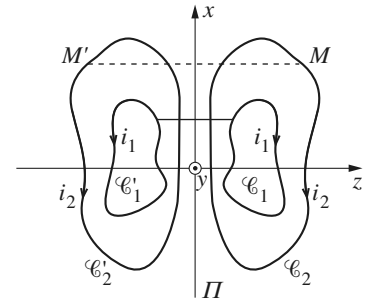
La distribution de courants volumiques est invariante par symétrie par rapport au plan  $\Pi$  si les densités de courant  $\vec{j}$  et  $\vec{j}'$  en  $M$  et  $M'$  sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan  $\Pi$ , soit ici :

$$j'_x = j_x ; j'_y = j_y ; j'_z = -j_z.$$

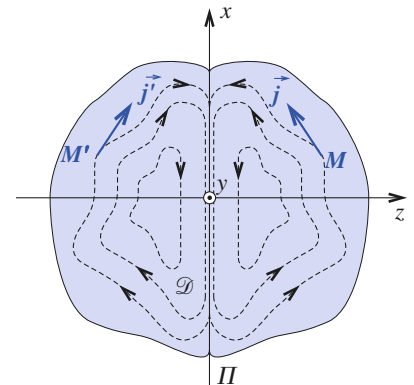
#### 3.1.2. Antisymétrie plane

Nous considérons maintenant une distribution de courants telle que le plan ( $xOy$ ), noté  $\Pi^*$  soit un plan d'antisymétrie (ou plan anti-miroir) de la distribution.

Notons  $M'(x, y, -z)$  le symétrique du point  $M(x, y, z)$  par rapport au plan  $\Pi^*$ .



Doc. 10. Les courants circulant dans  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}'_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}'_2$  forment une distribution invariante par symétrie par rapport au plan  $\Pi$ .



Doc. 11. Symétrie plane.



### 3.1.2.1. Courants filiformes

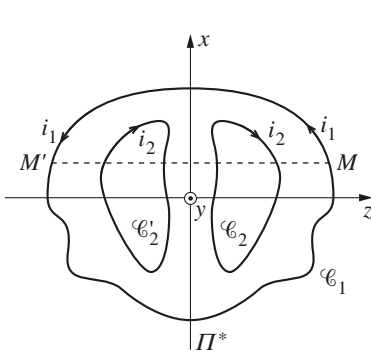
Le plan  $\Pi^*$  est plan d'antisymétrie pour la distribution de courants filiformes (doc. 12) si lors d'une symétrie par rapport à  $\Pi^*$  :

- les circuits **non orientés** sont inchangés,
- l'orientation des circuits change de sens,
- l'intensité en  $M$  est égale à l'intensité en  $M'$ .

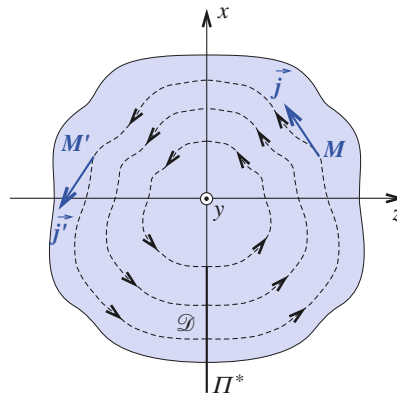
### 3.1.2.2. Courants volumiques

Notons encore  $\vec{j}$  et  $\vec{j}'$  les vecteurs densité de courant en  $M$  et  $M'$ . Le plan  $\Pi^*$  est plan d'antisymétrie pour la distribution de courants volumiques (doc. 13) si  $\vec{j}'$  est égal à l'opposé du symétrique de  $\vec{j}$  par rapport à  $\Pi^*$ , soit ici :

$$j'_x = -j_x ; j'_y = -j_y ; j'_z = j_z.$$



**Doc. 12.** Les courants circulant dans  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}'_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}'_2$  forment une distribution pour laquelle  $\Pi^*$  est un plan d'antisymétrie.



**Doc. 13.**  $\Pi^*$  est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants.

## Application 2

### Courants sur les plans-miroirs et antimiroirs

Que peut-on dire des courants aux points  $M$  appartenant à un plan-miroir  $\Pi$  ou antimiroir  $\Pi^*$  d'une distribution de courants ?

En un point  $M$  appartenant à un plan-miroir  $\Pi$ , le vecteur  $\vec{j}$  doit coïncider avec son symétrique  $\vec{j}'$  puisque  $M' = M$ . Par conséquent, sur un plan-miroir, le vecteur  $\vec{j}$

appartient à ce plan. Les lignes de courant de la distribution seront ainsi tangentes au plan-miroir, comme sur le document 11 pour le plan-miroir ( $xOy$ ).

Si le point  $M$  est sur un plan-antimiroir  $\Pi^*$ , le vecteur  $\vec{j}$  sera perpendiculaire à ce plan.

Sur le document 13, les lignes de courants coupent le plan ( $xOy$ ) perpendiculairement.

### 3.1.3. Invariance par translation

Une distribution est invariante par translation parallèlement à un axe  $\Delta$  lorsque le courant en  $M$  est identique au courant en tout point  $M'$  obtenu par une translation de  $M$  parallèlement à cet axe. Il est nécessaire pour cela que la distribution soit illimitée dans la direction de l'axe  $\Delta$ .

#### 3.1.3.1. Courants volumiques

Une distribution est invariante par translation le long de l'axe ( $Oz$ ) si le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  ne dépend pas de la coordonnée  $z$  :

$$\vec{j}(x, y, z) = \vec{j}(x, y).$$

### 3.1.3.2. Courants filiformes

Envisageons deux cas particuliers :

#### • Courant parallèles à l'axe $\Delta$ (doc. 14)

Une distribution de courants portés par un ensemble de fils rectilignes infiniment longs et parallèles à l'axe  $\Delta$  est invariante par translation (doc. 14). Rigoureusement, une telle distribution est impossible car incompatible avec la nécessité de fermer les circuits. En revanche, il peut s'agir d'une excellente approximation dans un domaine limité de l'espace, à proximité des fils.

Notons que tout plan orthogonal à  $\Delta$  est un plan anti-miroir pour cette distribution.

#### • Courants dans un plan orthogonal à $\Delta$

Considérons le système de spires filiformes identiques et régulièrement espacées représenté sur le document 15. Au sens strict, cette distribution n'est pas invariante par translation le long de  $\Delta$ . Mais si les fils sont fins et très proches les uns des autres, un observateur un peu éloigné peut considérer qu'il s'agit d'une nappe continue, invariante par translation.

Notons que tout plan orthogonal à  $\Delta$  est plan-miroir pour cette distribution.

### 3.1.4. Invariance par rotation

#### 3.1.4.1. Courants volumiques

Pour une distribution de courants invariante par rotation autour de l'axe  $(Oz)$  (doc. 16), les coordonnées de  $\vec{j}$ , dans la base locale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  des coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ , sont indépendantes de l'angle  $\theta$  :

$$\vec{j}(r, \theta, z) = j_r(r, z) \vec{e}_r + j_\theta(r, z) \vec{e}_\theta + j_z(r, z) \vec{e}_z.$$

Notons que pour une distribution de courants invariante par rotation, le passage de  $\vec{j}(M)$  à  $\vec{j}(M')$  s'obtient par une rotation.

#### 3.1.4.2. Courants filiformes

Pratiquement, nous trouvons deux cas de distributions filiformes invariantes par rotation :

#### • Ensemble de spires circulaires d'axe $(Oz)$ (doc. 17)

Notons que dans ce cas, tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  est un plan anti-miroir de la distribution de courant :  $I(r, \theta, z) = I(r, z)$ .

#### • Fil confondu avec l'axe $(Oz)$

Dans ce cas, tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  est plan-miroir.

## 3.2. Distributions à symétries multiples

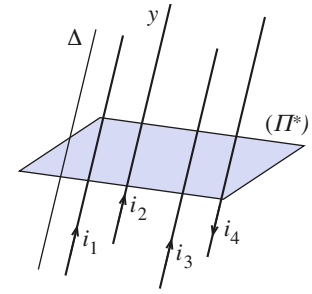
Les distributions que nous rencontrerons seront fréquemment invariantes vis-à-vis de plusieurs symétries élémentaires. Les cas particuliers de distributions invariantes par translation ou par rotation possédaient ainsi déjà des plans-miroirs ou anti-miroirs.

### 3.2.1. Symétrie cylindrique

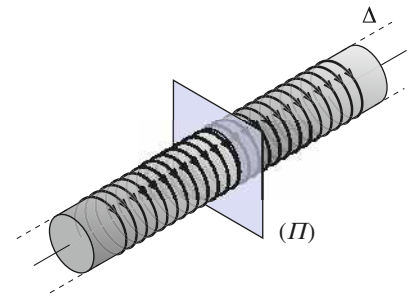
Une distribution à symétrie cylindrique est invariante par translation parallèlement à un axe  $(Oz)$  et invariante par rotation autour de cet axe.

La densité de courants doit donc être de la forme :

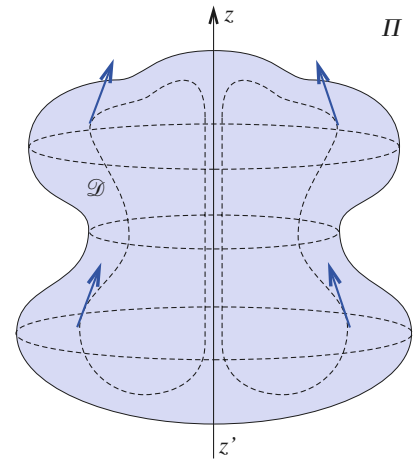
$$\vec{j}(r, \theta, z) = j_r(r) \vec{e}_r + j_\theta(r) \vec{e}_\theta + j_z(r) \vec{e}_z.$$



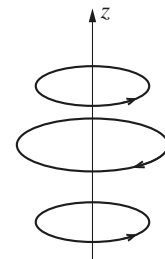
**Doc. 14.** Distribution de courants filiformes invariante par translation parallèlement à  $\Delta$ .  $\Pi^*$  est un plan anti-miroir.



**Doc. 15.** Distribution invariante par translation dans le cas limite où les fils sont très serrés.  $(\Pi)$  est un plan miroir.



**Doc. 16.** Invariance par rotation autour de  $(Oz)$ .



**Doc. 17.** Distribution de courants filiformes invariante par rotation d'axe  $(Oz)$ .

Nous pourrions rencontrer les cas suivants :

- courants plans et annulaires d'axe ( $Oz$ ) :

$$\vec{j} = j_\theta(r) \vec{e}_\theta.$$

Pour ces courants, tout plan perpendiculaire à ( $Oz$ ) est un plan de symétrie des courants et tout plan contenant ( $Oz$ ) est un plan d'antisymétrie (doc. 18).

C'est le cas des courants solénoïdaux ou sur des spires (doc. 19).

- courants de direction ( $Oz$ ) :

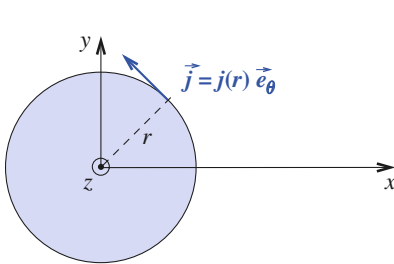
$$\vec{j} = j_z(r) \vec{e}_z.$$

Pour ces courants, tout plan perpendiculaire à ( $Oz$ ) est un plan d'antisymétrie des courants et tout plan contenant ( $Oz$ ) est un plan de symétrie (doc. 20). C'est le cas des courants filiformes sur un fil infini ;

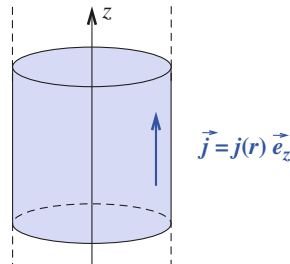
- courants radiaux :

$$\vec{j} = j_r(r) \vec{e}_r.$$

Pour ces courants, tout plan perpendiculaire à ( $Oz$ ) et tout plan contenant ( $Oz$ ) sont des plans de symétrie des courants.



**Doc. 19.** Courants solénoïdaux, ou sur des spires.



**Doc. 20.** Courant filiforme sur un fil infini.

Les deux répartitions de courants précédentes sont à flux conservatif, quelle que soit la fonction de  $r$ . En régime permanent, sans accumulateur de charges, la conservation de la charge impose que l'intensité  $I$  soit la même à travers tout cylindre de rayon  $r$ , de hauteur  $h$  et d'axe ( $Oz$ ). Ainsi, pour les courants radiaux :

$$2\pi r h j_r(r) = I \text{ ou encore } \vec{j} = \frac{k}{r} \vec{e}_r.$$

C'est le cas des courants radiaux existant dans une diode à vide à symétrie cylindrique dont la cathode est confondue avec l'axe ( $Oz$ ) (doc. 21).

### 3.2.2. Symétrie sphérique

La distribution est invariante par rotation autour de tous les axes passant par le centre de symétrie. Elle l'est aussi par rapport à tout plan contenant ce même point.

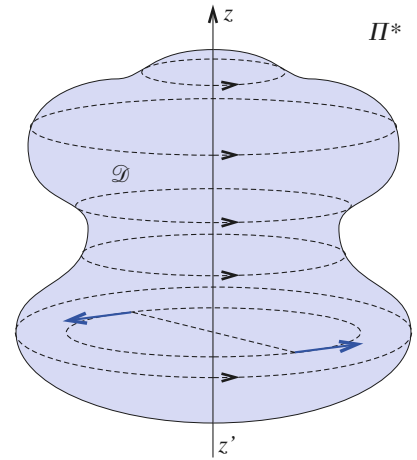
En utilisant les coordonnées sphériques  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  avec origine au point centre de symétrie, nous avons (doc. 22) :

$$\vec{j}(r, \theta, \varphi) = j(r) \vec{e}_r.$$

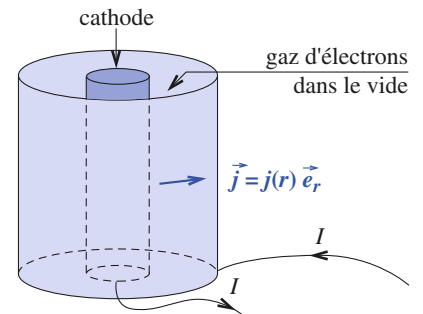
En régime permanent, sans accumulation de charges, la conservation de la charge électrique impose que l'intensité  $I$  soit la même à travers toute sphère de centre  $O$ , soit :

$$4\pi r^2 j(r) = \text{cte} = I.$$

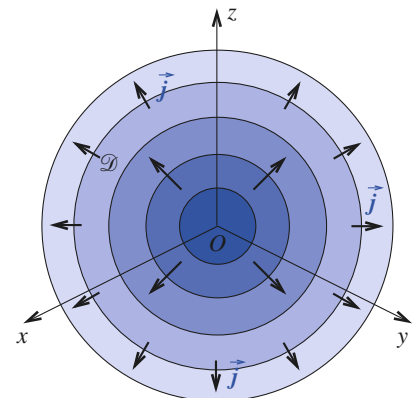
Ceci impose l'existence d'une source de charges au point  $O$  et d'intensité  $I$ , par exemple sous la forme de courant d'amenée filiforme.



**Doc. 18.** Distribution de courants annulaires.



**Doc. 21.** Courants à symétrie cylindrique.



**Doc. 22.** Courants à symétrie sphérique.

# Application 3

## Exemples de courants surfaciques

Identifier les symétries des distributions surfaciques de courants suivantes :

a) nappe plane de courants confondue avec le plan  $(yOz)$  et de densité  $\vec{j}_S = j_S \vec{e}_y$  uniforme ;

b) nappe hélicoïdale de courants de densité :

$$\vec{j}_S = j_{S\theta} \vec{e}_\theta + j_{Sz} \vec{e}_z$$

(avec  $j_{S\theta}$  et  $j_{Sz}$  uniformes) sur un cylindre de rayon  $R$  et d'axe  $(Oz)$ .

a) La distribution est invariante par translation selon  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ , car  $\vec{j}_S$  ne dépend ni de  $y$ , ni de  $z$ .

Tout plan parallèle à  $(xOy)$  est un plan-miroir, alors que tout plan parallèle à  $(xOz)$  est un plan-anti-miroir.

Aucune symétrie de rotation (ou invariance par rotation) n'intervient.

b) La distribution est invariante par translation selon  $\vec{e}_z$ , et  $\vec{j}_S$  ne dépend pas de la variable  $z$ .

Elle est de plus invariante par rotation autour de  $(Oz)$ , car  $\vec{j}_S$  ne dépend pas de  $\theta$ .

Il n'existe aucun plan de symétrie, ni d'antisymétrie.

Il sera judicieux de traiter une telle distribution comme résultant de la superposition d'un courant de densité surfacique  $\vec{j}_{S1} = j_{Sz} \vec{e}_z$  et d'un courant de densité surfacique  $\vec{j}_{S2} = j_{S\theta} \vec{e}_\theta$ , qui, traités séparément, ont des propriétés de symétries planes remarquables.



## ● COURANT ÉLECTRIQUE

Un courant électrique résulte d'un mouvement d'ensemble (ou de dérive) des porteurs de charges.

L'intensité  $I(S, t)$  du courant électrique à travers une surface  $S$  est liée à la charge  $\delta Q_m$  qui travers  $S$  entre les instants  $t$  et  $t + \delta t$ , par la relation :

$$\delta Q_m = I(S, t) \delta t.$$

L'intensité, grandeur électrique, dépend de l'orientation de  $S$  et s'évalue en ampère (A).

## ● DISTRIBUTIONS DE COURANTS

Une ligne de courant est une ligne en tout point de laquelle le vecteur densité du courant lui est tangent.

Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour.

En régime permanent statique (indépendant du temps), l'intensité d'un courant filiforme a la même valeur en tout point d'un fil sans dérivation.

En régime permanent statique (indépendant du temps), un courant filiforme ne peut exister que sur un circuit fermé.

Le vecteur densité volumique associé à un mouvement d'ensemble à vitesse  $\vec{v}$  est :

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m \vec{v}.$$

L'intensité du courant électrique traversant une surface  $S$  est égale au flux du vecteur densité volumique de courants  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  à travers cette surface :

$$I(S, t) = \iint_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}.$$

Les distributions de courants peuvent présenter des symétries remarquables. Les symétries élémentaires sont les symétries et les antisymétries planes, l'invariance par translation selon un axe et l'invariance par rotation autour d'un axe.

# Contrôle rapide

## Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Définir l'intensité  $I(S, t)$  d'un courant électrique à travers une surface  $S$ .
- ✓ Citer et définir les divers types de courants électriques.
- ✓ Quelle relation lie le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  d'un courant de conduction, à la vitesse d'ensemble des charges mobiles  $\vec{v}$  ?
- ✓ Définir le vecteur densité surfacique de courant  $\vec{j}_S$ .
- ✓ Démontrer qu'en régime permanent, l'intensité  $I$  est la même en tout point d'un conducteur filiforme.
- ✓ Définir une distribution de courants filiformes antisymétrique par rapport au plan  $\Pi^*$ .

## Du tac au tac (Vrai ou faux)

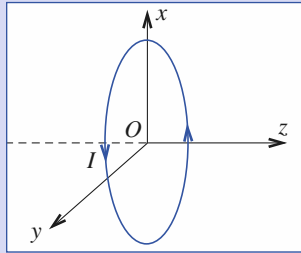
1. En régime permanent, l'intensité traversant une surface fermée  $S$  est nulle.  
☐ Vrai ☐ Faux
2. Les courants filiformes sont des courants fermés, en régime permanent.  
☐ Vrai ☐ Faux
3. Quand des charges sont déposées sur un isolant, elles ne peuvent pas créer de courants.  
☐ Vrai ☐ Faux
4. Pour une spire circulaire de centre  $O$  et d'axe  $(Oz)$  parcourue par un courant  $I$ , tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  est plan de symétrie.  
☐ Vrai ☐ Faux
5. Pour une spire circulaire de centre  $O$  d'axe  $(Oz)$  parcourue par un courant  $I$  le plan  $z = 0$  est plan de symétrie.  
☐ Vrai ☐ Faux

► Solution, page 114.

# Exercices

## 1 Spire portant un courant filiforme d'intensité $I$

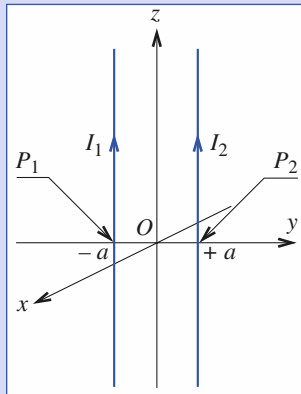
Soit une spire de rayon  $a$  et d'axe  $(Oz)$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Quelles sont les symétries et invariances de cette distribution ?



## 2 Système de deux fils infinis parallèles

Soit deux fils infinis parallèles à l'axe  $(Oz)$ , passant par les points  $A_1(0, -a, 0)$  et  $A_2(0, +a, 0)$  portant des courants filiformes  $I_1$  et  $I_2$ . Définir les symétries et invariances de cette distribution dans les trois cas suivants :

- 1)  $I_1$  et  $I_2$  quelconques ;
- 2)  $I_1 = I_2 = I$  ;
- 3)  $I_1 = I$  et  $I_2 = -I$ .



## 3 Plan portant une distribution de courants filiformes rectilignes

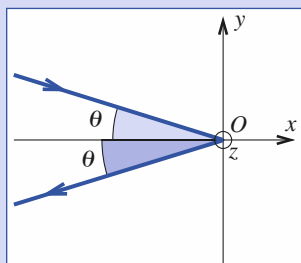
Un ensemble infini de fils rectilignes jointifs de longueur infinie et de faible section est disposé dans le plan  $(xOz)$  parallèlement à l'axe  $(Oz)$ .

- 1) Sachant que le nombre de fils par unité de longueur parallèlement à l'axe  $(Ox)$  est  $n$  et que l'intensité des courants dans chacun des fils est  $I$ , déterminer le vecteur densité surfacique de courant  $\vec{j}_S$  de la nappe de courant équivalente.
- 2) Quelles sont les symétries et les invariances de cette distribution surfacique de courants.

## 4 Courant angulaire

Soit un courant angulaire constitué de deux courants rectilignes semi-infinis faisant un angle  $2\theta$  entre eux.

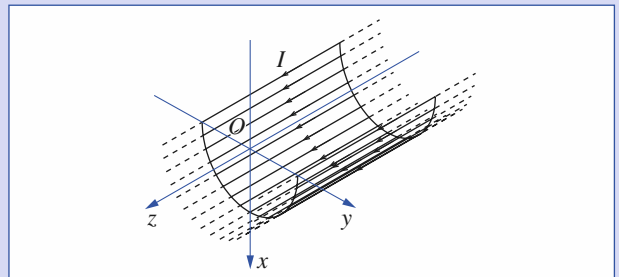
Quelles sont les symétries et invariances de ce système de courants ?



## 5 Demi-cylindre portant une distribution de courants filiformes rectilignes

Un ensemble infini de fils rectilignes jointifs de longueur infinie et de faible section est disposé sur un demi-cylindre d'axe  $(Oz)$ , parallèlement à cet axe.

- 1) Soit  $n$  le nombre de fils par unité de longueur le long d'un demi-cercle de section droite du cylindre et  $I$  l'intensité des courants dans les fils, déterminer le vecteur densité surfacique de courant  $\vec{j}_S$  de la nappe de courant équivalente.
- 2) Étudier les symétries et les invariances de cette distribution surfacique.



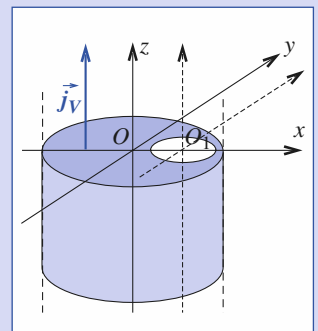
## 6 Courants filiformes à l'intérieur d'une gaine cylindrique

À l'intérieur d'un cylindre d'axe  $(Oz)$  se trouve un ensemble compact de  $N$  fils rectilignes de longueur infinie et de faible section disposés parallèlement à  $(Oz)$ . L'intensité de chacun des courants filiformes est  $I$ .

- 1) Déterminer le vecteur densité de courant volumique  $\vec{j}_V$  de la distribution volumique équivalente.
- 2) Quelles sont les symétries et les invariances de cette distribution volumique ?

## 7 Cylindre avec cavité portant une densité volumique de courants

Un cylindre infini à base circulaire est parcouru par un courant volumique uniforme parallèle à ses génératrices. Dans ce cylindre existe une cavité cylindrique de base circulaire et de génératrices parallèles au cylindre précédent. Étudier les symétries et invariances de cette répartition de courants.



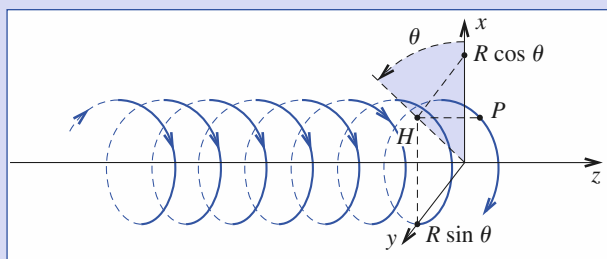
# Exercices

## 8 Courant filiforme sur une hélice

Le schéma ci-dessous représente une hélice droite d'axe ( $Oz$ ), correspondant à l'ensemble des points en coordonnées cartésiennes  $\{x = R \cos(\theta); y = R \sin(\theta); z = \frac{p\theta}{2\pi}, \theta \text{ variant de } \theta_{\min} \text{ à } \theta_{\max}\}$ .

Cette hélice est parcourue par un courant filiforme  $I$ . Quelles sont les symétries ou invariances de cette répartition de courants ? Examiner le cas de l'hélice infinie pour :

$$\theta_{\min} = -\infty \text{ et } \theta_{\max} = +\infty.$$



## 9 Bobinage simple couche

Un bobinage est réalisé sur un cylindre d'axe ( $Oz$ ), entre les plans de cote  $z_1$  et  $z_2$ , à l'aide d'un fil de faible section.

Les spires sont jointives et parcourues par un courant d'intensité  $I$ .

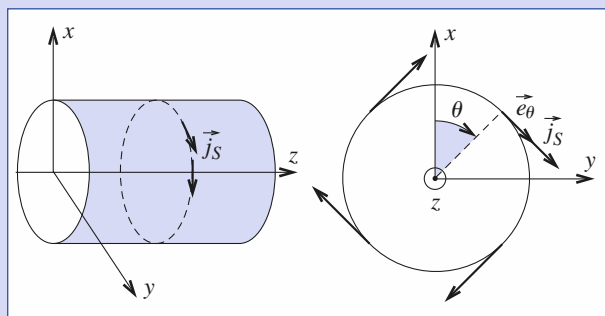
Nous modéliserons ce bobinage comme un ensemble de spires circulaires d'axe ( $Oz$ ) dont le nombre par unité de longueur parallèlement à l'axe ( $Oz$ ) est  $n$ .

1) Montrer que cet ensemble de courants filiformes est modélisable par une nappe de courant dont la densité superficielle est, en coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ) :

$$j_S = n I e_\theta.$$

2) Le cylindre étant de dimension finie, quelles sont les symétries et les invariances de cette distribution de courant ?

3) Examiner le cas d'un cylindre de longueur infinie.



# Corrigés

**Solution du tac au tac, p. 112.**

- |         |         |
|---------|---------|
| 1. Vrai | 4. Faux |
| 2. Vrai | 5. Vrai |
| 3. Faux |         |

**1** Le plan ( $xOy$ ) est un plan de symétrie des courants ( $II$ ).

Les plans ( $xOz$ ) et ( $yOz$ ) sont des plans d'antisymétrie des courants ( $II^*$ ). Il en est d'ailleurs de même pour tout plan contenant l'axe ( $Oz$ ).

Le système de courants est invariant par toute rotation autour de ( $Oz$ ).

**2** Dans les trois cas :

- le plan ( $yOz$ ) est un plan de symétrie des courants ( $II$ ) ;

- tout plan perpendiculaire à l'axe ( $Oz$ ) (en particulier ( $xOy$ )) est un plan d'antisymétrie des courants ( $II^*$ ) ;
- la répartition est invariante par toute translation suivant ( $Oz$ ).

1) Aucune autre symétrie ou invariance.

2) Le plan ( $xOz$ ) est un plan de symétrie des courants ( $II$ ).

3) Le plan ( $xOz$ ) est un plan d'antisymétrie des courants ( $II^*$ ).

**3** 1)  $\vec{j}_S = n I \vec{e}_z = j_S \vec{e}_z$ .

2) • Plans de symétrie des courants ( $II$ ) :

- le plan ( $xOz$ ) ;
- tout plan perpendiculaire à ( $Ox$ ) (en particulier ( $yOz$ )).
- Plans d'antisymétrie des courants ( $II^*$ ) :
- tout plan perpendiculaire à ( $Oz$ ).



**4** Le plan  $(xOy)$  est un plan de symétrie ( $II$ ) des courants. Le plan  $(xOz)$  est un plan d'antisymétrie ( $II^*$ ) des courants. Il n'y a aucune invariance.

**5** 1)  $\vec{j}_S = n I \vec{e}_z = j_S \vec{e}_z$ .

2) Le plan  $(xOz)$  est un plan de symétrie ( $II$ ) des courants.

Tout plan perpendiculaire à l'axe  $(Oz)$  est un plan d'antisymétrie ( $II^*$ ) des courants, en particulier le plan  $(xOy)$ .

**6** 1)  $\vec{j}_V = \frac{NI}{S} = nI$ .

2) Tout plan passant par  $(Oz)$  est un plan de symétrie des courants ( $II$ ), en particulier  $(xOz)$  et  $(yOz)$ . Tout plan perpendiculaire à  $(Oz)$  est un plan d'antisymétrie des courants ( $II^*$ ). Le système est invariant par toute translation suivant  $(Oz)$ , et par toute rotation autour de l'axe  $(Oz)$ .

**7** Le plan  $(xOz)$  est un plan de symétrie ( $II$ ) des courants. Tout plan perpendiculaire à l'axe  $(Oz)$  est un plan d'antisymétrie ( $II^*$ ) des courants. Le système de courants est invariant par toute translation suivant  $(Oz)$ .  
Si  $O$  et  $O_1$  sont confondus, alors tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  est un plan de symétrie ( $II$ ) des courants et le système de courants est invariant par toute rotation autour de l'axe  $(Oz)$ .

## **8** • Hélice de dimension finie

Lorsque l'hélice est de dimension finie, il n'existe aucune symétrie et invariance.

### • Hélice de dimension infinie

Lorsque l'hélice est de dimension infinie, il y a une seule symétrie remarquable : invariance par translation d'une longueur multiple entier du pas  $p$  de l'hélice.

**9** 1) Soit  $L = z_2 - z_1$ . Sur une section du bobinage, passe une intensité totale égale à  $nLI$  et les lignes de courant sont orientées comme  $\vec{e}_\theta$ . D'après la définition de la densité surfacique de courant :

$$I_t = nLI \quad \text{soit} : \quad \vec{j}_S = nI \vec{e}_\theta.$$

### 2) Nappe solénoïdale finie

Tout plan passant par l'axe  $(Oz)$  est un plan d'antisymétrie ( $II^*$ ) des courants. Le système de courants est invariant par toute rotation autour de  $(Oz)$ .

Le plan de cote  $\frac{(z_1 \text{ et } z_2)}{2}$  est un plan de symétrie ( $II$ ) des courants.

### 3) Nappe solénoïdale infinie

Tout plan passant par l'axe  $(Oz)$  est un plan d'antisymétrie ( $II^*$ ) des courants. Le système de courants est invariant par toute rotation autour de  $(Oz)$ .

Tout plan perpendiculaire à  $(Oz)$  est un plan de symétrie ( $II$ ) des courants. Le système de courants est invariant par toute translation suivant  $(Oz)$ .

# 7

# Champ magnétique

## Historique

*Un courant électrique crée un champ magnétique, et un fil parcouru par un courant placé dans un champ magnétique subit une force dite de Laplace. Historiquement ces notions se sont imposées progressivement, la référence à la matière aimantée compliquant l'interprétation des phénomènes.*

*Tout ou presque débute en 1819 avec Hans-Christian Oersted, physicien danois, qui observe le déplacement d'une aiguille aimantée à proximité d'un fil conducteur parcouru par un courant électrique.*

*En 1820, Jean-Baptiste Biot et Félix Savart étudient les propriétés de la force « subie par l'un des pôles magnétiques » de l'aiguille aimantée et Pierre-Simon de Laplace traduit cette loi par une formule qui porte le nom de Biot et Savart.*

*André-Marie Ampère (1775-1836), considéré comme le fondateur de l'électromagnétisme, déduit de cette étude la notion et les propriétés du champ magnétostatique créé par des courants. Le choix du nom de ce physicien français, pour l'unité d'intensité électrique dans le système international d'unités, est une reconnaissance de ses travaux en électricité.*

## O B J E C T I F S

- Obtention du champ magnétique par la loi de Biot et Savart.
- Propriétés de symétrie.
- Flux du champ.

## P R É R E Q U I S

- Distributions de courants.
- Étude du champ magnétique du cycle secondaire.

## Force de Lorentz et champ magnétique

### 1.1. Force de Lorentz

Nous savons qu'un aimant ou une bobine de spires conductrices parcourues par un courant électrique sont sources de champs magnétiques  $\vec{B}$ . Ces champs se manifestent par la *force de Lorentz* que subit une particule mobile de charge  $q$  et de vitesse  $\vec{v}$  :  $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ , ou par la *force de Laplace* que subit un élément  $d\vec{\ell}$  de circuit parcouru par un courant d'intensité  $I$  :

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

Nous n'étudierons dans ce cours que le champ magnétique créé par des courants.

*Remarque* : Rappelons qu'il existe un champ magnétique terrestre (cf. chapitre 9) dont la composante horizontale, en France, est de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-5}$  tesla.

### 1.2. Cadre d'étude

Les lois à venir sont rigoureusement valables dans le cas de la magnétostatique, c'est-à-dire pour des régimes indépendants du temps (courants constants, pas d'accumulation de charges). Nous emploierons souvent l'expression « champ magnétique » au sens de « champ magnétostatique » par la suite.

Ces lois sont encore applicables à des dispositifs expérimentaux de dimension caractéristique  $L$ , dans le cas des régimes variables de temps caractéristique  $T$ , tant que  $L \ll cT$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. La justification de cette approximation des régimes quasi-permanents (ou « lentement variables ») sera vue en seconde année.

## Application 1

### Cadre de l'approximation des régimes lentement variables

Nous désirons étudier le champ créé par une bobine (extension de l'ordre de 10 cm) parcourue par un courant  $I$  sinusoïdal de fréquence  $f = 10$  kHz. La loi de Biot et Savart, que nous allons énoncer, donnant le champ magnétique dans le cas d'un régime permanent, vous semble-t-elle utilisable pour évaluer le champ créé à quelques mètres de la bobine ?

Le temps caractéristique du problème est :

$$T = \frac{1}{f} = 0,1 \text{ ms}.$$

Dans ces conditions,  $cT = 30$  km ( $cT$  est la longueur d'onde, dans le vide, d'une onde électromagnétique de fréquence  $f$ ).

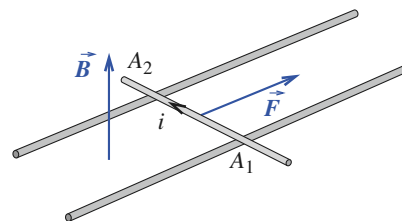
Le champ magnétique, calculé à l'aide de la loi de Biot et Savart, décrira le champ réel avec une excellente approximation à des distances faibles devant  $cT$ .

### ■ Mesure du champ

La *force de Laplace* (vue en classe de première), subie par un élément  $d\vec{\ell}$  de circuit parcouru par un courant d'intensité  $i$  :  $d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ , est mesurable.

Le champ magnétique  $\vec{B}$  appliqué à un circuit parcouru par un courant  $i$  peut donc être mesuré à partir de la mesure de la force  $\vec{F}$  subie par celui-ci (doc. 1).

En fait une sonde à effet Hall, moins encombrante et plus précise, sera généralement préférée pour la mesure des champs magnétiques.



Doc. 1. Force de Laplace s'exerçant sur le rail  $A_1A_2$ .

## 2 Loi de Biot et Savart

### 2.1. Vecteur élément de courant

• Considérons un circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité  $I$  et notons  $d\vec{\ell}$  un déplacement élémentaire le long de ce circuit, dans le sens que du courant (doc. 2). Par définition, on appelle *élément de courant* le vecteur polaire :

$$d\vec{C} = I d\vec{\ell}.$$

La norme d'un élément de courant s'évalue en A.m.

• Lorsque la section du circuit n'est plus petite à l'échelle macroscopique, il est pertinent, sinon indispensable, de s'interroger sur la répartition du courant dans le circuit. Pour cela nous serons obligés d'introduire une modélisation continue. Nous analyserons alors le circuit comme un ensemble de tubes de courants mésoscopiques, filiformes, jointifs, d'intensité  $dI$ , placés à l'intérieur de la surface externe du circuit (doc. 3a). À un élément de longueur  $d\vec{\ell}$  d'un tube de courant mésoscopique, sera associé le vecteur de courant :  $d\vec{C} = dI d\vec{\ell}$ . Notons  $s$  la section de ce tube de courant et  $\vec{j}$  le vecteur densité volumique de courant à travers la section considérée, il vient :

$$d\vec{C} = dI d\vec{\ell} = j_s d\vec{\ell} = \vec{j} d\tau$$

puisque  $\vec{j}$  et  $d\vec{\ell}$  sont colinéaires et de même sens.

*Une distribution volumique de courants peut s'analyser en une distribution continue de courants filiformes mésoscopiques.*

Cette équivalence est fréquemment utilisée. En effet, dans la pratique, nombre de circuits filiformes se présentent sous la forme de bobinages multicouches avec des spires jointives de faible section. La structure d'une telle bobine, avec ses spires filiformes, rappelle en tous points celle du courant précédent lorsqu'il est analysé en tubes de courant mésoscopiques. Pour calculer les champs créés par de tels circuits, il sera alors très commode d'avoir recours à une modélisation volumique, continuant le caractère discret du bobinage.

• Une démarche analogue peut être adoptée pour une distribution de courants surfaciques. Tout courant surfacique peut être analysé comme une distribution continue de rubans mésoscopiques, filiformes, jointifs, d'intensité  $dI$  (doc. 3b). À un élément de longueur  $d\vec{\ell}$  d'un ruban de courant mésoscopique, sera associé le vecteur de courant :  $d\vec{C} = dI d\vec{\ell}$ . Notons  $a$  la section d'un ruban de courant et  $\vec{j}_s$  le vecteur densité surfacique de courant à travers la section considérée, il vient :

$$d\vec{C} = dI d\vec{\ell} = j_s a d\vec{\ell} = \vec{j}_s dS$$

puisque  $\vec{j}_s$  et  $d\vec{\ell}$  sont colinéaires et de même sens.

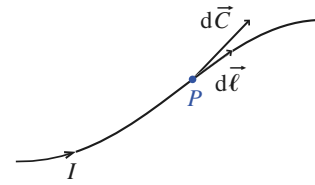
Cette équivalence pourra être utilement exploitée quand il s'agira, par exemple, de calculer le champ créé par une bobine monocouche à spires jointives de faible section.

*Une distribution surfacique de courant peut s'analyser en une distribution continue de courants filiformes mésoscopiques.*

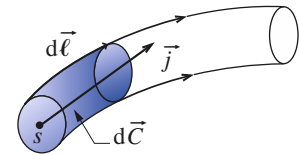
• En conclusion, nous retiendrons que :

**Toute distribution de courants peut s'analyser comme une distribution de courants filiformes dont la caractéristique locale est l'élément de courant  $d\vec{C}$ .**

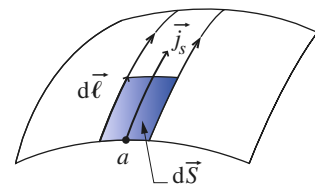
Par la suite, cette analyse ne sera pas toujours explicitement faite sur les distributions de courants étudiés, mais il ne tient qu'au lecteur de s'en convaincre en l'effectuant.



**Doc. 2.** Élément de courant d'un courant filiforme :  $d\vec{C} = I d\vec{\ell}$ .



**Doc. 3a.** Tube de courant mésoscopique considéré comme circuit filiforme :  $d\vec{C} = \vec{j} d\tau$ .



**Doc. 3b.** Ruban de courant mésoscopique considéré comme circuit filiforme :  $d\vec{C} = \vec{j}_s dS$ .

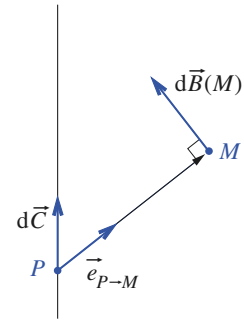
## 2.2. Champ attribué à un élément de courant

Alors que les charges sont les sources du champ électrostatique, les éléments de courant sont les sources du champ magnétique.

Nous postulons que l'expression de la contribution d'un élément de courant  $d\vec{C}$ , situé au point  $P$ , au champ total  $\vec{B}(M)$  créé en  $M$  par une distribution de courants est donnée par la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{C} \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{\|PM\|^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{C} \wedge \frac{\vec{PM}}{\|PM\|^3}.$$

Le champ  $\vec{B}(M)$  étant la somme des contributions élémentaires, avec  $d\vec{C} = \vec{j} d\tau$  ou  $d\vec{C} = \vec{j}_S dS$  ou  $d\vec{C} = I d\vec{l}$  selon les cas.



Doc. 4.  $d\vec{B}$  est perpendiculaire au plan défini en  $P$  par les vecteurs  $d\vec{C}$  et  $\vec{PM}$ .

Comme il est impossible d'isoler un élément de courant, nous ne pouvons pas vérifier directement ce postulat : la seule grandeur ayant une signification physique (en tant que grandeur mesurable) est le champ résultant  $\vec{B}$  créé par toute la distribution de courants  $\mathcal{D}$ .

Le coefficient  $\mu_0$ , dimensionné, vaut exactement  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  (H désigne le henry, unité d'inductance).

L'unité de champ magnétique est le tesla (symbole : T).

• Nous pouvons aussi attribuer un élément de courant à chaque particule chargée en mouvement. Imaginons que sur une longueur  $\delta\ell$  d'un fil conducteur, il y ait  $N$  particules mobiles de charge  $q$  et de vitesse  $v$ . Ces  $N$  particules traversent une section du fil pendant la durée  $\delta t = \frac{\delta\ell}{v}$ , d'où la valeur de l'intensité :

$$I = \frac{Nq v}{\delta\ell}$$

et donc pour l'élément de fil :

$$\delta\vec{C} = Nq \vec{v}.$$

Nous pouvons associer à chaque particule en mouvement un élément de courant :  $\vec{C} = q \vec{v}$ .

## Application 2

### Unités de $\vec{B}$ et $\mu_0$

Exprimer les dimensions de  $\vec{B}$  et  $\mu_0$  à l'aide des unités : kg, m, s et A du Système International d'unités.

$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  est une force, mesurée en  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ . La dimension du champ magnétique est donc :

$$[B] = \frac{[\text{force}]}{[\text{charge} \cdot \text{vitesse}]} = \frac{[\text{force}]}{[\text{courant} \cdot \text{temps} \cdot \text{vitesse}]} = \text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = \text{T}.$$

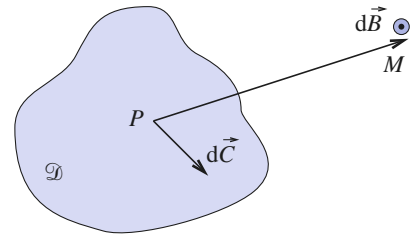
Utilisant l'expression de la loi de Biot et Savart, nous avons :

$$\begin{aligned} [\mu_0] &= [B] \frac{[\text{longueur}^2]}{[dC]} \\ &= \text{T} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \\ &= \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}. \end{aligned}$$

### 2.3. Expression du champ magnétique par la loi de Biot et Savart

La loi Biot et Savart postule que le champ créé en un point  $M$  par une distribution  $\mathcal{D}$  (doc. 5) s'obtient par superposition des contributions élémentaires  $d\vec{B}$  des éléments de courant de la distribution :

$$\vec{B}(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{C} \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{\|PM\|^2}.$$



Doc. 5. Champ magnétique d'une distribution de courants.

Suivant le type de distribution, nous écrirons ce champ sous l'une des formes suivantes.

#### ■ Distribution volumique

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j}(P) d\tau \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2}.$$

#### ■ Distribution surfacique

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\mathcal{D}} \vec{j}_s(P) dS \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2}.$$

#### ■ Distribution filiforme

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} I d\vec{P} \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2}.$$

Le régime permanent imposant au courant d'être « bouclé sur lui-même », cette dernière distribution a la forme d'un contour  $C$ , et nous pourrions aussi écrire :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I d\vec{P} \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2}.$$

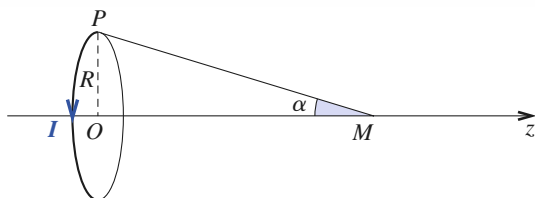
#### Remarques

- L'analogie de ces expressions avec celles donnant le champ électrostatique d'une distribution est remarquable : il suffit de transposer  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  en  $\frac{\mu_0}{4\pi}$  et  $[dq_P]$  en  $[d\vec{C} \wedge]$  dans les expressions donnant le champ. Nous verrons en seconde année que cette analogie a une signification profonde. Les champs électrostatique et magnétique sont deux facettes d'un même objet, le champ électromagnétique.
- Pour une distribution volumique de courants, l'intégrale de Biot et Savart permet le calcul du champ magnétique en tout point de l'espace.
- Dans le cas d'une distribution surfacique, cette intégrale n'autorise pas le calcul du champ sur la nappe de courant. (Nous verrons qu'il existe une discontinuité finie de la composante tangentielle de  $\vec{B}$  à la traversée de cette surface.)
- Pour une schématisation filiforme, il est exclu de calculer le champ magnétique en un point du circuit : l'intégrale y est alors divergente. (Observer le résultat du calcul du champ d'un fil rectiligne infini lorsque  $r$  tend vers 0, dans l'exercice 5.)

# Application 3

## Champ créé par une spire circulaire sur son axe

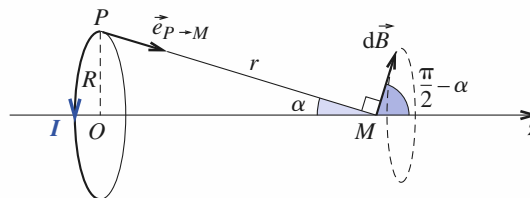
Calculer le champ magnétostatique créé par une spire de rayon  $R$  en un point  $M$  de son axe, le rayon de la spire étant vu sous l'angle  $\alpha$  depuis  $M$  (doc. 6).



Doc. 6. Spire circulaire.

Associions à un point  $P$  sur la spire, repéré par ses coordonnées cylindriques  $R$ ,  $\theta$  et  $z_P = 0$ , un élément de courant  $d\vec{C} = IR d\theta \cdot \vec{e}_\theta$ . Le champ élémentaire  $d\vec{B}$  attribué à cet élément de courant est représenté sur le document 7.

Lorsque le point  $P$  décrit la spire,  $\theta$  varie de 0 à  $2\pi$ , et  $d\vec{B}$  décrit le cône de sommet  $M$  et de demi-angle  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . Par conséquent, le champ total  $\vec{B}(M)$  sera dirigé selon  $(Oz)$  :



Doc. 7. Élément de champ magnétique.

$$\vec{B}(M) = (\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} d\vec{B} \cdot \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_z.$$

Or, nous avons :

$$d\vec{B} \cdot \vec{e}_z = \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} R d\theta \cdot \vec{e}_\theta \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{r^2} \right) \cdot \vec{e}_z$$

$$= \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} R d\theta \frac{\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_{P \rightarrow M}}{\left( \frac{R}{\sin \alpha} \right)^2} \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\theta \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{R}.$$

Le champ magnétique d'une spire circulaire sur son axe vaut :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \cdot \vec{e}_z.$$

En particulier, le champ magnétostatique créé au centre de la spire vaut :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z.$$

Ces deux résultats méritent d'être mémorisés (et doivent pouvoir être retrouvés rapidement).

► Pour s'entraîner : ex. 6, 7, 8 et 9.

## 3 Topographie du champ

### 3.1. Lignes de champ

#### 3.1.1. Définition

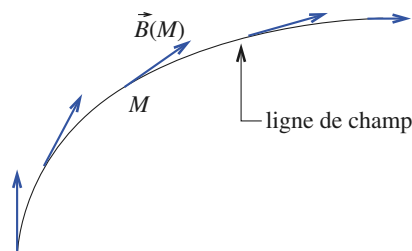
Le champ est continuellement tangent à des courbes appelées *lignes de champ* (doc. 8). Ces lignes sont orientées dans le sens du champ.

#### 3.1.2. Équation d'une ligne de champ

Un déplacement élémentaire  $d\vec{M}$  le long d'une ligne de champ est parallèle au champ  $\vec{B}$ . L'équation différentielle (vectorielle) d'une ligne de champ est :

$$d\vec{M} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

Nous obtiendrons la ligne de champ issue d'un point initial donné par intégration de cette équation différentielle.



Doc. 8. Exemple de ligne de champ.



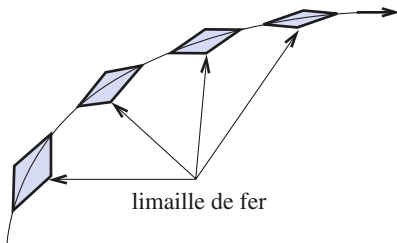
## 3.2. Visualisation d'une ligne de champ

### 3.2.1. Expérimentalement

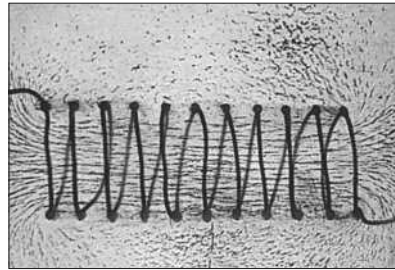
Il est possible de visualiser les lignes de champ d'un système de courants (ou d'aimants) en procédant de la manière suivante.

Sur une plaque de verre ou de plexiglas, située dans la zone utile du champ magnétique, on saupoudre de la limaille de fer. Les grains de limaille (de forme allongée) sous l'action du champ magnétique se transforment en petits aimants (ou petites boussoles) qui s'orientent alors parallèlement à ce champ magnétique.

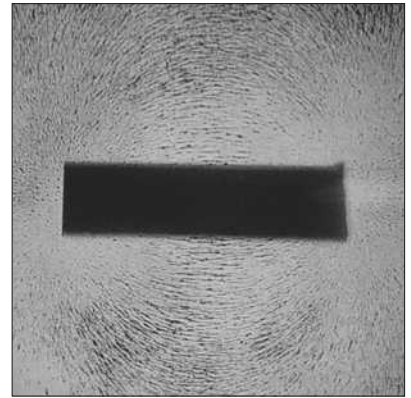
Ces petits aimants s'alignant les uns derrière les autres concrétisent approximativement une ligne de champ (doc. 9). On obtient ainsi les spectres magnétiques des documents 10 et 11.



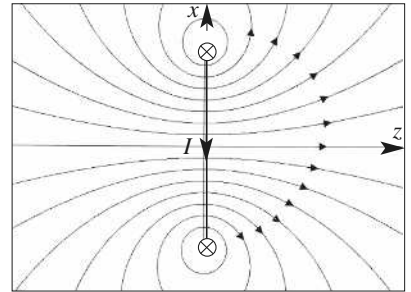
**Doc. 9.** Les éléments de la limaille de fer se comportent comme des petits aimants qui s'orientent parallèlement au champ magnétique.



**Doc. 10.** Exemple : spectre magnétique d'un solénoïde (ensemble de spires).



**Doc. 11.** Exemple : spectre magnétique d'un aimant.



**Doc. 12.** Lignes de champ du vecteur champ magnétique créé par une spire.

### 3.2.2. Par simulation

Lors d'un tracé de ligne de champ par simulation (doc. 12), l'équation différentielle  $d\vec{M} \wedge \vec{B} = \vec{0}$  est résolue en partant d'un point donné de l'espace.

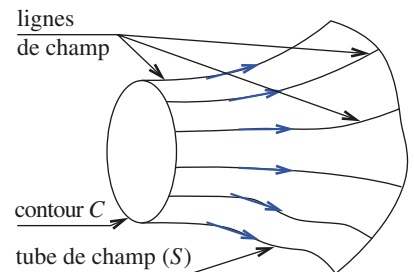
## 3.3. Tube de champ

L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée (ou contour)  $C$  engendre une surface  $S$  appelée *tube de champ*, représenté sur le document 13.

## 3.4. Points de champ nul, points singuliers

Deux lignes de champ ne peuvent pas se couper, comme le suggère le document 14, en un point  $M$  où le champ magnétique est défini et non nul. La direction du champ, donc le champ lui-même, ne serait pas définie en ce point.

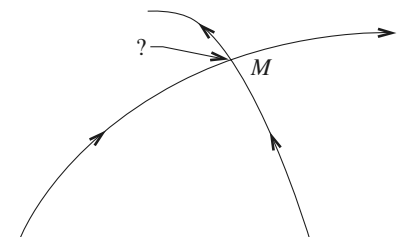
Si le champ est nul au point  $M$ , alors  $M$  est appelé *point de champ nul* (ou point d'arrêt).



**Doc. 13.** Tube de champ.

# 4 Propriétés de symétrie du champ magnétique

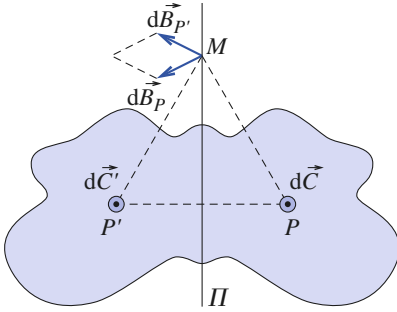
Comme en électrostatique, le calcul de la valeur du champ à partir des intégrales est souvent pénible ; nous rencontrerons des situations où la distribution de charges possède des symétries remarquables, qui peuvent simplifier considérablement la détermination du champ.



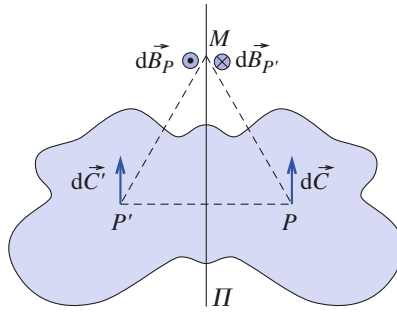
**Doc. 14.** Point de champ nul.

### 4.1. Symétrie plane

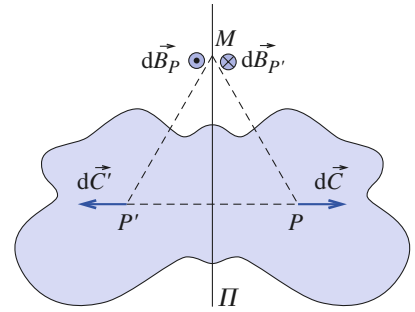
Supposons la distribution  $\mathcal{D}$  invariante par une symétrie plane  $\mathcal{S}$  par rapport à un plan  $\Pi$ .



Doc. 15 a.



Doc. 15 b.



Doc. 15 c.

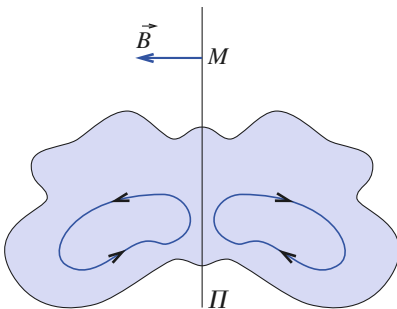
Plaçons-nous en un point  $M$  du plan de symétrie. Considérons les contributions élémentaires  $d\vec{B}_P(M)$  et  $d\vec{B}_{P'}(M)$  au champ total des deux éléments de courants  $d\vec{C}$  et  $d\vec{C}'$  associés aux points  $P$  et  $P'$  symétriques l'un de l'autre par rapport à  $\Pi$ . Le document 15 fait apparaître les différentes orientations de  $d\vec{C}$  et  $d\vec{C}'$  envisageables, et montre que  $d\vec{B} + d\vec{B}'$  est perpendiculaire au plan  $\Pi$ .

Nous pouvons ainsi conclure (doc. 16 a) :

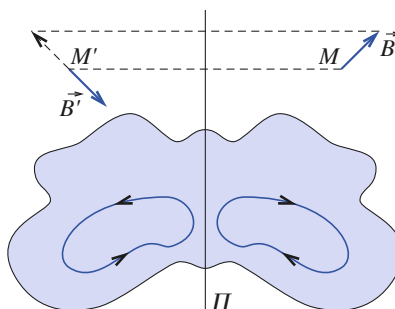
**Le champ magnétique  $\vec{B}$  est perpendiculaire à un plan-miroir  $\Pi$  en chacun de ses points.**

Plus généralement, nous aurons (doc. 16 b) :

**Au point  $M'$  symétrique d'un point  $M$  par rapport à un plan-miroir  $\Pi$ , le champ magnétique  $\vec{B}'$  est l'opposé du symétrique du champ  $\vec{B}$  en  $M$  par rapport à ce plan.**



Doc. 16 a. Champ magnétique sur un plan de symétrie.



Doc. 16 b. Champs en deux points symétriques.

En résumé :  $\vec{B}(S(M)) = -S(\vec{B}(M))$ .

#### Remarque

Nous laissons le soin au lecteur de s'en convaincre en utilisant une méthode analogue à celle qui a été utilisée à ce propos pour le champ électrostatique au chapitre 2, ce qui est un peu fastidieux, et proposons au lecteur l'application qui suit pour se convaincre des propriétés particulières de symétrie du produit vectoriel de deux vecteurs.

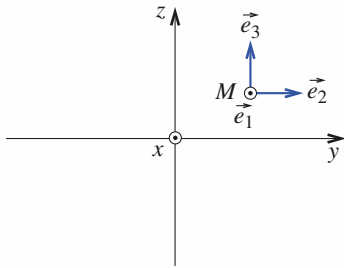
# Application 4

## Transformation du produit vectoriel de deux vecteurs

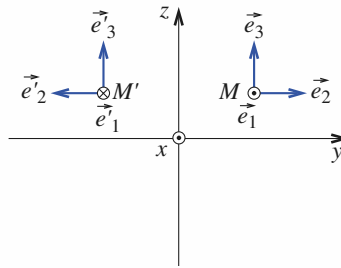
Considérons le trièdre trirectangle direct des trois vecteurs unitaires  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  pour lequel  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$  (doc. 17).

1) Construire le trièdre de vecteurs  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  obtenu par la rotation du précédent trièdre d'un angle égal à  $\pi$  autour de l'axe  $(Oz)$ . La rotation a-t-elle conservé les propriétés du trièdre initial ?

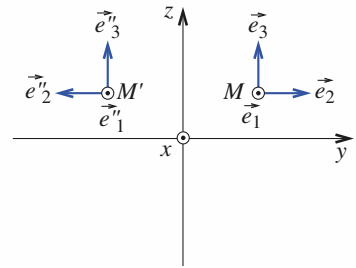
2) Reprendre l'étude précédente en considérant l'opération de symétrie plane par rapport au plan  $(xOz)$  qui conduit au trièdre  $(\vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \vec{e}''_3)$ . Conclusion ?



Doc. 17.



Doc. 18.



Doc. 19.

1) La construction est représentée sur le document 18. Nous pouvons constater que le trièdre  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  est un trièdre orthonormé direct. Les rotations conservent le produit vectoriel :  $\mathcal{R}(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = \mathcal{R}(\vec{e}_1) \wedge \mathcal{R}(\vec{e}_2)$ .

2) Pour l'opération de symétrie plane, qui transforme encore le point  $M$  en  $M''$ , nous remarquons que le trièdre  $(\vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \vec{e}''_3)$  est orthonormé, mais indirect. L'opération de symétrie plane inverse le produit vectoriel (doc. 19) :  $S(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = -S(\vec{e}_1) \wedge S(\vec{e}_2)$ .

Le champ magnétique donné par la loi de Biot et Savart fait intervenir le produit vectoriel de deux vecteurs polaires. Ceci explique le comportement particulier du champ magnétique lors d'opérations de symétrie plane.

## 4.2. Antisymétrie plane

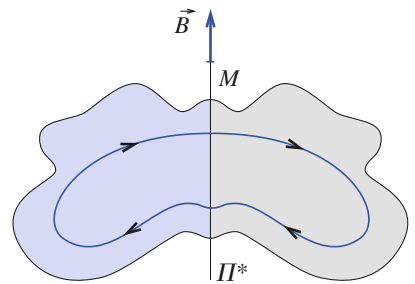
Pour une distribution  $\mathcal{D}$  possédant un plan d'antisymétrie  $\Pi^*$ , et pour un point  $M$  appartenant à ce plan, il suffit de changer le sens du champ élémentaire  $d\vec{B}_P$  dans les raisonnements précédents. Par conséquent (doc. 20 a) :

**Le champ magnétique  $\vec{B}$  est contenu dans un plan-antimiroir  $\Pi^*$  en chacun de ses points.**

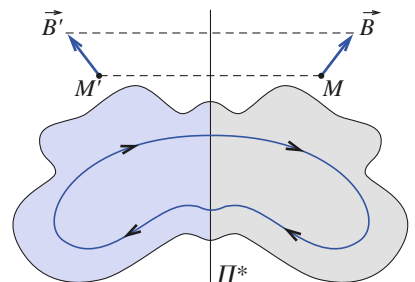
Plus généralement (doc. 20 b) :

**Au point  $M'$  symétrique du point  $M$  par rapport au plan-antimiroir  $\Pi^*$ , le champ magnétique  $\vec{B}'$  est le symétrique du champ  $\vec{B}$  en  $M$ .**

Exemple : Considérons une spire circulaire d'axe  $(Oz)$  parcourue par un courant  $I$ . Les lignes de champ seront dans des plans contenant l'axe  $(Oz)$  qui sont des plans-antimiroirs de cette distribution. Nous choisirons donc le plan  $(xOz)$  pour représenter quelques lignes de champ magnétique de la spire (doc. 12), dont nous pouvons ainsi illustrer les propriétés lors d'opérations de symétrie plane.



Doc. 20 a. Champ sur un plan d'antisymétrie.



Doc. 20 b. Champs en deux points symétriques.

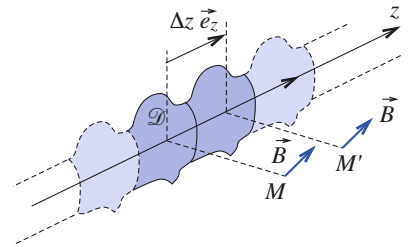
• Les plans contenant l'axe ( $Oz$ ) de la spire sont des plans-antimiroirs.  
 Sur l'axe ( $Oz$ ), le champ magnétique est parallèle à  $\vec{e}_z$ . Cette observation est en accord avec la valeur  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \cdot \vec{e}_z$  (\*) que nous avons déjà calculée (cf. Application 3).

Au point  $M'(x, 0, z)$  symétrique du point  $M(-x, y, z)$  par rapport au plan-antimiroir ( $yOz$ ), le champ magnétique  $\vec{B}'$  est le symétrique du champ  $\vec{B}$  par rapport à ce plan.

• Le plan ( $xOy$ ) de la spire est un plan-miroir.

Sur le document 12, les lignes de champ coupent l'axe ( $Ox$ ) perpendiculairement. Le champ est identique aux points  $A(0, 0, z_0)$  et  $A'(0, 0, -z_0)$  (ce qui revient à changer  $\alpha$  en  $\pi - \alpha$  dans l'expression (\*)).

Au point  $M''(x, 0, -z)$  symétrique du point  $M(x, 0, z)$ , le champ  $\vec{B}''$  est l'opposé du symétrique de  $\vec{B}$  par rapport à ( $xOy$ ).



Doc. 21. Invariance par translation discrète

### 4.3. Invariance par translation

Lorsqu'une distribution  $\mathcal{D}$  est invariante par une translation de  $\Delta z$  parallèlement à l'axe ( $Oz$ ), un observateur percevra la même distribution s'il est au point de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  ou en un point translaté du précédent de coordonnées  $(x, y, z + n \Delta z)$ , où  $n$  est un entier. Le champ sera donc identique en ces deux points (doc. 21) :  $\vec{B}(x, y, z + n \Delta z) = \vec{B}(x, y, z)$ . Ce n'est possible que pour les distributions illimitées dans la direction de la translation.

Pour une distribution invariante par (toute) translation selon la direction de l'axe ( $Oz$ ), le champ magnétique sera de la forme  $\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y)$ .

## Application 5

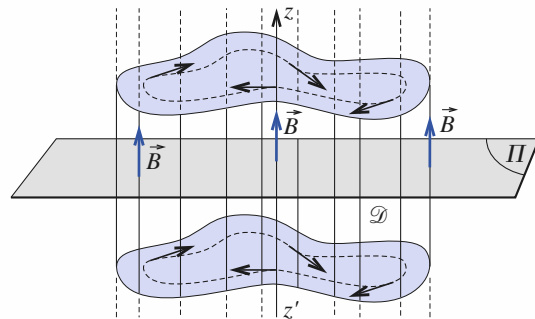
### Champ magnétique d'une distribution de courants plans

Déterminer la forme du champ magnétique créé par des courants plans :

$$\vec{j}(x, y, z) = j_x(x, y) \vec{e}_x + j_y(x, y) \vec{e}_y.$$

Tout plan perpendiculaire à l'axe ( $Oz$ ) est un plan-miroir de la distribution (doc. 22), le champ magnétique est parallèle à  $\vec{e}_z$ . La distribution étant invariante par translation parallèlement à ce vecteur, nous aurons donc :

$$\vec{B}(x, y, z) = B(x, y) \vec{e}_z.$$



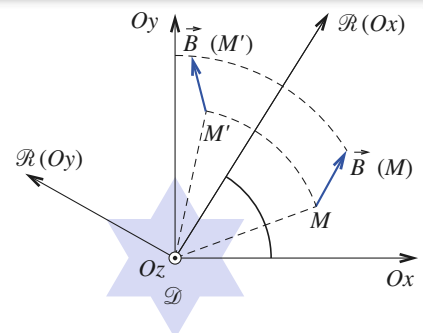
Doc. 22.

### 4.4. Invariance par rotation

Pour une distribution  $\mathcal{D}$  invariante par une rotation  $\mathcal{R}$  d'angle  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  ( $n$  entier) autour de l'axe ( $Oz$ ), deux observateurs placés en  $M$  et  $M' = \mathcal{R}(M)$  percevront la même distribution (doc. 23).

Le champ au point  $M'$  est le même qu'au point  $M$ , à une rotation autour de  $\vec{e}_z$  d'angle  $\alpha$  près.

Remarque : Ce résultat est à rapprocher de l'étude faite dans l'Application 4, une rotation conserve le produit vectoriel.



Doc. 23. Invariance par rotation avec  $n = 6$ .

# Application 6

## Champ d'une distribution de courants axisymétriques

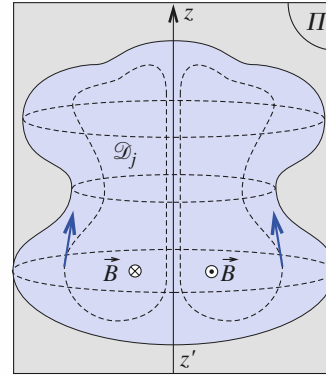
Déterminer la forme du champ magnétique engendré par une distribution axisymétrique :

$$\vec{j} = j_r(r, z) \vec{e}_r + j_z(r, z) \vec{e}_z.$$

Tout plan méridien est un plan-miroir  $\Pi$  ; le champ magnétique en  $M$  est donc orthoradial :

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta.$$

La distribution étant de plus invariante par toute rotation d'axe ( $Oz$ ), nous pouvons simplifier encore la forme du champ  $\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$ .



Doc. 24. Courants axisymétriques.

## 4.5. Le champ magnétique est un vecteur axial

Les études précédentes nous amènent à une conclusion simple : lors d'une symétrie plane appliquée à la distribution de courants  $\mathcal{D}$ , le champ magnétique subit la même symétrie avec en plus un changement de signe.

Les opérations de symétrie, telles qu'une rotation autour d'un axe ou une translation, peuvent être vues comme le produit de deux symétries planes, ce qui a pour effet de supprimer le changement de signe.

Nous appelons **vecteur axial** un vecteur dont le champ a cette propriété.

Le vecteur champ magnétique est un vecteur axial à cause du produit vectoriel que l'on trouve dans l'expression de la loi de Biot et Savart. Il est facile de vérifier (cf. Application 4) que, pour une symétrie par rapport à un plan  $\Pi$  :

$$S(\vec{u} \wedge \vec{v}) = -S(\vec{u}) \wedge S(\vec{v}).$$

Pour qualifier cette propriété, nous trouvons aussi le terme « **pseudo-vecteur** », par opposition à un « vecteur-vrai » qui, comme le champ électrique, a les mêmes propriétés de symétrie que ses sources.

Toute isométrie (transformation géométrique qui laisse invariantes les distances) peut se mettre sous la forme d'un produit de  $n$  symétries planes.

- Si  $n$  est impair, l'isométrie est dite négative.
- Si  $n$  est pair, l'isométrie est dite positive.

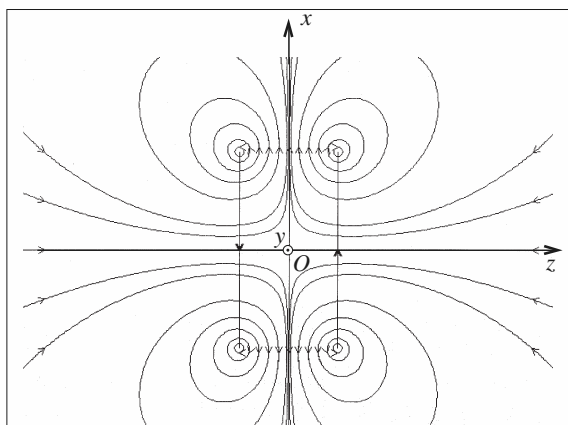
Un vecteur polaire et un vecteur axial se distinguent par la transformation qu'ils subissent lors d'une isométrie négative.

Le champ magnétostatique est un objet tridimensionnel qui a les propriétés de symétrie d'un vecteur axial ou « pseudo-vecteur ».

Cela signifie que si les courants qui le créent subissent une symétrie plane par rapport à un plan, alors  $\vec{B}$  subit une antisymétrie par rapport au même plan.

# Application 7

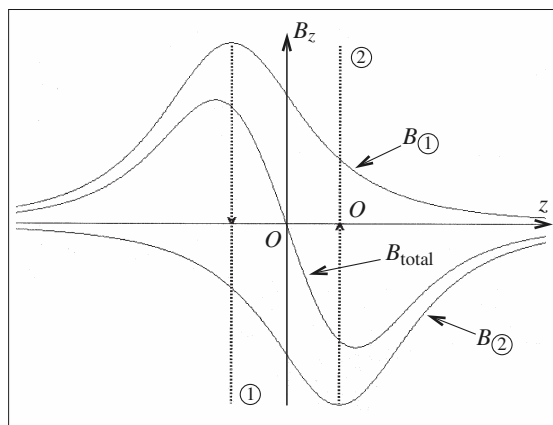
## Champ au centre d'un système de deux bobines « opposées »



**Doc. 25 a.** Champ magnétique de deux spires en opposition.

Calculer le champ magnétique créé au point  $O$  par deux spires circulaires d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $R$ , parcourues par deux courants opposés  $+I$  et  $-I$  et centrées aux points d'abscisses  $z_0$  et  $-z_0$  de part et d'autre du point  $O$ .

Le document 25 représente les lignes de champ de cette configuration dans un plan contenant l'axe  $(Oz)$ .



**Doc. 25 b.** Allure de  $B_z$  créé par le système de courants.

Tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  est plan-antimiroir  $\Pi^*$  de la distribution de courants. Au point  $O$ , le champ magnétique est dirigé selon  $\vec{e}_z$ .

Le plan  $(xOy)$  est aussi un plan-antimiroir puisque les courants parcourant les spires sont opposés, donc  $\vec{B}(O)$  est contenu dans ce plan.

En conséquence, le champ magnétique au point  $O$  est nécessairement nul.

► Pour s'entraîner : ex. 1 et 2.

## 5 Flux du champ magnétique

### 5.1. Le flux magnétique est conservatif

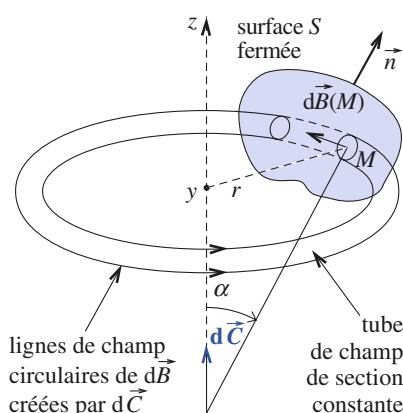
#### 5.1.1. Flux du champ attribué à un élément de courant

Envisageons un élément de courant  $d\vec{C} = dC \cdot \vec{e}_z$ . Au point  $M$  de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , le champ attribué à cet élément vaut :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 dC}{4\pi} \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} = \frac{\mu_0 dC}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{[r^2 + z^2]} \vec{e}_\theta.$$

Les lignes de ce champ élémentaire sont des cercles centrés sur l'axe  $(Oz)$ . L'invariance par rotation autour de cet axe assure que  $d\vec{B} \cdot \vec{e}_\theta$  reste constant sur un tel cercle.

Le tube de champ correspondant aux lignes s'appuyant sur une section droite d'aire  $dS_\theta$  est un tore. Le flux du champ élémentaire  $d\vec{B}$  est le même à travers toutes les sections de ce tore et vaut  $(d\vec{B} \cdot \vec{e}_\theta) dS_\theta$ .



**Doc. 26.** Lignes de champ traversant une surface fermée.



Observons sur le *document 26* les lignes du champ  $d\vec{B}$  traversant une surface fermée  $S$ . Un tube torique de champ découpe sur  $S$  un nombre pair de sections (dans le cas simple représenté ce nombre est deux). Les contributions des flux « entrant dans  $S$  » et « sortant de  $S$  » sont identiques, au signe près.

Le flux du champ magnétostatique  $d\vec{B}$  à travers une surface fermée  $S$  est nul.

### 5.1.2. Généralisation

Pour une distribution de courants  $\mathcal{D}$ , le champ magnétique  $\vec{B}$  en  $M$  résulte de la superposition de champs élémentaires  $d\vec{B}$ , d'après la loi de Biot et Savart.

La propriété précédente sera ainsi valable pour le champ total créé par la distribution. Nous pouvons donc affirmer que :

**Le flux du champ magnétique sortant d'une surface fermée est nul.**

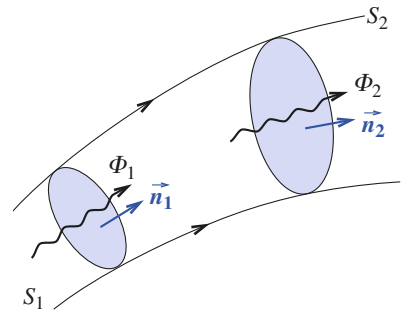
Rappelons que cela implique que le flux du champ magnétique est le même à travers toute section d'un même tube de champ (*doc. 27*) :

**Le champ magnétique est à flux conservatif.**

Nous verrons ultérieurement que cette propriété reste valable, que le régime étudié soit indépendant du temps ou variable.

#### Remarque

Nous avons vu que les lignes du champ magnétique attribuées à un élément de courant sont des cercles, elles sont donc fermées. Il en est de même pour un fil rectiligne infini (cf. exercice 5), ou pour une spire circulaire (cf. *doc. 12 et 25*). Nous pourrions admettre la généralisation de cette propriété à des champs magnétiques créés par des distributions quelconques. Ce comportement différencie encore fondamentalement un champ magnétostatique d'un champ électrostatique. Cette propriété est liée au fait que  $\vec{B}$  est toujours à flux conservatif, alors que  $\vec{E}$  n'est à flux conservatif que dans les régions vides de charges.



**Doc. 27.** Le flux de  $\vec{B}$  à travers deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  s'appuyant sur un même tube de champ ne dépend pas du choix de ces surfaces  $\Phi_1 = \Phi_2$ .

## Application 8

### Champ au voisinage de l'axe de révolution d'une distribution de courants annulaires

Déterminer, à l'ordre un en  $r$  (distance à l'axe de révolution ( $Oz$ )), l'expression de la composante radiale du champ magnétique au voisinage de l'axe de révolution d'une distribution annulaire de courants.

Tout plan méridien contenant l'axe de révolution ( $Oz$ ) est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants contenant le champ magnétique. Donc, sur l'axe ( $Oz$ ) le vecteur champ magnétique est colinéaire ( $Oz$ ) :

$$\vec{B}_{\text{axe}}(z) = B_{\text{axe}}(z) \vec{e}_z.$$

Notons  $M$  le point de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Le plan méridien contenant le point  $M$  et l'axe ( $Oz$ ) contient  $\vec{B}(M)$ , donc  $B_\theta(r, \theta, z) = 0$ .

Comme la distribution possède la symétrie de révolution autour de l'axe ( $Oz$ ), il vient en outre :

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z.$$

Cela étant, considérons un cylindre d'axe ( $Oz$ ), à bases circulaires de rayon  $r$  dans les plans de cotes  $z$  et  $z + dz$ .

Écrivons que le flux magnétique à travers ce cylindre est nul :

$$\pi r^2 B_z(r, z + dz) - \pi r^2 B_z(r, z) + 2\pi r dz (B_r(r, z) + \dots) = 0$$



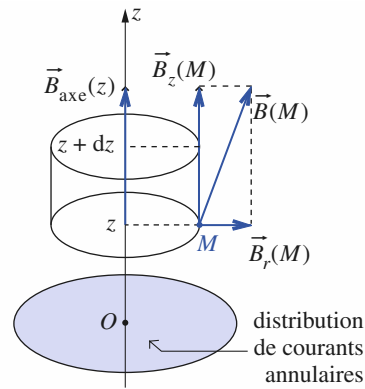
d'où : 
$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(r, z)}{dz}.$$

Nous pourrions démontrer ultérieurement, à l'aide du théorème d'Ampère, qu'à l'extérieur de la distribution de charges nous avons :  $B_z(r, z) = B_z(0, z) = B_{\text{axe}}(z)$ .

En définitive :

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B_z(0, z) \vec{e}_z - \frac{r}{2} \frac{dB_z(0, z)}{dz} \vec{e}_r.$$

Doc. 28. ►



## 5.2. Un exemple de canalisation du flux magnétique : le solénoïde

### 5.2.1. Champ de quelques spires

#### 5.2.1.1. Champ d'une spire

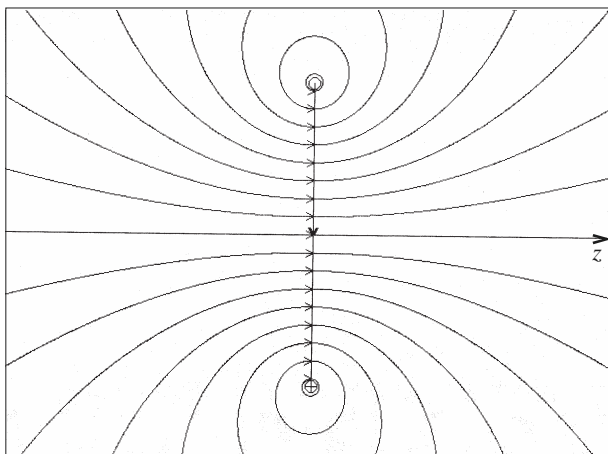
Rappelons les résultats obtenus dans l'Application 3.

Le champ magnétique d'une spire circulaire sur son axe est :

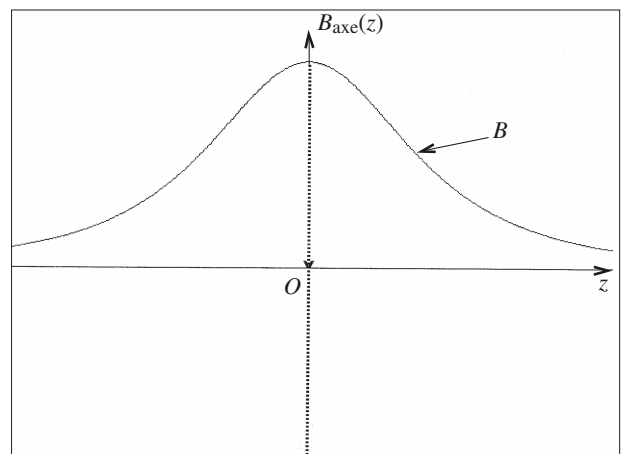
$$\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{I}{2R} \sin^3 \alpha \cdot \vec{e}_z.$$

Au centre de la spire, ce champ est :  $\vec{B}(O) = \mu_0 \frac{I}{2R} \vec{e}_z$ .

Le document 29 représente des lignes du champ d'une spire circulaire d'axe (Oz) dans un plan contenant cet axe.



Doc. 29. Lignes de champ magnétique d'une spire.



Doc. 30. Champ sur l'axe d'une spire.

Par rotation de l'une de ces lignes autour de l'axe de la spire, nous pouvons obtenir un tube de champ magnétique dont les sections perpendiculaires à (Oz) sont circulaires. Considérons ce tube en pensant à la conservation du flux magnétique le long de celui-ci :

- le tube est resserré lorsqu'il traverse la spire, qui sert de goulet d'étranglement canalisant le flux magnétique qui est intense dans cette zone ;
- en s'éloignant de la spire, le tube s'évase rapidement, ce qui laisse prévoir une diminution rapide de l'intensité du champ ;

• le tracé de  $B_{z(\text{axe})} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$  en fonction de  $z$  sur le *document* 30 confirme ces considérations qualitatives.

### 5.2.1.2. Amélioration de la canalisation du flux

Pour augmenter le champ et étendre la zone de concentration de son flux, nous pouvons songer à associer plusieurs spires de même axe parcourues par des courants de même sens (nous avons vu précédemment (*doc.* 25) que deux spires en regard parcourues par des courants opposés ne produisaient pas l'effet souhaité).

Les *documents* 31 à 33 rendent compte de l'association de deux, cinq puis dix spires identiques et régulièrement espacées.

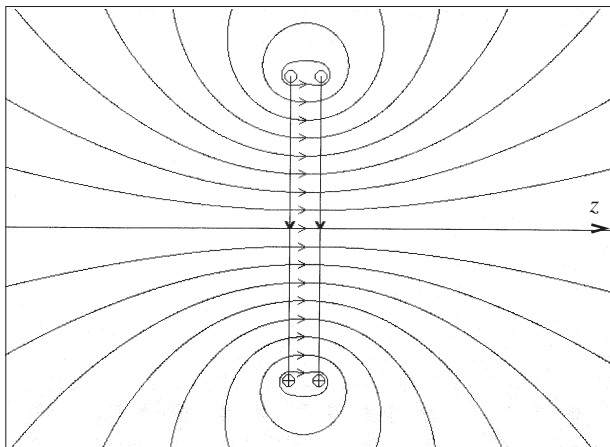
### 5.2.2. Lignes de champ du solénoïde

Poursuivant l'étude précédente, nous pouvons envisager un circuit obtenu par enroulement régulier d'un fil conducteur sur un cylindre d'axe ( $Oz$ ), les  $N$  tours de fil de même rayon  $R$  occupant une longueur totale  $\ell$ . En pratique, le nombre  $n = \frac{N}{\ell}$  de tours de fil par unité de longueur est élevé, et nous pouvons l'assimiler à un ensemble de spires d'axe ( $Oz$ ) quasi jointives et de rayon  $R$ .

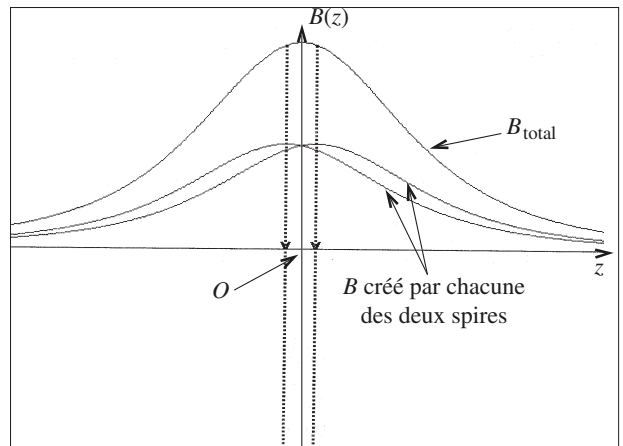
Le circuit obtenu est un solénoïde (du grec *solên* : étui, tuyau) à section circulaire et à une couche (nous pourrions envisager plusieurs épaisseurs d'enroulement).

Observons le *document* 34, qui présente quelques lignes de champ d'un solénoïde (à  $N = 21$  spires très proches) dans un plan contenant ( $Oz$ ) :

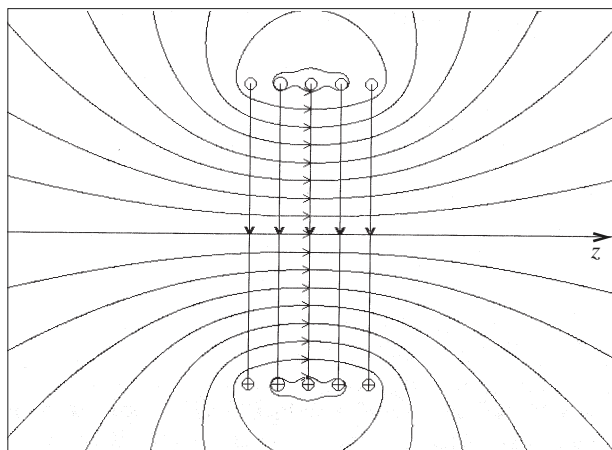
- le solénoïde canalise les lignes de champ magnétique ;
- les lignes de champ s'écartent tellement vite dès leur sortie du solénoïde que nous pouvons prévoir une atténuation très rapide du champ à l'extérieur du solénoïde, où il doit être négligeable devant le champ à l'intérieur du solénoïde.



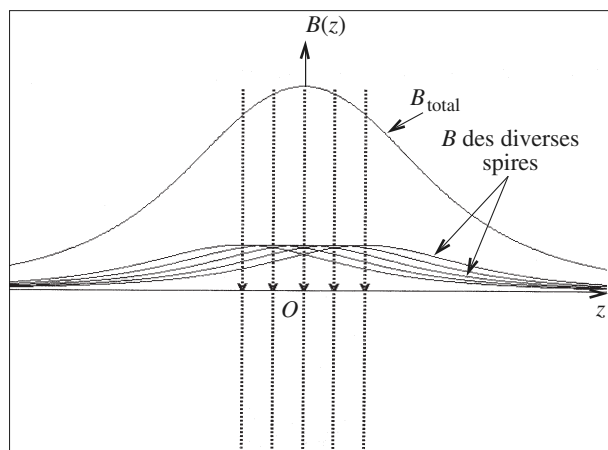
**Doc. 31a.** Lignes de champ magnétique d'un ensemble de deux spires parcourues par des courants identiques.



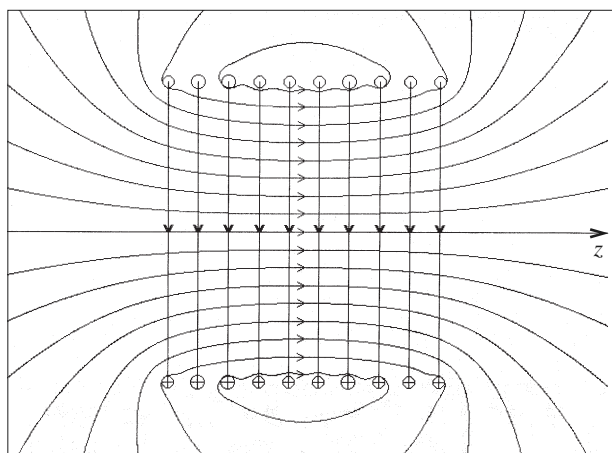
**Doc. 31b.** Allure de  $B(z)$  dans le cas de deux spires parcourues par des courants identiques.



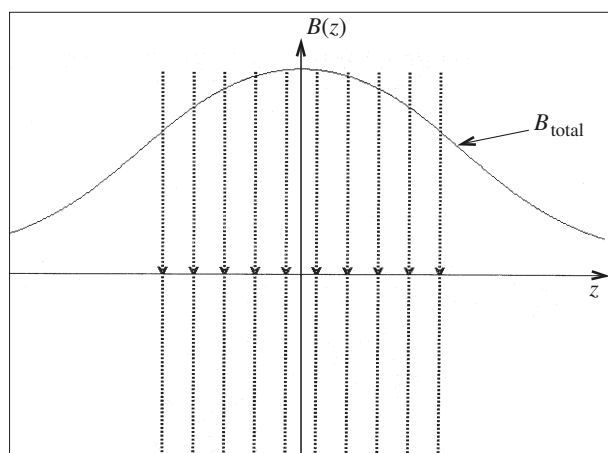
**Doc. 32 a.** Lignes de champ magnétique d'un ensemble de cinq spires parcourues par des courants identiques.



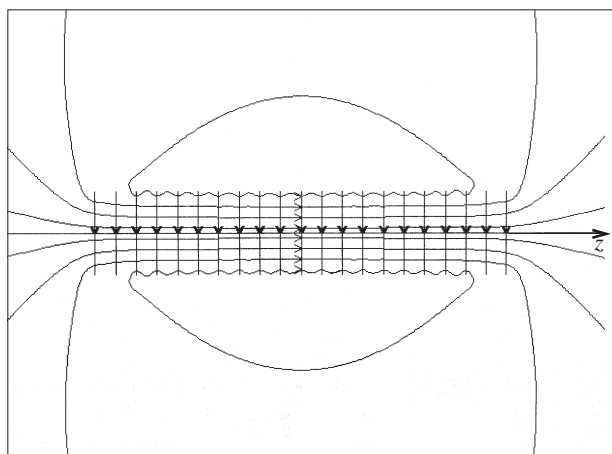
**Doc. 32 b.** Allure de  $B(z)$  dans le cas de cinq spires parcourues par des courants identiques.



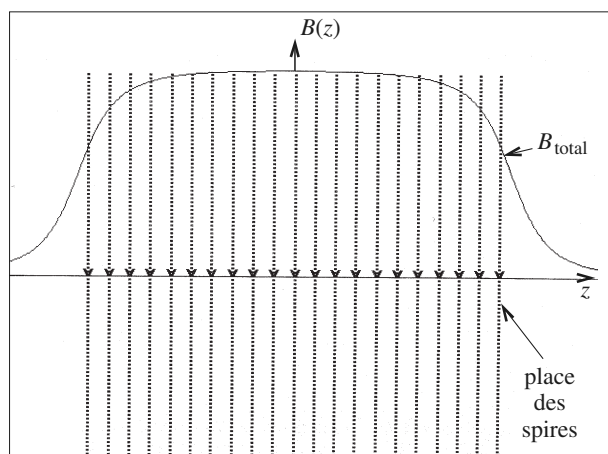
**Doc. 33 a.** Lignes de champ magnétique d'un ensemble de dix spires parcourues par des courants identiques.



**Doc. 33 b.** Allure de  $B(z)$  dans le cas de dix spires parcourues par des courants identiques.



**Doc. 34 a.** Lignes de champ magnétique d'un ensemble de vingt et une spires régulièrement réparties et parcourues par des courants identiques.



**Doc. 34 b.** Allure de  $B(z)$  pour un solénoïde constitué de vingt et une spires régulièrement réparties et parcourues par des courants identiques.

# Application 9

## L'approximation de la nappe solénoïdale de courant

*Les spires étant quasi jointives et en nombre important par unité de longueur, montrer que le solénoïde peut être assimilé à une nappe cylindrique de courants annulaires et de densité surfacique de courants  $\vec{j}_S$  à préciser.*

Nous considérons comme négligeable l'erreur commise en remplaçant la distribution filiforme de courants par une

distribution surfacique équivalente qui sera de la forme  $\vec{j}_S = j_S \vec{e}_\theta$  (en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ ).

Considérons un élément  $dz$  coupant normalement les spires. L'intensité le traversant est  $dI = n dz \cdot I$  pour la schématisation discrète, et  $dI = j_S dz$  pour la schématisation surfacique équivalente.

L'opération de nivelage proposée consiste donc à substituer au solénoïde la nappe de courant de densité surfacique  $\vec{j}_S = n I \vec{e}_\theta$ .

### 5.2.3. Champ sur l'axe du solénoïde

Tout plan contenant l'axe du solénoïde est un plan d'antisymétrie, donc sur l'axe le champ est de la forme  $\vec{B}_{\text{axe}} = B_{\text{axe}}(z) \vec{e}_z$ . Le champ créé en un point  $M$  de cote  $z_M$  de l'axe par une spire de cote  $z_P = z_M + R \cotan \alpha$  parcourue par le courant  $I$  est  $\frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$  (doc. 35 a).

Celui créé par les spires de cote comprise entre  $z_P$  et  $z_P + dz_P$  ( $dz_P = -\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}$ ), au nombre de  $n dz_P$ , vaut :

$$\frac{\mu_0 n I dz_P}{2R} \sin^3 \alpha = -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 n I}{2} d(\cos \alpha).$$

Notant  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les angles extrêmes (compris entre 0 et  $\pi$ ) sous lesquels les extrémités du solénoïdes sont vues depuis le point  $M$  (doc. 35 b), nous obtenons le champ magnétique total sur l'axe du solénoïde :

$$\vec{B}_{\text{axe}} = \mu_0 n I \left( \frac{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1}{2} \right) \vec{e}_z.$$

Le tracé de la valeur du champ sur l'axe ( $z'z$ ) en fonction de  $z$  (doc. 36) montre que le champ magnétique est pratiquement uniforme à l'intérieur du solénoïde et devient rapidement négligeable à l'extérieur.

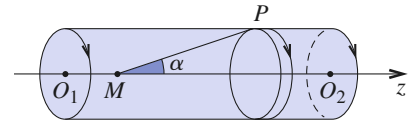
### 5.2.4. Limite du solénoïde infini

Pour un solénoïde très long, c'est-à-dire lorsque le rapport  $\frac{\ell}{R}$  est très grand (idéalement infini),  $\alpha_1$  tend vers  $\pi$  et  $\alpha_2$  tend vers 0.

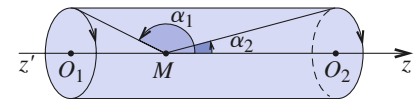
**Le champ magnétique sur l'axe d'un solénoïde infiniment long uniforme et comportant  $n$  spires par unité de longueur vaut :**

$$\vec{B}_\infty = \mu_0 n I \vec{e}_z.$$

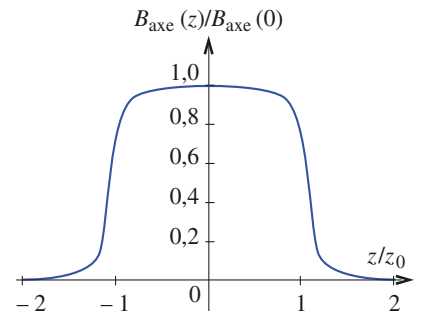
Nous verrons au chapitre 8, que lorsque la limite  $\frac{\ell}{R}$  tend vers  $\infty$ , le champ est uniforme, égal à  $\mu_0 n I \vec{e}_z$ , en tout point à l'intérieur du solénoïde, et il est nul à l'extérieur.



Doc. 35 a.



Doc. 35 b.



Doc. 36. Solénoïde aux extrémités d'abscisses  $-z_0$  et  $z_0$ .

## CQFR

### ● LOI DE BIOT ET SAVART

Toute distribution de courants peut s'analyser comme une distribution de courants filiformes dont la caractéristique locale est l'élément de courant  $d\vec{C}$ .

Nous postulons que l'expression de la contribution d'un élément de courant  $d\vec{C}$ , situé au point  $P$ , au champ total  $\vec{B}(M)$  créé en  $M$  par une distribution de courants est donnée par la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{C} \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{\|PM\|^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{C} \wedge \frac{\vec{PM}}{\|PM\|^3}.$$

Le champ résultant  $\vec{B}(M)$  est la somme des contributions élémentaires avec  $d\vec{C} = \vec{j} d\tau$  ou  $d\vec{C} = \vec{j}_S dS$  ou  $d\vec{C} = Id\vec{\ell}$  selon les cas.

Le coefficient  $\mu_0$ , dimensionné, vaut exactement  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  (H désigne le henry, unité d'inductance).

L'unité de champ magnétique est le tesla (symbole : T).

### ● SYMÉTRIE PLANE

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est perpendiculaire à un plan-miroir  $\Pi$  en chacun de ses points.

Au point  $M'$  symétrique d'un point  $M$  par rapport à un plan-miroir  $\Pi$ , le champ magnétique  $\vec{B}'$  est l'opposé du symétrique du champ  $\vec{B}$  en  $M$  par rapport à ce plan.

### ● ANTISYMMÉTRIE PLANE

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est contenu dans un plan-antimiroir  $\Pi^*$  en chacun de ses points.

Au point  $M'$  symétrique du point  $M$  par rapport au plan-antimiroir  $\Pi^*$ , le champ magnétique  $\vec{B}'$  est le symétrique du champ  $\vec{B}$  en  $M$ .

● Le vecteur champ magnétostatique est un objet tridimensionnel ayant les propriétés de symétrie d'un vecteur axial ou pseudo-vecteur.

### ● FLUX MAGNÉTIQUE

Le flux du champ magnétique sortant d'une surface fermée est nul.

Le champ magnétique est à flux conservatif.

### ● SOLÉNOÏDE

Le champ magnétique d'une spire circulaire sur son axe est :  $\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{I}{2R} \sin^3 \alpha \cdot \vec{e}_z$ .

Au centre de la spire, ce champ est :  $\vec{B}(O) = \mu_0 \frac{I}{2R} \vec{e}_z$ .

Le champ magnétique sur l'axe d'un solénoïde infiniment long et comportant  $n$  spires par unité de longueur vaut :

$$\vec{B}_\infty = \mu_0 n I \vec{e}_z.$$

# Contrôle rapide

## Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Définir un élément de courant  $d\vec{C}$ . En quelle unité s'évalue-t-il ?
- ✓ Énoncer la loi de Biot et Savart et construire le vecteur champ élémentaire  $d\vec{B}(M)$ .
- ✓ Montrer, à l'aide d'un schéma simple, que le champ magnétique est perpendiculaire à un plan-miroir  $\Pi$  en chacun de ses points.
- ✓ De même, montrer, à l'aide d'un schéma simple, que le champ magnétique est contenu dans un plan anti-miroir  $\Pi^*$  en chacun de ses points.
- ✓ Justifier que le champ magnétique est un champ à flux conservatif.
- ✓ Retrouver l'expression du champ  $\vec{B}(M)$  créé en un point de son axe par une spire circulaire de rayon  $R$  parcourue par un courant  $I$ .
- ✓ Établir l'expression du champ sur l'axe d'un solénoïde infiniment long parcouru par un courant  $I$  et comportant  $n$  spires par unité de longueur.

## Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Les lignes de champ magnétique sont des lignes fermées.  
☐ Vrai ☐ Faux
2. Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée n'est nul que dans les régions vides de courants.  
☐ Vrai ☐ Faux
3. La translation, la rotation et l'antisymétrie par rapport à un plan sont des isométries qui laissent invariante l'orientation d'un trièdre.  
☐ Vrai ☐ Faux
4. Une symétrie par rapport à un plan change l'orientation d'un trièdre.  
☐ Vrai ☐ Faux
5. Le champ magnétique s'évalue en weber.  
☐ Vrai ☐ Faux
6. Le champ élémentaire  $d\vec{B}(M)$  créé par un élément de courant  $d\vec{C}$  a une réalité physique : il est mesurable.  
☐ Vrai ☐ Faux
7. Le coefficient  $\mu_0$  est sans dimension.  
☐ Vrai ☐ Faux
8. La loi de Biot et Savart est valable en régime permanent comme en régime variable.  
☐ Vrai ☐ Faux
9. Si un système  $\Sigma$  possède un plan de symétrie  $\Pi$  alors, pour un champ de vecteurs polaires  $\vec{u}(M)$  créé par  $\Sigma$ , il vient :  
$$\vec{u}(S(M)) = S(\vec{u}(M))$$

tandis que pour un champ de vecteurs axiaux  $\vec{v}(M)$  créé par cette même distribution :

$$\vec{v}(S(M)) = -S(\vec{v}(M)).$$
  
☐ Vrai ☐ Faux

► Solution, page 137.

# Exercices

## 1 Produit vectoriel et symétrie plane

En notant  $S$  la symétrie par rapport à  $\Pi$ , rappelons que :

- pour un champ  $\vec{u}(M)$  de vecteurs polaires :

$$\vec{u}(S(M)) = S(\vec{u}(M)) ;$$

- pour un champ  $\vec{v}(M)$  de vecteurs axiaux :

$$\vec{v}(S(M)) = -S(\vec{v}(M)) ;$$

- pour un champ défini par un produit vectoriel :

$$\vec{w}(M) = \vec{w}_1(M) \wedge \vec{w}_2(M) \text{ où : } \vec{w}_1(M) \text{ et } \vec{w}_2(M)$$

sont des vecteurs polaires ou axiaux :

$$\vec{w}(S(M)) = -S(\vec{w}(M)).$$

1) Cela étant, considérons un système  $\Sigma$  possédant un plan de symétrie  $\Pi$  et une loi physique, applicable à ce système, de la forme  $\vec{c}(M) = \vec{a}(M) \wedge \vec{b}(M)$  où  $\vec{a}(M)$  est un champ de vecteurs polaires et  $\vec{b}(M)$  un champ de vecteurs axiaux.

Quelle est la nature (polaire ou axiale) du champ de vecteurs  $\vec{c}(M)$  ? Citer un exemple de loi de ce type.

2) Quelle est la nature (polaire ou axiale) du champ de vecteurs  $\vec{c}(M)$  si  $\vec{a}(M)$  et  $\vec{b}(M)$  sont deux champs de vecteurs axiaux ?

## 2 Trajectoire et force de Lorentz

Étant donné une distribution de courants présentant un plan de symétrie  $\Pi$  et une particule  $M(q, m)$  décrivant une trajectoire  $L$  dans le champ magnétique créé par cette distribution. Montrer qu'il est possible d'observer une particule identique  $M'$  décrivant la trajectoire symétrique  $L'$  avec une vitesse symétrique  $\vec{v}(M') = S(\vec{v}(M))$  en des points symétriques.

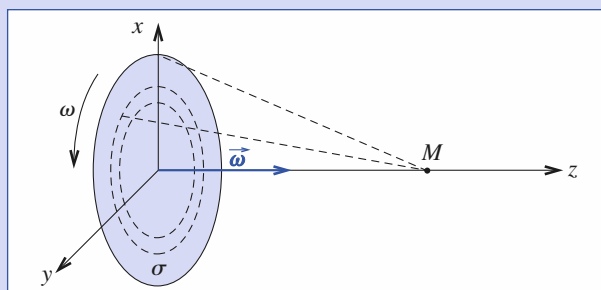
## 3 Disque de Rowland

Ce physicien américain d'une habilité expérimentale hors du commun fut le premier à démontrer qu'un courant électrique, quel qu'il soit, crée un champ magnétique. Le principe très simplifié de l'expérience est le suivant.

Un disque métallique de rayon  $R$ , portant une charge électrique répartie avec la densité surfacique uniforme  $\sigma$  (sur l'ensemble des deux faces) tourne à la vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de son axe  $(Oz)$ .

Calculer le champ magnétostatique créé par ces courants de convection en un point  $M$  de l'axe  $(Oz)$ .

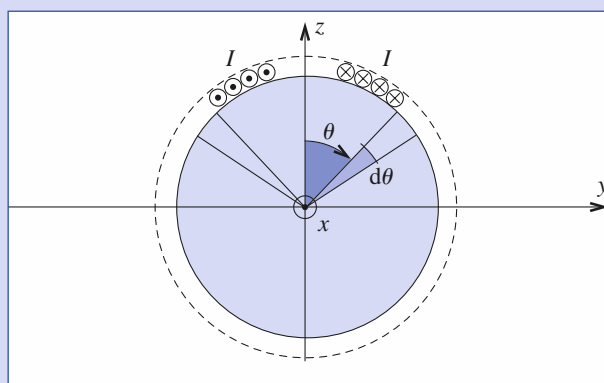
Données :  $\sigma = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Cm}^{-2}$  ;  $R = 10,5 \text{ cm}$  ;  $z = 2 \text{ cm}$  ;  $\omega = 61 \text{ tr.s}^{-1}$ .



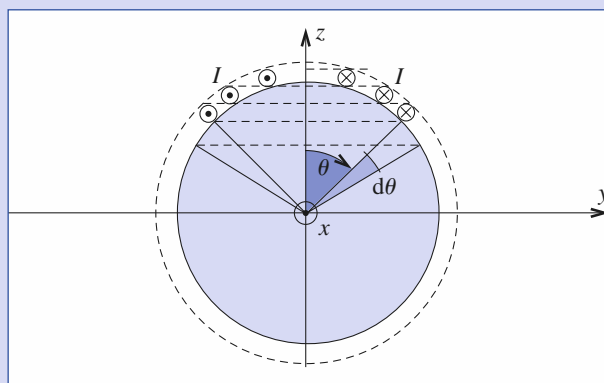
## 4 Sphère recouverte de spires

Une sphère de rayon  $R$  est recouverte d'un nombre élevé  $N$  de spires parcourues dans le même sens par un courant d'intensité  $I$ . Calculer le champ magnétique créé par cette distribution de courants au centre  $O$  de la sphère dans les deux cas suivants :

1) les spires sont jointives ;



2) les plans des  $N$  spires sont équidistants (spires non jointives) suivant  $(Oz)$ .



## 5 Champ de courants rectilignes

Un circuit, fermé à l'infini, comprend trois parties rectilignes :  $A_1' \infty A_1$ ,  $A_1 A_2$  et  $A_2 A_2' \infty$ . On note  $I$  l'intensité de ce circuit.

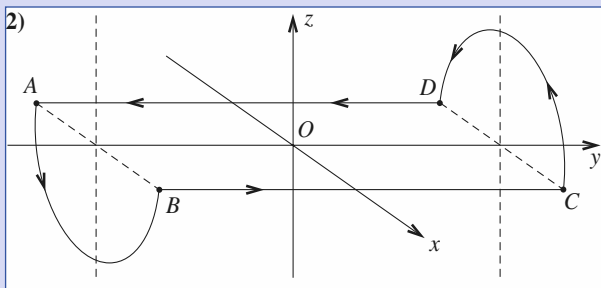
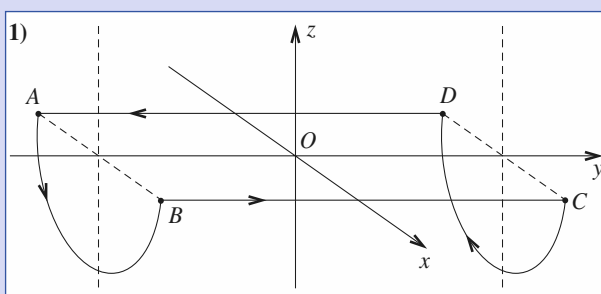
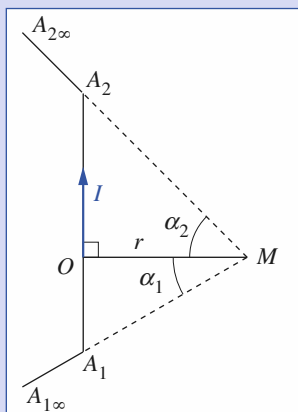


# Exercices

1) Déterminer le champ  $\vec{B}(M)$  créé par ce courant en un point  $M$  situé à la distance  $r$  de la portion  $A_1A_2$  et à l'intersection des demi-droites  $A'_1\infty A_1$  et  $A_2 A'_2\infty$ .

2) En déduire le champ  $B_\infty(M)$  créé en  $M$  par un fil rectiligne indéfini. Identifier les lignes de champ de ce courant.

3) On note  $L$  la longueur de la portion  $A_1A_2$  et on considère un point  $M$  sur le plan médiateur de  $A_1A_2$ . À quelle distance maximale  $r_{\max}$  du fil doit se trouver  $M$  pour que la norme du champ  $\|\vec{B}_L(M)\|$  créé par le fil diffère de moins de 1 % de  $\|\vec{B}_\infty(M)\|$  ?

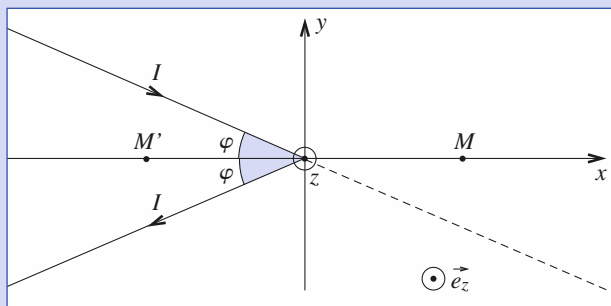


## 6 Courant angulaire

Montrer que le champ magnétique créé par un circuit filiforme « angulaire » parcouru par un courant d'intensité  $I$  au point  $M$  de l'axe ( $Ox$ ) bissecteur est donné par :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_z$$

dans le cas  $x > 0$  (point  $M$ ). Qu'obtient-on dans le cas  $x < 0$  (point  $M'$ ) ?



## 7 Champ magnétique créé par un courant filiforme

Calculer le champ magnétique créé au point  $O$ , centre du rectangle  $ABCD$ , dans chacun des deux cas suivants. Chaque demi-cercle a pour rayon  $a$ . On posera  $DA = BC = 2l$ . L'intensité du courant est  $I$ .

## 8 Composante axiale du champ magnétique créé par une hélice

Soit une hélice de rayon  $R$  et de pas  $a$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$ . On néglige les contributions des fils d'amenée du courant au champ magnétique en un point  $M$ .

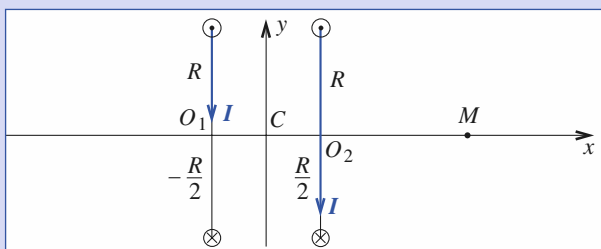
Calculer la composante  $B_z$  du champ magnétique en un point de l'axe ( $Oz$ ) de l'hélice. On désignera par  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les angles que font, avec l'axe ( $Oz$ ), les vecteurs  $\vec{MP}_1$  et  $\vec{MP}_2$ ,  $P_1$  et  $P_2$  étant les deux points extrémités de l'hélice. Commenter le résultat.

## 9 Bobines de Helmholtz

Deux bobines circulaires, de même axe ( $Ox$ ) et de même rayon  $R$ , comportent chacune  $N$  spires parcourues par un courant d'intensité  $I$  de même sens. Les centres  $O_1$  et  $O_2$  des bobines ont respectivement pour abscisses  $-a$  et  $a$ .

1) Calculer le champ créé par ces bobines en un point  $M$  situé sur l'axe ( $Ox$ ) et voisin de  $O$ .

2) Déterminer  $a$  pour que le champ soit le plus uniforme possible au voisinage de  $O$  sur l'axe ( $Ox$ ).



# Corrigés

**Solution du tac au tac, p. 134.**

1. Vrai

2. Faux

3. Vrai

4. Vrai

5. Faux

6. Faux

7. Faux

8. Faux

9. Vrai

1

1) En utilisant les propriétés caractéristiques des différents champs de vecteurs, il vient :

$$\begin{aligned}\vec{c}(S(M)) &= \vec{a}(S(M)) \wedge \vec{b}(S(M)) = S(\vec{a}(M)) \wedge (-S(\vec{b}(M))) \\ &= -[S(\vec{a}(M)) \wedge S(\vec{b}(M))] = -[S(\vec{a}(M) \wedge \vec{b}(M))] \\ &= S(\vec{c}(M)).\end{aligned}$$

Le vecteur  $\vec{c}(M)$  est un vecteur polaire.

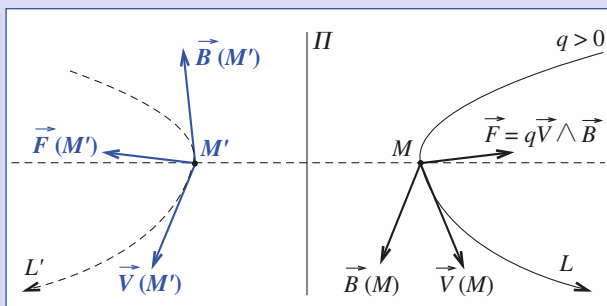
La force de Laplace  $d\vec{F}(M) = d\vec{C}(M) \wedge \vec{B}(M)$  appliquée à un élément de courant  $d\vec{C}(M)$  (vecteur polaire) placé dans un champ magnétique  $\vec{B}(M)$  (vecteur axial) est un vecteur polaire.

2) En reprenant le même principe de démonstration, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\vec{c}(S(M)) &= \vec{a}(S(M)) \wedge \vec{b}(S(M)) = [-S(\vec{a}(M))] \wedge [-S(\vec{b}(M))] \\ &= S(\vec{a}(M)) \wedge S(\vec{b}(M)) = -S(\vec{a}(M) \wedge \vec{b}(M)) \\ &= -S(\vec{c}(M)).\end{aligned}$$

Le vecteur  $\vec{c}(M)$  est alors un vecteur axial.

2



Soit  $L'$  la trajectoire symétrique de  $L$  par rapport au plan  $(II)$ , plan de symétrie des courants créant  $\vec{B}$ . Pour que  $L'$  soit décrite, il faut que  $\vec{F}(M') = \mathcal{F}(\vec{F}(M))$ , c'est-à-dire que  $\vec{F}$  soit un vecteur polaire. Or le vecteur vitesse est un vecteur polaire et  $\vec{B}$  un vecteur axial. L'intervention du produit vectoriel (cf. exercice 1) implique que  $\vec{F}$  est bien un vecteur polaire.

La trajectoire  $L'$  peut donc être décrite par une particule de même charge.

3

Le disque tournant est une superposition continue de spires. Une spire de rayon  $r$  et de largeur  $dr$  est, du fait de la rotation, le siège d'un courant d'intensité  $dI = j_S dr = \sigma(r\omega) dr$ . Elle crée en  $M$  le champ magnétostatique :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0(\sigma\omega r dr)}{2r} \sin^3 \theta \cdot \vec{e}_z.$$

Sachant que  $r = z \tan \theta$ , soit  $dr = \frac{z}{\cos^2 \theta} d\theta$ , nous obtenons le champ  $\vec{B}(M)$  par intégration de  $\theta$  entre 0 et  $\theta_{\max}$  ( $\cos \theta_{\max} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ ) :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega z \int_0^{\theta_{\max}} \frac{(1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} \sin \theta d\theta \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega z \left[ \frac{1}{\cos \theta_{\max}} + \cos \theta_{\max} - 2 \right] \vec{e}_z.\end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} (\sqrt{R^2 + z^2} - z) \vec{e}_z.$$

La valeur numérique de la norme de ce champ est  $B = 8,5 \cdot 10^{-11}$  T. Cette valeur est très faible et ce champ est noyé dans la composante selon  $(Oz)$  du champ magnétique terrestre (de l'ordre de quelques  $10^{-5}$  T). Rowland est néanmoins parvenu, grâce à un jeu d'aiguilles aimantées (en montage astatique), à prouver l'existence de ce champ.

4

## 1) Spires jointives

Le nombre de spires par unité de longueur est donné par  $n = \frac{N}{\pi R}$ . Le nombre de spires étant élevé, nous sommes en présence d'une répartition surfacique uniforme de courants  $j_S = nI \vec{e}_\varphi$ .

L'ensemble des plans contenant  $(Oz)$  sont des plans d'antisymétrie des courants, donc  $\vec{B}(O)$  est porté par  $(Oz)$ .

$$\vec{B}(O) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 n R}{2R \sin \theta} \sin^3 \theta d\theta \cdot \vec{e}_z,$$

car chaque « spire » vue sous un angle  $d\theta$  est parcourue par un courant  $j_S R d\theta$ .

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 n I}{4R} \vec{e}_z.$$

## 2) Spires équidistantes (non jointives)

Le nombre de spires situées entre deux plans de cotes  $z$  et  $z + dz$  est donné par  $n'dz = \frac{N}{\pi R} dz$ . La densité surfacique de courants équivalente est donc égale à  $j_S' = n'I \sin \theta \vec{e}_\varphi$ , car  $j_S' R d\theta = n'I |dz|$  avec  $z = R \cos \theta$ , soit  $|dz| = R \sin \theta d\theta$ .

Un calcul identique au précédent nous donne :

$$\vec{B}'(O) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 n' I \sin \theta R}{2R \sin \theta} \sin^3 \theta d\theta \cdot \vec{e}_z, \text{ soit } \vec{B}'(O) = \frac{\mu_0 n I}{3R} \vec{e}_z.$$

5

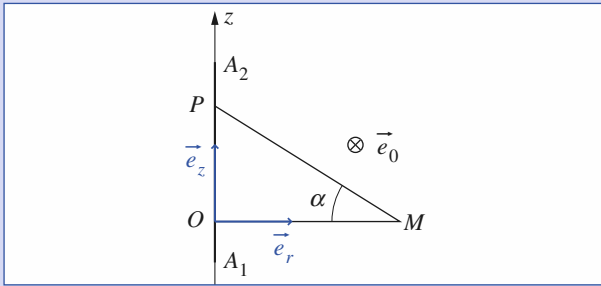
1) Remarquons que chacune des portions  $A_1' A_1$  et  $A_2 A_2'$  créent en  $M$  un champ nul, puisque leurs éléments de courant  $d\vec{C}(P)$  sont colinéaires à  $\vec{PM}$ . Le champ en  $M$  est donc dû uniquement à la portion  $A_1 A_2$ . Le plan défini par le courant  $A_1 A_2$  et le point  $M$  est un plan de symétrie du courant, donc  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan. Ce champ, colinéaire à  $\vec{e}_\theta$ , se calcule à l'aide de la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{P} \wedge \vec{e}_{PM}}{PM^2}$$

avec :

$$OP = r \tan \alpha \vec{e}_z \text{ donc } d\vec{P} = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha \vec{e}_z, PM = \frac{r}{\cos \alpha} \text{ et } \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{PM} = \cos \alpha \vec{e}_\theta.$$

# Corrigés



Après simplification, il vient :  $d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos \alpha d\alpha$

d'où finalement :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{e}_\theta \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \vec{e}_\theta.$$

2) Dans le cas d'un fil rectiligne indéfini,  $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$  et  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ , il en résulte que :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

Le champ n'est pas défini sur le courant et il s'annule à l'infini dans une direction perpendiculaire au courant. Les lignes de champ de ce courant sont des cercles dont l'axe est le courant rectiligne.

3) En considérant que :  $\alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha$ , on obtient immédiatement :

$$\vec{B}_L(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \alpha \vec{e}_\theta = B_\infty(M) \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}} \vec{e}_\theta.$$

La distance maximale cherchée est déterminée par :

$$\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r_{\max}^2}} = 0,99$$

$$d'où : r_{\max} = \frac{10^{-1}}{\sqrt{2}} L = 7,1 \cdot 10^{-2} L.$$

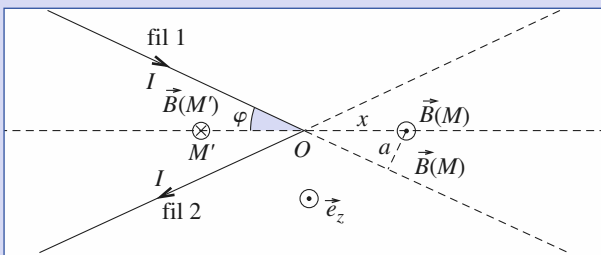
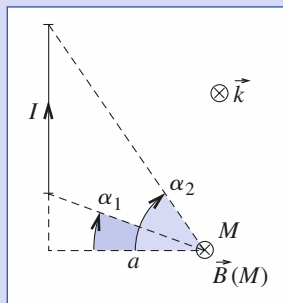
6

Le plan contenant les deux fils et le point  $M$  est un plan de symétrie des courants, donc  $\vec{B}(M)$  est perpendiculaire à ce plan :  $\vec{B}(M) = B \vec{e}_z$ .

Le champ  $\vec{B}(M)$  créé par un segment portant un courant  $I$  est donné par :

$$\text{Soit } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{e}_z (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

(cf. exercice 5).



Les champs magnétiques créés par le fil 1 et le fil 2 sont identiques.

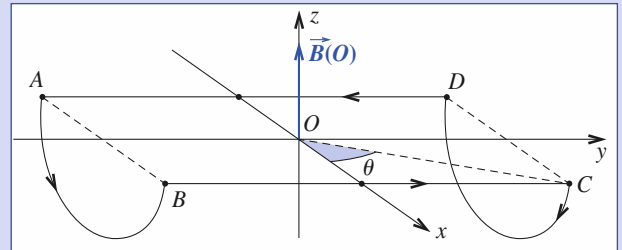
Sachant que  $a = x \sin \varphi$ ,  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$  et  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} (-\vec{e}_z) \\ &= \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Pour le calcul de  $\vec{B}(M')$ , nous utilisons  $\alpha_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ ,  $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$  et  $a = -x \sin \varphi$ ,

$$\text{soit : } \vec{B}(M') = -2 \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \vec{e}_z \quad (x < 0) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \frac{1}{\tan \frac{\varphi}{2}} \vec{e}_z (x < 0).$$

7



1) Les plans  $(xOz)$  et  $(yOz)$  (contenant le point  $O$ ) sont des plans d'antisymétrie des courants, donc  $\vec{B}(O)$  est suivant leur intersection :  $\vec{B}(O) = B \vec{e}_z$ .

$$\bullet \vec{B}(BC) = \vec{B}(DA) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} 2 \sin \theta \vec{e}_z, \text{ avec } \sin \theta = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + a^2}};$$

$$\bullet \vec{e}_z \cdot \vec{B}(AB) = \vec{e}_z \cdot \vec{B}(CD) \text{ et } \vec{B}(AB) \cdot \vec{e}_z = \left\{ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{AB} \frac{\vec{OP} \wedge d\vec{P}}{OP^3} \right\} \cdot \vec{e}_z.$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= -a \cos \varphi \vec{e}_x - \ell \vec{e}_y - a \sin \varphi \vec{e}_z, \\ d\vec{P} &= (a \sin \varphi \vec{e}_x - a \cos \varphi \vec{e}_z) d\varphi \text{ et } \\ \vec{OP} \wedge d\vec{P} &= (a\ell \cos \varphi \vec{e}_x \\ &\quad + a^2 \vec{e}_y + a\ell \sin \varphi \vec{e}_z) d\varphi, \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\vec{B}(AB) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left\{ \frac{\ell}{a\sqrt{\ell^2 + a^2}} + \frac{a\ell}{(a^2 + \ell^2)^{3/2}} \right\}.$$

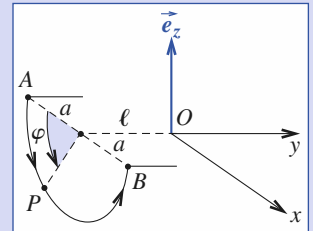
$$\text{Soit } \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left\{ \frac{\ell}{a\sqrt{\ell^2 + a^2}} + \frac{a\ell}{(a^2 + \ell^2)^{3/2}} \right\} \vec{e}_z.$$

2) Utilisons le document 2 de l'énoncé.

$$\bullet \text{ Nous avons toujours } \vec{B}(BC) = \vec{B}(DA) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{\ell}{a\sqrt{\ell^2 + a^2}} \vec{e}_z.$$

• À tout point  $P$  de  $AB$ , nous pouvons associer un point  $P'$  de  $CD$  tel que  $\vec{OP} = -\vec{OP'}$  et  $d\vec{P} = -d\vec{P'}$ , d'où  $\vec{B}(AB) = \vec{B}(CD)$ .

Le plan  $(yOz)$  est un plan d'antisymétrie de ces courants suivant  $AB$  et  $CD$ , donc  $\vec{B}$  est dans ce plan.



$$\begin{aligned}\vec{B}(AB) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{a \ell \sin \varphi d\varphi}{(\ell^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 d\varphi}{(\ell^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_y \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a \ell}{(a^2 + \ell^2)^{\frac{3}{2}}} 2 \vec{e}_z + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{(\ell^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \pi \vec{e}_y.\end{aligned}$$

Le vecteur induction magnétique total est donc égal à :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left\{ \left[ \frac{\ell}{a \sqrt{\ell^2 + a^2}} + \frac{a \ell}{(a^2 + \ell^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \vec{e}_z + \frac{\pi}{2a} \frac{a^3}{(\ell^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_y \right\}.$$

Pour  $\ell = 0$ , nous retrouvons le vecteur induction magnétique d'une spire en son centre.

8

Soit une hélice finie de pas  $a$  sur un cylindre de rayon  $R$ . Repérons un point  $P$  sur l'hélice de la manière suivante :

$$z_P = z_M + \frac{a\theta}{2\pi} \quad (z_P = z_M \text{ si } \theta = 0).$$

Le vecteur  $\vec{B}(M)$  est donné par :

$$\vec{B}(M) = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{P} \wedge \vec{PM}}{PM^3},$$

avec  $\vec{MP} = R \vec{e}_r + (z_P - z_M) \vec{e}_z$ .

Soit  $d\vec{P} = R d\theta \vec{e}_\theta + \frac{a}{2\pi} d\theta \vec{e}_z$

et  $d\vec{P} \wedge \vec{PM} = \left( -\frac{aR\theta}{2\pi} \vec{e}_r - \frac{Ra}{2\pi} \vec{e}_\theta + R^2 \vec{e}_z \right) d\theta$ .

La projection de  $\vec{B}(M)$  sur  $(Oz)$  est donnée par :

$$\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P_1}^{P_2} \frac{R^2 d\theta}{PM^3}.$$

Appelons  $\alpha$  l'angle  $(Oz, \vec{MP})$  compris dans le domaine  $[0; \pi]$ . Nous avons :

$$z_P - z_M = \frac{R}{\tan \alpha}$$

et  $\theta = \frac{2\pi}{a} (z_P - z_M) = \frac{2\pi R}{a} \frac{1}{\tan \alpha}$ ,

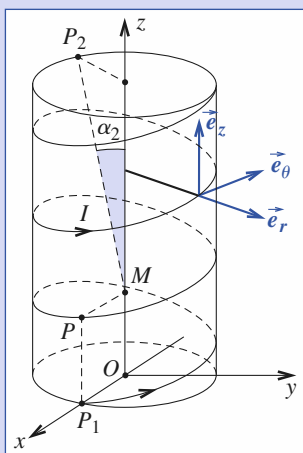
soit  $d\theta = -\frac{2\pi R}{a} \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}$ .

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{2\pi}{a} d(\cos \alpha) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2a} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1).\end{aligned}$$

Sachant que  $\frac{1}{a}$  peut être assimilé à un nombre de spire par unité de longueur

suivant  $(Oz)$ , nous obtenons  $B_z = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$ , expression du champ créé par une nappe solénoïdale en un point de l'axe. Mais pour l'hélice,  $B_x$  et  $B_y$  ne sont pas nuls.



9

1) Le champ créé par une bobine en un point  $M$  de son axe est de la forme

$\vec{B}(M) = B_0 \sin^3 \varphi \vec{e}_x$ , où  $B_0 = \frac{N \mu_0 I}{2R}$  est le champ en son centre et  $\varphi$  est l'angle sous lequel on voit le rayon de la bobine du point  $M$ . Pour les deux bobines le champ, en un point  $M$  d'abscisse  $x$ , s'écrit :

$$\vec{B}(x) = B_0 \left[ \left( \frac{R^3}{((R^2 + (a+x)^2)^{\frac{3}{2}})} \right) + \left( \frac{R^3}{((R^2 + (a-x)^2)^{\frac{3}{2}})} \right) \right] \vec{e}_x.$$

Notons  $f(x) = \frac{R^3}{((R^2 + (a+x)^2)^{\frac{3}{2}})}$ , il vient :

$$\vec{B}(x) = B_0 [f(x) + f(-x)] \vec{e}_x.$$

Faisons un développement limité à l'ordre trois de l'expression précédente pour  $\frac{x}{a} \ll 1$  :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

$$f(-x) = f(0) - f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 - \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

d'où :

$$\vec{B}(x) = B_0 [2f(0) + f''(0)x^2] \vec{e}_x.$$

2) Le champ sera le plus uniforme possible au voisinage de l'origine  $O$ , si  $f''(0) = 0$ .

Or :

$$f'(x) = -\frac{3}{2} R^3 2(a+x) (R^2 + (a+x)^2)^{-5/2}$$

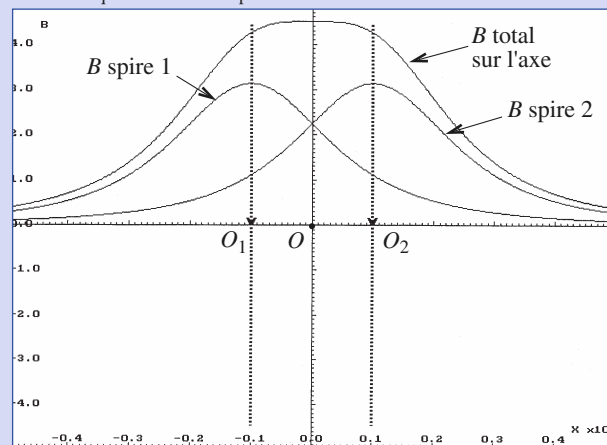
$$f''(x) = -3 R^3 \left[ (R^2 + (a+x)^2)^{-5/2} - 5(a+x)^2 (R^2 + (a+x)^2)^{-7/2} \right]$$

d'où :

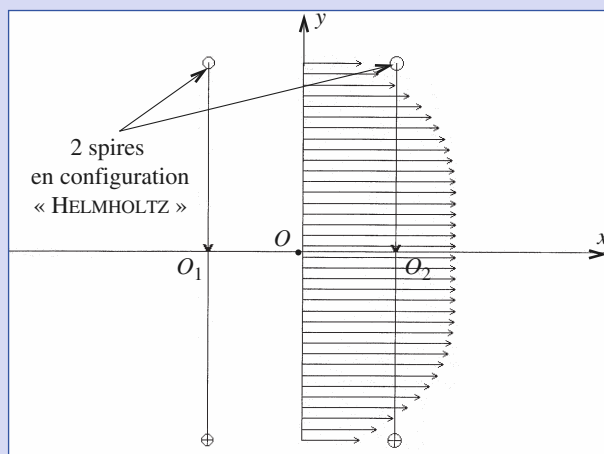
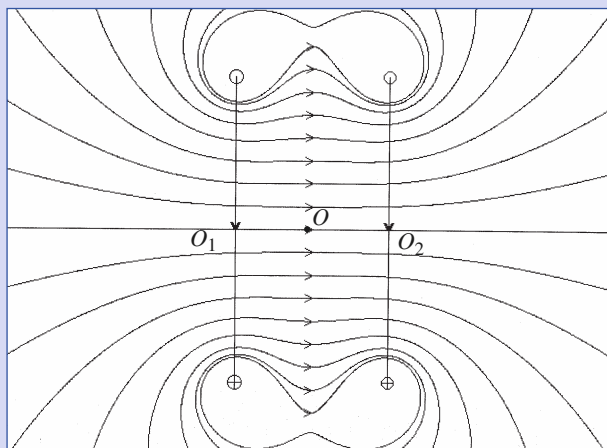
$$\begin{aligned}f''(0) &= -3R^2 \left[ (R^2 + a^2)^{-5/2} - 5a^2 (R^2 + a^2)^{-7/2} \right] \\ &= -3R^2 (R^2 + a^2)^{-7/2} (R^2 - 4a^2)\end{aligned}$$

Il faudra donc prendre  $a = \frac{R}{2}$  pour réaliser la condition imposée : la distance entre les deux bobines est égale au rayon de chacune d'elles.

Sur les schémas ci-après, sont respectivement représentées les variations de  $B(x)$  le long de l'axe  $(Ox)$ , les lignes de champ créées par les deux bobines ainsi que les variations de la norme de ce champ le long de l'axe  $(Oy)$  pour  $y$  compris entre  $-R$  et  $R$ . On constatera que le champ est particulièrement uniforme dans l'espace situé entre les bobines quand elles sont en position de Helmholtz.



# Corrigés



# Le théorème d'Ampère

# 8

## Historique

*André-Marie Ampère (1775-1836), né à Lyon,  
professeur à l'École polytechnique,  
physicien et mathématicien,  
a établi les propriétés du champ magnétique  
en relation avec les sources de courant.*

*Citons l'appréciation (avisée !)  
de James Clerk Maxwell sur A.-M. Ampère :  
« Le tout, théorie et expérience,  
semble avoir jailli en pleine vigueur  
et complètement armé du cerveau  
du Newton de l'électricité.  
La forme est parfaite, la rigueur inattaquable,  
le tout se résume en une formule  
d'où peuvent se déduire tous les phénomènes  
et qui devra rester la formule fondamentale  
de l'électrodynamique. »*

### O B J E C T I F S

- Théorème d'Ampère.
- Utilisation.

### P R É R E Q U I S

- Champ magnétique.

## Circulation du champ d'un fil

Sur les cartes de champ magnétique tracées au chapitre 7, nous avons pu remarquer que les lignes de champ magnétique sont fermées. Ceci constitue une différence fondamentale avec le champ électrostatique : la circulation du champ magnétique sur un contour n'est pas nécessairement nulle.

Nous utiliserons un cas élémentaire pour mettre en évidence cette propriété.

### 1.1. Champ créé par un fil rectiligne indéfini

Ce type de circuit modélise un circuit fermé comportant une portion rectiligne de longueur  $L$  grande devant sa distance  $r$  au point  $M$  où est évalué le champ  $\vec{B}(M)$ . Notons  $(r, \theta, z)$  les coordonnées cylindriques du point  $M$ . L'axe  $(Oz)$  sera pris confondu avec le fil et son orientation sera celle du courant d'intensité  $I$  (doc. 1). Tout plan contenant le fil est un plan de symétrie, donc le champ est orthoradial :  $\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$ .

L'axe  $(Oz)$  étant un axe de révolution, le champ ne dépend pas de la coordonnée  $\theta$  :  $\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$ .

Enfin, le système étant invariant dans toute translation parallèle à  $(Oz)$ , le champ ne dépend pas davantage de la coordonnée  $z$  :  $\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$ .

L'élément de courant  $d\vec{C}$ , situé en  $P$ , crée le champ élémentaire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{e}_{PM}}{PM^2}.$$

De  $\vec{OP} = (z + r \tan \alpha) \vec{e}_z$  il vient  $d\vec{C} = I d\vec{P} = I \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha} \vec{e}_z$ .

Par ailleurs,  $PM = \frac{r}{\cos \alpha}$  donc :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\alpha \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{PM}}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{r} \vec{e}_\theta.$$

Le champ créé par le fil indéfini s'établit à :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{e}_\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

et les lignes de champ sont des cercles d'axe  $(Oz)$ .

### 1.2. Circulation élémentaire du champ

En coordonnées cylindriques, le déplacement élémentaire d'un point  $M$  s'écrit :

$$d\vec{M} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \cdot \vec{e}_\theta + dz \cdot \vec{e}_z.$$

La circulation élémentaire du champ magnétique du fil est donc :

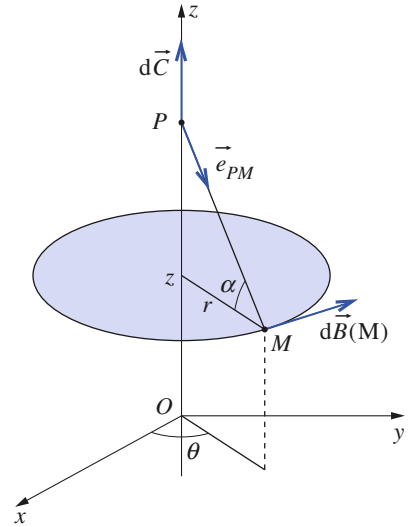
$$dC = \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 \frac{I}{2\pi} d\theta.$$

### 1.3. Circulation du champ sur un contour enlaçant le fil

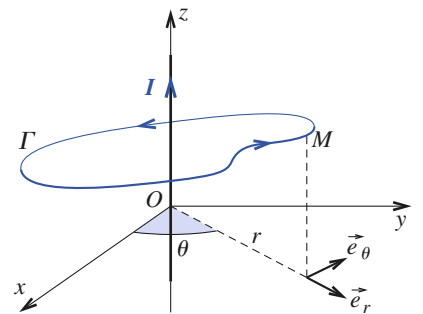
Le document 2 représente un contour  $\Gamma$  enlaçant le fil dans le sens direct ; ce contour est donc orienté. Lorsque le point  $M(r, \theta, z)$  décrit le contour  $\Gamma$ , l'angle  $\theta$  varie de 0 à  $2\pi$  par valeurs croissantes. La circulation du champ sur ce contour se déduit immédiatement du résultat précédent :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 I.$$

Si le contour enlace le fil dans le sens indirect, la circulation vaut  $C_\Gamma = -\mu_0 I$ .



Doc. 1. Champ magnétique créé par l'élément de courant  $d\vec{C}$  du fil infini.



Doc. 2. Contour  $\Gamma$  enlaçant un fil dans le sens direct. (Remarquons que ce contour est orienté.)



### 1.4. Circulation du champ sur un contour n'enlaçant pas le fil

Si le contour n'enlace pas le fil (doc. 3), la variation de l'angle  $\theta$  lorsque  $M$  décrit le contour  $\Gamma$  est globalement nulle, donc :

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{M} = 0.$$

### 1.5. Lien avec le courant électrique traversant le contour

Sur le document 4 est représentée une surface  $S$  s'appuyant sur le contour  $\Gamma$  et orientée par celui-ci : un tire-bouchon tournant dans le sens choisi pour  $\Gamma$  traverse la surface  $S$  dans le sens de son vecteur normal unitaire  $\vec{n}$ .

- Si le contour enlace une fois le fil dans le sens direct (doc. 4), le courant  $I$  traverse la surface  $S$ , selon le sens de  $\vec{n}$ . Dans ce cas,  $C_{\Gamma} = \mu_0 I$ .
- Si le contour enlace une fois le fil dans le sens indirect, le même courant  $I$  traverse la surface  $S$ , selon le sens de  $-\vec{n}$ . Dans ce cas,  $C_{\Gamma} = -\mu_0 I = \mu_0(-I)$ .
- Si le contour n'enlace pas le fil, le courant à travers la surface  $S$  est nul, que la surface  $S$  ait une forme simple (doc. 5) ou un peu plus compliquée (doc. 6). Dans ce dernier cas, le courant traverse deux fois  $S$ , mais dans des sens opposés.

Nous pouvons nous demander si ces résultats sont vrais pour tous les choix de surface  $S$  s'appuyant sur le contour  $\Gamma$ . Considérons donc deux surfaces, telles que  $S_1$  et  $S_2$ , s'appuyant sur  $\Gamma$  et orientées par celui-ci (doc. 7).

En régime indépendant du temps, l'intensité  $I$  du courant a la même valeur en tout point du fil ; les courants qui traversent  $S_1$  et  $S_2$  sont donc égaux.

- En conclusion, nous admettons que la circulation du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par un courant filiforme de forme quelconque, le long d'un contour  $\Gamma$  peut s'écrire de façon générale :

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{M} = \varepsilon \mu_0 I.$$

$\varepsilon = 1$ , si le courant  $I$  traverse une surface  $S$  orientée par  $\Gamma$  dans le sens du vecteur normal  $\vec{n}$  ;

$\varepsilon = -1$ , si le courant  $I$  traverse  $S$  dans le sens de  $-\vec{n}$  ;

$\varepsilon = 0$ , si aucun courant ne traverse  $S$ .

## 2 Théorème d'Ampère

Nous admettons la généralisation des résultats précédents dans le cas d'une distribution de courants  $\mathcal{D}$  dont le vecteur  $\vec{j}$  est à flux conservatif.

Dans ce contexte, le théorème d'Ampère (admis) s'énonce ainsi :

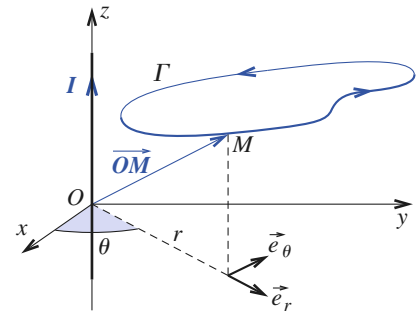
**La circulation du champ magnétostatique  $\vec{B}$  créé par un ensemble de courants sur un contour  $\Gamma$  orienté, est égale à la somme des courants enlacés par  $\Gamma$  multipliée par  $\mu_0$  :**

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 \sum_k \varepsilon_k I_k.$$

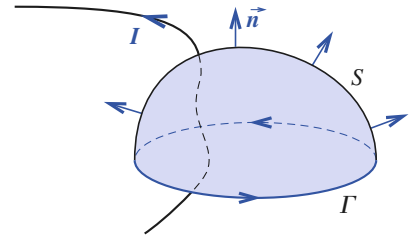
$\varepsilon_k = 1$ , si  $I_k$  traverse  $S$  orientée par  $\Gamma$  dans le sens de  $\vec{n}$ .

$\varepsilon_k = -1$ , si  $I_k$  traverse  $S$  dans le sens de  $-\vec{n}$ .

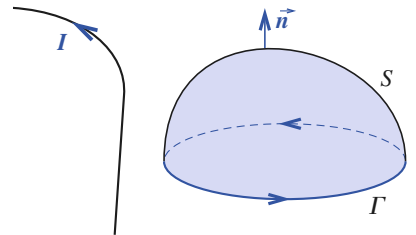
$\varepsilon_k = 0$ , si  $I_k$  ne traverse pas  $S$ .



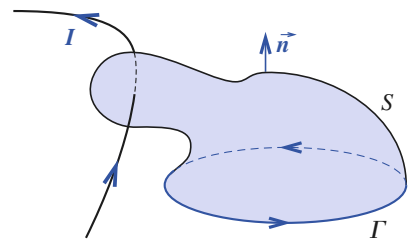
Doc. 3. Contour  $\Gamma$  n'enlaçant pas le fil.



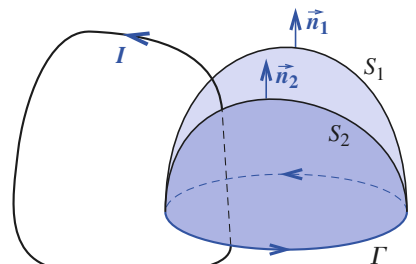
Doc. 4. Le courant  $I$  traverse la surface  $S$  s'appuyant sur le contour  $\Gamma$  dans le sens de  $\vec{n}$ .



Doc. 5. Le courant  $I$  ne traverse pas la surface  $S$  s'appuyant sur le contour  $\Gamma$ .



Doc. 6.



Doc. 7. Courant traversant les deux surfaces s'appuyant sur  $\Gamma$ .

Par exemple, sur le document 8, nous avons :

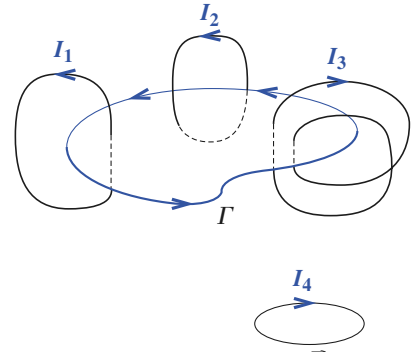
$$C_\Gamma = \mu_0 (I_1 - I_2 + 2I_3).$$

La circulation ne dépend pas de  $I_4$ .

De façon plus générale, nous pouvons aussi écrire  $C_\Gamma = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$ , le résultat ne dépendant pas du choix de la surface  $S$  s'appuyant sur la courbe de circulation  $\Gamma$ .

### Remarques

- Il faut garder à l'esprit que le théorème d'Ampère n'est rigoureusement valable que pour les régimes indépendants du temps, donc en magnétostatique. En particulier, dans des cas où les lignes de courant sont interrompues, donnant lieu à des accumulations de charges, nous ne pouvons pas l'appliquer. Nous pouvons en revanche l'employer dans l'approximation des régimes quasi permanents lorsque le vecteur  $\vec{j}$  est à flux conservatif. L'étude plus complète de cette difficulté sera faite en seconde année.
- Nous excluons les cas exotiques tels que le contour  $\Gamma$  rencontrant un circuit filiforme, ou encore un contour pour lequel il est impossible de trouver simplement une surface s'appuyant dessus.



**Doc. 8.** La circulation de  $\vec{B}$  sur le contour  $\Gamma$  ne dépend que de  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .

## 3 Conséquences du théorème d'Ampère

Ayant postulé la loi de Biot et Savart, nous avons montré que le champ magnétostatique est :

- un champ dont le flux à travers toute surface fermée est nul ;
- un champ lié à ses sources, les courants, par le théorème d'Ampère.

Comme pour le champ électrostatique, nous résumerons ces propriétés en seconde année sous la forme de lois locales.

Les outils dont nous disposons nous permettent cependant d'aborder l'étude complète du champ : évolution locale et discontinuités du champ, calcul de celui-ci...

**Le théorème d'Ampère et la conservation du flux magnétique sont deux propriétés qui permettent l'étude complète du champ magnétostatique.**

## Application 1

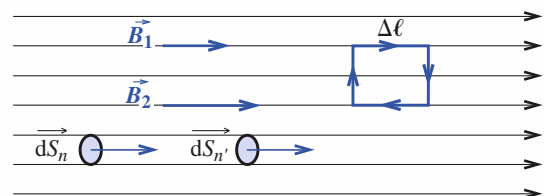
### Champ uniforme

Établir que, si dans une région vide de courants, les lignes de champ sont des droites parallèles, alors le champ  $\vec{B}$  est uniforme.

Les tubes de courants élémentaires étant des cylindres de section droite constante ( $\vec{B} \cdot d\vec{S}_n = \text{cte}$ ) implique  $\vec{B} = \text{cte}$  le long d'une ligne de champ.

L'application du théorème d'Ampère à un contour rectangulaire comprenant deux lignes de champ (doc. 9)

montre immédiatement que  $B_1 \Delta \ell = B_2 \Delta \ell$ . Par suite  $\vec{B} = \text{cte}$  dans cette région.



**Doc. 9.**

## 4 Calcul d'un champ magnétique à l'aide du théorème d'Ampère

### 4.1. Principe du calcul

Comme le théorème de Gauss, le théorème d'Ampère est de formulation remarquablement simple. Pour une distribution de courants connue, nous pourrions calculer la circulation du champ sur des contours convenablement choisis pour en déduire l'expression du champ. Il faut que le lien entre la circulation et le champ soit élémentaire : champ magnétique d'expression déjà très simplifiée, contour de géométrie simple.

**Le théorème d'Ampère permet une détermination rapide du champ magnétostatique pour des distributions de courants de symétries élevées. Après détermination de la forme du champ à l'aide de considérations de symétrie, son application à un contour orienté de géométrie adaptée aux symétries du problème permet de déterminer l'amplitude du champ.**

Le principe du calcul correspondra à la démarche exposée, ci-dessous, dans le cas de distributions de courants à symétries élevées.

#### 4.1.1. Première étape : considérations de symétries

Il faut obtenir, à l'aide des symétries de la distribution, la forme du champ magnétique :

- utilisation de plans de symétrie ou d'antisymétrie pour déterminer sa direction ;
- utilisation d'invariance par rotation ou translation pour réduire la dépendance de ses composantes vis-à-vis des coordonnées... (il faut penser à utiliser un système de coordonnées adapté à la symétrie du problème).

#### 4.1.2. Deuxième étape : choix du « contour d'Ampère »

La forme obtenue pour le champ détermine le choix de la courbe  $\Gamma$  de circulation, dite « contour d'Ampère », afin d'obtenir sans peine la circulation du champ magnétique.

#### 4.1.3. Troisième étape : application du théorème d'Ampère

Elle achève la détermination du champ magnétique.

### 4.2. Distribution à géométrie plane : nappe plane infinie

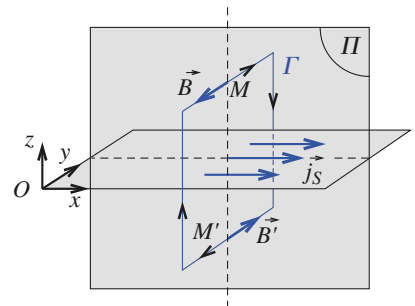
Nous nous intéressons à la détermination du champ créé par une nappe de courant infinie dans le plan  $(xOy)$ , avec  $\vec{j}_S = j_S \vec{e}_x$  (doc. 10).

Une telle nappe de courants résulte de la modélisation surfacique d'un ensemble de courants filiformes, rectilignes, infinis, jointifs, d'intensité  $I$ , disposés parallèlement à l'axe  $(Ox)$ . Notons  $n$  le nombre de fils coupant, par unité de longueur, l'axe  $(Oy)$ , il vient :  $j_S = n I$ .

#### 4.2.1. Considérations de symétrie

La distribution est invariante par symétrie par rapport à tout plan parallèle à  $(xOz)$ , donc  $\vec{B}(x, y, z) = B(x, y, z) \vec{e}_y$ . L'invariance du problème par translation parallèlement à  $(Ox)$  ou bien  $(Oy)$  nous permet la simplification supplémentaire :

$$\vec{B}(x, y, z) = B(z) \vec{e}_y.$$



Doc. 10. Nappe plane infinie.

Notons aussi que le plan  $(xOy)$  est un plan de symétrie de la distribution.

Au point  $M'$  symétrique du point  $M$  par rapport à ce plan, le champ  $\vec{B}'$  est l'opposé du symétrique du champ  $\vec{B}$  en  $M$  : la fonction  $B(z)$  est impaire.

#### 4.2.2. Choix du « contour d'Ampère »

Un contour permettant un calcul aisé de la circulation doit posséder des côtés parallèles au champ, à  $z = \text{cte}$ , le caractère impair de  $B(z)$  nous conduisant naturellement au choix du contour du document 10 : ce contour est constitué d'un rectangle de hauteur  $2z$  suivant  $(Oz)$ , et de largeur  $L$  suivant  $(Oy)$  : l'orientation du contour apparaît en noir sur le schéma. La circulation du champ sur ce contour orienté est :

$$C = LB(z) + (-L)B(-z) = 2LB(z) \quad (\text{avec } z > 0).$$

#### 4.2.3. Champ magnétique

En appliquant le théorème d'Ampère à ce contour, nous avons (la normale à la surface est orientée suivant  $-\vec{e}_x$ ) :

$$2LB(z) = -\mu_0 j_S L.$$

Finalement le champ de la nappe est :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 j_S}{2} \text{signe}(z) \vec{e}_y.$$

#### Remarques

• En traversant la nappe de courant dans le sens de  $\vec{e}_z$ , le champ magnétique présente la discontinuité  $\vec{B}(0_+) - \vec{B}(0_-) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_z$ .

• La modélisation surfacique a considérablement simplifié le problème.

Rigoureusement, pour un ensemble de courants filiformes identiques orientés selon  $(Oy)$  et distants de  $a$ , les considérations de symétrie et d'invariance se limitent à la périodicité du champ :

$$\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x + ka, y, z).$$

Il est alors impossible d'utiliser le théorème d'Ampère pour calculer le champ.

Une étude numérique montre que, l'écart relatif entre les deux calculs est inférieur à  $10^{-3}$  dès que  $z$  est supérieur à  $1,5a$ .

## Application 2

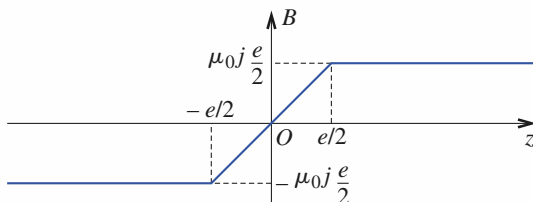
### Champ créé par nappe plane

1) Déterminer le champ créé par une couche plane infinie, contenue entre les plans :

$$z = -\frac{e}{2} \text{ et } z = +\frac{e}{2},$$

de courant volumique uniforme  $\vec{j} = j\vec{e}_x$ .

2) Retrouver le cas de la nappe plane comme cas limite de celui-ci.



Doc. 11.

1) Les propriétés de symétrie utilisées pour le cas de la nappe sont encore valables, donc :

$$\vec{B}(x, y, z) = B(z) \vec{e}_y, \text{ avec } B(-z) = -B(z).$$

L'application du théorème d'Ampère au même type de contour du § 4.2.2. nous donne :

• cas 1,  $0 < z < \frac{e}{2}$  :  $2LB(z) = -2\mu_0 Ljz$  ;

• cas 2,  $z > \frac{e}{2}$  :  $2LB(z) = -\mu_0 Lje$ .

Nous en déduisons :

• si  $0 \leq |z| \leq \frac{e}{2}$  :  $B = -\mu_0 jz \vec{e}_y$  ;

• si  $\frac{e}{2} \leq |z|$  :  $B = -\left(\mu_0 j \frac{e}{2}\right) \text{signe}(z) \vec{e}_y$ .

2) À la limite  $e$  tend vers 0, avec  $j_S = je$  maintenu constant, nous retrouvons le cas de la nappe plane infinie.

### 4.3. Distribution de courants axisymétrique : le tore

Un contour  $C$  est dessiné dans un plan contenant l'axe  $(Oz)$ . Sa rotation complète autour de l'axe  $(Oz)$  engendre un tore (doc. 12). Si  $C$  est un cercle, le tore obtenu est à section circulaire ; si  $C$  est un rectangle, le tore obtenu est à section rectangulaire.

Nous étudions le champ magnétique engendré par  $N$  spires enroulées sur un tore et parcourues par un courant d'intensité  $I$  (cette situation s'apparente aux circuits primaire et secondaire de certains transformateurs).

Pour un bobinage assez serré (spires quasi jointives), cette distribution filiforme peut être assimilée à une distribution surfacique de courants : c'est une opération de nivelage permettant alors d'admettre la symétrie de rotation autour de l'axe  $(Oz)$ .

#### 4.3.1. Considérations de symétrie

Tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  est un plan de symétrie et l'amplitude du champ magnétique, orthoradial, ne dépend, en coordonnées cylindriques  $r$ ,  $\theta$  et  $z$ , que des variables  $r$  et  $z$  :

$$\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta.$$

#### 4.3.2. Choix du « contour d'Ampère »

Sur les lignes de champ, cercles d'axe  $(Oz)$ , la norme du champ reste constante. Sur un contour d'Ampère  $\Gamma$  coïncidant avec une ligne de champ, la circulation du champ vaut  $2\pi r B(r, z)$ , quand  $\Gamma$  est parcouru dans le sens du champ.

#### 4.3.3. Champ magnétique

Appliquons maintenant le théorème d'Ampère.

Pour un contour  $\Gamma_1$  à l'intérieur du tore (doc. 14), la somme des courants enlacés est  $NI$ . Le champ en un point à l'intérieur du tore est donc :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

Pour un contour  $\Gamma_2$  à l'extérieur du tore, la somme des courants enlacés est nulle (il est toujours possible de trouver une surface s'appuyant sur  $\Gamma_2$  sans point commun avec le tore), et le champ extérieur l'est aussi :

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}.$$

Ces résultats montrent que le tore canalise les lignes de champ magnétique.

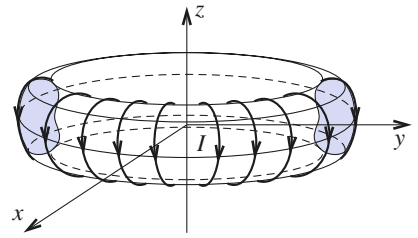
#### Remarque

La dépendance de  $\vec{B}$  vis-à-vis de  $z$  est masquée mais effective : si  $z$  et  $r$  sont tels que le point  $M$  est intérieur au tore,  $\vec{B}$  est non nul ; il est nul si  $M$  est extérieur au tore.

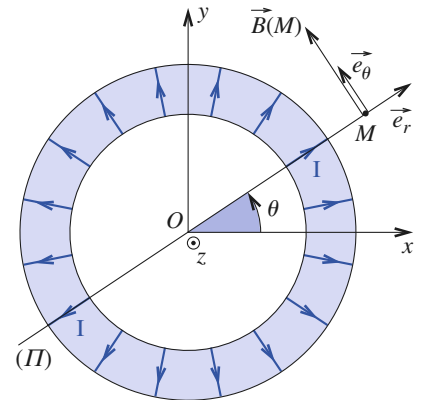
### 4.4. Distribution à géométrie cylindrique de courants parallèles : cylindre infini de densité de courants uniforme

Dans ce modèle d'extension infinie, un courant d'intensité résultante  $I$  circule parallèlement à  $(Oz)$  dans un cylindre d'axe  $(Oz)$ , à section circulaire de rayon  $R$ , avec une densité volumique uniforme  $\vec{j} = j\vec{e}_z$  (doc. 15).

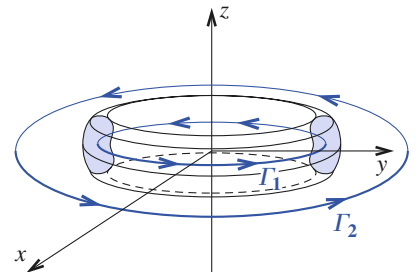
Ce courant cylindrique résulte de la modélisation volumique d'un ensemble de courants filiformes, rectilignes, infinis, jointifs, parallèles à  $(Oz)$  et d'intensité  $I$ . En notant  $n$  le nombre de fils coupant une surface unité dans le plan  $(xOy)$ , il vient  $j = nI$ . La distribution volumique, en apportant des symétries que ne possède pas la distribution discrète de courants filiformes, rend plus facile l'étude du champ créé.



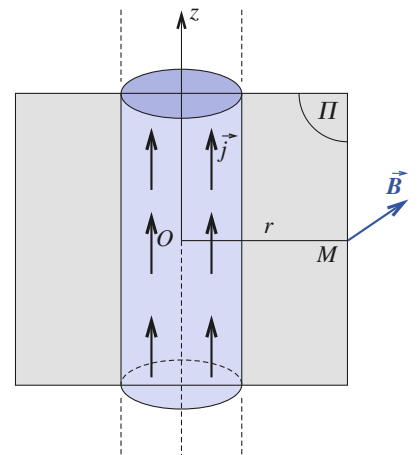
Doc. 12. Tore à section quelconque.



Doc. 13. Mise en évidence d'un plan de symétrie des courants.



Doc. 14. Choix du contour d'Ampère.



Doc. 15. Cylindre infini, avec  $\vec{j}$  uniforme.

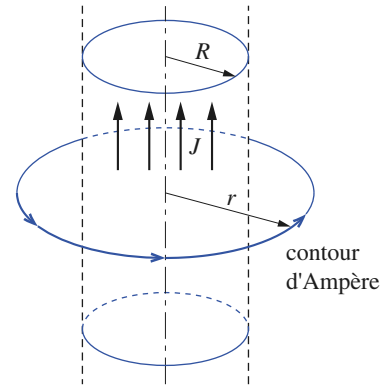
#### 4.4.1. Considérations de symétrie

Tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  étant un plan de symétrie,  $\vec{B}$  est orthoradial :  $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$  (en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ ).

La distribution de courants présente les symétries de translation selon  $(Oz)$  et de rotation autour de  $(Oz)$  :  $\vec{B}$  ne dépend donc que de la coordonnée  $r$  :  $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$ .

#### 4.4.2. Choix du « contour d'Ampère »

Les lignes de champ sont donc des cercles centrés sur  $(Oz)$  et la norme de  $\vec{B}$  est la même en tout point d'une ligne de champ. Nous choisissons donc un contour d'Ampère  $\Gamma$  confondu avec une ligne de champ, cercle d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r$ . Bien remarquer son orientation sur le schéma (doc. 16).



Doc. 16. Choix du contour  $\Gamma$  (contour d'Ampère).

#### 4.4.3. Champ magnétique

En parcourant ainsi, dans le sens du champ et en distinguant le cas où le cercle est à l'intérieur du cylindre de celui où il entoure ce dernier, nous obtenons :

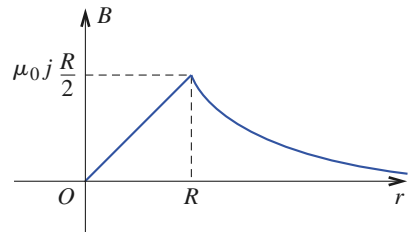
- cas 1,  $0 < r < R$  :  $2\pi r B(r) = \mu_0 j \pi r^2 = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$  ;
- cas 2,  $r > R$  :  $2\pi r B(r) = \mu_0 j \pi R^2 = \mu_0 I$ .

Il vient donc :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \left( \mu_0 j \frac{r}{2} \right) \vec{e}_\theta ; \quad \vec{B}_{\text{ext}} = \left( \mu_0 j \frac{R^2}{2r} \right) \vec{e}_\theta .$$

Le champ de cette distribution volumique finie est continu en  $r = R$  (doc. 17).

À l'extérieur du cylindre, le champ s'identifie à celui créé par un fil rectiligne infini placé suivant l'axe  $(Oz)$  et parcouru par le courant  $I = j \pi R^2$ .



Doc. 17. Évolution de  $B(r)$ .

### 4.5. Distribution à géométrie cylindrique de courants annulaires : le solénoïde infini

Considérons un solénoïde « infini » de section circulaire, parcouru par un courant  $I$  et possédant  $n$  spires par unité de longueur.

Au chapitre 7, nous avons montré que le champ vaut :

$$\vec{B}_{\text{axe}} = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

sur l'axe du solénoïde. Une étude qualitative des lignes de champ nous avait permis de remarquer que le champ décroissait très vite à l'extérieur d'un solénoïde de longueur finie.

Nous nous proposons de déterminer de façon plus complète le champ créé par un solénoïde infini en tout point de l'espace à l'aide du théorème d'Ampère.

#### 4.5.1. Considérations de symétrie

Le solénoïde est assimilé à un assemblage de spires jointives, contenues dans des plans perpendiculaires à  $(Oz)$  (doc. 18).

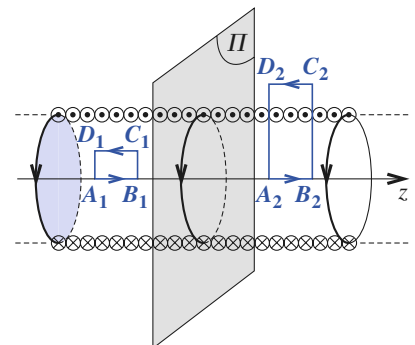
Tout plan normal à  $(Oz)$  est un plan de symétrie de la distribution de courants, donc :

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_z .$$

L'invariance de la distribution par translation parallèlement à  $(Oz)$ , et par rotation autour de  $(Oz)$  permet de simplifier l'expression du champ :  $\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$ .

#### 4.5.2. Choix du « contour d'Ampère »

Pour une telle géométrie, le choix d'un contour rectangulaire, possédant deux côtés parallèles à  $(Oz)$ , s'impose (doc. 18). Bien remarquer (à nouveau !) les orientations de ces contours.



Doc. 18. Solénoïde infini.

### 4.5.3. Champ magnétique

Pour un contour de type  $A_1 B_1 C_1 D_1$  à l'intérieur du solénoïde, non traversé par le bobinage du solénoïde, le théorème d'Ampère donne :

$$(A_1 B_1) B_{\text{axe}} - (A_1 B_1) B(r) = 0 \text{ tant que } r < R.$$

Par conséquent, le champ à l'intérieur du solénoïde infini est uniforme, égal à sa valeur sur l'axe :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \vec{B}_{\text{axe}} = \mu_0 n I \vec{e}_z.$$

Pour un contour de type  $A_2 B_2 C_2 D_2$ , traversé par  $n A_2 B_2$  spires du solénoïde, le théorème d'Ampère donne  $(A_2 B_2) B_{\text{axe}} - (A_2 B_2) B(r) = \mu_0 (n A_2 B_2) I$ .

Le champ à l'extérieur du solénoïde infini est ainsi nul :

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}.$$

#### Remarques

- Un solénoïde infini peut être considéré comme un tore de rayon moyen tendant vers l'infini, en remplaçant  $\frac{N}{2\pi r}$  par  $n$  dans l'expression du champ.

- En utilisant la modélisation du solénoïde par une nappe solénoïdale de courant surfacique  $\vec{j}_S = nI \vec{e}_\theta$ , nous constatons que le champ magnétostatique subit, à la traversée de la surface du solénoïde dans le sens  $\vec{e}_r$ , la discontinuité :

$$\vec{B}_{\text{ext}} - \vec{B}_{\text{int}} = -\mu_0 n I \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_r.$$

## Application 3

### Champ d'un solénoïde infini à section quelconque

Reprendre cette étude pour un solénoïde infini comportant  $n$  spires jointives par unité de longueur, identique à celui du document 18, à ceci près que les spires sont planes, mais de forme quelconque, non nécessairement circulaire. On admettra que le champ magnétique est nul à très grande distance de l'axe, pour  $r \rightarrow \infty$ .

Utilisons les coordonnées polaires, bien que l'axe  $(Oz)$  ne soit plus axe de symétrie. Le champ est, a priori, de la forme  $\vec{B} = B(r, \theta) \vec{e}_z$ .

Utilisons les contours d'Ampère  $A_1 B_1 C_1 D_1$  et  $A_2 B_2 C_2 D_2$  (doc. 19). Attention aux orientations !

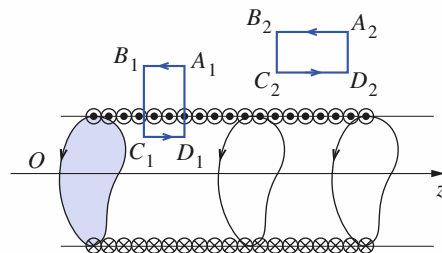
Leurs côtés « utiles » vérifient  $r = \text{cte}$  et  $\theta = \text{cte}$ .

Du théorème d'Ampère, nous déduisons que :

- $\vec{B}$  est uniforme à l'extérieur. Donc  $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{B}_\infty = \vec{0}$ .
- $B(C_1) = \mu_0 n I$  en tout point  $C_1$  situé à l'intérieur.

L'expression du champ créé par un solénoïde infini est donc indépendante de la forme des spires :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{e}_z \text{ et } \vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}.$$



Doc. 19. Solénoïde infini de section quelconque.



## 5 Discontinuité du champ à la traversée d'une distribution surfacique de courants

Nous avons constaté à plusieurs reprises (cf. § 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5) que le champ magnétique subissait une discontinuité à la traversée d'une distribution de courants surfaciques.

Dans tous les cas cités, la composante normale du champ est continue, en revanche, la composante tangentielle subit une discontinuité :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}.$$

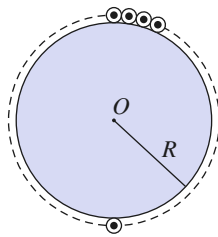
Nous admettrons la généralité de ce résultat.

**À la traversée d'une couche parcourue par un courant surfacique de densité  $\vec{j}_S$ , la composante tangentielle du champ magnétique subit une discontinuité finie :**

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}.$$

## Application 4

Un ensemble de  $N$  courants filiformes rectilignes indéfinis et d'intensité  $I$ , sont régulièrement disposés sur les génératrices d'un cylindre à base circulaire de rayon  $R$  et d'axe  $(Oz)$ . Les  $N$  fils sont jointifs et forment une distribution de courant à la surface du cylindre parallèlement à son axe (doc. 20).



**Doc. 20.** Solénoïde infini de section quelconque.

1) Modéliser cette distribution de courants filiformes en l'assimilant à une nappe de courants surfaciques dont on déterminera le vecteur densité de courant  $\vec{j}_S$ .

2) Déterminer le champ  $\vec{B}(M)$  créé à l'intérieur puis à l'extérieur du cylindre.

3) On s'intéresse maintenant à la valeur du champ au voisinage de la nappe de courant. Vérifier qu'à la traversée de la nappe de courant, le champ subit la discontinuité :  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$ .

1) L'opération proposée est une opération de nivelage. Le vecteur densité de courant a pour norme :  $2\pi R j_S = NI$  et le vecteur densité de courant est :

$$\vec{j}_S = \frac{NI}{2\pi R} \vec{e}_z.$$

2) La symétrie cylindrique de la distribution de courants nous permet (cf. § 4.4) d'affirmer que le champ est orthoradial et que sa norme ne dépend que de la coordonnée  $r$  :  $\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$ .

Nous prendrons donc, comme contour d'Ampère  $\Gamma$  un cercle d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r$  (doc. 21). Bien remarquer l'orientation de  $\Gamma$ .

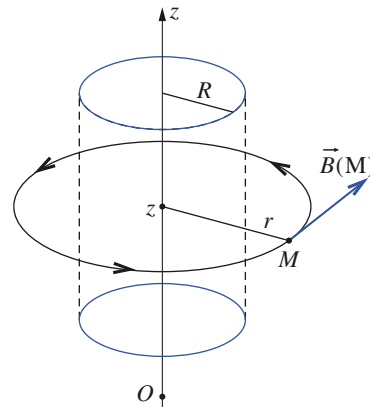
À l'intérieur du cylindre ( $r < R$ ), le courant enlacé par  $\Gamma$  est nul et  $\vec{B}(M) = \vec{0}$ .

À l'extérieur du cylindre ( $r > R$ ), le courant enlacé par  $\Gamma$  vaut  $NI$  donc :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \mu_0 j_S \frac{R}{r} \vec{e}_\theta.$$

Au voisinage de la nappe de courants, le champ vaut :

$$\vec{B}(R_+) = \mu_0 j_S \vec{e}_\theta.$$



**Doc. 21.**

3) À la traversée de la nappe de courant, de l'intérieur vers l'extérieur du cylindre, le champ subit la discontinuité :  $\vec{B}(R_+) - \vec{B}(R_-) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_r = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_r$  ce qui est bien de la forme attendue.

## CQFR

## ● THÉORÈME D'AMPÈRE

La circulation du champ magnétostatique  $\vec{B}$  créé par un ensemble de courants sur un contour  $\Gamma$  est égale à la somme des courants enlacés par  $\Gamma$  multipliée par  $\mu_0$  :  $C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{r} = \sum_k \varepsilon_k I_k$ .

$\varepsilon_k = 1$ , si  $I_k$  traverse  $S$  orientée par  $\Gamma$  dans le sens de  $\vec{n}$ .  $\varepsilon_k = -1$ , si  $I_k$  traverse  $S$  dans le sens de  $-\vec{n}$ .  $\varepsilon_k = 0$ , si  $I_k$  ne traverse pas  $S$ .

Le théorème d'Ampère donne accès au comportement intégral du champ magnétostatique qui est un champ à flux conservatif.

## ● CALCUL D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

Le théorème d'Ampère permet une détermination rapide du champ magnétostatique pour des distributions de courants de symétries élevées. Après détermination de la forme du champ à l'aide de considérations de symétrie, son application à un *contour de géométrie adaptée aux symétries* du problème permet de déterminer l'amplitude du champ.

## ● DISCONTINUITÉ DU CHAMP

À la traversée d'une couche parcourue par un courant surfacique de densité  $\vec{j}_S$ , la composante tangentielle du champ magnétique subit une discontinuité finie :  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$ .

## Contrôle rapide

## Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Quelle convention utilise-t-on pour orienter une surface ouverte  $S$ , lorsque le contour  $\Gamma$  qui la délimite est orienté ?
- ✓ Énoncer le théorème d'Ampère et en donner un exemple d'application.
- ✓ Retrouver, par application du théorème d'Ampère, l'expression du champ magnétique créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant  $I$ .
- ✓ Retrouver, par application du théorème d'Ampère, l'expression du champ créé par un solénoïde infiniment long, en un point de son axe, en supposant que le champ extérieur est nul.

## Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. **Considérons deux surfaces ouvertes délimitées par le même contour orienté  $\Gamma$  et, toutes deux, orientées par ce même contour. Les vecteurs normaux aux deux surfaces orientées sont des vecteurs sortants de la surface fermée**  
☐ Vrai ☐ Faux
2. **Si la distribution de courants ne possède pas de symétries suffisantes, il n'est pas possible d'appliquer le théorème d'Ampère.**  
☐ Vrai ☐ Faux
3. **Il n'est pas nécessaire qu'un contour d'Ampère soit une courbe fermée.**  
☐ Vrai ☐ Faux
4. **Le théorème d'Ampère établit la relation qui lie le champ magnétique à ses sources (les courants), tout comme le théorème de Gauss établissait la relation entre le champ électrique et ses sources (les charges électriques).**  
☐ Vrai ☐ Faux

► Solution, page 156.

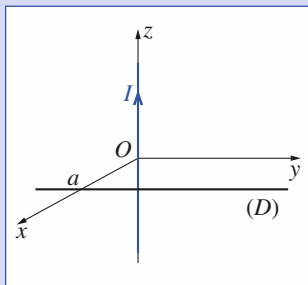
# Exercices

## 1 Spire et solénoïde

- 1) a) Calculer la circulation du champ magnétique le long de l'axe ( $Ox$ ) (de  $-\infty$  à  $+\infty$ ) d'une spire circulaire de rayon  $R$  et parcourue par un courant d'intensité  $I$ .
- b) Interpréter le résultat obtenu.
- 2) Calculer de même la circulation du champ magnétique le long de l'axe ( $Ox$ ) (de  $-\infty$  à  $+\infty$ ) d'un solénoïde circulaire de rayon  $R$ , de longueur  $\ell$  et comportant  $N$  spires jointives parcourues chacune par un courant d'intensité  $I$ .

## 2 Fil

Un courant filiforme d'intensité  $I$  circule le long de l'axe ( $Oz$ ) d'un trièdre trirectangle ( $Oxyz$ ).

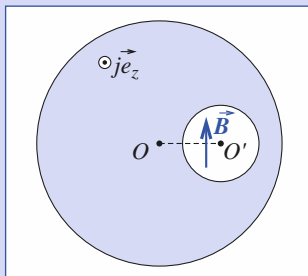


- 1) Calculer la circulation du champ magnétique créé par ce courant le long d'une droite ( $D$ ) orthogonale au fil et située à la distance  $a$  de ce fil.

- 2) Interpréter le résultat obtenu.

## 3 Cylindre avec cavité cylindrique

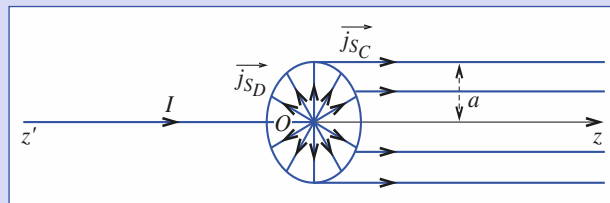
Une cavité cylindrique, d'axe ( $O'z$ ) et de section circulaire de rayon  $R'$ , a été pratiquée dans un cylindre conducteur d'axe ( $Oz$ ) et de rayon  $R$  (doc. ci-contre). En dehors de la cavité, le conducteur est parcouru par un courant constant de densité uniforme  $\vec{j} = j\vec{e}_z$ .



Cylindre avec cavité.

Déterminer le champ magnétique en tout point de la cavité.

## 4 Courant filiforme devenant surfacique



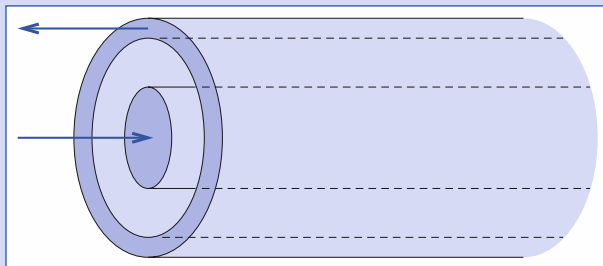
Un courant d'intensité  $I$  circule dans un fil rectiligne de section négligeable, confondu avec le demi-axe ( $Oz$ ) ( $z < 0$ ). Arrivé en  $O$ , il circule sur la surface d'un disque de centre  $O$  et de rayon  $a$ , puis sur la surface d'un cylindre conducteur creux d'axe ( $Oz$ ), de rayon  $a$  et d'épaisseur négligeable.

- 1) Déterminer l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace où il est défini.
- 2) Vérifier les relations de passage (continuité ou discontinuité) du champ magnétique.

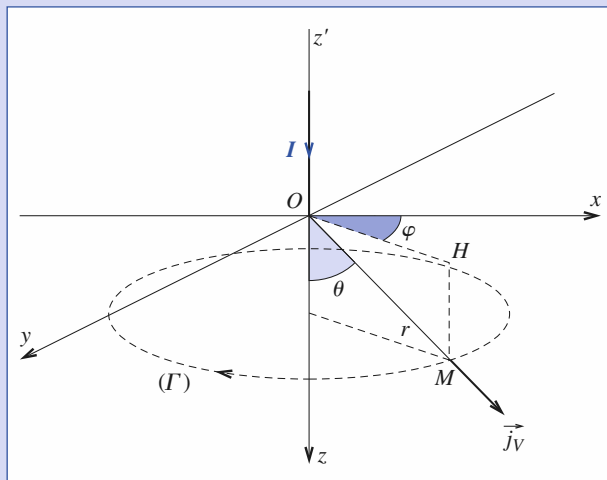
## 5 Câble coaxial particulier

Une ligne coaxiale (géométrie modélisée cylindrique) est réalisée avec un matériau conducteur dont les propriétés magnétiques sont équivalentes à celles du vide. Un cylindre conducteur interne plein, d'axe ( $Oz$ ) et de rayon  $a$  est entouré d'un deuxième conducteur coaxial, de rayon intérieur  $b_1$  et de rayon extérieur  $b_2$ . L'espace entre les deux conducteurs est vide.

Le conducteur central est parcouru par un courant d'intensité  $I$ , selon ( $Oz$ ), et le retour est assuré par le conducteur périphérique. Les densités volumiques sont supposées uniformes. Calculer le champ magnétostatique créé par une telle distribution en tout point de l'espace.



## 6 Champ magnétique dans un conducteur



Un courant électrique d'intensité  $I$  circulant dans un long fil rectiligne entre dans un conducteur qui occupe tout le demi-espace  $z > 0$  et dont les caractéristiques magnétiques sont équivalentes à celles du vide et s'y répand uniformément (les différentes directions du conducteur sont supposées équivalentes).

Établir, dans ces conditions, que le champ magnétique en un point  $M$ , de coordonnées sphériques  $r$  et  $\theta$  est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{e}_\varphi.$$

## 7 Long cylindre en rotation autour de son axe

Un long cylindre, supposé infini, de rayon  $R$  et chargé uniformément en volume avec la densité  $\rho$ , tourne à vitesse angulaire  $\omega$  constante autour de son axe ( $Oz$ ) relativement au référentiel  $\mathcal{R}$ . Le milieu a les mêmes propriétés magnétiques que celles du vide et il n'existe pas de charge surfacique. Calculer, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , le champ magnétostatique créé par une telle distribution de courants.

## 8 Distributions cylindriques de courants

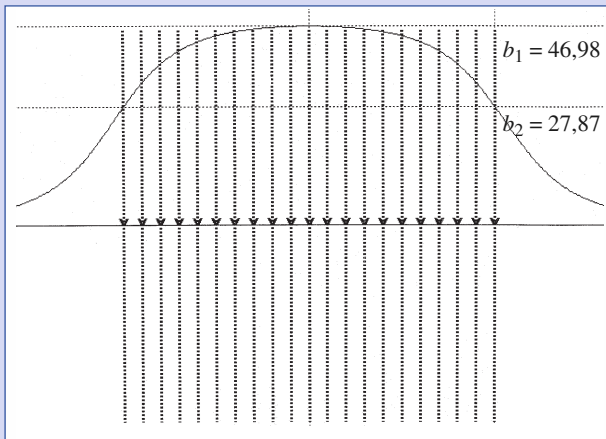
Deux cylindres ① et ②, infiniment longs, de même rayon  $R$ , d'axes parallèles (de vecteur directeur  $\vec{e}_z$ ) et de centres  $O_1$  et  $O_2$  distants de  $2d$  ( $d < R$ ) sont parcourus respectivement par des courants volumiques uniformes :

$$\vec{j}_1 = j \vec{e}_z \text{ et } \vec{j}_2 = -j \vec{e}_z.$$

Déterminer le champ magnétique dans la région commune aux deux cylindres (donc vide de courants).

## 9 Modélisation d'un solénoïde

Soit en ensemble de vingt et une spires circulaires de rayon  $R$ , réalisées avec un fil de section négligeable, disposées

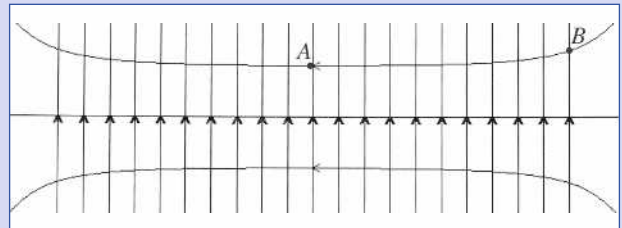


régulièrement, distantes de  $\frac{R}{4}$  les unes des autres et parcourues par un courant d'intensité  $I$ . Les résultats d'un logiciel permettant l'étude du champ magnétique créé par un ensemble de spires quelconques sont les suivants :

1) Avec  $R = 1$  ;  $I = 1$  ;  $\mu_0 = 4\pi$  : le champ magnétique sur l'axe, au centre est égal à  $b_1 = 46,98$ , et sur la face de sortie  $b_2 = 27,87$ .

En déduire le champ magnétique sur l'axe,  $B_1$  (au centre) et  $B_2$  (sur la face de sortie). Les formules classiques du solénoïde sont-elles applicables ?

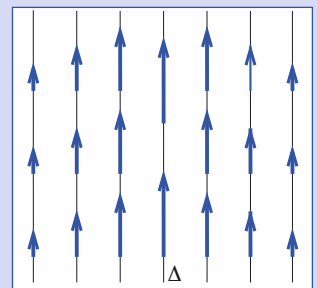
2) Une ligne de champ issue d'un point  $A$  de la spire centrale situé à  $0,50R$  de l'axe du solénoïde, passe en un point  $B$  de la spire de sortie situé à  $0,64R$  de l'axe.



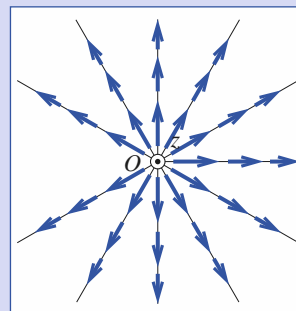
Justifier ce résultat.

## 10 Sont-elles de nature magnétostatique ?

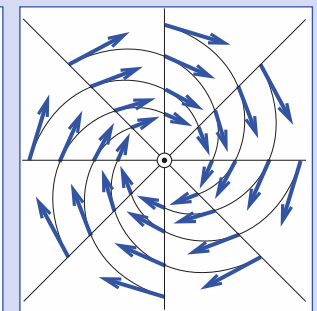
Soit cinq configurations de champs de vecteur  $\vec{V}$ . Préciser si les configurations proposées peuvent être celles d'un champ de nature magnétostatique. On supposera que les lignes de champ sont invariantes par translation selon un axe ( $Oz$ ) perpendiculaire au plan de figure. Les flèches représentent le champ  $\vec{V}$  et leur longueur est proportionnelles à la norme du champ  $\|\vec{V}\|$ .



Cas a.

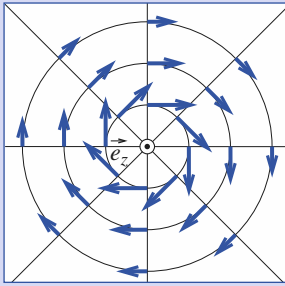


Cas b.

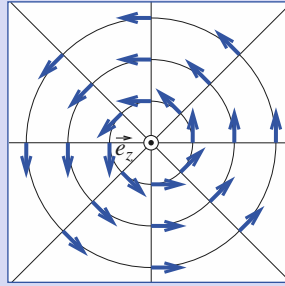


Cas c.

# Exercices



Cas d.



Cas e.

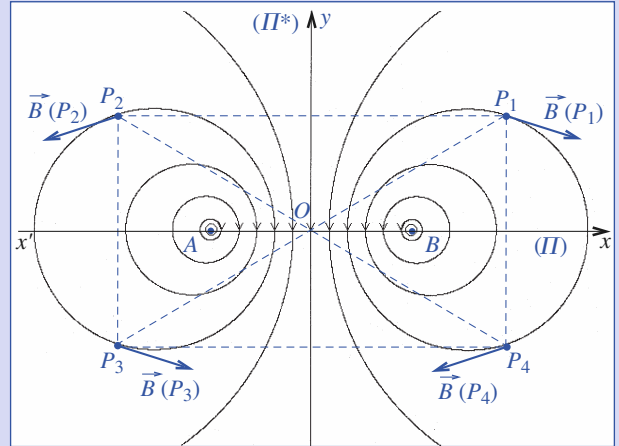
## 11 Cartes de champs magnétiques

On a tracé, à l'aide d'un logiciel de simulation, des cartes de champs magnétiques créées par des courants circulant dans des fils rectilignes perpendiculaires au plan de figure, en présence éventuellement d'un champ magnétostatique uniforme contenu dans le plan de figure.

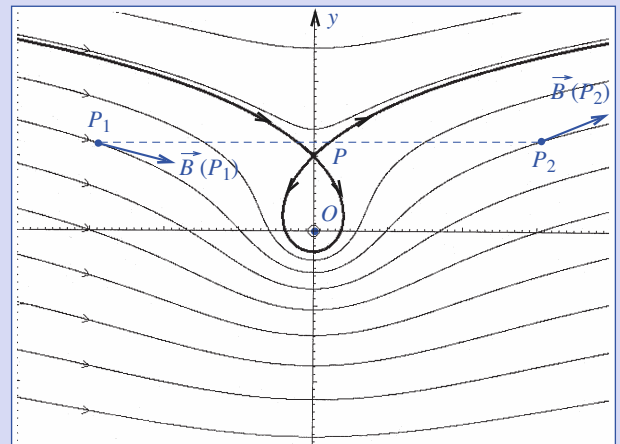
Les intensités circulant dans les fils sont supposées égales, mais les sens sont à préciser, l'axe ( $Oz$ ) pointant vers l'avant de la figure.

Décrire chaque configuration envisagée, en vérifiant à chaque fois les propriétés générales d'un champ magnétique.

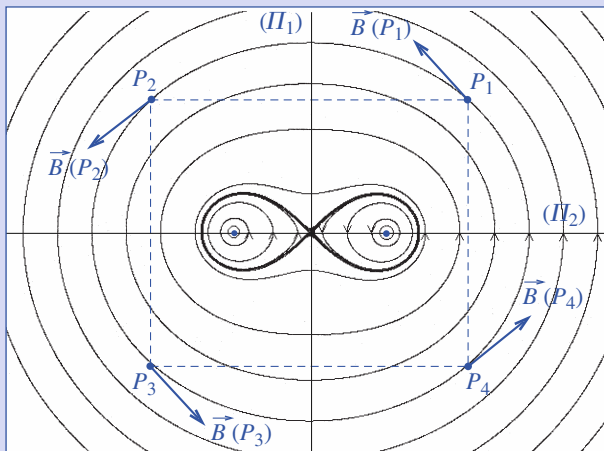
Que peut-on dire des vecteurs champ magnétique  $\vec{B}$  en  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$  ?



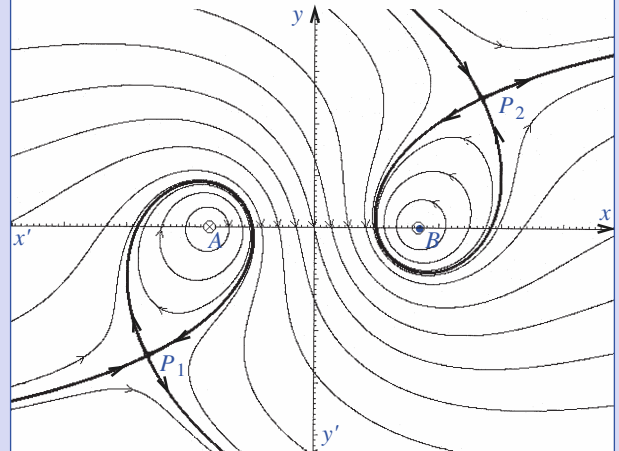
Cas b.



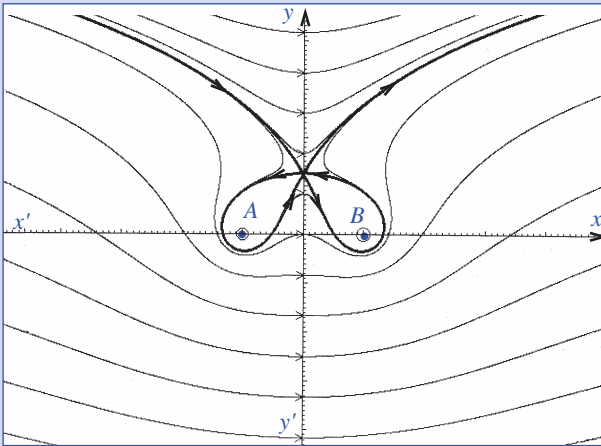
Cas c.



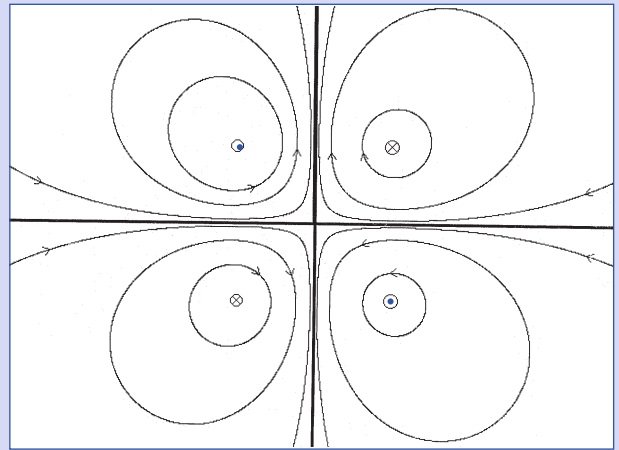
Cas a.



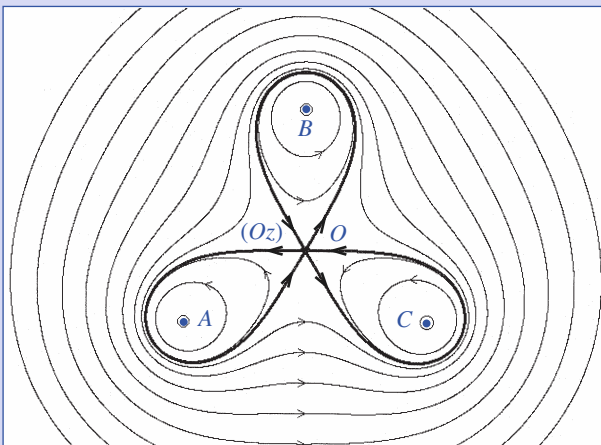
Cas d.



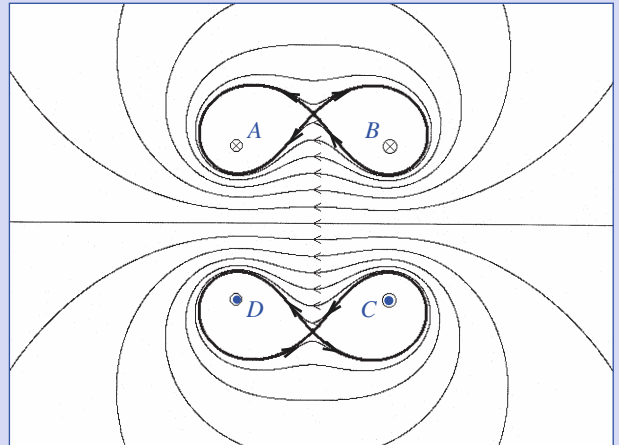
Cas e.



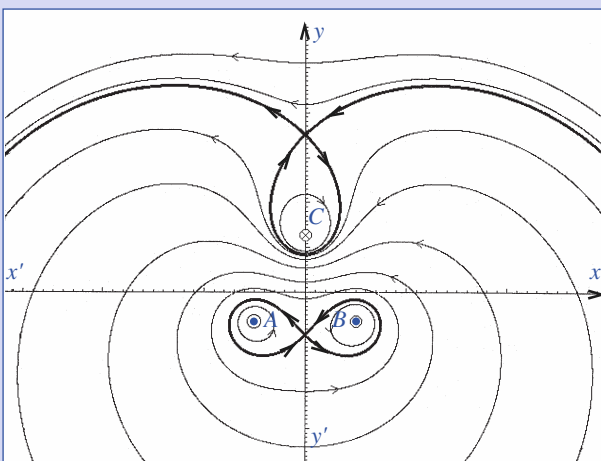
Cas h.



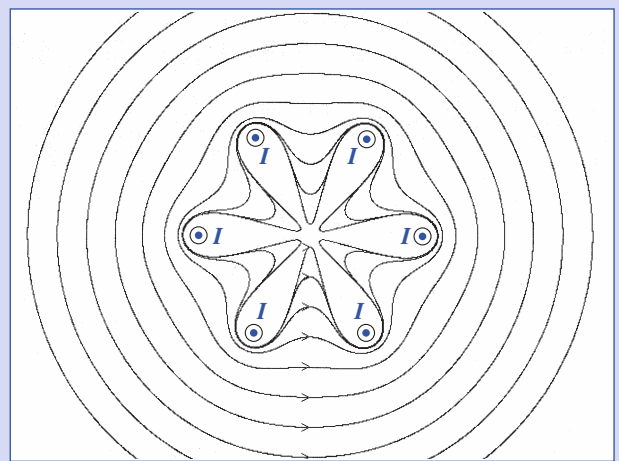
Cas f.



Cas i.



Cas g.



Cas j.

# Corrigés

**Solution du tac au tac, p. 151.**

1. Faux

3. Faux

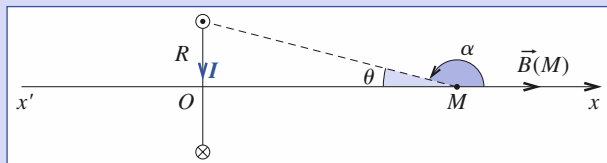
2. Faux

4. Vrai

**1**

1) a) Le vecteur champ magnétique créé par une spire (de rayon  $R$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$ ) en un point de son axe est donné par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_x.$$



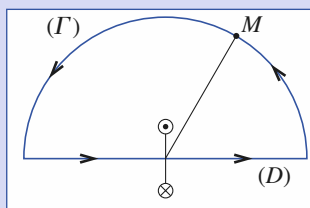
La circulation de  $\vec{B}$  sur  $(x'Ox)$  est égale à  $C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx$ , avec :

$$x = -\frac{R}{\tan \alpha}; \quad dx = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha \quad \text{et} \quad \sin \theta = \sin \alpha.$$

$$\text{Soit } C = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{\sin^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} R d\alpha = \mu_0 I.$$

b) Soit le contour fermé constitué de la droite  $(D)$  et du demi-cercle  $(\Gamma)$  de rayon  $r$  infini.

$$\int_{(D)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I;$$



$$\oint_{(D) + (\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I.$$

D'où  $\int_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$ , ce qui est normal, car nous verrons dans le chapitre 9 que pour  $r$  grand,  $B$  varie en  $\frac{1}{r^3}$ , donc l'intégrale tend bien vers 0.

2) Le solénoïde étant constitué de  $N$  spires, en utilisant le résultat précédent, nous avons  $\int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx = \mu_0 N I$ .

**2**

1) Le champ créé par le fil en  $M$  est :  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{e}_\theta}{r}$  et sa circulation élémentaire le long de la droite  $(D)$  s'écrit :

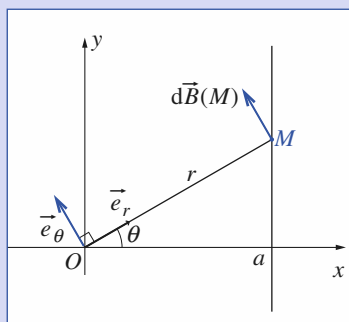
$$dC = \vec{B}(M) \cdot d\vec{M} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\cos \theta dy}{r}.$$

$$\text{Comme } r = \frac{a}{\cos \theta}, y = a \tan \theta$$

$$\text{et } dy = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}, \text{ il vient :}$$

$$dC = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta \quad \text{et par suite :}$$

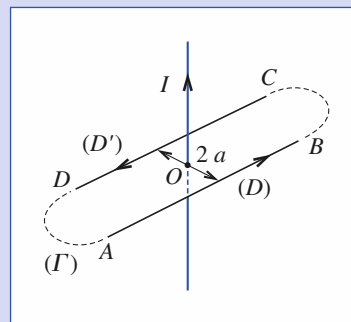
$$C = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2}.$$



## Interprétation

Pour obtenir un contour fermé, il faut associer une droite  $(D')$  parallèle à  $(D)$  : la circulation de  $\vec{B}$  sur les parties  $BC$  et  $DA$  finies d'un champ tendant vers 0 en  $\frac{1}{r}$  est nulle. D'où :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 I.$$



**3**

Procédons par superposition.  $\vec{B}$  est la résultante du champ  $\vec{B}_1$  d'un cylindre plein d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $R$ , parcouru par un courant de densité uniforme  $\vec{j}$ , et du champ  $\vec{B}_2$  d'un cylindre plein d'axe  $(O'z')$  et de rayon  $R'$ , parcouru par un courant de densité volumique uniforme  $-\vec{j}$ .

Pour le cylindre plein :

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0}{2} j r \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0}{2} (\vec{j} \wedge \vec{OM}).$$

$$\text{De même } \vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0}{2} (-\vec{j} \wedge \vec{O'M'}).$$

$$\text{Le champ résultant est alors : } \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} (\vec{j} \wedge \vec{OO'}).$$

Le champ est uniforme en tout point de la cavité. Il est perpendiculaire à  $OO'$ .

**4**

1) Tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  est un plan de symétrie des courants, donc :

$$\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta.$$

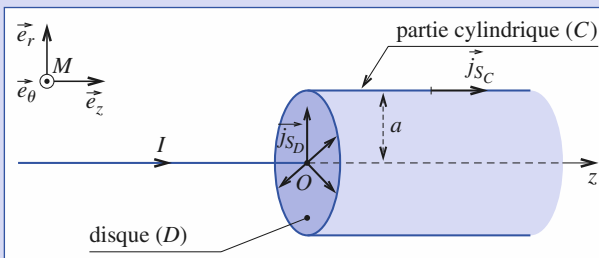
Le système de courants est invariant par rotation autour de  $(Oz)$ , d'où :

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta.$$

Appliquons le théorème d'Ampère en considérant des courbes de circulation de rayon  $r$  et d'axe  $(Oz)$  :

$$\bullet \quad z < 0 : \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta;$$

$$\bullet \quad z > 0 : \text{si } r > a : \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta; \text{ si } r < a : \vec{B}_3 = \vec{0}.$$



2) Étudions les relations de continuité de  $\vec{B}$  :

• Sur la partie cylindrique  $(C)$

$$\vec{j}_{SC} = \frac{1}{2\pi a} \vec{e}_z. \text{ Nous vérifions bien que } \left\{ \begin{array}{l} (\vec{B}_2 - \vec{B}_3) \cdot \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j}_{SC} \wedge \vec{e}_r \\ \vec{e}_r \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_3) = 0. \end{array} \right.$$

• Sur le disque  $(D)$

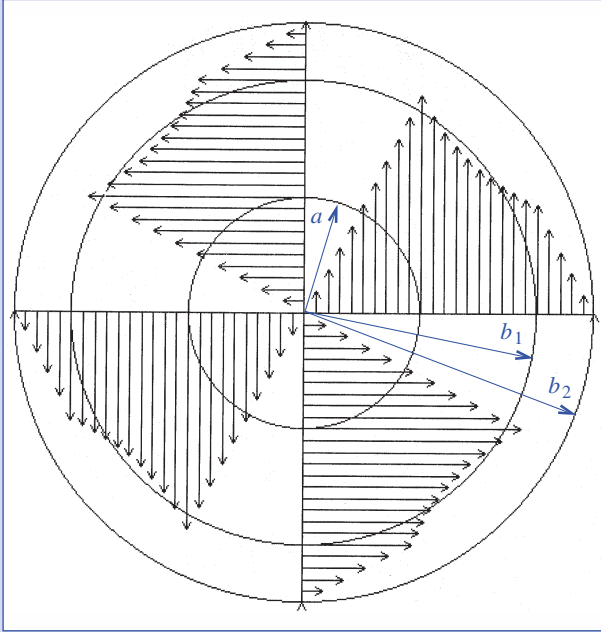
$$\vec{j}_{SD} = \frac{1}{2\pi r} \vec{e}_r. \text{ Nous vérifions bien que } \left\{ \begin{array}{l} (\vec{B}_1 - \vec{B}_3) \cdot \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j}_{SD} \wedge -\vec{e}_z \\ \vec{e}_z \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_3) = 0. \end{array} \right.$$



5

Tout plan passant par  $M$  et l'axe de symétrie ( $z'Oz$ ) est un plan de symétrie de courants, donc  $\vec{B}$  est orthoradial :  $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$ . Le système de courants étant invariant par rotation autour de ( $z'Oz$ ) et par translation suivant ( $z'Oz$ ), nous avons :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta.$$



L'application du théorème d'Ampère avec une courbe fermée constituée d'un cercle de rayon  $r$  et d'axe ( $Oz$ ) nous donne :

- $r < a$  :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \vec{e}_\theta$  ;
- $a < r < b_1$  :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$  ;
- $b_1 < r < b_2$  :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - b_1^2}{b_2^2 - b_1^2} \right) \vec{e}_\theta$  ;
- $r > b_2$  :  $\vec{B} = \vec{0}$  .

Remarquons que les densités volumiques de courants sont telles que :

- cylindre de rayon  $a$  :  $\vec{j}_v = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$  ;
- cylindre de rayon «  $b_1, b_2$  » :  $\vec{j}_v = -\frac{I}{\pi(b_2^2 - b_1^2)} \vec{e}_z$  .

La simulation ci-dessus nous permet d'illustrer les résultats.

6

1) Les différentes directions étant équivalentes, la densité volumique de courants dans le conducteur est de la forme  $\vec{j}_v = j_v(r) \vec{e}_r$  .

Le flux de ce vecteur à travers une demi-sphère de rayon  $r$  doit être égal à  $I$ , d'où :

$$\vec{j}_v = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e}_r.$$

Tout plan passant par  $M$  et contenant l'axe ( $Oz$ ) est un plan de symétrie des courants, d'où  $\vec{B} = B(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi$  .

Le système étant invariant par rotation autour de ( $Oz$ ), nous avons  $\vec{B} = B(r, \theta) \vec{e}_\theta$  .

Appliquons le théorème d'Ampère en prenant un contour ( $\Gamma$ ) fermé constitué d'un cercle passant par  $M$  et d'axe ( $Oz$ ). La circulation de  $\vec{B}$  sur ( $\Gamma$ ) :

$(B(r, \theta) 2\pi r \sin \theta)$  est égale à  $\mu_0$  fois le flux de  $\vec{j}_v$  à travers toute surface s'appuyant sur ( $r$ ), donc en particulier une calotte sphérique de centre  $O$ , soit :

$$\mu_0 j_v(r) 2\pi (1 - \cos \theta) r^2.$$

$$\text{D'où } \vec{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{e}_\theta.$$

7

La densité volumique de courants est égale à  $\vec{j}_v = \rho \omega r \vec{e}_\theta$  .

Calculons  $\vec{B}$  en  $M$  : le plan passant par  $M$  et perpendiculaire à ( $Oz$ ) est un plan de symétrie des courants, donc  $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_z$  . Le système de courants est invariant par rotation autour de ( $Oz$ ) et par translation suivant ( $Oz$ ), donc  $\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$  .

Cette répartition de courants est assimilable à un empilement de solénoïdes infiniment longs, donc  $\vec{B}(r > R) = \vec{0}$  . Pour calculer  $\vec{B}$  à l'intérieur du système de courants, appliquons le théorème d'Ampère : la circulation sur les parties  $AB, BC$  et  $CD$  est nulle. D'où :

$$B(r) h = \mu_0 h \int_r^R j_v(r) dr.$$

Ce qui nous donne :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \rho \omega}{2} (R^2 - r^2) \vec{e}_z.$$

**Remarque**

Le champ  $\vec{B}(r)$  est le champ magnétique créé par l'empilement de solénoïdes (d'épaisseur  $dr$  et portant des intensités surfaciques  $dj_s = j_v dr$ ) infinis, situés entre  $r$  et  $R$ . Le champ magnétique d'un solénoïde portant  $j_s$  étant égal à  $\mu_0 j_s$  en norme, nous obtenons  $\vec{B} = \int_r^R \mu_0 dj_s \vec{e}_z = \int_r^R \mu_0 j_v dr \vec{e}_z$  .

Nous obtenons la même intégrale.

8

Le plan ( $xOz$ ) est un plan de symétrie des courants, donc  $\vec{B}$  est perpendiculaire à ce plan et  $\vec{B} = B(x, y, z) \vec{e}_y$  .

Le système de courants étant invariant par translation suivant ( $Oz$ ),  $\vec{B} = B(x, y) \vec{e}_y$  . Si nous sommes dans la région commune aux deux cylindres, nous sommes à l'intérieur des deux cylindres.

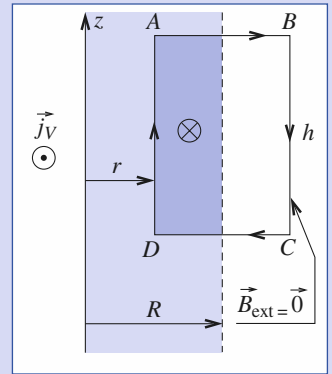
Cherchons  $\vec{B}_1$  créé par le cylindre ① en un point intérieur au cylindre. Ce champ est orthoradial  $B_1(M) = B(O_1 M) \vec{e}_\theta$  . L'application du théorème d'Ampère sur un contour fermé  $\Gamma$  circulaire de centre  $O_1$  et de rayon  $r_1 = O_1 M < R$  nous donne :

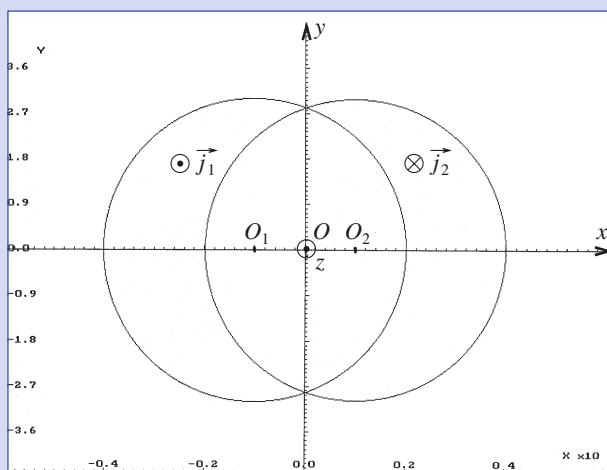
$$B_1 2\pi r = \mu_0 j_1 \pi r^2, \text{ soit } B_1(M) = \frac{\mu_0}{2} j_1 \vec{r}_1 \wedge \vec{O}_1 M.$$

De même :  $\vec{B}_2 = +\frac{\mu_0}{2} \vec{j}_2 \wedge \vec{O}_2 M$

$$\text{et : } \vec{B}_{\text{total}}(M) = \frac{\mu_0}{2} j \vec{e}_z \wedge (\vec{O}_1 M - \vec{O}_2 M) = \frac{\mu_0}{2} j \vec{e}_z \wedge \vec{O}_1 O_2,$$

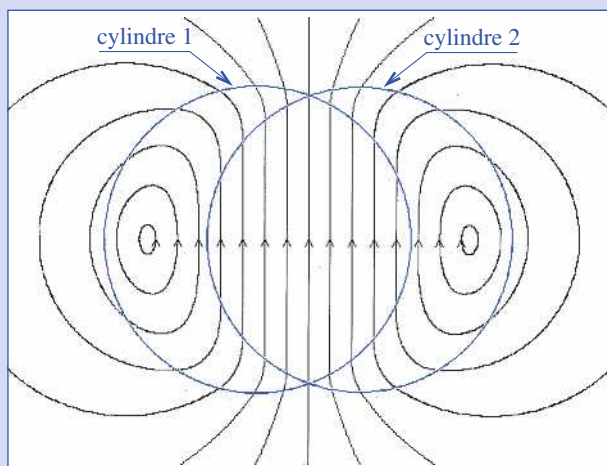
$$\text{soit : } \vec{B} = \frac{\mu_0}{2} j (O_1 O_2) \vec{e}_y.$$



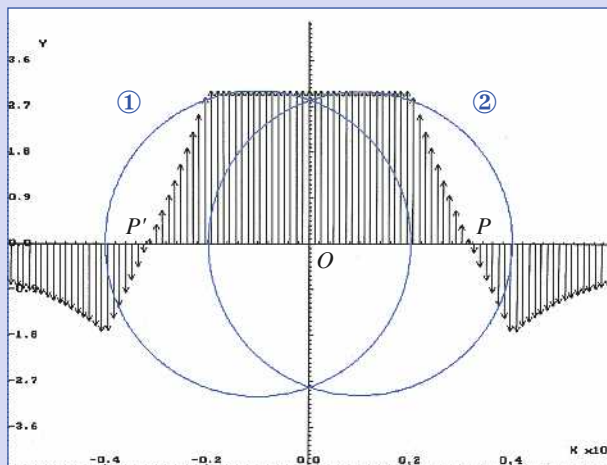


Doc. 1. Simulation 1.

Le champ est uniforme dans la cavité, comme l'indique les simulations sur les documents 2 et 3.



Doc. 2. Simulation 2.



Doc. 3. Simulation 3.

Remarquons que nous visualisons un point de champ nul ; considérons un point  $P$  situé à l'extérieur du cylindre ① et à l'intérieur du cylindre ②.

$$\vec{B}_1(P) = \frac{\mu_0}{2} \vec{j}_1 \wedge \frac{R^2}{O_1 P^2} \vec{O_1 P} \text{ et } \vec{B}_2(P) = \frac{\mu_0}{2} \vec{j}_2 \wedge \vec{O_2 P}.$$

$$\text{D'où } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{2} j \vec{e}_z \wedge \left( \frac{R^2}{O_1 P^2} \vec{O_1 P} - \vec{O_2 P} \right) \text{ qui est nul si } \frac{R^2}{O_1 P} = O_2 P,$$

soit (en posant  $O_1 O_2 = 2d$ )  $R^2 = x_P^2 - d^2$ . Sur les simulations 2 et 3 (doc. 2 et 3)  $R = 3$  ;  $d = 1$ , d'où  $x_P = \sqrt{10} = 3,16$ , ce que donne le logiciel.

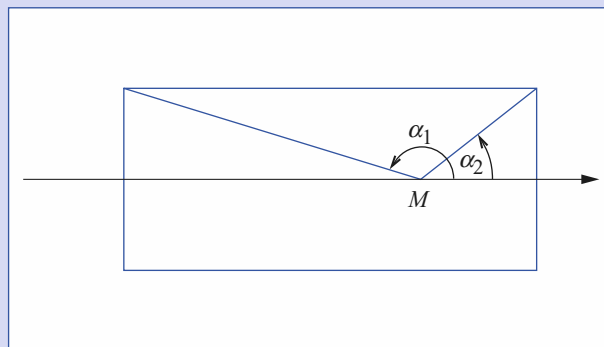
9

1) Le champ créé par un solénoïde (cf. chapitre 7, § 5.3.3.) est :

$$B = \frac{\mu_0 n l}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

où  $n$  est le nombre de spires par unité de longueur et  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  respectivement les angles sous lesquels sont vus les rayons des faces d'entrée et de sortie du solénoïde.

Ici,  $n = \frac{1}{R} = 4$  numériquement.



• Au centre :  $\cos \alpha_2 = \frac{10R/4}{\sqrt{R^2 + (10R/4)^2}} = 0,93$  et  $\cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2$ , ce qui donne,

dans les conditions de la simulation :

$$B_1 = \mu_0 n l \cos \alpha_2 = 4\pi \cdot 4 \cdot 0,93 = 46,75.$$

Ce qui est tout à fait satisfaisant car l'erreur relative n'est que de 0,5 %.

• Au centre de la face de sortie :  $\cos \alpha_2 = 0$  et  $|\cos \alpha_1| = \frac{20R/4}{\sqrt{R^2 + (20R/4)^2}} = 0,98$ , d'où :

$$B_2 = \frac{\mu_0 n l}{2} |\cos \alpha_1| = 2\pi \cdot 4 \cdot 0,98 = 24,63.$$

L'erreur relative est, cette fois, d'environ 12 %.

## Conclusion

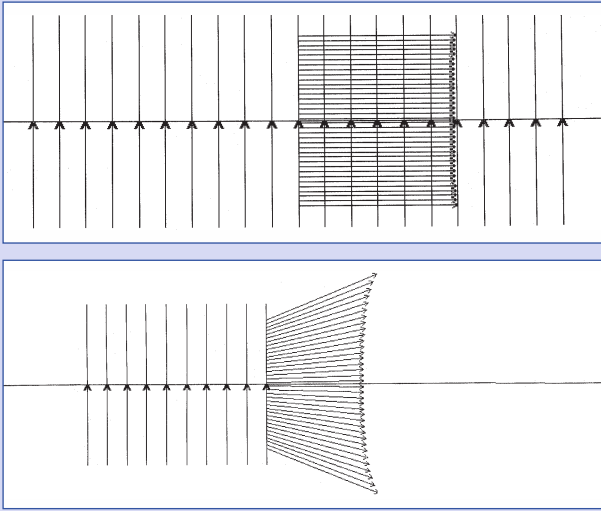
Le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde est calculable par la formule classique, même si les spires ne sont pas vraiment jointives.

2) Le champ magnétique étant à flux conservatif, nous devons avoir approximativement :

$$B_1 \pi r_1^2 = B_2 \pi r_2^2, \text{ soit } r_2 = r_1 \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} = 0,5 R \sqrt{\frac{46,98}{27,87}} = 0,65 R.$$

Nous trouvons 0,65 au lieu de 0,64.

Cet écart provient du fait que  $\vec{B}$  n'est pas uniforme sur la face de sortie, alors qu'il l'est avec une excellente approximation dans le plan de la spire centrale.



**10** Nous nous intéressons à la carte d'un champ magnétostatique ; rappelons que :

- le champ  $\vec{B}$  est à flux conservatif :
  - le flux à travers un tube de champ est le même en toute section ; la norme du champ est d'autant plus élevée que la section est étroite,
  - les lignes de champ de  $\vec{B}$  sont en général des courbes fermées. En particulier, et contrairement au champ électrostatique  $\vec{E}$  les lignes de champ de  $\vec{B}$  ne peuvent partir d'un point donné (ou aboutir en ce point) ;
- la circulation du champ magnétique sur un contour peut être non nulle ; il existe alors, d'après le théorème d'Ampère, un courant enlacé par ce contour.

### Étude des divers exemples

#### • Cas a

Les lignes de champ sont parallèles et la norme du champ est constante le long d'une ligne : le flux de ce vecteur est donc conservatif. Ce champ est de nature magnétostatique. La circulation sur un contour rectangulaire étant non nulle, il existe une densité volumique de courants, perpendiculaire au plan de figure, pointant vers l'avant à gauche de l'axe central  $\Delta$  et vers l'arrière à droite de celui-ci.

Ce champ ne peut être aussi de nature électrostatique (circulation non nulle sur une courbe fermée).

#### • Cas b

Le flux sortant d'une surface fermée cylindrique de hauteur  $h$ , entourant le point  $O$  est manifestement positif, donc non nul. Le champ considéré ne peut donc pas être un champ de nature magnétostatique.

La circulation d'un vecteur de la forme  $V(r) \vec{e}_r$  (coordonnées cylindriques) est nulle quel que soit le contour fermé choisi. Ce champ à circulation conservative est de nature électrostatique. Il existe alors une densité volumique de charges positive dans cet espace. Si le champ est en  $\frac{1}{r}$ , seule la ligne perpendiculaire au plan de la figure en  $O$  porte une densité linéique de charges positive.

#### • Cas c

Le flux entrant à travers la surface fermée définie par un cylindre d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  n'est pas nul. Le champ n'est donc pas à flux conservatif ; il ne peut donc s'agir d'un champ de nature magnétostatique.

La circulation du champ sur un contour fermé constitué d'un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  n'est pas nulle. Il ne peut donc pas s'agir d'un champ de nature électrostatique.

#### • Cas d

Les lignes de champ sont circulaires, et la norme est la même en tout point d'une ligne de champ. Ce champ est donc à flux conservatif ; il peut s'agir d'un champ de nature magnétostatique.

La circulation du champ sur un contour fermé constitué d'un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  n'est pas nulle. Le théorème d'Ampère appliqué à ce contour confondu avec une ligne de champ montre qu'il existe des courants (volumiques ou non), parallèles à  $(Oz)$ . Il pourrait s'agir d'un fil rectiligne confondu avec  $(Oz)$ , si  $B(r)$  varie en  $\frac{1}{r}$ ,  $r$  étant la distance à l'axe  $(Oz)$ , dans ce cas le courant serait entrant, dirigé

suivant  $(-Oz)$ .

La circulation du champ sur le contour fermé n'étant pas nulle, il ne peut pas s'agir d'un champ de nature électrostatique.

#### • Cas e

La configuration est semblable à la précédente mais cette fois la norme du champ est une constante. Ce champ est toujours à flux conservatif ; il peut donc s'agir d'un champ de nature magnétostatique.

Il existe une répartition volumique de courants perpendiculaires au plan de figure, pour satisfaire au théorème d'Ampère. Montrons que  $\vec{j}(r) = \left(\frac{A}{r}\right) \vec{e}_z$ .

La circulation de  $B(r) = \text{cte}$  sur un cercle de rayon  $r$  et de centre  $O$  nous donne :

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 \int_0^r \frac{A}{r'} 2\pi r' dr', \text{ ce qui est vérifié.}$$

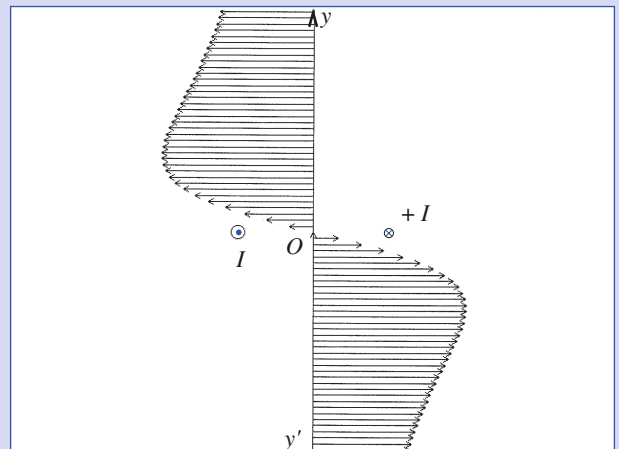


#### • Cas a

Deux fils sont parcourus par des courants de même sens et d'intensité  $I$ . Au centre  $O$ , le champ  $B$  est nul et quatre lignes de champ s'y rencontrent.

Lorsque la distance entre deux lignes de champ voisines augmente, le champ diminue. Le champ est faible entre les deux fils.

En des points éloignés de  $(Oz)$ , les lignes de champ sont quasi circulaires : l'ensemble des deux fils se comporte approximativement comme un seul fil de courant double placé sur  $(Oz)$ .

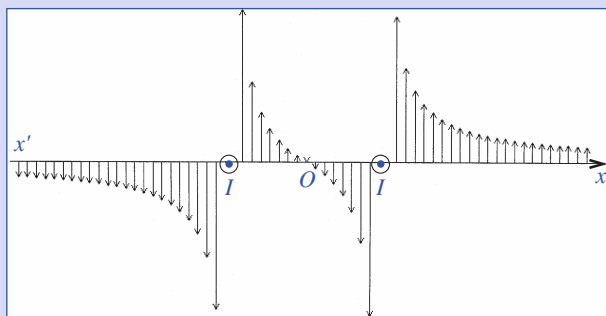


**Doc. 1.** Simulation 1 : Évolution graphique du champ magnétique sur la droite  $(y'Oy)$  (plan de symétrie des courants  $\Pi_1$ ).

# Corrigés

Le plan médiateur ( $yOz$ ), et le plan des fils ( $xOz$ ) sont des plans de symétries  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  des courants. Ils sont traversés perpendiculairement par les lignes de champ (cf. S.1 et S.2). ( $Oz$ ) étant l'intersection des deux plans de symétrie  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  des courants, est un axe de symétrie des courants, d'où  $\vec{B}(P_1) = -\vec{B}(P_3)$  et  $\vec{B}(P_2) = -\vec{B}(P_4)$  ce qui se vérifie sur la figure. De même nous avons :

$$\text{si } \vec{B}(P_1) = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{B}(P_2) = \begin{pmatrix} +B_x \\ -B_y \end{pmatrix}, \vec{B}(P_3) = \begin{pmatrix} -B_x \\ -B_y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B}(P_4) = \begin{pmatrix} -B_x \\ +B_y \end{pmatrix}.$$



Doc. 2. Simulation 2 : Évolution graphique du champ magnétique sur la droite ( $x'Ox$ ) (plan de symétrie des courants  $\Pi_2$ ).

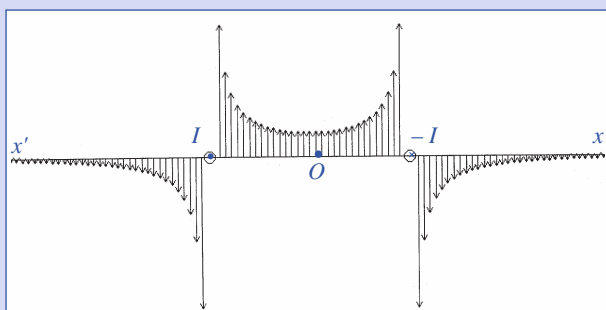
## • Cas b

Deux fils sont parcourus par des courants en sens contraire et d'intensité  $I$  (vers l'avant pour le fil A et vers l'arrière pour le fil B). Si on déplace le long d'une ligne de champ, le champ est plus intense dans la région centrale, où les lignes de champ sont serrées.

Le plan ( $yOz$ ) est un plan d'antisymétrie  $\Pi^*$  des courants ;  $B$  est dans ce plan (confondu avec une ligne de champ). L'intensité du champ décroît rapidement quand le point s'éloigne des fils. Le plan ( $xOz$ ) est un plan de symétrie  $\Pi$  des courants.  $B$  est perpendiculaire à ce plan (perpendiculaire aux lignes de champ) (simulation 3).

( $Oz$ ) est l'intersection des deux plans de symétrie  $\Pi$  et d'antisymétrie  $\Pi^*$  des courants, d'où  $\vec{B}(P_1) = \vec{B}(P_3)$  et  $\vec{B}(P_2) = \vec{B}(P_4)$ , ce qui se vérifie sur la figure. De même nous avons :

$$\text{si } \vec{B}(P_1) = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{B}(P_2) = \begin{pmatrix} -B_x \\ +B_y \end{pmatrix}, \vec{B}(P_3) = \begin{pmatrix} +B_x \\ +B_y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B}(P_4) = \begin{pmatrix} -B_x \\ -B_y \end{pmatrix}.$$



Doc. 3. Simulation 3 : Évolution graphique de  $\vec{B}$  sur l'axe ( $x'Ox$ ).

## • Cas c

Un fil est parcouru par un courant selon ( $Oz$ ) plongé dans un champ  $\vec{B}_0$  uniforme pointant vers la droite.

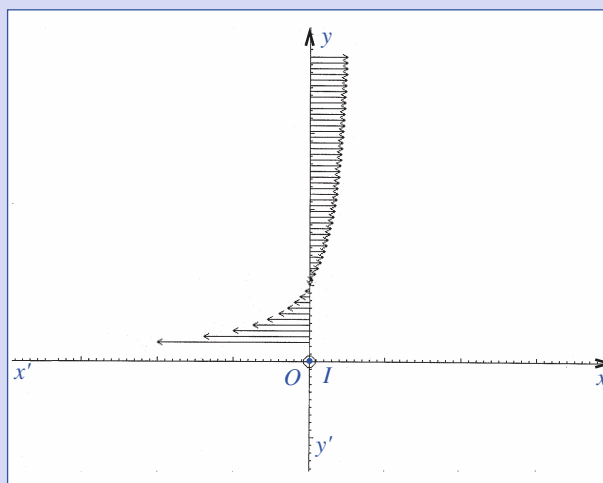
Le champ est d'autant plus intense que les lignes de champ se resserrent. Le champ total est plus intense sous le fil qu'au-dessus.

Le plan ( $yOz$ ) est un plan  $\Pi$  de symétrie des courants (même ceux créant  $\vec{B}_0$ , un solénoïde infini d'axe horizontal par exemple),  $B$  est perpendiculaire à ce plan en chacun de ces points (simulation 4). Les lignes de champ lui sont toutes orthogonales. Plus généralement nous avons :

$$\text{si } \vec{B}(P_1) = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{B}(P_2) = \begin{pmatrix} +B_x \\ -B_y \end{pmatrix}.$$

Il existe un point de champ nul (le point  $P$ ), où se coupent plusieurs lignes de champ (ici quatre : remarquer leurs orientations), dans le plan de figure. Ce point  $P$  est tel que :

$$B_0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 0 \text{ (avec } r = OP \text{)}.$$



Doc. 4. Simulation 4 : Évolution graphique de  $\vec{B}$  sur l'axe ( $y'Oy$ ).

## • Cas d

Deux fils sont parcourus en sens opposé par un même courant (vers l'arrière pour le fil A et vers l'avant pour le fil B) dans un champ uniforme pointant vers la droite.

Il n'y a pas de plans de symétrie ou d'antisymétrie des courants ; mais ( $Oz$ ) est un axe d'antisymétrie des courants (le champ uniforme peut être celui d'un solénoïde d'axe horizontal). Les lignes de champ de  $B$  obéissent à cette symétrie ; remarquons que :

$$\vec{B}(x, y) = \vec{B}(-x, -y).$$

La valeur plus intense du champ est située entre les fils.

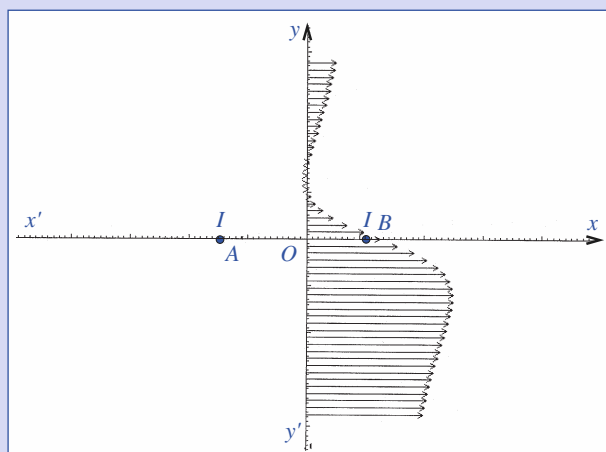
Il existe deux points de champ nul ( $P_1$  et  $P_2$ ) dans le plan de figure (ici quatre lignes de champ partent de ces points : remarquer leur orientation). Ces deux points sont symétriques par rapport à ( $Oz$ ).

## • Cas e

Deux fils sont parcourus par des courants de même sens (vers l'avant pour les deux fils) dans un champ uniforme pointant vers la droite.

Le plan ( $yOz$ ) est un plan de symétrie des courants (le champ uniforme peut être celui d'un solénoïde d'axe horizontal). Les lignes de champ de  $\vec{B}$  sont orthogonales à ce plan (simulation 5).

Il existe un point de champ nul dans le plan de figure ; de ce point partent six lignes de champ (remarquer leurs orientations).



Doc. 5. Simulation 5 : Évolution graphique de  $\vec{B}$  sur l'axe  $(y'Oy)$ .

#### • Cas f

Trois fils sont parcourus dans le même sens par un même courant et placés aux sommets d'un triangle équilatéral.

Le centre  $O$  est le seul point de champ nul dans le plan de figure ; de ce point partent six lignes de champ (remarquer leurs orientations).

Les lignes de champ sont beaucoup plus espacées près du centre qu'au voisinage des fils où le champ est intense.

Le plan  $(yOz)$  est un plan de symétrie  $\Pi$  des courants. Les lignes de champ de  $\vec{B}$  sont orthogonales à ce plan, sauf au point de champ nul  $O$ . Il existe deux autres plans vérifiant cette propriété déduits du précédent par des rotations de  $2\pi/3$  et  $4\pi/3$  autour de  $(Oz)$ .

#### • Cas g

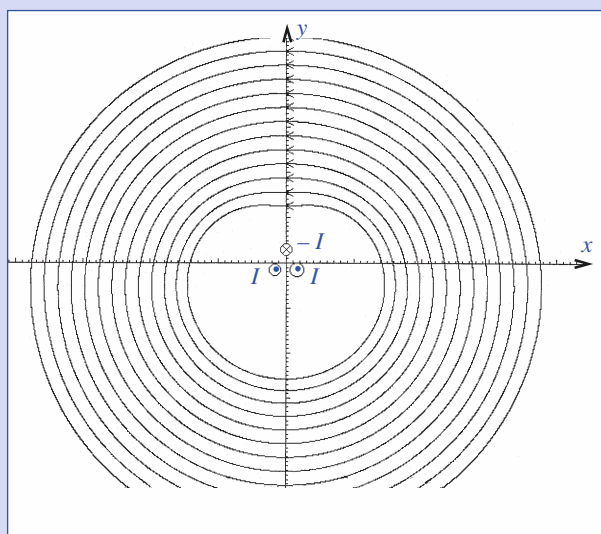
Même configuration que le cas f sauf que le fil  $B$  est parcouru vers l'arrière par le courant d'intensité  $I$ . Noter la symétrie par rapport au plan médiateur de  $AC$  qui contient le fil  $B$  et l'existence de deux points de champ nul (dans le plan de figure) contenus dans ce plan de symétrie  $\Pi$ . Noter que le champ est intense entre les trois fils dans le plan de symétrie, et qu'à grande distance des fils la topographie est approximativement celle d'un fil unique placé dans la région centrale, du côté de  $AC$ , sur le plan de symétrie, et parcouru par un courant d'intensité  $I$  (simulation 6).

#### • Cas h

Quatre fils sont parcourus par des intensités identiques, et de même sens, disposés aux sommets d'un carré. Remarquer les symétries.

#### • Cas i

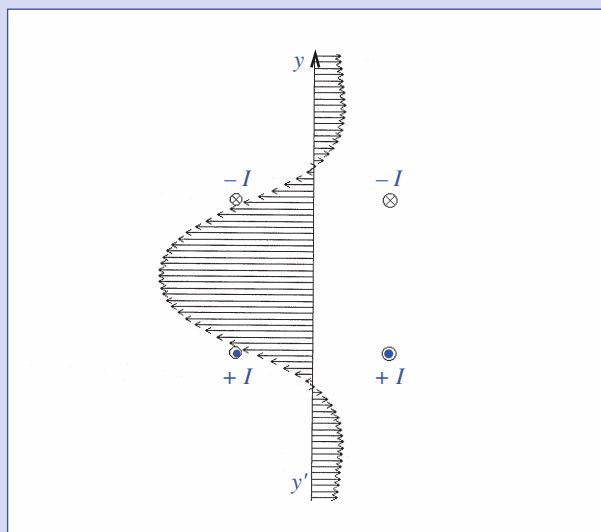
Quatre fils sont parcourus par des intensités identiques disposés aux sommets d'un carré  $A$  et  $B$  :  $-I$ , et  $C$  et  $D$  :  $+I$ . Remarquer les symétries, ainsi que  $B$  sur le plan  $(yOy')$  (simulation 7).



Doc. 6. Simulation 5 : Lignes de champ de  $\vec{B}$  « loin » des trois lignes.

#### • Cas j

Dans le cas j, les six fils disposés aux sommets d'un hexagone régulier sont parcourus par des intensités identiques et de même sens.



Doc. 7. Simulation 7 : Évolution de  $\vec{B}$  sur l'axe  $(y'Oy)$ .

# 9

# Dipôle magnétique

## Introduction

*Nous verrons que toute distribution de courants possède un moment dipolaire magnétique qui permettra de déterminer le champ magnétique créé à grande distance.*

*Nous découvrirons alors une analogie forte (mais non totale) avec le champ dipolaire électrostatique étudié au chapitre 5.*

*Les propriétés magnétiques de la matière sont, pour l'essentiel, interprétées par l'existence de dipôles magnétiques microscopiques. Le champ magnétique créé par un aimant, par exemple, résulte de la superposition des champs de tels dipôles.*

## O B J E C T I F S

- Modèle du dipôle.
- Champ dipolaire.
- Comparaison avec le dipôle électrostatique.

## P R É R E Q U I S

- Champ magnétique.
- Dipôle électrostatique.

## Moment dipolaire

### 1.1. Surface associée à un contour

Considérons un contour  $\Gamma$  (fermé) orienté (doc. 1) et une surface  $\vec{S}$  s'appuyant sur ce contour. L'orientation de la surface s'effectue en utilisant celle du contour (cf. chapitre 8, § 1.5.) : un tire-bouchon tournant dans le sens choisi pour  $\Gamma$  traverse  $S$  dans le sens de ses vecteurs unitaires normaux  $\vec{n}$ .

Nous appellerons *vecteur surface*  $\vec{S}$  le vecteur défini par :

$$\vec{S} = \iint_S \vec{n} dS = \iint_S d\vec{S}.$$

Le vecteur surface  $\vec{S}$  ne dépend pas du choix de la surface utilisée pour le définir : il ne dépend que du contour  $\Gamma$  et de son orientation.

Le vecteur surface  $\vec{S}$  est une grandeur caractéristique du contour  $\Gamma$  orienté.

Par exemple, le vecteur surface du contour circulaire de rayon  $a$  du document 2 est :

$$\vec{S} = \pi a^2 \vec{n}.$$

### 1.2. Moment magnétique d'un courant filiforme

**Le moment magnétique d'une boucle  $\Gamma$  de courant d'intensité  $I$  (orientée dans le sens du courant) et de vecteur surface  $\vec{S}$  est :**

$$\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S}.$$

La norme du moment magnétique s'exprime en  $A \cdot m^2$ .

Dans le cas d'une spire circulaire de rayon  $a$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$  (doc. 2), le moment magnétique est :  $\vec{\mathcal{M}} = I \pi a^2 \vec{n}$ .

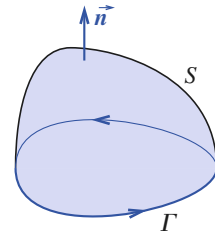
Sur le document 3a, le plan  $\Pi_1$  de la spire est un plan de symétrie de la distribution des courants et le moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  est perpendiculaire à ce plan. Tout plan  $\Pi_2$  contenant l'axe de la spire est un plan d'antisymétrie et le moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  est contenu dans ce plan. Nous reconnaissons là deux propriétés caractéristiques des vecteurs axiaux.

**Le moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  d'un circuit filiforme est un vecteur axial.**

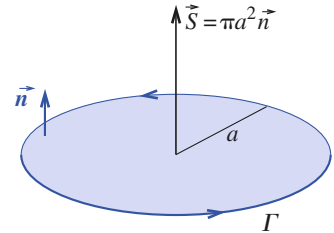
#### Remarque

Nous verrons, plus loin, qu'une boucle élémentaire de courant de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  présente de fortes analogies de comportement avec un dipôle électrostatique de moment dipolaire  $\vec{p}$ . Des différences fondamentales distinguent cependant ces deux entités. Montrons ainsi que le moment dipolaire  $\vec{p}$  est un vecteur polaire.

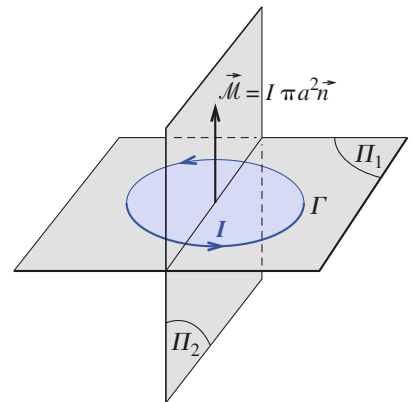
En effet, tout plan  $\Pi_1$  contenant le dipôle (doc. 3b) est un plan de symétrie de la distribution de charges et le moment dipolaire  $\vec{p}$  est contenu dans ce plan. Le plan médiateur  $\Pi_2$  du dipôle est un plan d'antisymétrie et le moment dipolaire  $\vec{p}$  est normal à ce plan. Nous reconnaissons là deux propriétés caractéristiques des vecteurs polaires.



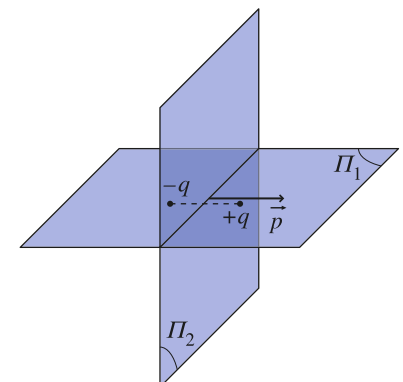
Doc. 1. Surface  $S$  s'appuyant sur un contour  $\Gamma$  orienté.



Doc. 2. Surface orientée d'un contour circulaire.



Doc. 3a. Étude des symétries sur un dipôle magnétique.



Doc. 3b. Étude des symétries pour un dipôle électrostatique.



# Application 1

## Moment magnétique atomique

Un électron, de charge  $q = -e$  et de masse  $m_e$ , décrit, dans une représentation classique, une trajectoire circulaire d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r$  autour du noyau ponctuel en  $O$ . On admet que le moment cinétique de l'électron par rapport à l'axe  $(Oz)$  est :

$$L_z = \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

( $h$  est la constante de Planck :  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J.s). Calculer le moment magnétique associé à ce mouvement orbital de l'électron.

L'électron tournant à vitesse  $v$  constante dans le sens positif par rapport à  $(Oz)$  sur sa trajectoire circulaire, le moment cinétique par rapport à  $(Oz)$  est :

$$L_z = m_e v r, \text{ avec } L_z = \hbar \text{ par hypothèse.}$$

L'électron décrit  $N = \frac{v}{2\pi r}$  tours par unité de temps et

l'intensité associée à un tel mouvement est :

$$I = qN = -\frac{ev}{2\pi r} = -\frac{e\hbar}{2\pi m_e r^2}.$$

Le moment magnétique correspondant, mesuré algébriquement sur  $(Oz)$ , est :

$$\mathcal{M} = \pi r^2 I = -\frac{e\hbar}{2m_e}, \text{ avec } \vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \vec{e}_z$$

Ce calcul élémentaire fait apparaître le magnéton de Bohr :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,26 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2,$$

qui sert d'unité de mesure des moments magnétiques en physique atomique. Les électrons des atomes présentent des moments magnétiques orbitaux (associés à leur mouvement autour du noyau) et des moments magnétiques intrinsèques associés à leur « spin ». Le couplage de ces moments magnétiques, selon les lois quantiques, fournit un moment magnétique atomique éventuellement non nul. Les atomes se comportent alors comme des dipôles magnétiques interagissant avec un champ magnétique extérieur.

La notion de dipôle magnétique est utilisée avec profit à l'échelle atomique pour interpréter les propriétés magnétiques de la matière.

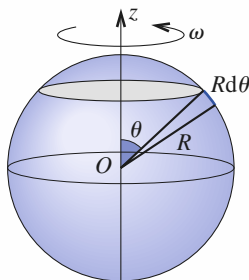
## 1.3. Moment magnétique d'une distribution de courants

Dans le cas d'une distribution de courants limités dans l'espace, la définition du moment magnétique sera généralisée en considérant qu'il s'agit d'un ensemble continu de boucles de courant filiformes (tubes de courants élémentaires) :

$$\vec{\mathcal{M}} = \int d\vec{\mathcal{M}}.$$

# Application 2

Une sphère chargée uniformément en surface, de charge totale  $q$  et de rayon  $R$ , tourne à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de  $(Oz)$ . Déterminer le moment magnétique de la distribution de courants associée.



Doc. 4.

Utilisons les coordonnées sphériques d'axe  $(Oz)$  et découpons la sphère en spires de largeur  $Rd\theta$  (doc. 4). L'intensité de cette spire, associée au mouvement de

rotation, est, en comptant la charge traversant une section droite  $Rd\theta$  par unité de temps :

$$dI = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \sigma (2\pi R^2 \sin \theta d\theta),$$

$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$  désignant la densité surfacique uniforme de charges. Le moment élémentaire  $d\vec{\mathcal{M}}$  associé à cette spire est  $d\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 \sin^2 \theta dI \vec{e}_z$ , soit :

$$d\vec{\mathcal{M}} = \frac{\omega q}{4} R^2 \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z.$$

Comme  $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$ , le moment résultant est :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{\omega q R^2}{3} \vec{e}_z.$$

## 2 Champ magnétostatique créé par un dipôle

### 2.1. Approximation dipolaire

Une boucle de courant crée, en tout point  $M$  de l'espace, un champ magnétostatique donné par la loi de Biot et Savart.

À grande distance de la boucle ( $\frac{a}{r} \ll 1$  pour une spire circulaire de rayon  $a$  (doc. 5a)), la norme du champ magnétique décroît en  $\frac{1}{r^3}$ , comme il est possible de s'en convaincre en considérant l'expression du champ créé par une spire en un point de son axe (cf. chapitre 7, Application 3) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z.$$

À grande distance ( $z \gg R$ ), l'expression précédente se simplifie en :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{|z|^3} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 \vec{M}}{2\pi |z|^3}$$

puisque  $\vec{M} = I \pi R^2 \vec{e}_z$ .

L'exercice 1, page 170, propose une autre vérification de cette propriété qui a son homologue pour le dipôle électrostatique : dans l'approximation dipolaire, la norme du champ  $\vec{E}(M)$  créé par un dipôle électrostatique décroît en  $\frac{1}{r^3}$ .

Il est possible de démontrer, qu'à grande distance d'une boucle de courant (approximation dipolaire), le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par la boucle ne dépend que de  $\vec{r} = \vec{OM}$ , du moment magnétique  $\vec{M}$  et de l'angle  $\theta = (\vec{M}, \vec{r})$ .

**Dans l'approximation dipolaire, une boucle de courant est entièrement caractérisée par son moment magnétique  $\vec{M}$ .**

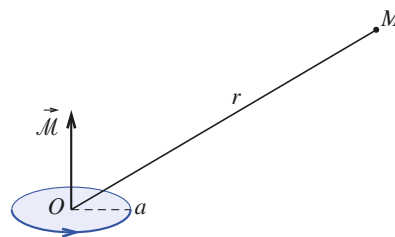
De nouveau, cette propriété n'est pas sans rappeler celle du dipôle électrostatique qui est, lui aussi, entièrement caractérisé, pour ses effets à grande distance, par son moment dipolaire  $\vec{p}$ .

Cette similitude fait souvent nommer une boucle élémentaire de courant, *dipôle magnétique*.

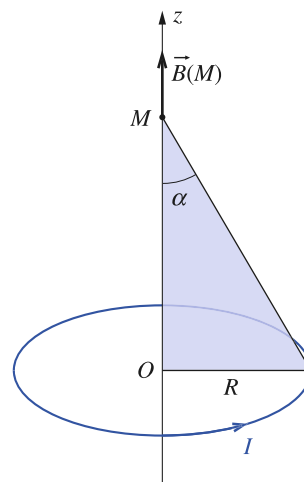
### 2.2. Analogie avec le dipôle électrostatique

Considérons un doublet de charges  $-q$  et  $+q$  (distances de  $a$ ) centré en  $O$  et de moment dipolaire  $\vec{p} = qa \vec{e}_z = p \vec{e}_z$ . Tout plan contenant l'axe ( $Oz$ ) est un plan de symétrie. Les lignes de champ du vecteur  $\vec{E}$ , de révolution autour de l'axe ( $Oz$ ), sont contenues dans de tels plans. Quelques lignes de champ électrostatique sont représentées dans un plan contenant ( $Oz$ ) sur le document 6a.

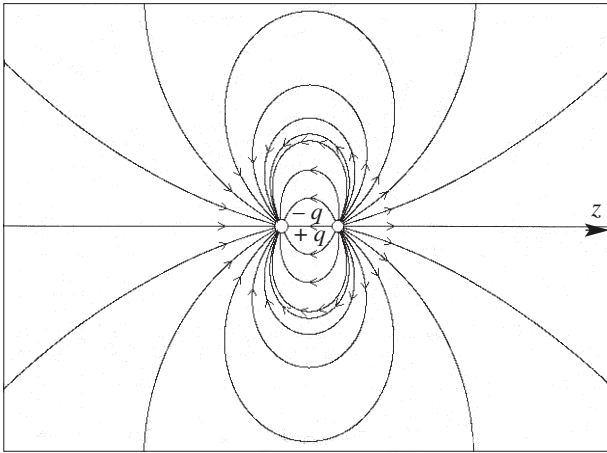
Considérons à présent une spire circulaire de rayon  $a$ , d'axe ( $Oz$ ) et de moment dipolaire magnétique  $\vec{M} = I \pi a^2 \vec{e}_z = M \vec{e}_z$ . Tout plan contenant l'axe ( $Oz$ ) est un plan d'antisymétrie. Les lignes de champ du vecteur axial  $\vec{B}$ , de révolution autour de l'axe ( $Oz$ ), sont contenues dans de tels plans. Le document 6b représente quelques lignes de champ magnétostatique dans un plan contenant ( $Oz$ ).



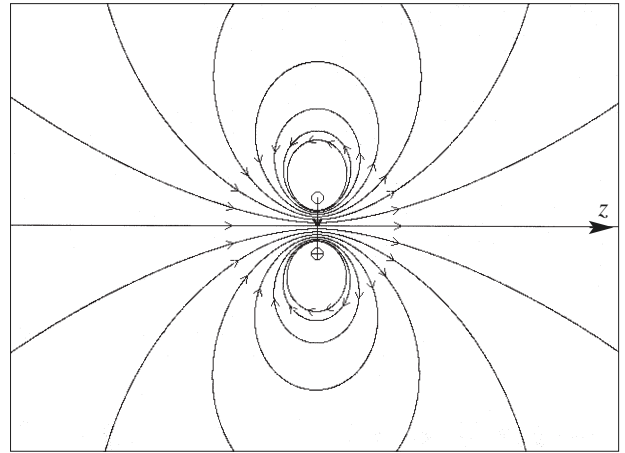
Doc. 5a. Boucle de courant.



Doc. 5b. Champ  $\vec{B}(M)$  créé par une spire en un point de son axe.



**Doc. 6a.** Lignes de champ électrostatique d'un doublet  $-q$  et  $+q$ .

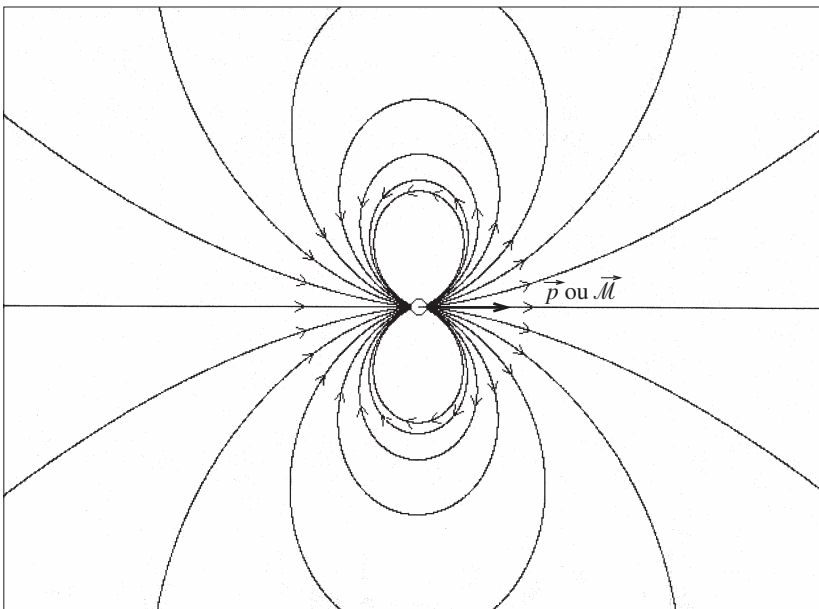


**Doc. 6b.** Lignes de champ magnétostatique d'une spire.

L'extension de la zone apparaissant sur ces documents est de l'ordre de  $(10a)^2$ . Les deux cartes de champ obtenues sont clairement distinctes, car les comportements des champs au voisinage de leurs sources sont très différents : le champ électrostatique diverge à partir de ses sources (les charges) alors que le champ magnétostatique tourbillonne autour des siennes (les courants).

Si nous observons ces cartes de champ à une échelle beaucoup plus grande (zone de l'ordre de  $(100a)^2$  nous obtenons dans les deux cas la même configuration des lignes de champ (doc. 7).

**Le champ électrostatique d'un dipôle  $\vec{p} = p \vec{e}_z$  et le champ magnétostatique d'un dipôle  $\vec{M} = M \vec{e}_z$  ont le même comportement à grande distance  $r \gg a$ .**



◀ **Doc. 7.** Ligne de champ d'un dipôle qu'il soit électrique ou magnétique.

## 2.3. Application au calcul du champ magnétostatique

### 2.3.1. Champ dipolaire

Le champ électrostatique d'un doublet de charges a pour coordonnées sphériques d'axe ( $Oz$ ) (doc. 8), dans l'approximation dipolaire :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}, \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad E_\varphi = 0.$$

Du fait de l'analogie observée à grande distance des sources, nous supposons que le champ  $\vec{B}$  créé au point  $M$  de coordonnées sphériques ( $r, \theta, \varphi$ ) par un dipôle  $\vec{M} = M \vec{e}_z$  placé en  $O$  est de la forme :

$$B_r = 2B_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^3}, \quad B_\theta = B_0 a^3 \frac{\sin \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\varphi = 0.$$

Le facteur  $B_0$  est une constante homogène à un champ magnétique que nous allons déterminer.

*Remarque* : Il est possible d'obtenir ce résultat par développement du champ  $\vec{B}$  créé par une spire en un point éloigné. Un tel calcul est assez fastidieux.

### 2.3.2. Détermination du champ par identification

Pour trouver la constante  $B_0$ , nous pouvons comparer le champ dipolaire précédent avec le champ créé par une spire en un point très éloigné sur l'axe de celle-ci (doc. 9). Sur son axe ( $Oz$ ), le champ de la spire est (cf. § 2.1) :

$$\left(\frac{a}{|z|} \ll 1\right) \ll 1, \quad B(z) \approx \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{|z|^3} = \frac{\mu_0 M}{2\pi |z|^3}.$$

Identifiant cette valeur à  $B_r = 2B_0 \frac{a^3}{r^3}$ , avec  $r = |z|$  nous obtenons :

$$B_0 a^3 = \frac{\mu_0 M}{4\pi}.$$

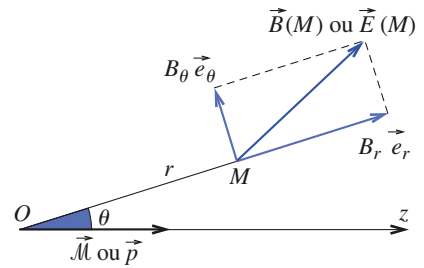
Les composantes  $B_r, B_\theta$  et  $B_\varphi$ , en coordonnées sphériques, du champ d'un dipôle magnétique placé en  $O$  et de moment  $\vec{M} = M \vec{e}_z$  sont donc :

$$\begin{cases} B_r = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} \\ B_\varphi = 0 \end{cases}.$$

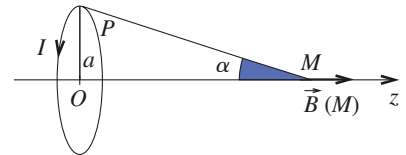
L'expression du champ magnétique du dipôle  $\vec{M}$  est en coordonnées

sphériques d'axe ( $O, \vec{M}$ ) :  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos \theta \vec{e}_r + M \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3}.$

Son expression intrinsèque est donc :  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[3(\vec{M} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{M}]}{r^3}.$



Doc. 8.



Doc. 9.

# Application 3

Soit un dipôle magnétique de moment  $\vec{M}$  porté par ( $Oz$ ). Déterminer en coordonnées polaires ( $r, \theta$ ) les équations des lignes de champ magnétique d'un dipôle magnétique dans un plan contenant l'axe ( $Oz$ ).

Une ligne de champ étant une courbe (plane ici) en tout point  $M$  de laquelle le champ  $\vec{B}$  est tangent, les vecteurs  $d\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sont colinéaires :  $d\vec{M} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$

En coordonnées sphériques (polaires dans un demi-plan méridien), nous obtenons :

$$\frac{dr}{B_r} = r \frac{d\theta}{B_\theta}, \quad \text{soit} \quad \frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} d\theta.$$

Par intégration, il vient  $r = A \sin^2 \theta$ ,  $A$  étant une constante dépendant de la ligne considérée.

### 3 Comparaison des propriétés des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ statiques

À ce stade, nous pouvons résumer et comparer les propriétés des champs électrostatique et magnétostatique.

	champ électrostatique	champ magnétostatique
source	charges fixes	charges en mouvement (courants)
champ	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(D)} \frac{\delta q_P}{r_{PM}^2} \vec{e}_{PM}$ (loi de Coulomb) $\vec{E}$ est un vecteur polaire	$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{(D)} \frac{\delta \vec{C}_P \wedge \vec{e}_{PM}}{r_{PM}^2}$ (loi de Biot et Savart) $\vec{B}$ est un vecteur axial
particule $P$ de charge $q_P$	$\delta q_P = q_P$ $\vec{E}$ est défini et continu en tout point de l'espace sauf sur la charge	$\delta \vec{C}_P = q_P \vec{v}(P)$ $\vec{B}$ est défini et continu en tout point de l'espace sauf sur la trajectoire
distribution volumique	$\delta q_P = \rho(P) d\tau$ $\vec{E}$ est défini et continu en tout point de l'espace	$\delta \vec{C}_P = \vec{j}_v(P) d\tau$ $\vec{B}$ est défini et continu en tout point de l'espace
distribution surfacique	$\delta q_P = \sigma(P) dS$ $\vec{E}$ est défini et continu en tout point de l'espace, sauf sur la distribution où il subit une discontinuité normale : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$	$\delta \vec{C}_P = \vec{j}_s(P) dS$ $\vec{B}$ est défini et continu en tout point de l'espace, sauf sur la distribution où il subit une discontinuité tangentielle : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$
distribution linéique	distribution linéique : $\delta q_P = \lambda(p) d\ell$ $\vec{E}$ est défini et continu en tout point de l'espace, sauf sur la distribution	$\delta \vec{C}_P = I d\vec{\ell}$ $\vec{B}$ est défini et continu en tout point de l'espace, sauf sur la distribution
force	$\vec{F}(M) = \delta q_M \vec{E}(M)$	$\vec{F}(M) = \delta \vec{C}_M(M) \wedge \vec{B}(M)$
lignes de champ	$\vec{E}$ diverge à partir de ses sources et ses lignes de champ sont non fermées	$\vec{B}$ tourbillonne autour de ses sources et ses lignes de champ sont fermées
circulation	la circulation de $\vec{E}$ est conservative : $\oint \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell} = 0$ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel : $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(D)} \frac{dq_P}{r_{PM}}$	la circulation de $\vec{B}$ est non conservative : $\oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{(D)} \epsilon_k I_k$ (théorème d'Ampère) relation entre le champ et ses sources
flux	le flux de $\vec{E}$ n'est pas conservatif : $\oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ (théorème de Gauss) relation entre le champ et ses sources	le flux de $\vec{B}$ est conservatif : $\oiint \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0$
dipôle	le moment dipolaire $\vec{p} = q_P \vec{P}_+$ est un vecteur polaire	le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S}$ est un vecteur axial
champ dipolaire	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}}{r^3}$	$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{\mathcal{M}}}{r^3}$

## CQFR

## ● MOMENT MAGNÉTIQUE

Le moment magnétique d'une boucle de courant d'intensité  $I$  (orientée dans le sens du courant) et de surface  $\vec{S}$ , est :

$$\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}.$$

Dans le cas d'une spire circulaire :

$$\vec{\mathcal{M}} = I\pi a^2 \vec{n}.$$

Le moment magnétique est un vecteur axial.

## ● CHAMP DIPOLAIRE MAGNÉTIQUE

En des points très éloignés de la boucle de courant, son champ magnétique tend vers celui d'un dipôle magnétique de moment  $\vec{\mathcal{M}}$ .

Le champ électrostatique d'un dipôle  $\vec{p} = p\vec{e}_z$  et le champ magnétostatique d'un dipôle  $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{e}_z$  ont le même comportement à grande distance  $r \gg a$ .

L'expression du champ magnétique du dipôle  $\vec{\mathcal{M}}$  est en coordonnées sphériques d'axe  $(O, \vec{\mathcal{M}})$  :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos \theta \vec{e}_r + \mathcal{M} \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3}.$$

Son expression intrinsèque est donc :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathcal{M} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{\mathcal{M}}}{r^3} \right).$$

## Contrôle rapide

## Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Définir le moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  d'une boucle de courant de vecteur surface  $\vec{S}$  et d'intensité  $I$ .
- ✓ Donner, dans l'approximation dipolaire, l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par un dipôle magnétique de moment  $\vec{\mathcal{M}}$ .
- ✓ Retrouver l'expression intrinsèque du champ magnétique créé par un dipôle magnétique de moment  $\vec{\mathcal{M}}$ .

## Du tac au tac (Vrai ou faux)

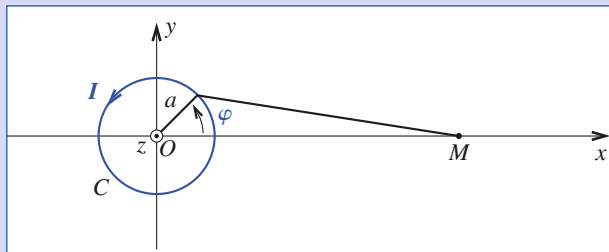
1. Deux surfaces s'appuyant sur le même contour n'ont pas obligatoirement même vecteur surface.  
☐ Vrai ☐ Faux
2. Le moment magnétique, tout comme son homologue électrostatique, le moment dipolaire, est un vecteur polaire.  
☐ Vrai ☐ Faux
3. Le champ électrostatique d'un dipôle  $\vec{p} = p\vec{e}_z$  et le champ magnétostatique d'un dipôle  $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{e}_z$  ont le même comportement dans tout l'espace.  
☐ Vrai ☐ Faux
4. Par analogie avec le dipôle électrostatique, il est possible d'analyser un dipôle magnétique comme un doublet de « charges magnétiques ».  
☐ Vrai ☐ Faux

► Solution, page 172.

# Exercices

1

## Champ magnétique en un point du plan d'une spire



Une spire circulaire de centre  $O$ , de rayon  $a$  et d'axe  $(Oz)$  est parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Un point courant  $P$  de la spire est repéré par l'angle  $\varphi$  que fait le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  avec l'axe  $(Ox)$  de référence. Exprimer sous forme d'une intégrale le champ magnétique créé en un point  $M$  de l'axe  $(Ox)$  très éloigné de la spire  $\left(\frac{x}{a} \gg 1\right)$ .

Effectuer un développement limité en  $u = \frac{a}{x}$  de l'intégrale et obtenir la partie principale du champ  $\vec{B}(M)$ . Vérifier que ce champ est bien celui créé par un dipôle magnétique au même point.

2

## Champ magnétique dans le plan d'un disque tournant

Un disque conducteur de centre  $O$  et de rayon  $R$  tourne à la vitesse angulaire  $\omega$  constante autour de son axe  $(Oz)$ . Ce disque porte une charge totale  $q$  répartie avec une densité surfacique totale (les deux faces sont comptées) :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}},$$

où  $r = OP$  désigne la distance du centre à un point  $P$  du disque.

- 1) Trouver la valeur de  $\sigma_0$  en fonction de  $q$  et de  $R$ .
- 2) Quelle est l'expression du champ magnétique créé par une telle distribution en un point  $M$  situé dans le plan du disque et supposé très éloigné de celui-ci  $r = OM \gg R$ .

3

## Chaîne linéique de dipôles magnétiques

Une chaîne linéique de dipôles magnétiques est répartie sur l'axe  $(Ox)$  d'un repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , avec une densité uniforme  $\mathcal{M}$  : un élément de longueur  $dx$  de la chaîne se comporte comme un dipôle magnétique de moment :

$$d\vec{M} = \mathcal{M} dx \vec{e}_x.$$

- 1) a) Quelle est *a priori* la direction du champ magnétique créé par cette distribution en un point quelconque de l'espace ? Montrer qu'il suffit de déterminer ce champ sur l'axe  $(Oy)$  (par exemple).

- b) Par un calcul direct, vérifier que ce champ est nul.

- 2) Que peut-on conclure de ce résultat concernant le champ magnétique créé par un solénoïde circulaire infiniment long, en un point extérieur supposé très éloigné de l'axe du solénoïde ? En déduire le champ magnétique créé par un solénoïde infiniment long en tout point intérieur au solénoïde.

4

## Mesure du moment dipolaire magnétique d'un aimant

Soit un petit aimant de moment magnétique de norme  $\mathcal{M}$  inconnue. On dispose d'une aiguille aimantée mobile sans frottements autour d'un axe vertical. À l'équilibre, cette aiguille est orientée dans le sens de la composante horizontale du champ auquel elle est soumise (voir *exercice 7*). Comment peut-on mesurer le moment  $\mathcal{M}$  de l'aimant en un lieu où la composante horizontale  $B_H$  du champ magnétique terrestre est connue ?

Préciser le protocole expérimental pour le cas d'un petit aimant qui aurait le même moment magnétique qu'une bobine de rayon moyen  $R = 50$  cm, comportant  $N = 10$  spires parcourues chacune par un courant d'intensité  $I = 2$  A, sachant que  $B_H = 2 \cdot 10^{-5}$  T.

5

## Latitude géographique et inclinaison du champ magnétique terrestre

Le champ géomagnétique  $\vec{B}_T$  (champ dont la Terre est la source) est caractérisé en tout lieu par sa norme, sa déclinaison  $D$  (angle de la composante horizontale de  $\vec{B}_T$  avec le Nord géographique) et son inclinaison  $I$  (angle que fait  $\vec{B}_T$  par rapport au plan horizontal). Cet exercice propose une première approche très simplifiée du géomagnétisme, dans laquelle on suppose en particulier que la déclinaison est nulle en tout point.

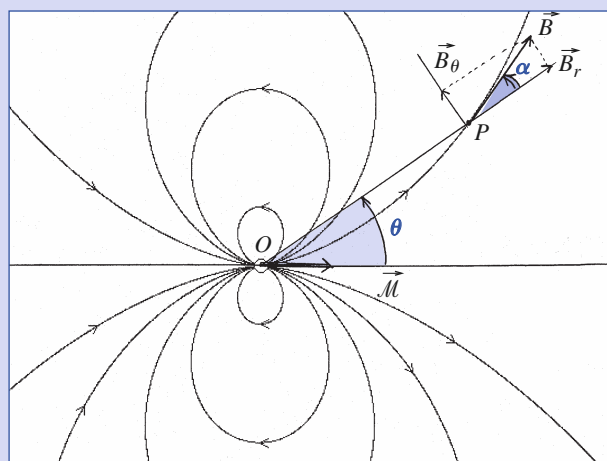
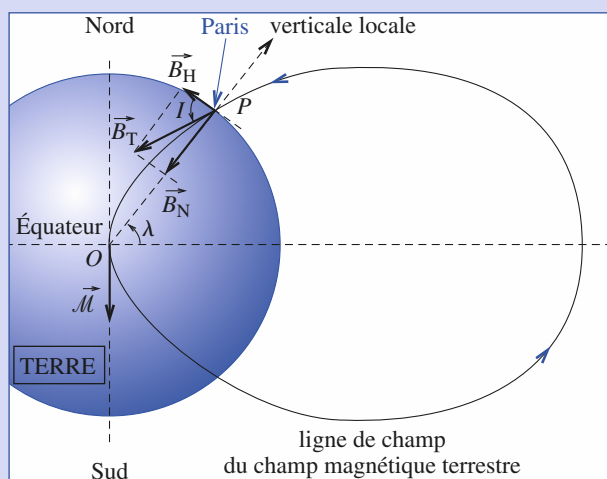
- 1) Un dipôle magnétique de moment  $\vec{M}$ , placé en  $O$ , crée en tout point  $P$  de l'espace un champ magnétique  $\vec{B}(P)$ . On utilise les coordonnées sphériques du point  $P$  :  $\|OP\| = r$  et  $\theta = (\vec{M}, \overrightarrow{OP})$ .

- a) Rappel l'expression de  $\vec{B}(P)$ . Tracer quelques lignes de champ.

- b) On pose  $\alpha = (\overrightarrow{OP}, \vec{B}(P))$  ; quelle relation simple lie  $\alpha$  et  $\theta$  ?

- 2) En supposant que le champ terrestre soit dû à un dipôle magnétique confondu avec l'axe de rotation terrestre, quelle serait la relation liant la latitude  $\lambda$  du lieu et l'inclinaison du champ  $\vec{B}_T$  en ce lieu ?

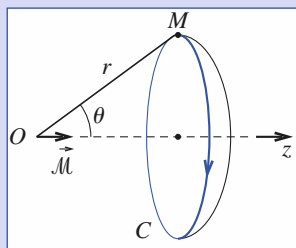




## 6 Lignes de champ et champ magnétique créés par un dipôle magnétique

Soit un dipôle magnétique de moment  $\vec{M} = M\vec{e}_z$  placé en  $O$ . On repère un point  $M$  quelconque par ses coordonnées sphériques de centre  $O$  et d'axe  $(Oz)$  :

$r, \theta$  et  $\varphi$ .



Dans un demi-plan méridien ( $\varphi = \text{cte}$ ) l'équation d'une ligne de champ donnée est de la forme  $r = A \sin^2 \theta$ .

1) En déduire que le flux du champ magnétique créé par ce dipôle à travers une surface s'appuyant sur un cercle  $\mathcal{C}$  d'axe  $(Oz)$ , vu sous l'angle  $\theta$  du point  $O$ , est de la forme :

$$\Phi = f \left( \frac{\sin^2 \theta}{r} \right).$$

Montrer que l'étude du flux du champ  $\vec{B}$  d'une spire circulaire centrée en  $O$  et d'axe  $(Oz)$  à travers un cercle  $\mathcal{C}$  de même axe  $(Oz)$  très éloigné de la spire, suggère que :

$$\Phi = \text{cte} \left( \frac{\sin^2 \theta}{r} \right).$$

Nous ferons cette hypothèse pour la suite. Préciser la valeur de la constante multiplicative.

2) En choisissant judicieusement la surface s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ , calculer le flux  $\Phi$  du champ magnétique du dipôle à travers  $\mathcal{C}$  sous forme d'une intégrale où n'intervient que la seule composante radiale du champ  $\vec{B}$ . Compte tenu du résultat précédent conclure que cette composante radiale  $B_r$  est de la forme  $B_r = 2B_0 \frac{\cos \theta}{r^3}$ ,  $B_0$  étant une constante à expliciter.

3) Par un raisonnement équivalent, en déduire l'expression de la composante orthoradiale  $B_\theta$  du champ créé par le dipôle.

## 7 Mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre

Un petit aimant, ou une aiguille aimantée, assimilable à un dipôle magnétique de moment  $\vec{M}$  (rigidement lié à l'aimant) subit, lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme, un couple de moment  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ .

Cette expression est généralisable, concernant le moment des forces au point où est placé l'aimant, lorsque le champ magnétique n'est pas uniforme.

On se propose de mesurer la norme de la composante horizontale  $\vec{B}_H$  du champ magnétique terrestre en un lieu. À Paris  $B_H$  est de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ . Pour cela on dispose d'une petite aiguille aimantée montée sur pivot, donc mobile autour d'un axe vertical sans frottements. Ce petit aimant est placé au centre  $O$  d'une bobine plate comportant  $N$  spires circulaires de rayon  $R$  chacune (on néglige la section des fils) contenue dans un plan vertical et alimentée par un courant continu d'intensité  $I$  réglable.

Les rotations éventuelles de l'aiguille sont mesurables sur un cercle gradué, la graduation 0 correspondant à la position de l'aiguille dans le plan de la bobine.

### 1) Méthode de la boussole des tangentes

Sachant que l'on peut choisir le plan de la bobine, proposer un protocole de mesure de la composante  $\vec{B}_H$  du champ magnétique terrestre.

L'expérience a été réalisée avec  $\vec{B}_H$  contenue dans le plan de la bobine. Lorsque l'intensité passe d'une valeur nulle à la valeur  $I$  l'aiguille tourne d'un angle  $\alpha$ . En déduire  $\vec{B}_H$ .

Données :  $N = 5$  ;  $R = 12 \text{ cm}$  ;  $I = 0,381 \text{ A}$  ;  $\alpha = 20^\circ$ .

# Exercices

## 2) Méthode des oscillations

On utilise le même matériel que précédemment mais cette fois la position de référence (ou d'équilibre) de l'aiguille est perpendiculaire à la bobine.

On désigne par  $B_C$  la norme du champ magnétique créé par ce circuit.

On suppose  $I$  tel que :

$$B_C < B_H.$$

Montrer que la position d'équilibre de l'aiguille aimantée n'est pas modifiée par l'existence d'un tel courant  $I$  dans la bobine.

Montrer que la période des petites oscillations de l'aiguille, préalablement écartée de sa position d'équilibre, dépend du sens du courant dans le circuit. Désignant par  $T$  et par  $T'$  les périodes des oscillations quasi sinusoïdales observées pour les deux sens (à préciser), établir que  $B_H = \frac{T^2 + T'^2}{T'^2 - T^2} B_C$ .

# Corrigés

Solution du tac au tac, p. 169.

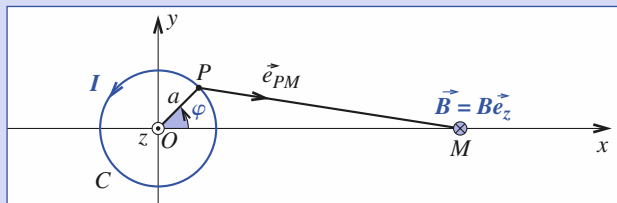
1. Faux ;

2. Faux ;

3. Faux ;

4. Faux.

1



$\vec{B}(M) = \oint \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{P} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}$  est porté par  $(Oz)$  (le plan  $(xOy)$  est un plan de symétrie des courants).

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{PM} = \begin{pmatrix} x - a \cos \varphi \\ -a \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad d\vec{P} = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi d\varphi \\ a \cos \varphi d\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons  $d\vec{P} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \vec{e}_z \frac{a \cos \varphi (a \cos \varphi - x) + (a \sin \varphi)^2}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi$ , puis

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x^3} \vec{e}_z F(u), \text{ avec } F(u) = \int_0^{2\pi} \frac{u^2 - u \cos \varphi}{(1 - 2u \cos \varphi + u^2)^{3/2}} d\varphi.$$

En se limitant aux termes en  $u^2$  :

$$F(u) = \int_0^{2\pi} [-u \cos \varphi + u^2(1 - 3 \cos^2 \varphi)] d\varphi = -\pi u^2,$$

$$\text{soit } \vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi x^3} \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi x^3} \vec{e}_z.$$

Ce qui correspond bien au cas du dipôle ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

2

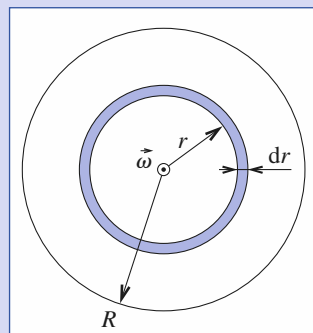
1) Nous avons  $q = \iint \sigma dS$ .

La charge portée par une couronne de rayon  $r$  et de largeur  $dr$  est égale à :

$$dq = \sigma 2\pi r dr.$$

$$\text{Soit } q = \int_0^R \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - (r/R)^2}} 2\pi r dr$$

$$= 2\pi \sigma_0 R^2 \int_0^1 \frac{du}{2\sqrt{1-u}}.$$



Pour l'intégration, poser  $u = \sin^2 \varphi$ .

D'où :

$$\int_0^1 \frac{du}{2\sqrt{1-u}} = -\int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = 1 \quad \text{et } q = 2\pi \sigma_0 R^2 \quad \text{et } \sigma_0 = \frac{q}{2\pi R^2}.$$

2) L'intensité  $\delta I$  circulant dans la couronne précédente est égale à  $\frac{\delta q}{T}$  ( $T$  étant

la période de rotation du disque) :  $\delta I = \frac{\delta q}{2\pi} \omega$ . D'où le moment magnétique associé :

$$\delta \vec{\mathcal{M}} = \frac{\delta q}{2\pi} \vec{\omega} \pi r^2, \text{ ainsi que le moment magnétique de l'ensemble :}$$

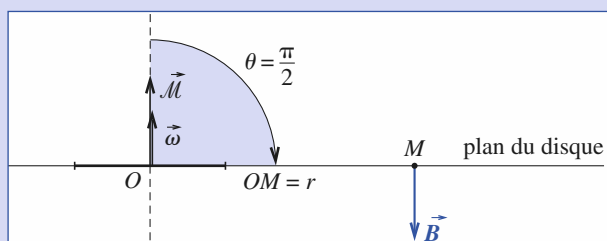
$$\vec{\mathcal{M}} = \int_0^R \frac{\pi \vec{\omega} \sigma_0}{\sqrt{1 - (r/R)^2}} r^3 dr,$$

soit :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{q}{3} \vec{\omega} R^2.$$

Remarque :

$$\int_0^1 \frac{u du}{2\sqrt{1-u}} = \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{2}{3} \text{ en posant } u = \sin^2 \varphi.$$



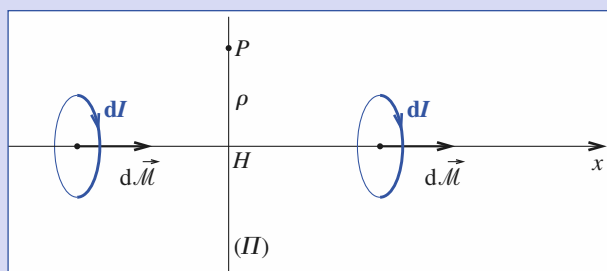
$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 \vec{M}}{4\pi r^3} \left( \theta = \frac{\pi}{2} \right).$$

3

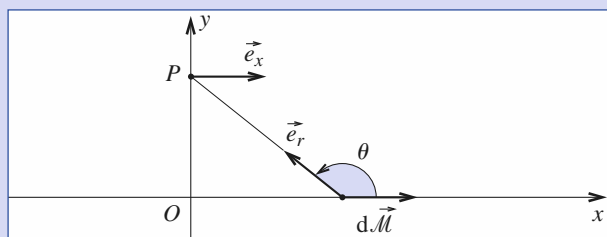
1) a) Un dipôle magnétique peut être remplacé par une spire de petite dimension. Tout plan  $(\Pi)$  perpendiculaire à  $(Ox)$  passant par  $P$  est un plan de symétrie des courants, donc  $\vec{B}(P)$  est perpendiculaire à ce plan et parallèle à  $(Ox)$ . Le système de courants est invariant par translation ou rotation suivant  $(Ox)$ , donc :

$$\vec{B}(P) = B(\rho) \vec{e}_x \text{ avec } \rho = HP.$$

D'où  $\vec{B}(P)$  ne dépend que de la distance à l'axe  $(Ox)$ .



b) Calculons  $dB_x$  en  $P$  ( $OP = y$ ) dû à  $d\vec{M}$  situé sur  $(Ox)$ .



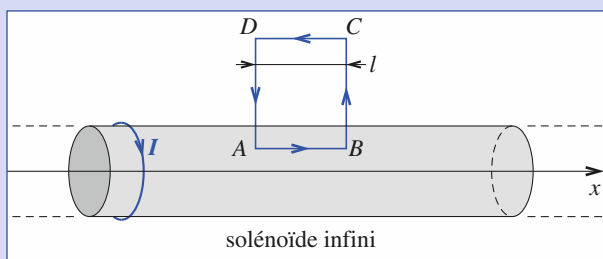
$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(3(d\vec{M} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - d\vec{M} \vec{e}_x)}{r^3} \cdot \vec{e}_x = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) dx.$$

Posons  $u = \cos \theta$  ; d'où  $r = \frac{y}{\sin \theta}$  ;  $x = -\frac{y}{\tan \theta}$  ;  $dx = -\frac{y}{\sin^2 \theta} d\theta$

et  $\frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3} dx = \frac{1}{y^2} (3u^2 - 1) du$ .

Alors  $B_x(P) = \frac{\mu_0 M}{4\pi y^2} \int_{-1}^{+1} (3u^2 - 1) du = \frac{\mu_0 M}{4\pi y^2} [u^3 - u]_{-1}^{+1} = 0$ .

2) La chaîne linéique précédente de moments magnétiques peut modéliser un ensemble de spires de même rayon  $R$  et d'axe  $(Ox)$ , régulièrement réparties, donc un solénoïde infini. En un point éloigné de l'axe de ce solénoïde, le champ magnétique est donc nul. Étudions la relation entre  $M$  et le nombre de spires de rayon  $R$  par unité de longueur  $n$ , parcourues par un courant  $I$ . Le moment magnétique d'une spire étant égal à  $I\pi R^2$ , nous avons  $M dx = n dx I\pi R^2$ , soit  $M = n I\pi R^2$ .

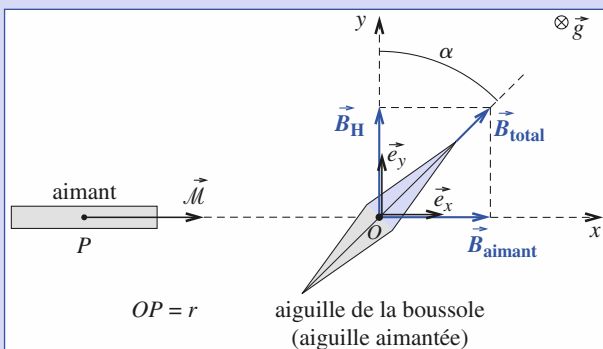


Retrouvons  $\vec{B}$  à l'intérieur du solénoïde par application du théorème d'Ampère. La circulation de  $\vec{B}$  sur la courbe  $ABCD$  orientée nous donne :

$$(\vec{B} // \vec{e}_x) B_{\text{int}} l = \mu_0 n \ell I,$$

soit  $B_{\text{int}} = \mu_0 n I$ , qui était le résultat attendu.

4



L'ensemble est disposé comme ci-dessus dans un plan horizontal.

$$\tan \alpha = \frac{B_{\text{aimant}}}{B_H} = \frac{2\mu_0 M}{4\pi r^3 B_H}, \text{ soit } M = \frac{4\pi r^3 B_H}{2\mu_0} \tan \alpha.$$

L'incertitude relative sur  $M$  est égale à :

$$\frac{dM}{M} = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 d\alpha}{\sin 2\alpha} \text{ minimale pour } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Il faut donc choisir  $r$  pour que  $\alpha \approx \frac{\pi}{4}$  soit  $r = \left( \frac{2\mu_0 M}{4\pi B_H} \right)^{\frac{1}{3}}$ .

A.N. :  $M = N\pi R^2 I = 15,7 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , cela donne  $r = 0,54 \text{ m}$ , ce qui est facilement réalisable.

5

1) a)  $\vec{B}(P) = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta$ ,  $B_r = \frac{2\mu_0 M}{4\pi r^3} \cos \theta$  et  $B_\theta = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sin \theta$ .

b)  $\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \theta$ .

2) En tenant compte de l'orientation de  $\vec{M}$  ( $7,8 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ), nous obtenons :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + I \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2} + \lambda, \text{ d'où } \tan I = \frac{1}{2} \tan \lambda.$$

6

1) Le flux de  $\vec{B}$  à travers toute surface s'appuyant sur un tube de champ donné ne dépend pas du choix de cette surface ( $\vec{B}$  est un vecteur à flux conservatif). Les tubes de champ peuvent être définis par une équation de la forme  $\Phi = \text{cte}$ .

Engendrés par les lignes de champ, leur équation est donc aussi  $\frac{\sin^2 \theta}{r} = \text{cte}$ .

Nous en déduisons  $\Phi = f\left(\frac{\sin^2 \theta}{r}\right)$ .

# Corrigés

• Soit une spire circulaire d'axe ( $Oz$ ) parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Le flux  $\Phi$  de  $\vec{B}$  à travers un cercle  $\mathcal{C}$  très éloigné de la spire, de rayon  $a$  et de même axe ( $Oz$ )

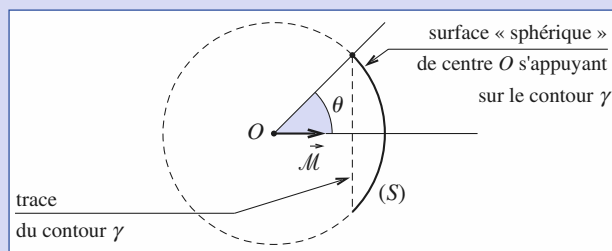
est donné par  $\Phi = \pi a^2 \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0 I}{2R} \pi a^2 \frac{R^3}{z^3} = \frac{\mu_0 (I \pi R^2) a^2}{2 z^3}$

(le champ magnétique sur l'axe de la spire étant égal à  $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$ ).

Soit  $\Phi = \frac{\mu_0}{2} \mathcal{M} \frac{a^2}{z^3}$ . Sachant que  $a = r \sin \theta$  et  $z = r \cos \theta \approx r$ , nous obtenons :

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2} \mathcal{M} \frac{\sin^2 \theta}{r}.$$

2) Sachant que  $\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta$ , et que nous désirons calculer  $B_r$ , prenons pour surface s'appuyant sur le contour  $\gamma$  une calotte sphérique de centre  $O$ .



Nous obtenons alors  $\Phi = \int_0^\theta 2\pi r \sin u B_r(r, u) r du = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2} \frac{\sin^2 \theta}{r}$  ou encore :

$$\int_0^\theta \sin u B_r(r, u) du = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{\sin^2 \theta}{r^3}.$$

La dérivation par rapport à  $\theta$  nous donne  $B(r, \theta) \sin \theta = \frac{2 \mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^3}$ ,

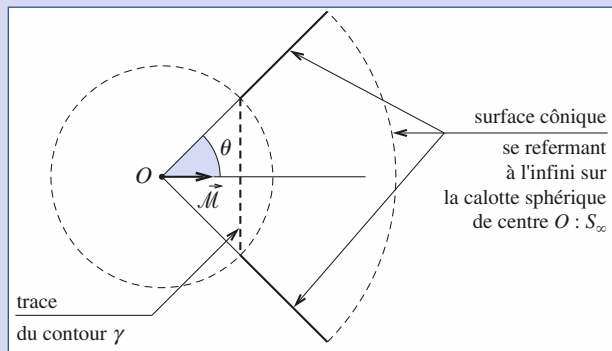
$$\text{soit : } B_r(r, \theta) = \frac{2 \mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^3}.$$

3) Nous désirons ne faire intervenir que  $B_\theta$ .

Nous savons que  $B_r$  varie en  $\frac{1}{r^3}$ , donc le flux de  $\vec{B}$  à travers  $S_\infty$  est nul. Le flux de  $\vec{B}$  sur la surface conique est donné par :

$$\Phi = \int_r^\infty 2\pi u \sin \theta du B_\theta(u, \theta) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2} \frac{\sin^2 \theta}{r}, \text{ soit } (\theta \text{ est constant}) :$$

$$\int_r^\infty u B_\theta(u, \theta) du = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r}.$$



La dérivation par rapport à  $r$  nous donne :

$$(r B_\theta(r, \theta))_{r=\infty} - r B_\theta(r, \theta) = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2}.$$

Le champ magnétique étant en  $\frac{1}{r^3}$ ,  $(r B_\theta(r, \theta))_{r=\infty} = 0$ , soit :

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3}.$$



$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ , donc l'aiguille aimantée, assimilable à un dipôle magnétique, s'oriente dans le sens du champ magnétique.

1) Si aucun courant ne circule dans la bobine, l'aiguille s'oriente dans la direction de  $\vec{B}_H$ .

Si le courant  $I$  circule, la bobine crée un champ  $\vec{B}_C$  et l'aiguille s'oriente dans la direction de  $\vec{B} = \vec{B}_H + \vec{B}_C$ .

$$\text{D'où : } \tan \alpha = \frac{B_C}{B_H} = \frac{\mu_0 N I}{2 R B_H},$$

$$\text{soit : } B_H = \frac{\mu_0 N I}{2 R \tan \alpha}.$$

$$\text{A.N. : } B_H = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ T.}$$

2)  $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_H + \vec{B}_C$  est toujours dans la direction et dans le sens de  $\vec{B}_H$  ( $B_C < B_H$ ) : l'aiguille conserve la même position d'équilibre.

Le théorème du moment cinétique appliqué à l'aiguille aimantée et de moment d'inertie  $J_0$  par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la figure passant par  $O$  donne :

$$J_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\mathcal{M} B \sin \theta.$$

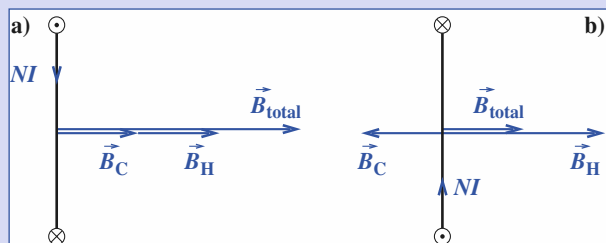
Pour les petits angles, les oscillations sont harmoniques et de période :  $\mathcal{M}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 \theta}{\mathcal{M} B}}.$$

En considérant les deux orientations de l'intensité dans la bobine, nous obtenons (cf. schéma) :

$$\bullet \text{ cas a) : } T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M} B}}, \text{ avec } B = B_H + B_C;$$

$$\bullet \text{ cas b) : } T' = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M} B'}}, \text{ avec } B' = B_H - B_C.$$



$$\text{D'où } \frac{B_H + B_C}{B_H - B_C} = \frac{T'^2}{T^2}, \text{ soit } B_H = B_C \frac{T'^2 + T^2}{T'^2 - T^2}.$$

# La force de Lorentz

# 10

## Introduction

*Hendrik-Antoon Lorentz (1853-1928) est un physicien hollandais, très célèbre pour ses travaux en électromagnétisme de la matière. La force électromagnétique qui s'exerce sur une particule chargée porte son nom. Prix Nobel en 1902.*

*Joseph-John Thomson (1856-1940), physicien anglais, mesure la grandeur ( $e/m$ ) des électrons en 1891 et il réalise, en 1913, un spectrographe de masse mettant en évidence l'existence d'isotopes (méthode des paraboles). Prix Nobel en 1906.*

*Pierre-Simon Laplace (1742-1827), physicien français auteur de nombreux travaux (mécanique céleste, théorie du potentiel, vitesse du son...) a énoncé de manière précise les lois de la magnétostatique relatives au champ magnétique créé par un élément de courant (loi actuellement dite de Biot et Savart) et la force subie par un élément de courant : force de Laplace.*

*Edwin-Herbert Hall (1855-1938) découvre l'effet qui porte son nom.*

## O B J E C T I F S

- Mouvements de particules chargées dans des champs électriques ou magnétiques indépendants du temps.
- Modèle de conduction électronique dans les métaux.
- Force de Laplace s'exerçant sur un élément de conducteur.
- Origine physique du champ de Hall.

## P R É R E Q U I S

- Champs électrostatique et magnétostatique.
- Mécanique du point matériel.

Nous nous placerons dans le cadre de la mécanique classique et dans des référentiels galiléens.

## L'interaction électromagnétique

### 1.1. La force de Lorentz

#### 1.1.1. Formulation

C'est Lorentz qui, le premier, a décrit la force électromagnétique  $\vec{F}$  agissant sur une particule chargée.

La force électromagnétique subie par une particule de charge  $q$  et de masse  $m$ , se trouvant, à la date  $t$ , au point  $M$  du référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , en présence d'un champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$ , et se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}(M, t)_{/\mathcal{R}}$  est donnée par :

$$\vec{F}_{\text{Lo}} = q [\vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t)_{/\mathcal{R}} \wedge \vec{B}(M, t)].$$

Dans le cas de champs permanents et indépendants du temps nous avons :

$$\vec{F}_{\text{Lo}} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Cette force de Lorentz traduit l'une des interactions fondamentales de la physique ; son domaine de validité n'est pas limité dans le cadre de nos connaissances actuelles.

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  introduits ici sont créés par des sources (charges et courants) et définis relativement au référentiel  $\mathcal{R}$ .

Comme toute force d'interaction,  $\vec{F}_{\text{Lo}}$  ne dépend pas du référentiel alors que la vitesse en dépend. Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  peuvent donc dépendre du référentiel.

Remarquons que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont de natures différentes ; le rapport  $\frac{E}{B}$  est homogène à une vitesse. Dans le Système International d'unités,  $E$  s'exprime en volts par mètre ( $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ ) et  $B$  en tesla (T).

La charge  $q$  est une propriété intrinsèque de la particule : elle est indépendante du temps et du référentiel.

## Application 1

### Changement de référentiel pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Soit deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Désignons par  $\vec{u}$  la vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Soit  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  les vitesses dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  d'une particule chargée. En traduisant qu'en mécanique newtonienne la force est indépendante du référentiel d'étude, trouver les relations reliant les champs  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$  dans  $\mathcal{R}'$  associés aux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans  $\mathcal{R}$ , pour une position donnée.

Sachant que  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ , nous devons identifier :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{Lo}} &= q [\vec{E} + (\vec{v}' + \vec{u}) \wedge \vec{B}] \\ &= q [(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) + \vec{v}' \wedge \vec{B}] \end{aligned}$$

avec  $\vec{F}_{\text{Lo}} = q (\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$ .

L'identification des deux expressions nous donne :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \vec{B}.$$

Ces relations traduisent les effets d'un changement de référentiel pour les champs électromagnétiques dans le cadre de la mécanique classique.

### 1.1.2. Comparaison avec la force gravitationnelle

La comparaison des forces électrostatique et gravitationnelle a été mentionnée dans le chapitre 2, Application 1 : le rapport colossal obtenu justifie que nous négligions par la suite les forces de gravitation (et donc de pesanteur).

### 1.1.3. Puissance

La puissance de la force de Lorentz est :  $\mathcal{P}_{\text{Lo}} = \vec{F}_{\text{Lo}} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$ .

Elle est nulle si le champ électrique est nul.

## 1.2. Hypothèses d'étude

Considérons le mouvement de particules dans des champs  $\vec{E}$  et (ou)  $\vec{B}$  indépendants du temps (ou très exceptionnellement à variation temporelle suffisamment lente pour que l'approximation du régime quasi permanent soit applicable (cf. chapitre 7 § 1.2.)).

Nous utiliserons une propriété des champs électriques indépendants du temps, à savoir l'existence d'un potentiel scalaire  $V(M)$  tel que :

$$\vec{E} = -\text{grad } V.$$

#### Remarque

La plupart des expériences et des exercices étudiés ci-dessous supposent la réalisation d'un vide poussé (pression inférieure à un pascal), ce qui élimine tout frottement lors du déplacement des particules.

La relation fondamentale de la mécanique appliquée à une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  s'écrit alors :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

La masse  $m$  et la charge  $q$  interviennent par leur rapport  $\frac{q}{m}$ . Il est donc inutile de chercher à déterminer séparément  $q$  et  $m$  par l'étude du mouvement.

## 2 Mouvement d'une particule chargée dans les champs $\vec{E}$ et (ou) $\vec{B}$

### 2.1. Champ $\vec{E}$ seul

#### 2.1.1. Rôle accélérateur d'un champ électrique

Lorsqu'une charge  $q$  se déplace dans un champ électrostatique  $\vec{E} = -\text{grad } V$ , elle subit la force :  $\vec{F} = q \vec{E} = -\text{grad } (qV)$ , qui dérive de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_P = qV$ .

L'énergie mécanique  $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2} m v^2 + qV$  se conserve et en deux positions  $M_1$  et  $M_2$  de la particule, il vient :

$$v^2(M_2) = v^2(M_1) + 2 \frac{q}{m} (V_1 - V_2).$$

En supposant que la particule parte d'un point  $O$  de potentiel nul (potentiel de référence) avec une vitesse nulle, son énergie cinétique en un point  $M$  est :

$$\mathcal{E}_K(M) = -qV(M).$$

Cette particule possède une énergie cinétique exprimable naturellement en électron-volt (symbole : eV).

Remarquons que pour un *électron* ( $q = -e$ ), il faut que  $V(M) > 0$  pour qu'il puisse acquérir une vitesse.



# Application 2

## Énergie et vitesse d'un électron

Sachant que  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , calculer l'énergie (en eV) et la vitesse d'un électron accéléré par une différence de potentiel :

$$V = 10 \text{ kV}.$$

L'énergie cinétique est  $\mathcal{E}_K = +eV = 10 \text{ keV}$   
( $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  et  $1 \text{ J} = 1 \text{ C} \cdot 1 \text{ V}$ ).

La vitesse  $v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$ , avec  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$   
est :  $v = 1,88 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Remarque

L'énergie de masse (théorie relativiste) de l'électron est donnée par  $\mathcal{E} = mc^2$ , soit :  
 $\mathcal{E} = 511 \text{ keV}$  environ.

Tant que le potentiel accélérateur est nettement inférieur à 500 kV, la théorie classique est utilisable pour le calcul de la vitesse.

Pour  $V = 50 \text{ kV}$  (énergie  $eV = \frac{mc^2}{10}$ ), les calculs

classiques et relativistes donnent respectivement :

$$v_{\text{classique}} = 1,33 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{et } v_{\text{relativiste}} = 1,24 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(erreur relative de 7 %).

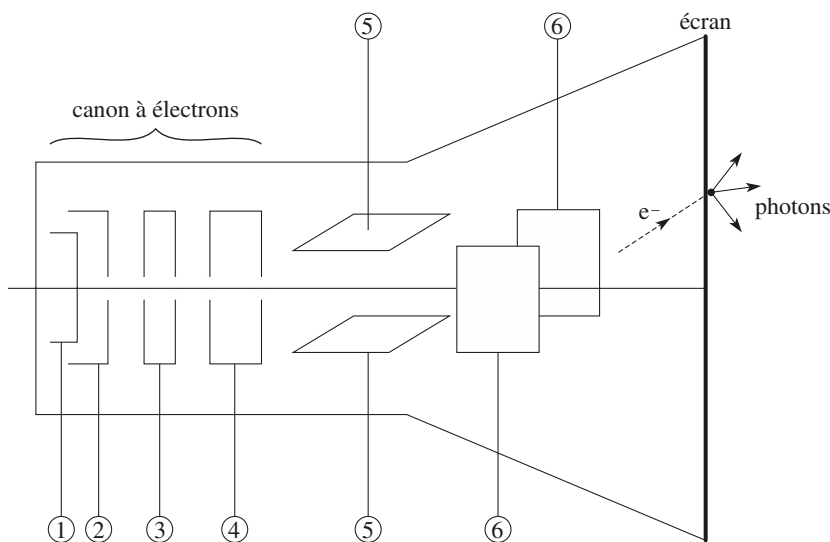
Nous conviendrons que c'est la limite supérieure à ne pas dépasser.

Des considérations semblables peuvent être faites pour le proton, mais son énergie de masse étant de l'ordre du GeV (1000 MeV), le traitement classique est permis avec des tensions beaucoup plus importantes (en valeur absolue).

## 2.1.2. Mouvement dans un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et indépendant du temps

Une particule passant à l'intérieur d'un condensateur plan subit une déviation proportionnelle à la différence de potentiel entre les plaques du condensateur (cf. l'Application 3) ; ce principe est utilisé dans un oscilloscope analogique.

### ■ Principe de fonctionnement d'un oscilloscope analogique



◀ **Doc. 1.** Oscilloscope : ① : Fil chauffé. ② : Wehnelt. ③ : Électrode de concentration ou de focalisation. ④ : Électrode d'accélération. ⑤ : Plaques de déviation verticale. ⑥ : Plaques de déviation horizontale.

Limitons-nous à rappeler succinctement la description du tube cathodique d'un oscilloscope.

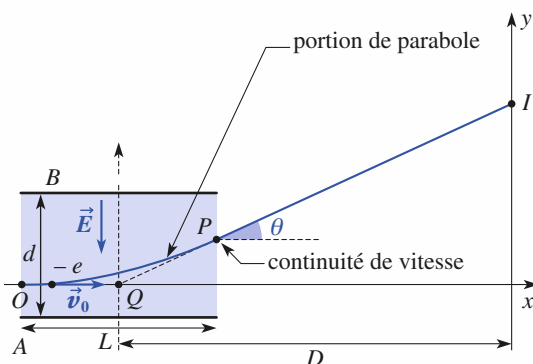
Dans le tube règne un vide poussé ( $p < 10^{-4}$  Pa). Le pinceau électronique est produit par un canon à électron comportant un fil chauffé (1 000 K environ) à fort pouvoir émissif en électrons, une électrode appelée wehnelt permettant de régler l'intensité du courant électronique, et des électrodes de concentration et d'accélération (lentilles électroniques).

Les électrons traversent ensuite les plaques de déviations verticales et horizontales. Quand les électrons traversent les plaques horizontales soumises à une différence de potentiel  $U_V$ , ils sont déviés verticalement ; cette déviation était proportionnelle à  $U_V$  (cf. l'Application ci-dessous).

## Application 3

### Déflexion électrostatique dans un condensateur plan

Soit une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  traversant l'espace entre les deux armatures d'un condensateur plan ; la particule préalablement accélérée pénètre en  $O$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ .



#### Doc. 2. Déflexion électrostatique.

Il existe une différence de potentiel  $U = V_B - V_A > 0$  entre les armatures métalliques de longueur  $L$  et distantes de  $d$ . Nous supposons que le champ électrostatique est uniforme et égal à  $\vec{E} = -\frac{U}{d} \vec{e}_y$

dans l'espace entre les armatures, et nul ailleurs.

Déterminer la trajectoire d'un électron et le point d'impact  $I$  sur un écran fluorescent placé à l'abscisse  $x = D + \frac{L}{2}$ , dans l'hypothèse où la particule ne rencontre pas l'une des armatures du condensateur.

La relation fondamentale de la dynamique (mécanique classique)  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E}$  donne :

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \text{ donc } v_x = v_0 \text{ et } x = v_0 t$$

(origine des temps prise au passage en  $O$ ).

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} E = \frac{e U}{m d}, \text{ soit } v_y = \frac{e U}{m d} t,$$

puis  $y = \frac{1}{2} \frac{e U}{m d} t^2$  (tant que  $x < L$ ). Dans l'espace, entre les armatures, la trajectoire est un morceau de parabole d'équation  $y = \frac{1}{2} \frac{e U}{m d v_0^2} x^2$ .

En  $x = L$  (point  $P$ ), la particule sort du champ  $\vec{E}$  et sa trajectoire devient rectiligne. La continuité du vecteur vitesse en  $P$  :

$$\left( v_{xP} = \left( \frac{dx}{dt} \right)_P = v_0 \text{ et } v_{yP} = \left( \frac{dy}{dt} \right)_P = \frac{L}{d} \frac{e U}{m v_0} \right)$$

permet d'obtenir la pente de la trajectoire :

$$\tan \theta = \left( \frac{dy}{dx} \right)_P = \frac{L}{d} \frac{e U}{m v_0^2}.$$

L'équation de la droite est donnée par :

$$y = \frac{L}{d} \frac{e U}{m v_0^2} \left( x - \frac{L}{2} \right) \quad \left( PI \text{ passe par } Q \left( \frac{L}{2}, 0 \right) \right).$$

Le point  $I$  d'impact sur l'écran fluorescent a donc pour ordonnée  $y_I = \frac{L}{d} \frac{e U}{m v_0^2} D$  (remarquons que

$$\frac{y_I}{y_P} = \frac{D}{L/2}).$$

Cette déflexion dépend de  $U$  (tension appliquée entre les plaques de déviation) et de l'énergie cinétique  $\frac{1}{2} m v_0^2$  de la particule incidente : des particules de même charge et d'énergie cinétique initiale identique subiront la même déviation.

Il en est de même pour la traversée des plaques verticales, la déviation horizontale associée étant proportionnelle à la tension  $U_H$  appliquée entre ces plaques. Sur l'écran la trace de l'électron (spot) traduit ces déviations :

$$X = K_1 U_H \text{ et } Y = K_2 U_V.$$

Nous nous reporterons aux travaux pratiques pour l'utilisation de cette propriété.

► Pour s'entraîner : ex. 1.

## 2.2. Champ $\vec{B}$ seul

### 2.2.1. Propriétés du mouvement dans un champ $\vec{B}$ stationnaire

Un électron mobile dans un champ magnétique  $\vec{B}$  indépendant du temps (stationnaire) est uniquement soumis à la force magnétique  $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$  (souvent appelée également force de Lorentz).

La puissance de cette force est nulle, car :

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = (q \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0,$$

(produit mixte avec deux vecteurs colinéaires).

**Le travail de la force magnétique  $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$  qui s'exerce sur une particule est nul.**

**L'énergie cinétique de cette particule est constante (théorème de la puissance cinétique). La norme de sa vitesse au cours du mouvement est constante :**

$$\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0, \text{ donc } \mathcal{E}_K = \text{cte et } v = \text{cte}.$$

#### Remarques

• Si  $\vec{B}$  dépend du temps selon  $\vec{B} = \vec{B}(M, t)$ , la force magnétique ne travaille toujours pas, mais il apparaît (phénomène d'induction) un champ électrique dont la puissance est en général non nulle. Une telle situation est exclue de nos hypothèses d'étude.

• La puissance de la force magnétique est nulle mais ses effets ne le sont pas ; la force magnétique dévie les particules chargées en mouvement et cela d'autant fortement que leur vitesse est élevée.

### 2.2.2. Mouvement dans un champ $\vec{B}$ uniforme et indépendant du temps

#### 2.2.2.1. Cas général d'une vitesse initiale quelconque

Étudions le mouvement d'une particule  $(q, m)$  placée à l'origine  $O$  du trièdre trirectangle  $(O; x, y, z)$  à l'instant initial  $t = 0$  (vitesse initiale  $\vec{v}_0$ ) dans un champ magnétostatique  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  ( $B > 0$ ) uniforme dans un domaine donné.

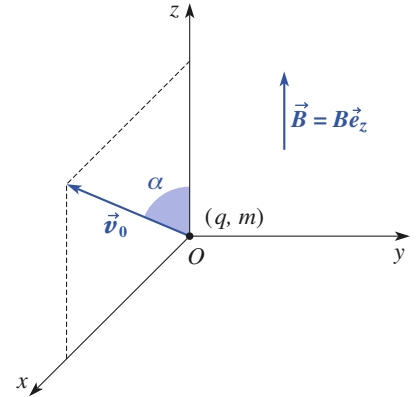
Posons  $\vec{v}_0 = v_0 (\sin \alpha \cdot \vec{e}_x + \cos \alpha \cdot \vec{e}_z)$ .

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au point matériel donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge B \vec{e}_z.$$

Posons  $q = \varepsilon e$  ( $\varepsilon = +1$  pour un proton, et  $\varepsilon = -1$  pour un électron).

Introduisons la grandeur  $\omega_c = \frac{eB}{m}$  homogène à l'inverse d'un temps et que nous appellerons **pulsation cyclotron**.



**Doc. 3.** Mouvement d'une particule dans un champ magnétique.

Nous obtenons :

$$\frac{dv_x}{dt} = \varepsilon \omega_c v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\varepsilon \omega_c v_x \quad \text{et} \quad \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

### ■ Mouvement projeté sur le plan ( $xOy$ )

En intégrant les deux premières équations par rapport au temps, nous obtenons :

$$v_x = \varepsilon \omega_c y + v_0 \sin \alpha \quad \text{et} \quad v_y = -\varepsilon \omega_c x.$$

Il est possible de reporter  $v_x$  et  $v_y$  dans les équations précédentes et d'intégrer à nouveau, mais il est aussi efficace d'introduire la variable  $\xi = x + iy$  qui représente l'affixe de la projection orthogonale du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  (vecteur position de la particule) dans le plan ( $xOy$ ).

Comme  $\frac{d\xi}{dt} = v_x + i v_y$ , nous avons  $\frac{d\xi}{dt} = -\varepsilon i \omega_c \xi + v_0 \sin \alpha$ , dont la solution est :

$$\xi = -i \frac{\varepsilon v_0}{\omega_c} \sin \alpha + A \exp(-i \varepsilon \omega_c t).$$

À  $t = 0$ ,  $\xi = 0$ , donc  $A = i \frac{\varepsilon v_0}{\omega_c} \sin \alpha$  et  $\xi = i \frac{\varepsilon v_0}{\omega_c} \sin \alpha [\exp(-i \varepsilon \omega_c t) - 1]$ .

Les lois horaires sont donc :

$$x(t) = -\frac{\varepsilon v_0}{\omega_c} \sin \alpha \sin(-\varepsilon \omega_c t)$$

$$y(t) = -\frac{\varepsilon v_0}{\omega_c} \sin \alpha [1 - \cos(-\varepsilon \omega_c t)].$$

$x$  et  $y$  vérifient  $x^2 + \left(\frac{\varepsilon v_0}{\omega_c} \sin \alpha + y\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c} \sin \alpha\right)^2$  : le mouvement projeté

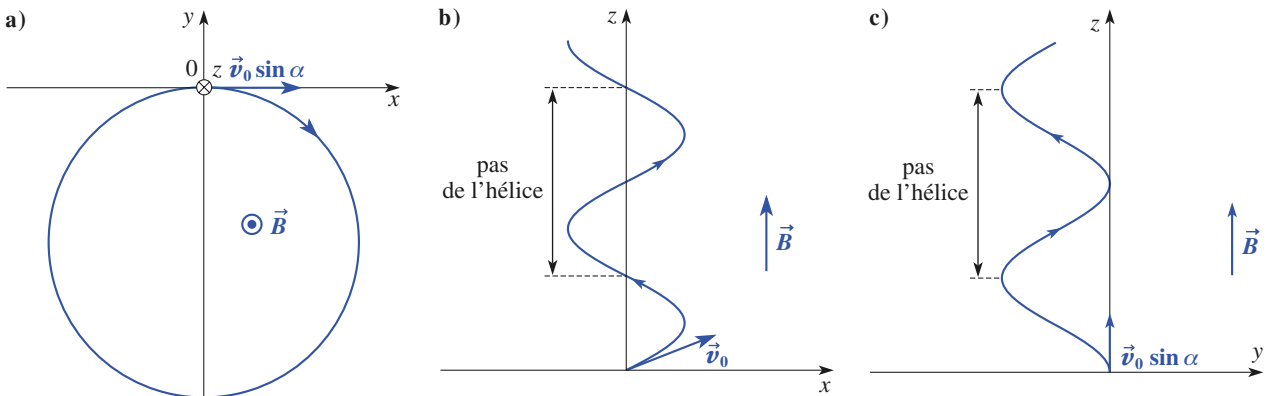
dans le plan ( $xOy$ ) est un cercle de centre  $C$  ( $x_C = 0$  et  $y_C = -\frac{\varepsilon v_0}{\omega_c} \sin \alpha$ ) et de rayon  $\rho = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \alpha$ . Ce cercle est décrit avec la vitesse angulaire  $-\varepsilon \omega_c$  égale en valeur absolue à la pulsation cyclotron.

### ■ Mouvement suivant ( $Oz$ )

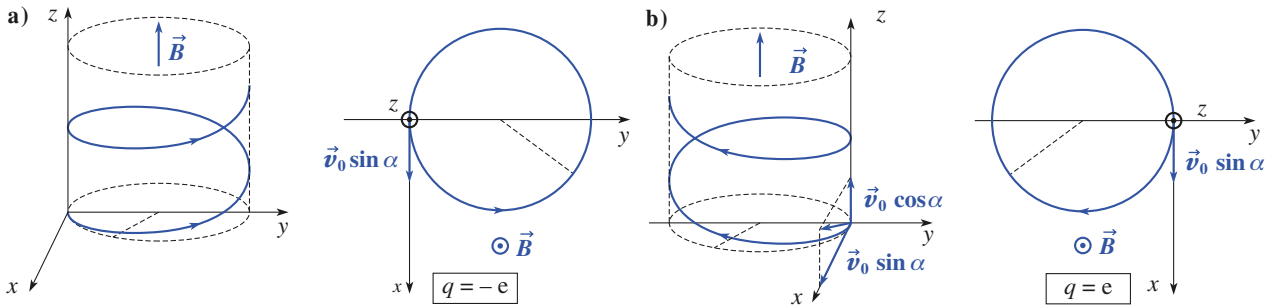
La troisième équation fournit :

$$v_z = \text{cte} = v_0 \cos \alpha, \quad \text{soit} \quad z = v_0 \cos \alpha t$$

(mouvement uniforme parallèlement à ( $Oz$ )). La particule décrit donc une hélice circulaire.



**Doc. 4.** Projection de la trajectoire sur les plans de coordonnées dans le cas d'un proton.



**Doc. 5.** Trajectoire d'un électron et d'un proton dans un champ  $\vec{B}$  uniforme.

*Remarque*

Le pas de l'hélice est  $h = v_0 \cos \alpha T$ , où  $T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi \frac{m}{eB}$ , donc :

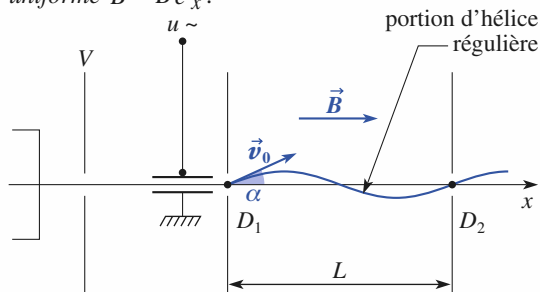
$$h = 2\pi \frac{m v_0}{eB} \cos \alpha.$$

## Application 4

### Une mesure précise de la charge spécifique

Le document 6 schématise une méthode expérimentale très précise de mesure de la charge spécifique  $\frac{e}{m}$  de l'électron. Les électrons traversent un premier diaphragme circulaire  $D_1$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  (tension  $V$  d'accélération) faisant un angle  $\alpha$  faible, mais variable avec l'axe (Ox) (grâce à un condensateur soumis à une tension variable sur le trajet des électrons incidents).

Après  $D_1$  les électrons pénètrent dans un solénoïde  $S$  où règne un champ magnétostatique longitudinal uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_x$ .



**Doc. 6.** Une mesure de  $\frac{e}{m}$ .

À une distance  $L$  de  $D_1$  est placé un deuxième diaphragme identique  $D_2$ .

À quelle condition les électrons du faisceau pourront-ils franchir  $D_2$  ?

En déduire une mesure possible de  $\frac{e}{m}$ .

La trajectoire des électrons entre  $D_1$  et  $D_2$  est un morceau d'hélice, et les conditions optimales pour franchir  $D_2$  sont obtenues lorsque  $L$  est un nombre entier de fois le pas de l'hélice.

Soit  $L = n \frac{2\pi m v_0 \cos \alpha}{eB}$ , où  $n$  est un entier.

Sachant que  $\cos \alpha \approx 1$  à l'ordre un en  $\alpha$  et que

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = eV, \text{ nous en déduisons : } \frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V}{n^2 L^2 B^2}.$$

Les grandeurs  $n$ ,  $L$ ,  $B$  et  $V$  étant accessibles à la mesure, le rapport  $\frac{e}{m}$  est déduit :

$$\frac{e}{m} = (1,758\,6 \pm 0,002\,3) \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

### 2.2.2.2. Le cas particulier d'une vitesse initiale normale au champ magnétique

Si la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  de la particule est normale au champ magnétique  $\vec{B}$ , ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ), cette particule décrit une trajectoire circulaire dans un plan orthogonal à  $\vec{B}$ , et contenant  $\vec{v}_0$ .

► Pour s'entraîner : ex. 2, 3 et 4.

### 2.3. Actions simultanées des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Qualitativement, nous pouvons prévoir pour des champs uniformes  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  appliqués les propriétés suivantes.

#### 2.3.1. Cas de champs parallèles

Si  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont parallèles, le projeté de la trajectoire sur un plan orthogonal aux champs est toujours un cercle. En revanche, la composante de la vitesse parallèle aux champs est accélérée. La vitesse n'est pas constante et la trajectoire n'est pas une hélice de pas constant.

#### 2.3.2. Cas de champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ croisés

Si  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont croisés, le champ magnétique a pour effet d'incurver la trajectoire. Les exemples suivants montrent qu'il en résulte une dérive, c'est-à-dire un mouvement « moyen » dont la vitesse est normale à  $\vec{E}$  et à  $\vec{B}$ .

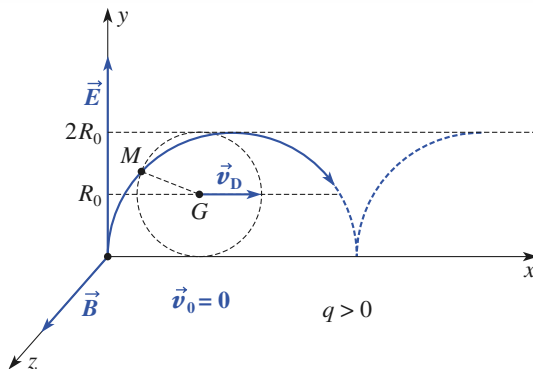
##### 2.3.2.1. Cas d'une vitesse initiale nulle

## Application J

### $\vec{E}$ et $\vec{B}$ croisé avec une vitesse initiale nulle – Vitesse de dérive

Une particule ( $q = +e$ ,  $m$ ) se trouve à l'instant initial à l'origine  $O$  du repère trirectangulaire ( $O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ) lié au référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, avec sa vitesse  $\vec{v}(0)$  nulle. Étudier son mouvement ultérieur en présence des champs uniformes et constants  $\vec{E} = E \vec{e}_y$  et  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ .

On posera  $\omega_c = \frac{eB}{m}$ ,  $v_D = \frac{E}{B}$  et  $R_0 = \frac{mE}{eB^2} = \frac{v_D}{\omega_c}$ .



Doc. 7. Champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  croisés.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{E} + e \vec{v} \wedge \vec{B}, \text{ soit } \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega_c v_D \vec{e}_y - \omega_c \vec{e}_z \wedge \vec{v}.$$

La trajectoire est dans le plan ( $xOy$ ) puisque  $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$

donne par intégration  $z = 0$ , compte tenu des conditions initiales.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = +\omega \frac{dy}{dt}, \text{ soit } \frac{dx}{dt} = \omega y;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega \frac{dx}{dt} + \omega v_D, \text{ soit } \frac{dy}{dt} = -\omega(x - v_D t);$$

ce qui donne :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + \omega v_D = -\omega^2 (y - R_0),$$

soit  $y = R_0 (1 - \cos \omega t)$  et  $x = R_0 (\omega t - \sin \omega t)$ .

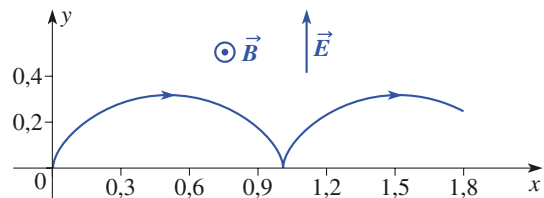
La courbe trajectoire est une cycloïde représentée sur le document 8.

La vitesse de dérive de la particule est, par définition :

$$\langle \vec{v} \rangle = \left\langle \frac{dx}{dt} \right\rangle \vec{e}_x + \left\langle \frac{dy}{dt} \right\rangle \vec{e}_y = R_0 \omega \vec{e}_x = v_D \vec{e}_x = \vec{v}_D.$$

Observons que la particule décrit une trajectoire circulaire de centre  $G$  et de rayon  $R_0$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation uniforme à la vitesse  $\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Dans  $\mathcal{R}'$  le champ électrique  $\vec{E}'$  est nul (formules de changement de référentiel pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vues en § 1.1.1) : nous sommes donc ramenés au cas du mouvement dans un champ magnétique uniforme :  $\vec{B}' = \vec{B}$ .



Doc. 8. Mouvement d'un proton dans  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  croisés ;  $\vec{v}_0 = 0$ .

### 2.3.2.2. Vitesse initiale quelconque

Une étude complète montre la généralité de cette vitesse de dérive  $\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$ .

En posant  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_D$ , nous obtenons l'équation d'évolution :  $m \frac{d\vec{v}'}{dt} = q\vec{v}' \wedge \vec{B}$ .

La trajectoire est circulaire dans le repère  $(\mathcal{R}')$  en translation à la vitesse  $\vec{v}_D$  dans  $(\mathcal{R})$  contenant les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

**Une particule placée dans des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  croisés, uniformes, et indépendants du temps, subit une vitesse de dérive :**

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}.$$

► Pour s'entraîner : ex. 7.

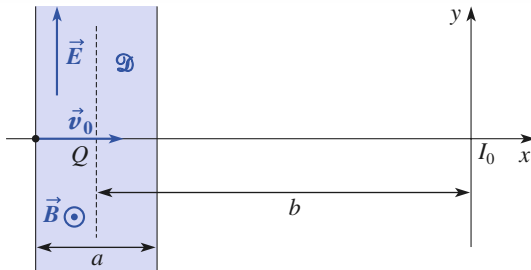
### 2.3.2.3. Mesure de $\frac{e}{m}$ avec $\vec{E}$ et $\vec{B}$ croisés

## Application 6

**La mesure de  $\frac{e}{m}$  avec des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  croisés**

Un faisceau monocinétique d'électrons traverse sans déviation une région  $\mathcal{D}$  de largeur  $a$ , où règnent des champs magnétique et électrique uniformes, constants et orthogonaux :  $\vec{E} = E \vec{e}_y$  et  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ .

Le point d'impact sur un écran placé à la distance  $b$  du centre  $Q$  de la région est alors  $I_0$ .



Doc. 9. Mesure de  $\frac{e}{m}$  avec des champs croisés.

Si on supprime le champ  $\vec{B}$ , nous observons que le point d'impact se déplace en  $I$ , de cote  $y_I$ , sur l'écran. Montrer que la connaissance de  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $a$ ,  $b$  et  $y_I$  permet la mesure de  $\frac{e}{m}$ .

La première situation correspond à l'égalité rigoureuse des forces électrique et magnétique qui annulent leurs effets ; la vitesse vaut :

$$v_0 = v_D = \frac{E}{B}.$$

La seconde situation correspond à la déflexion dans un champ électrique uniforme :

$$y_I = -b \frac{eEa}{mv_0^2}.$$

L'élimination de  $v_0$  entre les relations donne :

$$\frac{e}{m} = -y_I \frac{E}{abB^2}.$$

La méthode suppose  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  connus (uniformes) et le domaine  $\mathcal{D}$  bien délimité, ce qui pose quelques problèmes expérimentaux.

## 3 Applications diverses

### 3.1. Notions sur les spectrographes de masse

Les propriétés des mouvements des particules (après ionisation) dans des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont utilisées pour mettre en évidence la présence d'isotopes dans un échantillon. Étudions le principe d'un spectrographe destiné à trier les isotopes selon leur masse. L'exercice 6 propose un autre principe de spectrographe de masse utilisant la méthode des paraboles.



## 3.1.3. Le spectrographe de Bainbridge

# Application 7

## Le spectrographe de Bainbridge

Dans un tel spectrographe les ions (supposés ici positifs) sortant d'un ioniseur où ils ont été préalablement accélérés sous une tension de valeur absolue  $U$ , traversent d'abord un filtre de vitesse, pénètrent ensuite dans un champ magnétique transversal uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ , puis décrivent un demi-cercle et viennent impressionner la plaque photographique. La fente  $F$  étant supposée très fine, déterminer la distance séparant les traces rectilignes associées à deux isotopes.

Calculer la distance séparant les isotopes  $^{39}\text{K}^+$  et  $^{41}\text{K}^+$  sur la plaque.

Données :  $B = 0,1 \text{ T}$  et  $U = 10 \text{ kV}$ .

Les ions décrivent un demi-cercle de diamètre :

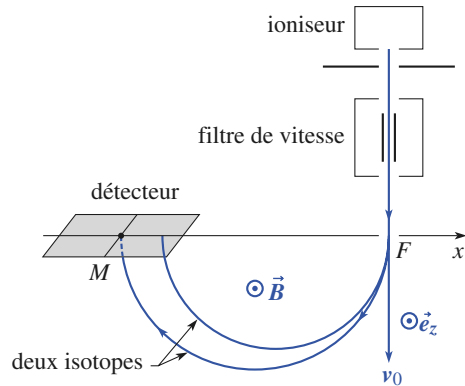
$$FM = 2\rho = \frac{2mv_0}{qB}, \text{ avec } q = e.$$

Comme  $\frac{1}{2} m v_0^2 = eU$ , il vient, en posant  $m = A m_p$  où  $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  est la masse du proton :

$$FM = L(A) = \frac{2\sqrt{2}}{B} \sqrt{\frac{Um_p}{e}} \sqrt{A} = 0,289\sqrt{A}.$$

A.N. :  $L(39) = 1,806 \dots \text{ m}$  et  $L(41) = 1,852 \dots \text{ m}$  ;

le nombre de chiffres significatifs ne peut pas être précisé ici, mais la séparation des isotopes est nette.



Doc. 10. Le spectrographe de Bainbridge.

## 3.2. Un accélérateur de particule : le cyclotron

Le premier cyclotron, réalisé par Lawrence, accélérât des électrons. Actuellement, les cyclotrons sont utilisés essentiellement pour l'accélération d'ions.

Nous nous limiterons à une description élémentaire de l'appareil (doc. 11) ; l'étude exhaustive des accélérateurs sortant du cadre de cet ouvrage.

### 3.2.1. Description

Un cyclotron accélérant des ions (des protons par exemple) comprend essentiellement un cylindre d'axe  $(Oz)$  placé dans l'entrefer d'un électro-aimant, où règne un vide poussé. Un champ magnétique  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  uniforme est appliqué sur tout le domaine du cylindre de rayon  $R$ . Les parois de ce cylindre sont matérialisées par deux électrodes conductrices creuses, appelées *dees*, séparées par une région de faible épaisseur  $d$ , s'étendant de part et d'autre d'un plan contenant l'axe du cylindre.

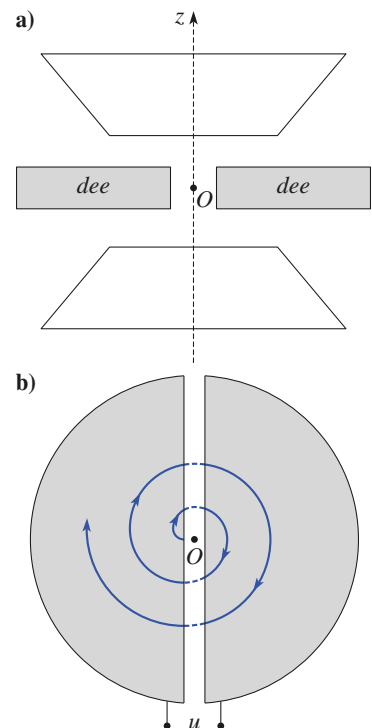
Une source (non décrite ici) permet d'injecter les ions au centre avec une énergie cinétique négligeable.

Un générateur applique entre les électrodes métalliques (*dees*) une tension sinusoïdale de fréquence  $\nu$ , créant ainsi entre les *dees* un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  variant sinusoïdalement à la fréquence  $\nu$  :

$$E = E_m \cos(2\pi\nu t) = \frac{U}{d} \cos(2\pi\nu t).$$

À l'intérieur de chaque *dee*, le champ électrique est considéré comme nul.

Admettons que les ions sont accélérés une première fois par un champ électrique  $E_m$  sur la distance  $d$  avant de pénétrer dans le premier *dee*.



Doc. 11. Le cyclotron.

a) vue latérale ;

b) les dees vues du dessus.

### 3.2.2. Fonctionnement optimal

Quand un ion pénètre dans l'un des *dees* avec la vitesse  $\vec{v}$  (supposé normale à  $(Oz)$  et aux faces des *dees*), il y décrit une trajectoire circulaire (donc un demi-cercle) de rayon  $\rho = \frac{mv}{qB}$ , avant de retraverser l'espace entre les armatures, de largeur  $d$ .

La durée du séjour dans le *dee*, indépendante de la vitesse de la particule, est  $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_c}$  en posant  $\omega_c = \frac{qB}{m}$  (pulsation cyclotron des ions considérés). Si cette durée est égale à la demi-période de variation du champ électrique (soit  $\omega_c = 2\pi\nu$  ou  $\nu = \frac{qB}{2\pi m}$ ), alors le champ  $E = -E_m$  accélère à nouveau les ions à la sortie du *dee*.

Ainsi, à chaque demi-tour, le champ électrique fournit le travail optimal :

$$W = q E_m d = q U,$$

servant à accroître l'énergie cinétique de l'ion.

Après  $n$  traversées dans ces conditions, l'énergie cinétique de l'ion vaut :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m v_n^2 = n q U \quad \text{et} \quad \rho_n = \frac{m v_n}{eB}.$$

Les rayons  $\rho_n$  augmentent donc proportionnellement à  $\sqrt{n}$ . Le nombre de demi-tours est limité par le rayon maximal des électrodes. Lorsque  $\rho_n = R$ , un déflecteur dévie les ions accélérés pour les utiliser dans une chambre d'étude (chocs, etc.).

► Pour s'entraîner : ex. 8.

## 4 Les électrons de conduction d'un métal

### 4.1. Modèle du mouvement d'ensemble

Un courant électrique est créé par un déplacement d'ensemble de charges dans un référentiel  $\mathcal{R}$  donné. Nous nous limitons au cas du déplacement d'ensemble des électrons libres dans des métaux immobiles dans  $\mathcal{R}$ , réalisant ainsi un courant appelé **courant de conduction**.

#### 4.1.1. Les électrons de conduction

Dans un modèle classique, les charges mobiles (ou porteurs) dans les métaux sont les électrons libres, encore appelés électrons de conduction (par opposition aux électrons de valence liés aux ions du réseau et non susceptibles de se déplacer dans tout le conducteur). Les électrons de conduction (en nombre par unité de volume très élevé), peuvent être assimilés à un gaz dans tout le conducteur. De façon plus générale, nous appellerons porteur toute charge susceptible de se déplacer dans un milieu conducteur.

## Application 8

### Nombre d'électrons de conduction par unité de volume

Dans le cas du cuivre, chaque atome de cuivre fournit un électron de conduction. Calculer le nombre  $n_v$  d'électrons de conduction par unité de volume.

Données : Masse volumique du cuivre  $\rho = 8\,900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ; masse atomique du cuivre  $M = 63,6 \text{ g}$  et nombre d'Avogadro  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ .

Le nombre  $n$  d'électrons de conduction par unité de volume est donné par :

$$n = N_A \frac{\rho}{M}$$

soit :

$$n = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{8\,900}{63,6 \cdot 10^{-3}} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}.$$

En l'absence de force appliquée, on admet que les vitesses  $\vec{u}_i$  des différents électrons de conduction se distribuent de manière aléatoire de sorte que la valeur moyenne définie par  $\vec{v} = \langle \vec{u}_i \rangle = \frac{1}{\delta N} \sum \vec{u}_i$  est nulle, où  $\delta N$  représente le nombre d'électrons de conduction contenus dans un élément de volume  $\delta \tau$ .

Donc, en l'absence de champ électrique  $\vec{E}$  appliqué (c'est-à-dire quand le conducteur est équipotentiel) il n'existe aucun courant. En revanche, quand un champ électrique est appliqué, la vitesse moyenne des porteurs, que nous appellerons vitesse d'ensemble ou vitesse de dérive, n'est plus nulle.

#### 4.1.2. Vitesse d'ensemble (ou de dérive) en présence d'une force $\vec{F}$ appliquée aux porteurs

Nous considérons un conducteur dans lequel chaque porteur est soumis à une force  $\vec{F}$  (ayant pour origine, par exemple, un champ électrique). Pour simplifier, nous supposons que tous les porteurs d'un volume mésoscopique sont soumis à la même force  $\vec{F}$ . Appliquons le principe fondamental de la dynamique au système constitué des porteurs d'un élément de volume mésoscopique  $\delta \tau$ , dont le barycentre se déplace à la vitesse d'ensemble  $\vec{v}$ . Le nombre de porteurs de ce système est  $\delta N = n \delta \tau$  ( $n$  représente donc le nombre de porteurs par unité de volume) et sa masse est égale à  $n m \delta \tau$ . Nous obtenons donc :

$$n m \delta \tau \frac{d\vec{v}}{dt} = n \delta \tau \vec{F} + \delta \vec{f}$$

où  $\delta \vec{f}$  désigne une force due aux interactions entre les porteurs mobiles de ce système et le réseau immobile dans lequel ils se déplacent. Cette force s'oppose au mouvement, et nous faisons l'hypothèse qu'elle est de la forme :  $\delta \vec{f} = -k \vec{v} \delta \tau$  analogue à une force de frottement visqueux pour modéliser les collisions. Nous en déduisons une équation différentielle vérifiée par  $\vec{v}(t)$  :

$$n m \frac{d\vec{v}}{dt} = n \vec{F} - k \vec{v},$$

que l'on peut écrire :  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{m \vec{v}}{\tau}$ , avec  $\tau = \frac{n m}{k}$ .

$\tau$  (homogène à un temps) est une grandeur caractéristique du phénomène étudié : c'est le *temps de relaxation de conduction*.

Pour interpréter simplement ce temps  $\tau$ , supposons que nous appliquons une force  $\vec{F}$  uniforme et constante à compter de la date initiale  $t = 0$ . Supposons, en outre, qu'à cette date  $\vec{v} = 0$ , la solution de l'équation précédente serait :

$$\vec{v} = \frac{\vec{F} \tau}{m} (1 - e^{-t/\tau});$$

$\tau$  traduit donc un ordre de grandeur du temps d'instauration d'un régime permanent donnant une vitesse d'ensemble  $\vec{v} = \frac{\vec{F} \tau}{m}$  proportionnelle à  $\vec{F}$ .

#### 4.1.3. Le modèle des collisions

Seule la mécanique quantique permet de décrire de façon réellement satisfaisante le comportement des électrons de conduction dans un métal. Nous pouvons cependant justifier l'existence de la force de « frottement » en  $-k \vec{v}$  à partir d'un modèle simplifié où les porteurs sont assimilés à des particules libres qui subissent des collisions.

##### 4.1.3.1. Les hypothèses du modèle

- Les porteurs ont un mouvement désordonné (agitation thermique) et subissent des collisions sur des sites (immobiles) du réseau dans lequel ils se déplacent.

- Entre deux collisions, un porteur n'est soumis qu'à la force  $\vec{F}$  que nous supposons ici constante et uniforme. Si la force  $\vec{F}$  est due à un champ électrique appliqué, cette hypothèse revient à admettre que nous pouvons remplacer  $\vec{E}$  par sa valeur moyenne (nivelée).
- La valeur moyenne de la vitesse des porteurs juste après une collision est nulle. Cela revient à considérer que, en moyenne, les vitesses après un choc ont une répartition isotrope.

#### 4.1.3.2. Vitesse moyenne des porteurs

Étudions le mouvement d'un porteur de masse  $m$  à partir d'une collision qui a lieu à la date  $t = t_0$ . Il a une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  dont, par hypothèse, la valeur moyenne (prise sur un grand nombre de collisions) est nulle.

D'après la relation fondamentale de la dynamique :  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ .

Intégrons cette équation différentielle vectorielle :

$$m[\vec{v}(t) - \vec{v}_0] = -e\vec{E}(t - t_0) \quad \text{soit :} \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0).$$

Calculons la valeur moyenne  $\langle \vec{v} \rangle$  de  $\vec{v}(t)$  pour les porteurs d'un volume mésoscopique.

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_0 \rangle + \frac{\vec{F}}{m} \langle t - t_0 \rangle.$$

- Par hypothèse  $\langle \vec{v}_0 \rangle = \vec{0}$ .
- $\langle t - t_0 \rangle$  représente la durée moyenne écoulée depuis le dernier choc. C'est une quantité constante dans le temps que nous notons  $\tau$ . Un modèle statistique simple pourrait montrer que  $\tau$  représente aussi la durée moyenne entre deux collisions.

Finalement, nous obtenons avec ce modèle :  $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{F}\tau}{m}$ .

Le « gaz de porteurs » a donc, en moyenne, une vitesse de dérive  $\langle \vec{v} \rangle$  qui se superpose à la vitesse d'agitation thermique aléatoire et de valeur moyenne nulle.

## 4.2. Vecteur densité de courants de conduction

Rappelons la définition du vecteur densité de courant  $\vec{j}$  (cf. chapitre 6) :

- À un mouvement de porteurs de vitesse moyenne  $\vec{v}$  non nulle on associe un vecteur densité de courant  $\vec{j} = nq\vec{v}$  où  $n$  représente le nombre de porteurs par unité de volume et  $q$  la charge de chacun de ces porteurs.
- L'intensité  $I_S(t)$  qui traverse la surface  $S$  à la date  $t$  est donnée par le flux du vecteur densité de courant à travers  $S$  (doc. 13) :

$$I_S(t) = \iint_S \vec{j}(t) \cdot d\vec{S}.$$

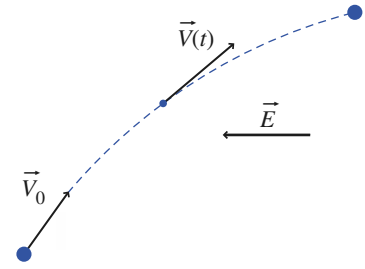
On peut vérifier que  $I(t)$  est bien la charge traversant  $S$  par unité de temps.

En multipliant par  $nq$  les deux membres de l'équation différentielle en  $\vec{v}$  établie au § 4.1.2, nous obtenons l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{j}$  en présence d'une force appliquée  $\vec{F}$  :  $\tau \frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{j} = \frac{nq\tau}{m} \vec{F}$  (équation de transport).

## 4.3. Comportement d'ensemble en présence d'un champ électrique seul

### 4.3.1. La loi d'Ohm locale

Dans ce qui suit, nous expliciterons les propriétés de notre modèle dans l'hypothèse d'un milieu homogène ( $n$  est supposé uniforme), en présence d'un champ électrique  $\vec{E}$  supposé localement uniforme et constant (donc  $\vec{F} = q\vec{E}$ ), appliqué à compter de la date  $t = 0$ , pour laquelle on avait  $\vec{v} = \vec{0}$  et donc  $\vec{j} = \vec{0}$ .



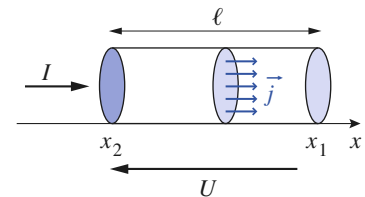
Doc. 12. Trajectoire d'un électron entre deux collisions en présence d'un champ électrique.

La vitesse instantanée, due à l'agitation thermique, est beaucoup plus grande que la vitesse de dérive (ou vitesse moyenne).

Si nous adoptons le modèle des gaz monoatomiques, nous trouvons une vitesse d'agitation de l'ordre de :

$$u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \approx 10^5 \text{ m.s}^{-1}.$$

La vitesse de dérive est classiquement de l'ordre de  $10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ .



Doc. 13. Conducteur cylindrique.

Pour  $t > 0$ , une intégration immédiate de l'équation d'évolution de  $\vec{v}$  et de l'équation de transport, donne :

$$\vec{v} = \frac{q\tau}{m} \vec{E} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{et donc} \quad \vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m} \vec{E} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Le temps de relaxation de conduction  $\tau$  est en général très faible ( $\tau$  de l'ordre de  $10^{-14}$  s). Cela signifie que pour  $t$  supérieur à  $\tau$ , donc en pratique pour  $t > 0$ , l'état (cf. l'Application 10) permanent est atteint. D'où la **loi d'Ohm locale** :

$$\vec{v} = \frac{q\tau}{m} \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m} \vec{E}.$$

Ces relations sont en fait valables en régime quasi stationnaire, pour lequel les variations temporelles éventuelles de  $\vec{E}$  sont lentes (durées typiques de variation nettement plus élevées que  $\tau$ ).

**La vitesse d'ensemble (ou de dérive) des particules ( $q, m$ ) participant à la conduction est donnée par  $\vec{v} = \mu \vec{E}$  ;  $\mu$  désigne la *mobilité* de ces particules ( $\mu = q \frac{\tau}{m}$ ). Pour les électrons,  $\mu = -e \frac{\tau}{m}$  est négatif.**

**Loi d'Ohm locale :**

Le vecteur densité volumique de courants  $\vec{j}$  (s'exprimant en  $A \cdot m^{-2}$ ) est proportionnel au champ électrique appliqué au conducteur :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

$\gamma$  désigne la *conductivité électrique* du milieu (dit ohmique), dont l'expression est donnée par  $\gamma = n q^2 \frac{\tau}{m}$  ( $\tau$  voisin de  $10^{-14}$  s).

L'inverse de la conductivité  $\rho = \frac{1}{\gamma}$  est la *résistivité*. La conductivité s'évalue en  $S \cdot m^{-1}$  et la résistivité en  $\Omega \cdot m$ .

#### 4.3.2. Résistance d'un conducteur filiforme cylindrique

Considérons un conducteur filiforme cylindrique, homogène, de section  $s$ , de longueur  $\ell$  et de conductivité  $\gamma$  (doc. 13). Un courant continu d'intensité  $I$  traverse ce conducteur dans le sens de l'axe ( $Ox$ ) quand une d.d.p. continue  $U$  ( $U > 0$ ) est appliquée entre ses extrémités.

Le déplacement des porteurs est « canalisé » par les parois du conducteur. Il s'en suit que le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est en tout point parallèle à ( $Ox$ ).

$\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j}$  est un champ électrique dont les lignes de champ sont toutes parallèles à ( $Ox$ ) dans une région globalement neutre. On en déduit (cf. Application 9) que  $\vec{E}$  et  $\vec{j}$  sont uniformes dans le cylindre :  $\vec{E} = E \vec{e}_x$  et  $\vec{j} = j \vec{e}_x = \gamma E \vec{e}_x$ .

En régime permanent, l'intensité  $I$  a la même valeur à travers toutes les sections du conducteur :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \gamma E s.$$

Exprimons  $I$  à l'aide du potentiel  $V(x)$  associé au champ  $\vec{E}$  :

$$I = -\gamma s \frac{dV}{dx}.$$

$I$  étant indépendant de  $x$ , cette équation différentielle s'intègre simplement :

$$\int_{x_1}^{x_2} dV = -\frac{I}{\gamma s} \int_{x_1}^{x_2} dx \quad \text{d'où :} \quad U = V_1 - V_2 = \frac{I\ell}{\gamma s}.$$

Nous en déduisons la valeur de la résistance du conducteur :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\ell}{\gamma s} = \rho \frac{\ell}{s}.$$

*Un conducteur est un milieu globalement neutre à l'échelle mésoscopique.*

*Pour un conducteur métallique, la charge des électrons de conduction est exactement compensée par la charge opposée des ions positifs immobiles.*

*Pour une solution électrolytique, chaque élément mésoscopique contient des ions positifs et négatifs dont les charges s'équilibrent.*

# Application 9

## Champ parallèle

Soit un champ électrostatique de la forme :

$$\vec{E} = E(x, y, z) \vec{e}_x.$$

- 1) Montrer que  $\vec{E}$  ne peut dépendre que de la variable  $x$ .
- 2) Montrer que si le milieu est globalement neutre,  $\vec{E}$  est uniforme.

1) Les lignes de champ de  $\vec{E}$  sont des droites parallèles ; les équipotentielles sont les surfaces orthogonales à ces droites ; le potentiel ne dépend donc que de  $x$ .

On en déduit :

$$\vec{E} = - \frac{dV}{dx} \vec{e}_x \quad \text{soit : } \vec{E} = E(x) \vec{e}_x.$$

2) Dans une région neutre le flux de  $\vec{E}$  a la même valeur à travers toute section d'un tube de champ. Or, les tubes de champ sont des cylindres de section droite constante  $S$ .

On en déduit :  $E(x_1)S = E(x_2)S$

et donc :  $E$  indépendant de  $x$ .

**Conclusion : le champ  $\vec{E}$  est uniforme.**

# Application 10

## Les ordres de grandeur de la conduction électrique dans le cuivre

Dans le cas du cuivre, en admettant que chaque atome fournit un électron de conduction en moyenne, la conductivité électrique obtenue par mesure de la résistance d'un tronçon cylindrique de longueur  $\ell$  et de section  $s$  ( $R = \frac{\ell}{\gamma s}$ ) est  $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

On suppose qu'un courant d'intensité 1 A circule dans un fil cylindrique de section  $s = 1 \text{ mm}^2$ .

Déterminer :

- a) la norme du vecteur densité de courants, supposé uniforme et celle du champ électrique ;
  - b) le temps de relaxation de conduction  $\tau$  dans le cadre de notre modèle ;
  - c) la vitesse d'ensemble  $v$  (ou de dérive) et la mobilité des électrons de conduction ;
  - d) la norme  $u$  de la vitesse moyenne d'un électron entre deux chocs, sachant que le libre parcours moyen (distance moyenne parcourue entre ces deux chocs) est  $\lambda = 45 \text{ nm}$ .
- Commenter ces valeurs.

Données :

Masse volumique du cuivre  $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  
masse atomique du cuivre  $M = 63,6 \text{ g}$ , nombre

d'Avogadro  $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ , masse d'un électron  $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

a)  $j$  étant uniforme  $I = js$ , donc :

$$j = \frac{I}{s} = 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

et :

$$E = \frac{j}{\gamma} = 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

b)  $\gamma = n e^2 \frac{\tau}{m}$  donne  $\tau = \frac{m \gamma}{n e^2}$  ;

$n = \rho \frac{N_A}{M} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ , donc  $\tau = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ .

c)  $\vec{j} = -n e \vec{v}$  fournit :

$$v = \frac{j}{n e} = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,074 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

(vitesse très faible qui correspond à un mouvement d'ensemble de 4,4 mm par minute). La mobilité est :

$$\mu = -e \frac{\tau}{m} = -4,4 \cdot 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Nous vérifions que  $\vec{v} = \mu \vec{E}$ .

d) Avec  $\lambda = u \tau$ , nous obtenons :

$$u = \frac{\lambda}{\tau} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(valeur nettement supérieure à  $v$ ). D'autre part, nous remarquons que  $\lambda$  est nettement supérieure à la dimension de la maille du cristal, typiquement de l'ordre de quelques dixièmes de nanomètres.

## 4.4. Présences simultanées d'un champ électrique et d'un champ magnétique

### 4.4.1. L'équation de transport et la constante de Hall

En présence simultanée d'un champ électrique  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}$ , la force  $\vec{F}$  responsable du mouvement d'ensemble des porteurs est :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

L'équation de transport s'écrit alors :

$$\tau \frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B});$$

soit encore :

$$\tau \frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{j} = \gamma \left( \vec{E} + \frac{1}{nq} \vec{j} \wedge \vec{B} \right),$$

où  $R_H = \frac{1}{nq}$  est la *constante de Hall*.

En régime stationnaire ou quasi stationnaire, c'est-à-dire lorsque le terme  $\tau \frac{d\vec{j}}{dt}$  est nul ou négligeable), le vecteur densité de courant s'établit à :

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B}).$$

**La généralisation de la loi d'Ohm locale, lorsque le conducteur est placé en présence simultanée d'un champ électrique  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}$ , s'écrit :**

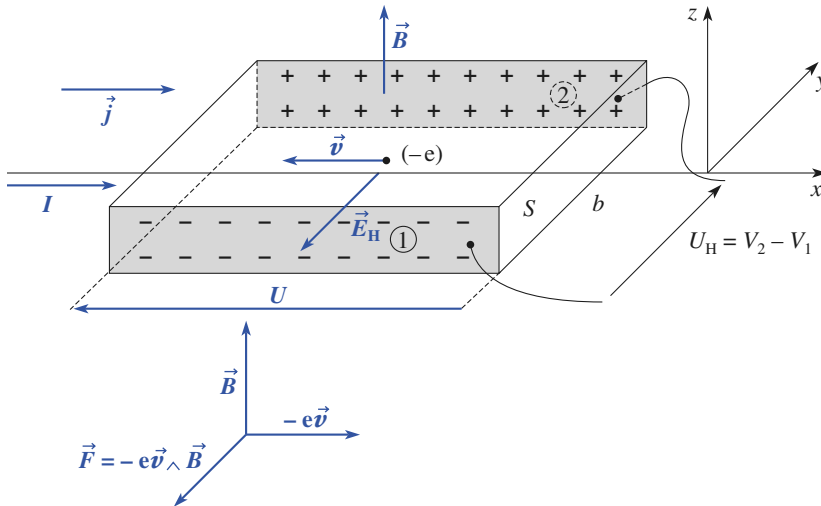
$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B}),$$

**où la constante de Hall  $R_H$  est égale à  $\frac{1}{nq}$ .**

Ces équations permettent d'interpréter l'effet Hall que nous allons décrire maintenant.

### 4.4.2. Cas d'une géométrie filiforme et rectangulaire

#### 4.4.2.1. Le champ de Hall



◀ **Doc. 14.** Effet Hall en géométrie parallélépipédique (géométrie de Hall).

Considérons un ruban conducteur de longueur  $a$  selon  $(Ox)$ , de largeur  $b$  selon  $(Oy)$ , d'épaisseur  $c$  selon  $(Oz)$ , placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  ( $B > 0$ ). Une tension continue  $U$ , appliquée entre les faces du conducteur orthogonales à  $(Ox)$ , fait circuler un courant continu d'intensité  $I$  et de densité de courant uniforme  $\vec{j} = \frac{I}{bc} \vec{e}_x$ .



L'expérience montre, qu'en régime établi, il apparaît une tension  $U_H$ , dite *tension de Hall*, entre les faces du conducteur orthogonales à  $(Oy)$ . Quantitativement, cette tension de Hall  $U_H$  est proportionnelle au courant  $I$  et à la norme du champ magnétique  $\vec{B}$ .

#### 4.4.2.2. Interprétation physique

Il est aisé de comprendre l'origine de la tension de Hall en examinant le régime transitoire qui précède le régime établi décrit ci-dessus.

##### ■ Régime transitoire

Pendant le régime transitoire, tout électron de conduction ( $q = -e$ ) subit :

- a) une force électrique  $q\vec{E}_0 = -e \frac{U}{a} \vec{e}_x$  qui tend à le déplacer dans le sens des  $x$  décroissants ;
- b) une force magnétique  $q \vec{v} \wedge \vec{B} = -e(-v \vec{e}_x) \wedge (B \vec{e}_z) = -e v B \vec{e}_y$  qui tend à le déplacer vers la face ①.

Ainsi, sous l'effet de la force magnétique, les électrons de conduction se dirigent et s'accumulent sur la face ① qui se charge négativement tandis que, corrélativement et par défaut électronique, la face ② se charge positivement (doc. 15a).

Ces charges surfaciques vont, comme dans un condensateur plan, créer un *champ de Hall*  $\vec{E}_H$  dirigé de la face ② vers la face ①. Dès lors, les électrons de conduction seront soumis à une troisième force  $q \vec{E}_H$ , dirigée selon  $(Oy)$  qui tend à compenser les effets de la force magnétique.

Au cours du régime transitoire, la norme du champ de Hall croît par un effet cumulatif et les électrons seront de plus en plus faiblement déviés vers la face ①.

À la fin du régime transitoire, la force électrique de Hall  $q \vec{E}_H$  compense exactement la force magnétique  $q \vec{v} \wedge \vec{B}$  et les électrons ne sont plus déviés latéralement (doc. 15b).

##### ■ Régime établi

En régime établi, les lignes de courant sont colinéaires à l'axe  $(Ox)$  et le champ de Hall est déterminé par la relation :

$$\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

En explicitant le champ de Hall, il vient :

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -(-v \vec{e}_x) \wedge (B \vec{e}_z) = -B v \vec{e}_y$$

soit encore :

$$\vec{E}_H = -\frac{1}{n e} B j \vec{e}_y.$$

En introduisant la *constante de Hall*  $R_H = \frac{1}{n q} = -\frac{1}{n e}$  ( $R_H < 0$ ), le champ de Hall s'établit, en définitive, à :

$$\vec{E}_H = R_H B j \vec{e}_y = R_H \vec{B} \wedge \vec{j}.$$

La tension de Hall  $U_H$  s'obtient en intégrant la relation  $E_H = -\frac{dV}{dy}$  où  $V$  est le potentiel créé par le champ de Hall. Il en résulte que :

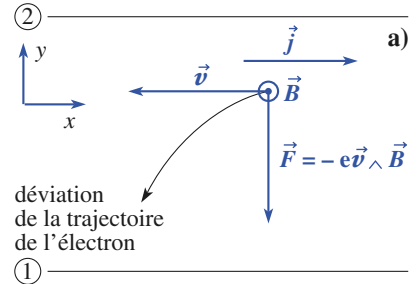
$$U_H = \int_{V_1}^{V_2} dV = -R_H j B \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy$$

d'où finalement :

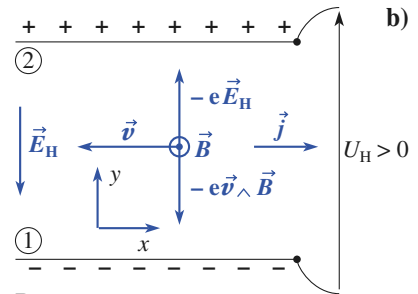
$$U_H = V_2 - V_1 = -R_H B j b = -R_H \frac{BI}{c} (> 0)$$

en accord avec l'expérience.

Dans le cas de l'argent  $n = 6 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ . Pour  $c = 0,1 \text{ mm}$ ,  $B = 1 \text{ T}$  et  $I = 5 \text{ A}$ , nous obtenons  $U_H = 52 \mu\text{V}$ .



Transitoire



Permanent

Doc. 15. Origine du champ de Hall.

Cette valeur est très faible : il faut l'amplifier pour une mesure précise. En fait, le phénomène est facilement observable avec des matériaux qualifiés de *semi-conducteurs*, pour lesquels le nombre  $n$  par unité de volume de porteurs de charges qui participent à la conduction est nettement plus faible ( $10^5$  à  $10^6$  fois plus faible). Il est courant d'utiliser de telles sondes à semi-conducteur pour la mesure d'un champ magnétique, par exemple en travaux pratiques.

#### Remarque

Nous avons envisagé un métal avec ses électrons de conduction. Il est possible d'imaginer une conduction par charges positives (qualifiées de trous dans les semi-conducteurs) (doc. 16).

Pour un courant  $I > 0$ , ces charges positives se déplacent également, sous l'effet de la force magnétique, vers la face avant ①, pendant la phase transitoire. La tension de Hall est alors de signe opposé à celle obtenue avec des électrons.

Le signe de la tension de Hall peut renseigner sur celui des porteurs de charges. Il faut toutefois être très prudent dans ces interprétations, en n'oubliant pas que le modèle proposé est trop simpliste pour lui accorder un crédit illimité.

### 4.4.3. Champ de Hall et force de Laplace

#### 4.4.3.1. Le modèle volumique

Reprenons le ruban métallique parcouru par un courant d'intensité  $I$ , en présence d'un champ magnétique, et intéressons-nous à la force s'exerçant par unité de volume sur ce conducteur supposé au repos dans un référentiel  $\mathcal{R}$ .

Dans un volume élémentaire  $d\tau$ , nous avons des charges mobiles ( $n$  par unité de volume) et des charges fixes (également  $n$  par unité de volume). Étudions les forces s'exerçant sur ces charges (doc. 17).

forces par unité de volume			
charges	influence de $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_H$	influence de $\vec{B}$	résultante
charges mobiles	$-n e (\vec{E}_0 + \vec{E}_H)$	$-n e \vec{v} \wedge \vec{B}$	$-n e \vec{E}_0$ car $\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$
charges fixes	$+n e (\vec{E}_0 + \vec{E}_H)$	0	$+n e (\vec{E}_0 + \vec{E}_H)$

Pour un élément de volume  $d\tau$ , nous avons donc :

$$d\vec{F} = n e \vec{E}_H d\tau.$$

Sachant que  $\vec{E}_H = R_H \vec{B} \wedge \vec{j}$ , avec  $R_H = -\frac{1}{n e}$ , nous obtenons :

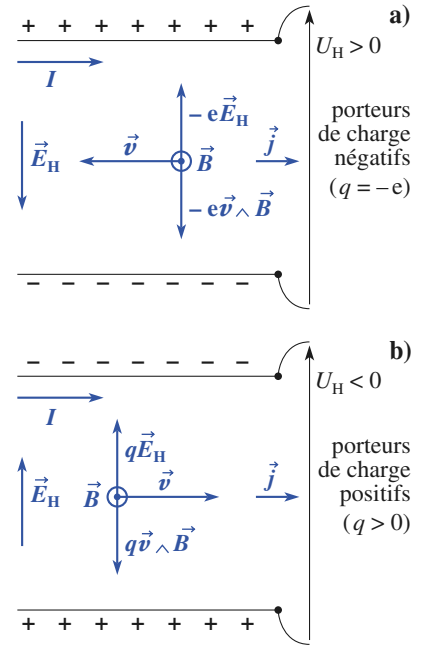
$$d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau,$$

c'est la *force de Laplace*. Elle représente la résultante des forces électromagnétiques sur un élément conducteur.

**La force de Laplace à laquelle est soumis un élément conducteur de volume  $d\tau$  parcouru par un courant de vecteur densité  $\vec{j}$ , placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est :  $d\vec{F}_{La} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$ .**

#### 4.4.3.2. Généralisation

Nous admettons que l'expression de la force de Laplace est conservée lorsque l'élément de conducteur est en mouvement de translation dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .



**Doc. 16.** Inversion du champ de Hall (et de la tension de Hall) en fonction du signe des porteurs de charge.

◀ **Doc. 17.** Détail des forces par unité de volume.  $\vec{E}_0$  représente la composante de  $\vec{E}$  parallèle à  $\vec{j}$  et le champ électrique total est égal à :  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_H$ .

Lorsque la modélisation volumique utilisée est remplacée par une modélisation linéique de courant (fil de section négligeable parcourue par un courant d'intensité  $I$ ), il suffit de remplacer  $\vec{j} d\tau$  par  $I d\vec{\ell}$  (élément de courant de même dimension) de sorte que la force de Laplace à laquelle est soumise un tel élément est :

$$d\vec{F}_{La} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

C'est la formulation historique de la force de Laplace.

**La force de Laplace à laquelle est soumis un élément de courant  $I d\vec{\ell}$  placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est :**

$$d\vec{F}_{La} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B},$$

**et pour une portion de circuit :**

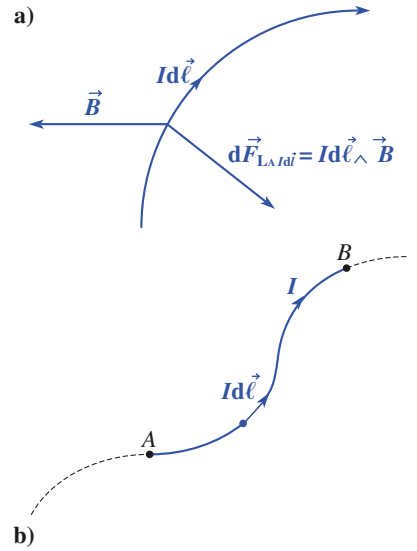
$$\vec{F} = \int_A^B I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

**La résultante des forces s'exerçant sur un circuit fermé placé dans un champ magnétique uniforme est nulle.**

En effet :

$$\vec{F} = \oint_{\text{circuit}} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \left( \oint_{\text{circuit}} I d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = I \left( \oint_{\text{circuit}} d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = 0,$$

car  $\oint_{\text{circuit}} d\vec{\ell} = 0.$



**Doc. 18. a)** Force de Laplace sur un élément de courant filiforme.

**b)** Force de Laplace s'exerçant sur la portion de circuit AB.

## CQFR

- La force électromagnétique subie par une particule de charge  $q$  et de masse  $m$ , se trouvant, à la date  $t$ , au point  $M$  du référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , en présence d'un champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$ , et se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}(M, t)_{/\mathcal{R}}$  est donnée par :

$$\vec{F}_{\text{Lo}} = q [\vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t)_{/\mathcal{R}} \wedge \vec{B}(M, t)] .$$

Dans le cas de champs permanents et indépendants du temps, nous avons :

$$\vec{F}_{\text{Lo}} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) .$$

- Le travail de la force magnétique  $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$  qui s'exerce sur une particule est nul. L'énergie cinétique de cette particule est constante (théorème de la puissance cinétique). La norme de sa vitesse au cours du mouvement est constante :

$$\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0, \text{ donc } \mathcal{E}_K = \text{cte et } v = \text{cte} .$$

## ● CHAMPS $\vec{E}$ ET $\vec{B}$ CROISÉS

Une particule placée dans des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  croisés uniformes et indépendants du temps, subit une vitesse de dérive :

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} .$$

## ● MOUVEMENT D'ENSEMBLE

- Un mouvement d'ensemble de charges est un courant électrique, dont le vecteur densité volumique de courants  $\vec{j}$  est défini par  $\vec{j} = n q \vec{v}$ , où  $n$  représente le nombre de porteurs mobiles par unité de volume et  $q$  la charge de chacun des porteurs.
- L'intensité  $I$  qui traverse une surface  $S$  à la date  $t$  est donnée par le flux du vecteur densité de courants à travers  $S$  à cette date, défini par :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} .$$

## ● LA LOI D'OHM LOCALE

- La vitesse d'ensemble (ou de dérive) des particules ( $q, m$ ) participant à la conduction est donnée par  $\vec{v} = \mu \vec{E}$ ;  $\mu$  désigne la mobilité de ces particules ( $\mu = q \frac{\tau}{m}$ ). Pour les électrons,  $\mu = -e \frac{\tau}{m}$  est négatif.
- Le vecteur densité volumique de courants  $\vec{j}$  (s'exprimant en  $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ ) est proportionnel au champ électrique appliqué au conducteur  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ,  $\gamma$  désigne la *conductivité électrique* du milieu (dit ohmique), dont l'expression est donnée par  $\gamma = n q^2 \frac{\tau}{m}$  ( $\tau$  voisin de  $10^{-14}$  s).
- L'inverse de la conductivité  $\rho = \frac{1}{\gamma}$  est la résistivité. La conductivité s'évalue en  $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$  et la résistivité en  $\Omega \cdot \text{m}$ .
- La généralisation de la loi d'Ohm locale, lorsque le conducteur est placé en présence simultanée d'un champ électrique  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}$ , s'écrit  $\vec{j} = \gamma \vec{E} + R_H (\vec{j} \wedge \vec{B})$ , où la constante de Hall  $R_H$  est égale à  $\frac{1}{n q}$ .

## ● FORCE DE LAPLACE

- La force de Laplace à laquelle est soumis un élément conducteur de volume  $d\tau$  parcouru par un courant de vecteur densité  $\vec{j}$ , placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est  $d\vec{F}_{\text{La}} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$ .
- La force de Laplace à laquelle est soumis un élément de courant  $I d\vec{\ell}$  placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est donnée par  $d\vec{F}_{\text{La}} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ , et pour une portion de circuit  $\vec{F} = \int_A^B I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ .
- La résultante des forces s'exerçant sur un circuit fermé placé dans un champ magnétique uniforme est nulle.

# Contrôle rapide

## Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Donner l'expression de la force de Lorentz en indiquant les unités des grandeurs qui y figurent.
- ✓ Quelle est la puissance de la force de Lorentz ?
- ✓ Quelle est la nature de la trajectoire d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme ?
- ✓ Quelle est la nature de la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme ?
- ✓ Quelle est la vitesse de dérive  $\vec{v}_D$  d'une particule ?
- ✓ Quel est le principe de fonctionnement d'un cyclotron ?
- ✓ Quand seul un champ électrostatique est appliqué, quelle est l'expression de la loi d'Ohm locale ?
- ✓ Quelle est l'expression de la résistance  $R$  d'un conducteur filiforme de longueur  $\ell$ , de section  $s$  et de conductivité  $\gamma$  ?
- ✓ Comment se généralise la loi d'Ohm locale quand un champ magnétostatique se superpose à un champ électrostatique appliqué ?
- ✓ Pouvez-vous décrire l'effet Hall ?

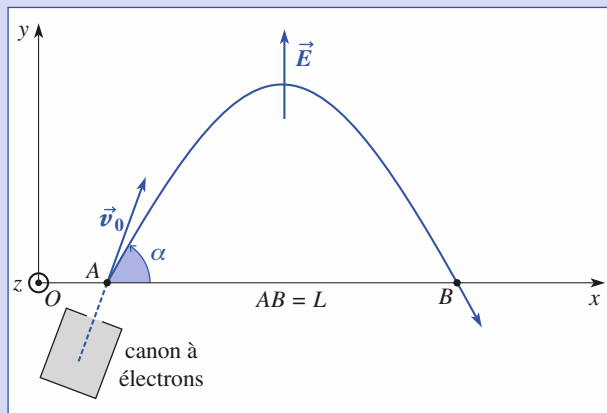
## Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. La force magnétique est sans effet sur le vecteur vitesse.  
☐ Vrai ☐ Faux
2. La déviation électrostatique par les plaques d'un condensateur plan est proportionnelle à la tension  $U$  appliquée et inversement proportionnelle à l'énergie cinétique  $\mathcal{E}_K$  de la particule.  
☐ Vrai ☐ Faux
3. En variant les expériences utilisant la force de Lorentz, il est possible de déterminer la charge  $q$  d'une particule et sa masse  $m$ .  
☐ Vrai ☐ Faux
4. Même en l'absence de force appliquée, les porteurs d'un milieu conducteur sont mouvement d'agitation thermique et leurs vitesses moyennes ne sont pas nulles.  
☐ Vrai ☐ Faux
5. La constante de relaxation de conduction  $\tau$  d'un milieu conducteur est de l'ordre de  $10^{-3}$  s.  
☐ Vrai ☐ Faux
6. Dans un conducteur, la vitesse d'ensemble des porteurs est de l'ordre de quelques millimètres par minute, même en présence d'un courant de forte intensité.  
☐ Vrai ☐ Faux
7. La mobilité  $\mu$  des porteurs est une quantité algébrique.  
☐ Vrai ☐ Faux
8. La constante de Hall  $R_H = \frac{1}{nq}$  est toujours négative.  
☐ Vrai ☐ Faux
9. Compte tenu de la très faible valeur de la tension de Hall dans les rubans métalliques, l'effet Hall ne conduit à aucune application pratique.  
☐ Vrai ☐ Faux

► Solution, page 200.

# Exercices

## 1 Focalisation d'électrons par un champ électrique



Des électrons, préalablement accélérés par une tension  $V = 10 \text{ kV}$ , pénètrent par la fente  $A$  supposée très fine dans une région où règne un champ électrique uniforme  $\vec{E} = E \vec{e}_y$ . On désire recueillir ces électrons à travers une fente  $B$  pratiquée dans le plan opaque  $(xOz)$ , à la distance  $AB = L = 20,0 \text{ cm}$  de  $A$ .

On peut régler l'angle  $\alpha$  que fait le vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  des électrons en  $A$  avec l'axe  $(Ax)$ , ainsi que la norme et le sens du champ électrostatique  $\vec{E}$ . Le vecteur  $\vec{v}_0$  est supposé parallèle au plan  $(xOy)$ .

1) Quelles sont les valeurs optimales à donner à  $\alpha$  et à  $\vec{E}$  pour réaliser la focalisation de ces électrons, sachant que le faisceau incident présente une faible dispersion angulaire  $\Delta\alpha$ ? ( $\alpha$  appartient à  $\left[\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}; \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}\right]$ .)

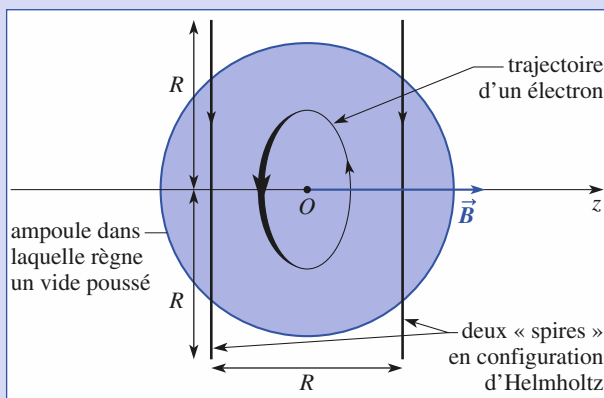
2) La largeur de la fente placée en  $B$  étant  $\Delta L = 2 \text{ mm}$ , donner un ordre de grandeur de la dispersion angulaire  $\Delta\alpha$  acceptable pour ne pas atténuer sensiblement l'intensité du faisceau d'électrons étudié.

## 2 Mesure de $\frac{e}{m}$ avec montage utilisant des bobines de Helmholtz

Dans le montage suivant, les électrons préalablement accélérés par une différence de potentiel  $V = 2,5 \text{ kV}$ , décrivent dans l'ampoule où règne un vide poussé une trajectoire circulaire de rayon  $\rho = 3,27 \text{ cm}$ .

Le champ magnétique créé par les bobines, en géométrie d'Helmholtz, est quasi uniforme et sa valeur numérique égale à  $5,12 \text{ mT}$ .

En déduire le rapport  $\frac{e}{m}$ .



## 3 Déflexion magnétique

Des électrons pénètrent en  $O$ , avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ , dans un domaine  $\mathcal{D}$  de largeur  $L$ , où règne un champ magnétique  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  uniforme et constant. On admettra qu'ailleurs le champ magnétique est nul. On suppose la largeur  $L$  du domaine telle que :

$$L \ll \frac{mv_0}{eB} = \rho, \quad \text{soit} \quad \frac{\omega L}{v_0} = \frac{eBL}{mv_0} \ll 1.$$

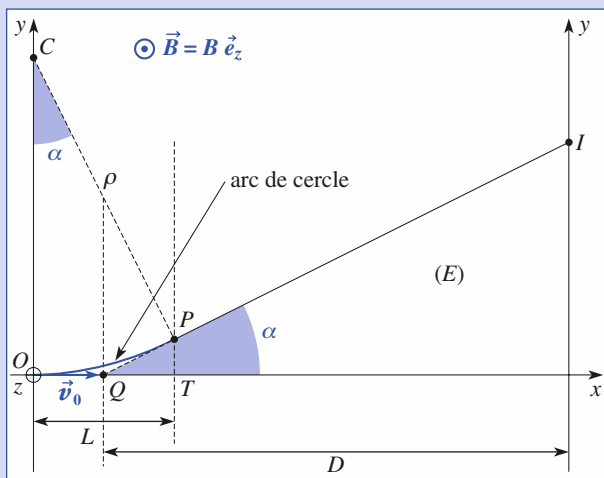
Un écran  $(E)$  fluorescent a été placé à la distance  $D + \frac{L}{2}$  du point  $O$  ( $X_E = D + \frac{L}{2}$ ).

1) Déterminer l'ordonnée  $y_P$  du point  $P$  où l'électron quitte le domaine  $\mathcal{D}$ , ainsi que l'angle  $\alpha$  que fait avec  $(Ox)$  la vitesse de l'électron en ce point.

2) En déduire la position du point d'impact  $I$  sur l'écran.

3) Vérifier que le support du vecteur  $\vec{PI}$  passe très près du point  $Q$  d'abscisse  $\frac{L}{2}$  dans les hypothèses d'étude.

Données :  $L = 1 \text{ cm}$ ; tension accélératrice  $V = 10 \text{ kV}$ ;  $B = 3 \text{ mT}$  et  $D = 20 \text{ cm}$ .



# Exercices

## 4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique en présence d'une force de frottement

Une particule de charge  $q = e$  et de masse  $m$ , initialement en  $O$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ , se déplace dans un milieu fluide, dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme :

$$\vec{B} = B \vec{e}_z.$$

Cette particule subit une force de frottement qu'on supposera de la forme :

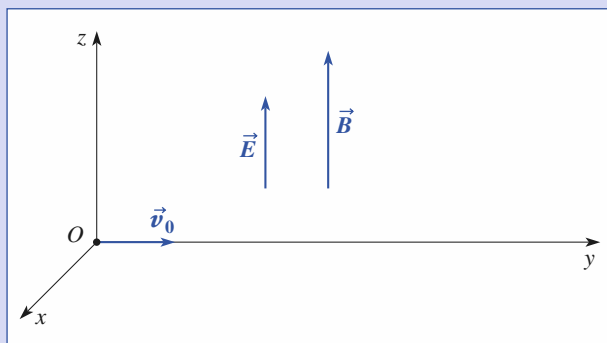
$$\vec{F}_{\text{frott}} = -k \vec{v} \quad (k \text{ constante positive}).$$

Décrire le comportement de cette particule. On pourra introduire une constante de temps  $\tau$  et la pulsation cyclotron  $\omega = \frac{eB}{m}$ . Il est suggéré de prévoir d'abord ce qui va se produire, puis d'envisager si possible un traitement numérique de la question, et enfin un traitement analytique.

## 5 Protons dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ parallèles

Des protons sont émis en  $O$  par une source quasi ponctuelle, avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$ . Étudier leur mouvement ultérieur en présence de champs électrique et magnétique uniformes :

$$\vec{E} = E \vec{e}_z \text{ et } \vec{B} = B \vec{e}_z, \text{ avec } E > 0 \text{ et } B > 0.$$



Montrer qu'en plaçant judicieusement des diaphragmes dans le plan  $(xOz)$  on peut mesurer le rapport  $\frac{q}{m}$  pour les protons.

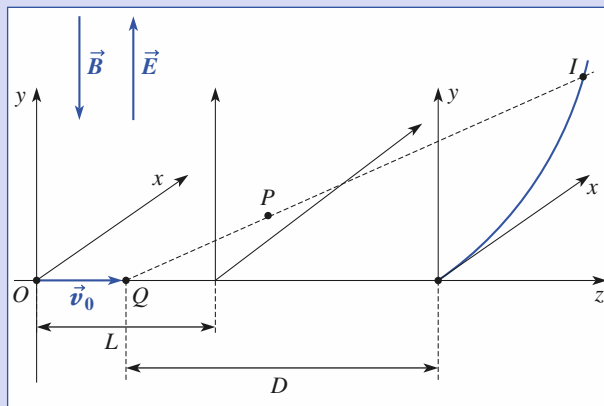
Comment varie l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'axe  $(Oz)$ , en fonction de la position du diaphragme ?

## 6 La méthode des paraboles

Des ions positifs de masse  $m$  et de charge  $q$ , animés d'une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$ , pénètrent dans une région de largeur  $L$  où règnent des champs  $\vec{E} = E \vec{e}_y$  et  $\vec{B} = -B \vec{e}_y$  uniformes et constants ( $E$  et  $B$  positifs).

Supposons que la distance  $L$  soit nettement inférieure à  $\frac{mv_0}{qB}$  et faisons une étude (avec cette approximation) des déflexions imposées par les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

Déterminer le point d'impact  $I$  de la particule sur un écran fluorescent placé à la distance  $D$  du point  $Q$  milieu de la région où règnent les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

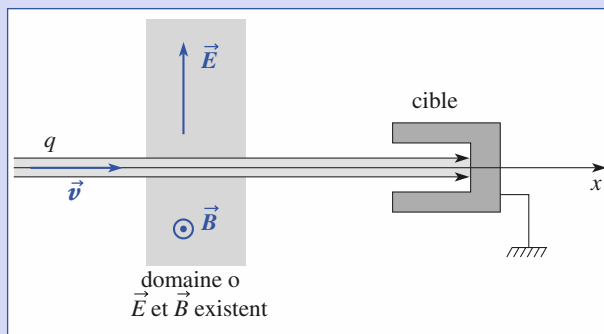


## 7 Protons sur cible

Un faisceau monocinétique de protons, d'intensité  $I = 0,25$  A, traverse sans subir de déviation une région  $\mathcal{D}$  de l'espace où règnent des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  uniformes et constants, transversaux et croisés ( $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ ).

Ce faisceau est ensuite absorbé par une cible métallique reliée au sol. Déterminer la force moyenne subie par la cible.

Données :  $E = 150 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $B = 30 \text{ mT}$ .



## 8 Mouvements d'un proton dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ croisés

Un proton pénètre en  $O$  avec une vitesse initiale négligeable (donc supposée nulle) dans une région de l'espace où règnent des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  donnés par :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega_1 t) \vec{e}_y \text{ et } \vec{B} = B \vec{e}_z.$$



$E_0$  et  $B$  sont des constantes positives, de même que  $\omega_1$ .

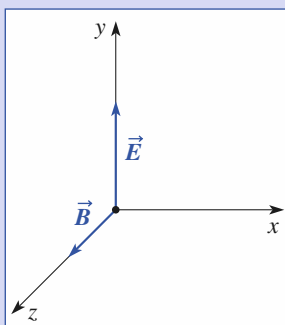
On posera  $a = \left(\frac{eE_0}{m}\right)$

et  $\omega = \frac{eB}{m}$ .

1) Après avoir vérifié que le mouvement est décrit dans le plan  $(xOy)$ , établir les équations différentielles du mouvement.

2) Envisager une résolution numérique ou analytique de ces équations. En posant  $\omega_1 = n \omega$  étudier le comportement de la trajectoire dans les cas limites  $n \ll 1$ , puis  $n \gg 1$ .

Que prévoyez-vous pour  $n = 1$ ? Le vérifier en cherchant une solution de la forme  $y = \alpha t \sin(\omega t)$ .

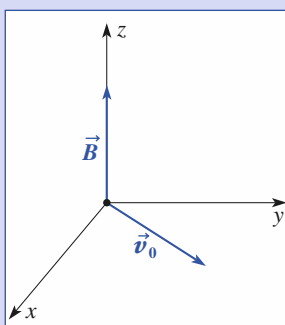


## 9 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique avec frottement

Une particule de charge  $q > 0$  et de masse  $m$  se déplace dans un milieu où elle subit une force de frottement de la forme :

$$\vec{F} = -k v^2 \frac{\vec{v}}{v},$$

avec  $k$  positif, en présence d'un champ magnétique uniforme et constant, normal à la vitesse  $\vec{v}_0$  initiale de la particule.

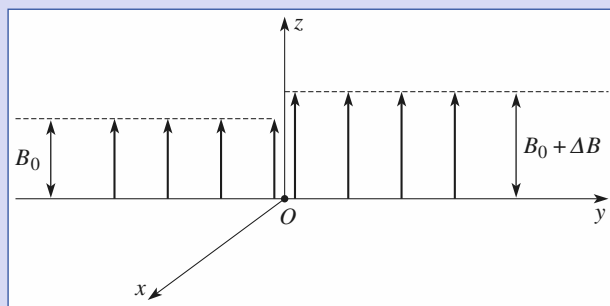


1) Montrer que la norme de la vitesse de la particule décroît au cours du temps. La vitesse nulle est-elle atteinte au bout d'une durée finie ou non ?

2) Contrôler éventuellement les résultats par une étude avec ordinateur.

## 10 Vitesse de dérive

Une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  (positive) est mobile dans un champ magnétique invariant au cours du



temps, mais présentant une inhomogénéité en  $y = 0$ . Les lignes de champ magnétique sont parallèles à l'axe  $(Oz)$ ; le champ magnétique dépend de  $y$  selon la loi :

$$\vec{B} (y < 0) = B_0 \vec{e}_z$$

$$\text{et } \vec{B} (y > 0) = (B_0 + \Delta B) \vec{e}_z,$$

avec

$$B_0 > 0 \text{ et } \Delta B > 0.$$

On se limite au mouvement de la particule dans le plan  $(xOy)$ . On suppose qu'à  $t = 0$ , la particule est en  $O$ , avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$ .

Étudier le mouvement de dérive de cette particule.

Que se passe-t-il si  $q < 0$  ?



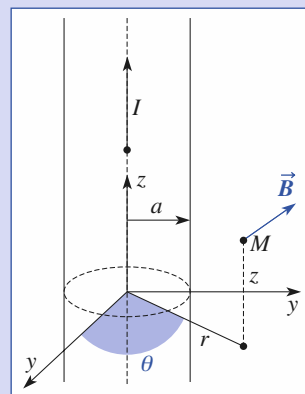
## 11 Électron émis par un fil cylindrique

Un conducteur cylindrique très long, d'axe  $(Oz)$  et de section circulaire de rayon  $a$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$ , crée en un point  $M$  repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  un champ magnétostatique donné par :

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right) \vec{e}_\theta \quad (r \geq a).$$

Il existe une probabilité non nulle pour qu'un électron soit émis par ce fil, avec une vitesse initiale que l'on supposera radiale.

Étudier le mouvement de cet électron, et déterminer en particulier la distance maximale à laquelle il peut s'éloigner du fil.



## 12 Focalisation d'un faisceau d'électrons dans un condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est formé de deux armatures métalliques cylindriques, de même axe  $(Oz)$ , et de rayons respectifs  $a$  et  $b$ , avec  $a < b$ .

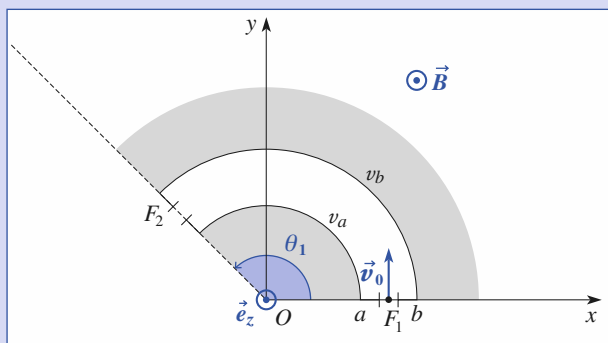
Ces armatures sont portées aux potentiels respectifs  $V_a$  et  $V_b$ , avec  $V_b > V_a$  et on admet que le champ électrostatique régnant dans l'espace entre les armatures est donné par :

$$\vec{E} = -\frac{A}{r} \vec{e}_r, \quad \text{avec } A = \frac{V_b - V_a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $(Oz)$ .

En fait le dispositif décrit ici, permettant une détermination expérimentale de  $\left(\frac{e}{m}\right)$ , comporte un tronçon de condensateur cylindrique d'ouverture angulaire  $\theta_1$  judicieusement choisie. Des électrons pénètrent par la fente fine  $F_1$  parallèle à  $(Oz)$  (avec  $OF_1 = r_0$ ) avec une vitesse initiale  $v_0$  supposée normale à  $(Oz)$ . On applique en outre un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ .

# Exercices



1) On suppose d'abord  $\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{OF_1} = 0$  (vitesse initiale orthoradiale). Déterminer la relation qui doit lier  $A$ ,  $r_0$ ,  $v_0$  et  $B$  pour que la trajectoire des électrons soit circulaire dans le

condensateur. Montrer qu'il existe une valeur optimale de  $A$  telle que cette relation soit approximativement satisfaite, même si la norme de la vitesse initiale des électrons présente une (faible) dispersion autour de la valeur  $v_0$ .

2) On suppose maintenant que les vitesses initiales des électrons font un petit angle  $\alpha$  avec la normale à  $OF_1$  en  $F_1$ . Montrer que le choix  $\theta_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  (en radians) permet néanmoins de focaliser les électrons dans la fente de sortie en  $F_2$ .

3) En déduire une méthode de détermination de  $\left(\frac{e}{m}\right)$ .

Pour quelle valeur de  $V_b - V_a$  obtient-on une intensité maximale dans un détecteur placé derrière la fente  $F_2$  ?

On prendra  $r_0 = \frac{a+b}{2}$ .

Données :  $a = 3,00 \text{ cm}$  ;  $b = 4,00 \text{ cm}$  ;  $B = 3,00 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ .

# Corrigés

**Solution du tac au tac, p. 196.**

1. Faux
2. Vrai
3. Faux
4. Faux

5. Faux
6. Vrai
7. Vrai
8. Faux
9. Faux

**1**

1) La vitesse  $v_0$  des électrons est égale à  $v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$ .

L'équation différentielle du mouvement des électrons est  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -eE\vec{e}_y$ .

Avec  $\vec{v}(t=0) = v_0 \cos \alpha \cdot \vec{e}_x + v_0 \sin \alpha \cdot \vec{e}_y$ ,  $x(t=0) = 0$  et  $y(t=0) = 0$ , nous obtenons les solutions suivantes :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = \frac{-eE}{2mv_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \end{cases}$$

$y$  s'annule pour deux valeurs de  $x$  :

$$x_A = 0 \quad \text{et} \quad x_B = 2 \frac{m v_0^2}{eE} \sin \alpha \cos \alpha = 2 \frac{V}{E} \sin 2\alpha.$$

Pour que  $x_B$  dépende peu de  $\alpha$ , il faut que  $\frac{dx_B}{d\alpha} = 0$  donc :

$$\cos 2\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Il faudra donc choisir les conditions suivantes :

$$E = \frac{2V}{L} \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{4}.$$

A.N. :  $E = 105 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

2) Le développement limite de  $x_B$  au voisinage de  $\alpha = \alpha_0$  nous donne (en posant  $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$  et en se limitant aux termes d'ordre deux) :

$$x_B(\alpha) = x_B(\alpha_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{d^2 x_B}{d\alpha^2} \right)_{\alpha=\alpha_0}.$$

Sachant que  $x_B(\alpha) = L \sin 2\alpha$ , nous obtenons :

$$x_B(\alpha) - x_B(\alpha_0) = -2L \varepsilon^2.$$

La valeur de  $\Delta\alpha$  acceptable est donc donnée par :

$$\frac{\Delta\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\Delta L}{2L}}, \quad \text{soit} \quad \Delta\alpha = 0,14 \text{ rad} \approx 8^\circ.$$

**2**

À partir de  $mv_0 = e\rho B$  et de  $\frac{1}{2}mv_0^2 = eV$ , nous obtenons  $\frac{e}{m} = \frac{2V}{\rho^2 B^2}$ .

On en déduit  $\frac{e}{m} = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$  (la précision sur  $V$  n'autorise pas un nombre plus élevé de chiffres significatifs).

**3**

1) La trajectoire des électrons dans  $\mathcal{D}$  est circulaire et de centre  $C$  ( $x_C = 0$

et  $y_C = \rho = \frac{mv_0}{eB}$ ).

Par suite :  $y_P = \rho(1 - \cos \alpha)$ , avec  $L = \rho \sin \alpha$

et donc :  $y_P = L \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ , avec  $\sin \alpha = \frac{L}{\rho} = \frac{eBL}{m v_0}$ ,

soit :  $\sin \alpha \approx \alpha = \frac{eBL}{m v_0}$  et  $y_P = \frac{L\alpha}{2} = \frac{eBL^2}{2m v_0}$ .

A.N. :  $v_0 = \left(\frac{2eV}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = 59,3 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $\alpha = \frac{eBL}{m v_0} = 89,10^{-3} \text{ rad} = 5,11^\circ$  ;

$\rho = 11,2 \text{ cm}$  ;  $\frac{L}{\rho} = 0,09$  et  $y_P = 0,445 \text{ mm}$ .

2) Le point d'impact  $I$  vérifie  $y_I = y_P + \left(D - \frac{L}{2}\right) \tan(\alpha) = D\alpha = D \frac{eBL}{m v_0}$ .

A.N. :  $y_I = 1,78 \text{ cm}$ .

3)  $OQ = \rho \sin \frac{\alpha}{2} \approx \rho \frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2}$ . La droite de  $PI$  passe par le point  $Q$  milieu de  $OT$ .

#### Remarque

Notons la différence essentielle entre la déflexion magnétique ( $y_1$  inversement proportionnelle à  $m v_0$ ) et la déflexion électrostatique ( $y_1$  inversement proportionnelle à  $\frac{1}{2} m v_0^2$ ). Ceci est mis à profit plus loin pour séparer des isotopes (exercices 6).

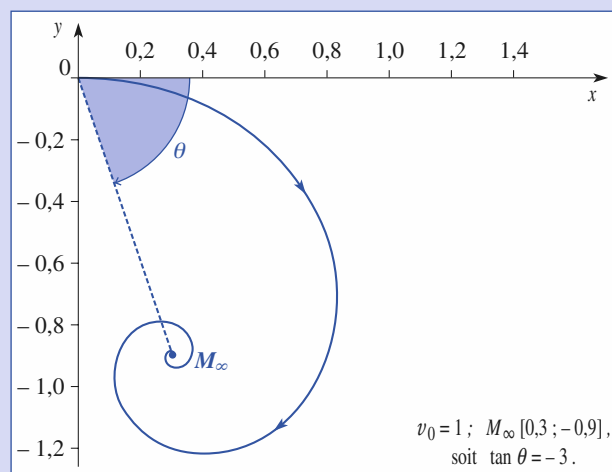
4

Nous sommes en présence, par exemple, de protons dans un liquide sursaturé (protons dans une chambre à bulles). Des bulles de gaz se créent sur le parcours du proton et matérialisent sa trajectoire. Le procédé était utilisé pour détecter des particules.

L'équation différentielle du mouvement s'écrit  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B} - k \vec{v}$ , soit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega \vec{e}_z \wedge \vec{v} - \frac{\vec{v}}{\tau}, \quad \text{avec } \omega = \frac{qB}{m} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{m}{k}.$$

Au cours du mouvement la norme de  $\vec{v}$  diminue (influence de la force de frottement) et le rayon de courbure de la trajectoire ( $\rho = \frac{m v}{qB}$ ) diminue : la particule « s'enroule » autour d'un point asymptotique  $M_\infty$ , c'est ce que nous voyons sur la simulation.



Les équations du mouvement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} = \omega \frac{dy}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dy}{dt} = -\omega \frac{dx}{dt}$$

peuvent se regrouper en posant  $u = x + iy$  :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right) \frac{du}{dt} = 0.$$

Une première intégration donne :

$$\frac{du}{dt} = v_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)t}$$

puis, une seconde intégration :

$$u = \frac{-v_0}{\frac{1}{\tau} + i\omega} \left( e^{-\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)t} - 1 \right) = \frac{-v_0 \tau (1 - i\omega \tau)}{1 + (\omega \tau)^2} \left( e^{-\frac{1}{\tau}t} (\cos \omega t - i \sin \omega t) - 1 \right).$$

En séparant les parties réelle et imaginaire, il vient :

$$x = \frac{v_0 \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left( 1 + e^{-\frac{1}{\tau}t} (-\cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t) \right)$$

$$y = \frac{v_0 \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \left( -\omega \tau + e^{-\frac{1}{\tau}t} (\sin \omega t + \omega \tau \cos \omega t) \right).$$

La trajectoire de la particule tend vers le point asymptote  $M_\infty$  de coordonnées :

$$x_\infty = \frac{v_0 \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \quad \text{et} \quad y_\infty = \frac{-v_0 \omega \tau^2}{1 + (\omega \tau)^2}.$$

5

Posons  $\omega_c = \frac{qB}{m}$  et  $a = \frac{qE}{m}$ . L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a \vec{e}_z + \omega_c \vec{v} \wedge \vec{e}_z$$

donne en projection :

$$\bullet \frac{dv_z}{dt} = a \quad \text{d'où} \quad v_z = at \quad \text{et} \quad z = \frac{a}{2} t^2;$$

$$\bullet \frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y \quad \text{et} \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x.$$

En posant  $u = v_x + i v_y$  il vient  $\frac{du}{dt} + \omega_c u = 0$  ce qui s'intègre en :

$$u = i v_0 e^{-\omega_c t} = i v_0 (\cos \omega_c t - i \sin \omega_c t)$$

et par suite :  $v_x = v_0 \sin \omega_c t$  et  $v_y = v_0 \cos \omega_c t$

soit, enfin :  $x = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega_c)$  et  $y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega_c$ .

Pour  $t_n = nT = n \frac{2\pi}{\omega_c}$ , la particule entre en contact avec l'axe des  $z$  et traverse le

diaphragme s'il est placé en :  $z_n = \frac{a}{2} t_n^2 = 2\pi^2 \frac{m}{q} \frac{E}{B^2} n^2$ .

À ces dates, le vecteur vitesse est incliné d'un angle  $\alpha_n$  sur l'axe ( $Oz$ ) tel que :

$$\tan \alpha_n = \frac{v_0}{v_z} = \frac{v_0 \omega_c}{2\pi n} = \frac{v_0 B}{2\pi E n}.$$

6

Posons  $\omega = \frac{qB}{m}$  et  $a = \frac{qE}{m}$  ( $a$  homogène à une accélération).

L'équation vectorielle du mouvement est  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$  et les équations scalaires dans le repère considéré (valable pour  $x < L$ ) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega \frac{dz}{dt}, \quad (\text{ce qui donne } \frac{dx}{dt} = \omega z),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a \quad (\text{dont la solution est } y = \frac{1}{2} at^2)$$

$$\text{et} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega \frac{dx}{dt}, \quad (\text{ce qui donne } \frac{dz}{dt} = -\omega x + v_0).$$

Les déviations dues aux champs  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$  sont indépendantes.

L'équation  $\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z$  a pour solution  $z = \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \sin \omega t$ ,

d'où  $x = \left(\frac{v_0}{\omega}\right) (1 - \cos \omega t)$ .

Sachant que  $\omega \tau \ll 1$  (avec  $\tau = \frac{L}{v_0}$  ordre de grandeur du temps  $\tau$  mis par la particule pour franchir la distance  $L$ ), nous pouvons écrire :

$$z = v_0 t \quad \text{et} \quad x = \frac{v_0 \omega t^2}{2}, \quad (\omega \tau \ll 1) \text{ à l'ordre deux.}$$

La particule franchit donc le plan  $z = L$  à  $\tau = \frac{L}{v_0}$  et les coordonnées du point  $P$

où la particule sort des champs sont  $x_P = \frac{\omega L^2}{2 v_0}$  et  $y_P = \frac{a L^2}{2 v_0^2}$ .

Le mouvement ultérieur est rectiligne ; la droite passe par le point  $Q$  de coordonnées  $(0, 0, \frac{L}{2})$ .

# Corrigés

Les coordonnées du point d'impact  $I$  sont :

$$x_I = \frac{2D}{L} x_P \quad \text{et} \quad y_I = \frac{2D}{L} y_P$$

résultat qui peut encore s'écrire :

$$x_I = \frac{eLBD}{m v_0} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{eELD}{m v_0^2}.$$

L'élimination de la vitesse  $v_0$  fournit  $y_I = \left( \frac{mE}{qB^2LD} \right) x_I^2$ . Le point d'impact est donc

situé sur une parabole déterminée par le rapport  $\frac{q}{m}$ . La dispersion sur les valeurs de  $v_0$  permet de décrire cette parabole.

Si la masse varie, le point figuratif se déplace sur un autre morceau de parabole. Il est possible ainsi de mettre en évidence la présence d'isotopes. Il s'agit d'un spectrographe de masse particulier utilisé la première fois par J.-J. Thomson.

**7**

Comme les particules traversent la zone sans déviation, cela signifie que :

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0,$$

$$\text{soit } \vec{v} = \vec{v}_D = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} = \frac{E}{B} \vec{e}_x \quad (v = 5 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

Chaque proton possède une quantité de mouvement  $\vec{p} = m v \vec{e}_x$ . Le nombre  $dn$  de protons qui arrivent sur la cible pendant un intervalle de temps  $dt$  (donné par  $dn = \frac{I}{e} dt$ ) subissent une variation de quantité de mouvement égale à  $\Delta \vec{p} = -\vec{p}$ .

La force exercée par la cible sur ces protons est donc égale à :

$$dn \cdot \Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot dt = -\frac{I}{e} m v \vec{e}_x dt, \quad \text{soit} \quad \vec{F}_{\text{cible} \rightarrow \text{protons}} = -\frac{I}{e} m v \vec{e}_x.$$

D'après le principe des actions réciproques, la force subie par la cible est directement opposée, soit  $\vec{F}_{\text{protons} \rightarrow \text{cible}} = +\frac{I}{e} m v \vec{e}_x$ .

$$A.N. : F = 13 \text{ mN}.$$

**8**

1) Si la vitesse  $\vec{v}$  du proton est dans le plan  $(xOy)$ , elle y restera indéfiniment, car la force électrique et la force magnétique restent dans ce plan. Comme il n'y a aucune composante de force suivant  $\vec{e}_z$ , la vitesse  $\vec{v}_z$  est constante. Or à  $t=0$ ,  $\vec{v} = \vec{0}$ , donc  $v_z = 0$ .

Les équations différentielles d'évolution dans ce plan s'écrivent :

$$\ddot{x} = \omega \dot{y} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = a \cos(\omega_1 t) - \omega \dot{x} \quad (2)$$

2) En reportant la solution de (1) ( $\dot{x} = \omega y$ ) dans l'équation (2) nous obtenons :

$$\text{soit} \quad \ddot{y} + \omega^2 y = a \cos \omega_1 t, \quad y(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{a \cos \omega_1 t}{\omega^2 - \omega_1^2}.$$

Avec les conditions initiales  $y(0) = 0$  et  $\dot{y}(0) = 0$ , nous obtenons ( $\omega \neq \omega_1$ ) :

$$y(t) = \frac{a}{\omega^2 - \omega_1^2} [\cos \omega_1 t - \cos \omega t]$$

$$\text{et} \quad x(t) = \frac{a}{\omega^2 - \omega_1^2} \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \sin \omega t \right].$$

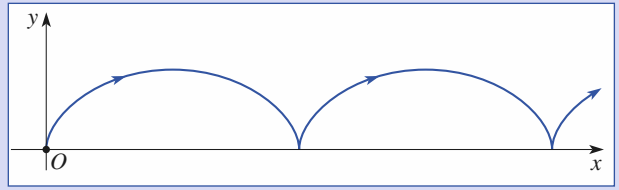
Posons  $\omega_1 = n \omega$  et étudions les simulations suivantes solutions des équations :

$$\ddot{x} = \omega \dot{y}$$

$$\ddot{y} = a \cos(n \omega t) - \omega \dot{x},$$

avec  $\omega = 2\pi$  et  $a = 1$  pour diverses valeurs de  $n$ .

• **S.1.**  $n = 0$  : nous obtenons la trajectoire cycloïdale classique du mouvement d'une charge  $(q, m)$  dans  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  croisés, indépendants du temps.

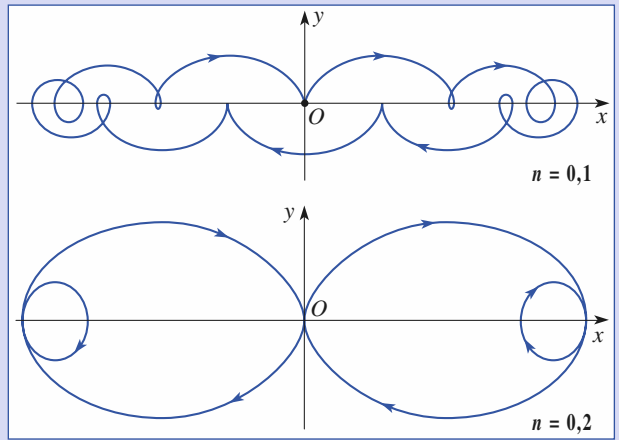


• **S.2.**  $n = 0,1$  et **S.3.**  $n = 0,2$  : la trajectoire reste à distance finie.

Pour  $n \ll 1$  :

$$x(t) \approx \frac{a}{n\omega^2} \sin n\omega t \quad \text{et} \quad y(t) \approx -\frac{a}{\omega^2} [\cos(n\omega t) - \cos \omega t].$$

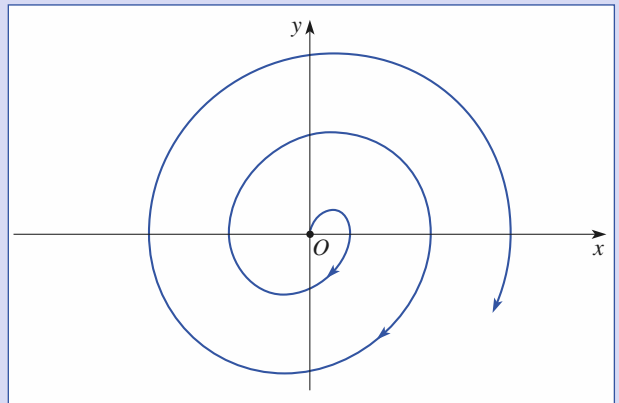
La courbe est inscrite dans le rectangle  $\left[ \frac{2a}{n\omega^2}; \frac{4a}{\omega^2} \right]$  allongé suivant l'axe  $(Ox)$ .



• **S.4.**  $n = 1$  :

$$y(t) = \frac{a}{2\omega} t \sin \omega t \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{a}{2\omega^2} [\sin \omega t - (\omega t) \cos \omega t],$$

la trajectoire diverge.

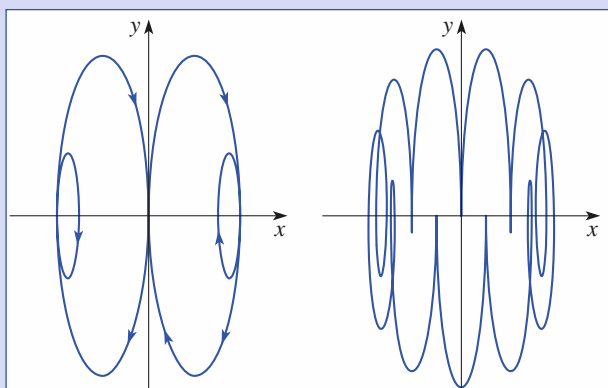


• **S.5.**  $n = 5$  et **S.6.**  $n = 10$  : la trajectoire reste à distance finie.

Pour  $n \gg 1$ ,

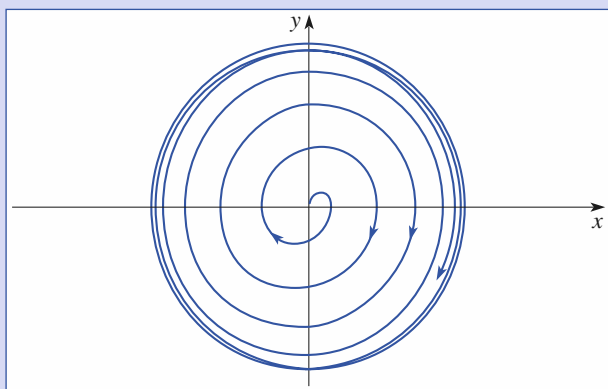
$$x(t) \approx \frac{a}{n^2\omega^2} \sin \omega t \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{a}{n^2\omega^2} [\cos(n\omega t) - \cos \omega t].$$

La courbe est inscrite dans le rectangle  $\left[ \frac{2a}{n^2\omega^2}; \frac{4a}{n^2\omega^2} \right]$ .



**Remarque :**

En excluant la valeur  $n = 0$ , la trajectoire diverge pour  $n = 1$ . Ce comportement a reçu une application, **l'omégaatron** : il est possible de « mesurer » précisément  $\frac{q}{m}$  en recherchant la valeur  $\omega_1 = \omega$  pour laquelle les particules divergent,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  étant connus.



**9**

1) La force magnétique ne travaille pas. La force de frottement a pour effet de diminuer la vitesse de la particule.

L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{qB}{m} \vec{e}_z \wedge \vec{v} - \frac{k}{m} v \vec{v}.$$

En multipliant scalairement par  $\vec{v}$  :

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = v \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v^3, \text{ soit } \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v^2,$$

et en intégrant, nous obtenons  $\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{k}{m} t$ , soit  $v = \frac{v_0}{1 + v_0 \frac{k}{m} t}$ .

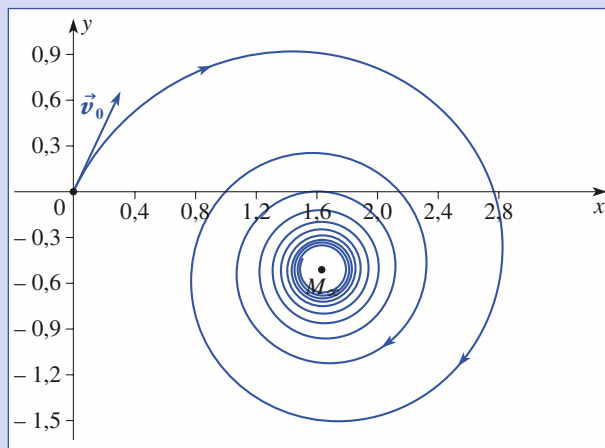
Le mouvement s'effectue dans le plan  $(xOy)$  et la vitesse  $v$  s'annule au bout d'un temps infini.

2) La vitesse diminue au cours du temps. Le rayon de courbure de la trajectoire diminue. Nous obtenons une « spirale » s'enroulant autour d'un point asymptotique limite  $M_\infty$  comme l'indique la simulation.

$$\ddot{x} = +\omega \dot{y} - f v \dot{x} \text{ et } \ddot{y} = -\omega \dot{x} - f v \dot{y},$$

avec :

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}; \quad \omega = 2\pi; \quad f = 1; \quad \dot{x}_0 = 0,5; \quad \dot{y}_0 = 1; \quad x_0 = 0 \text{ et } y_0 = 0.$$



**10**

La vitesse reste en permanence égale à  $v_0$  en norme. Considérons une

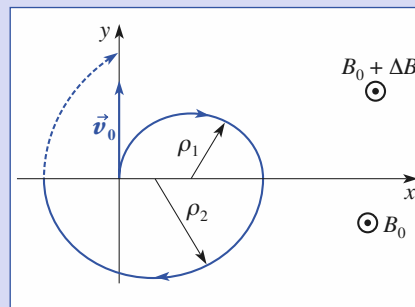
charge  $q > 0$ . Si  $y > 0$ , la particule décrit un demi-cercle de rayon  $\rho_1 = \frac{m v_0}{q(B_0 + \Delta B)}$

pendant une durée  $\tau_1 = \frac{\pi \rho_1}{v_0}$ .

Si  $y < 0$ , la particule décrit un demi-cercle de rayon  $\rho_2 = \frac{m v_0}{q B_0}$  pendant une durée :

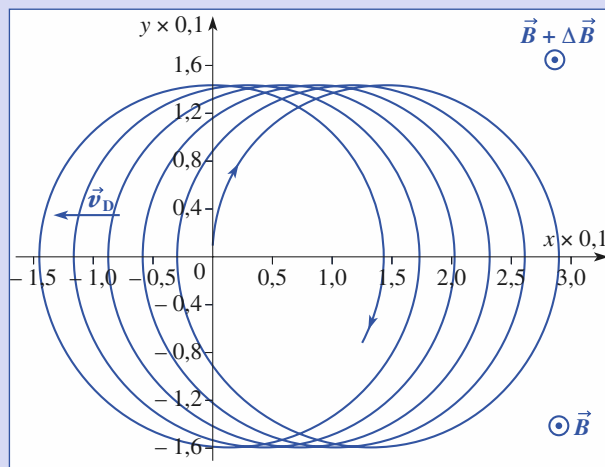
$$\tau_2 = \frac{\pi \rho_2}{v_0} \quad (\rho_2 > \rho_1).$$

Il existe donc une vitesse de dérive  $V_D$ , dans le sens des  $x$  décroissants, définie par :



$$\vec{V}_D = -2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\tau_1 + \tau_2} \vec{e}_x = -\frac{2 v_0}{\pi} \frac{\Delta B \vec{e}_x}{2 B_0 + \Delta B}.$$

La vitesse de dérive est opposée si  $q < 0$ .



# Corrigés

11

Le mouvement s'effectue dans un plan méridien  $\theta = \text{cte}$ .

En effet  $L_{Oz}$  est constant car :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \vec{e}_z \cdot [\vec{OM} \wedge (q \vec{v} \wedge \vec{B})] = 0 \quad (q = -e).$$

L'équation différentielle du mouvement devient  $\ddot{r} = \frac{eB}{m} \dot{z}$  et  $\ddot{z} = -\frac{eB}{m} \dot{r}$ .

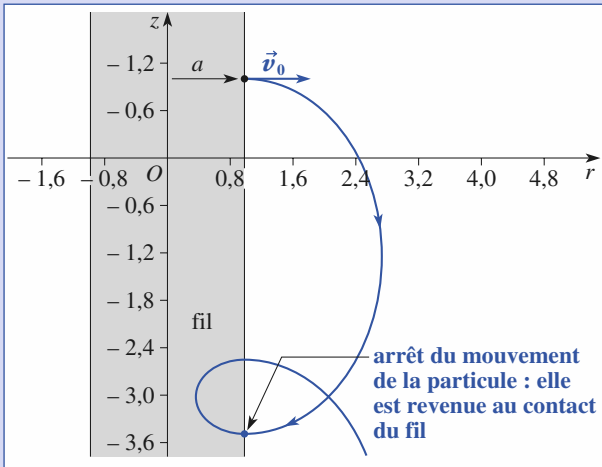
En remplaçant  $B$  par son expression nous obtenons :

$$\ddot{z} = -\frac{e}{m} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\dot{r}}{r}, \quad \text{d'où} \quad \ddot{z} = -\frac{e}{m} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right).$$

Sachant que  $\dot{z}^2 + \dot{r}^2 = v_0^2$  (la force magnétique ne travaille pas), la cote  $r_{\text{max}}$  sera atteinte lorsque  $\dot{z} = -v_0$ , soit :

$$r_{\text{max}} = a \exp\left[\frac{2\pi m v_0}{e \mu_0 I}\right].$$

La simulation montre l'allure de la trajectoire.



Mouvement d'un électron émis par un fil cylindrique parcouru par un courant  $I$ .

12

1) La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un électron, en coordonnées polaires donne :

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{e}{m} \left( \frac{A}{r} - Br\dot{\theta} \right) & (1) \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{eB}{m} r \dot{r} & (2) \end{cases}$$

Si  $r = r_0 = \text{cte}$ , alors  $\dot{\theta} = \text{cte} = \frac{v_0}{r_0}$ .

Nous déduisons que  $A = Br_0 v_0 - \frac{m v_0^2}{e}$ .

Cette expression doit peu dépendre de  $v_0$ , soit  $\frac{dA}{dv_0} = 0 = Br_0 - 2 \frac{m}{e} v_0$ .

Ce qui nous donne :

$$A = \frac{Br_0 v_0}{2} = \frac{m v_0^2}{e}$$

et en éliminant la vitesse  $A = \frac{e}{4m} B^2 r_0^2$ , soit  $\frac{4A}{B^2 r_0^2} = \frac{e}{m}$ .

2) Les simulations jointes montrent qu'il existe bien une focalisation ( $\alpha = 5^\circ$  et  $\alpha = -5^\circ$ )  $125^\circ < \theta_1 < 128^\circ$ .

Retrouvons ce résultat par le calcul : posons  $r = r_0 + \rho$  et cherchons linéariser l'équation en  $\rho$ .

L'équation (2) nous donne :

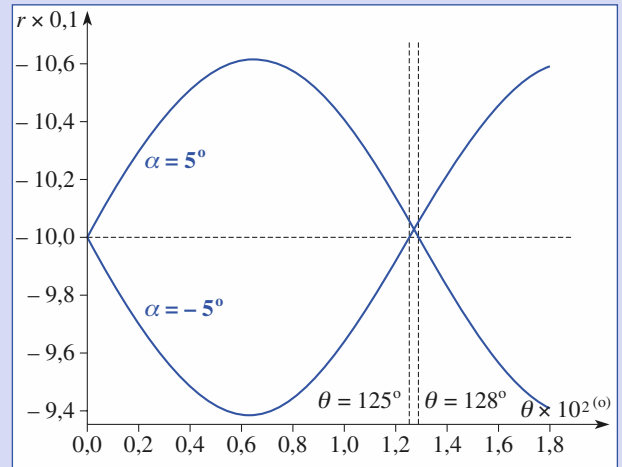
$$r^2 \dot{\theta} - r_0 v_0 \cos \alpha = \frac{eB}{2m} (r^2 - r_0^2), \quad \text{soit} \quad \dot{\theta} = \frac{eB}{2m} \quad (\text{car } v_0 = \frac{eB}{2m} r_0 \text{ et } \alpha \ll 1).$$

L'équation (1) nous donne :

$$\ddot{\rho} - \left(\frac{eB}{2m}\right)^2 (r_0 + \rho) = \frac{e}{m} \left( \frac{m v_0^2}{e(r_0 + \rho)} - B(r_0 + \rho) \frac{eB}{2m} \right),$$

soit en linéarisant  $\ddot{\rho} + 2 \left(\frac{eB}{2m}\right)^2 \rho = 0$ ,

dont la solution est  $\rho = \frac{r_0 \sin \alpha}{\sqrt{2}} \sin\left(\sqrt{2} \frac{eB}{2m} t\right)$ .

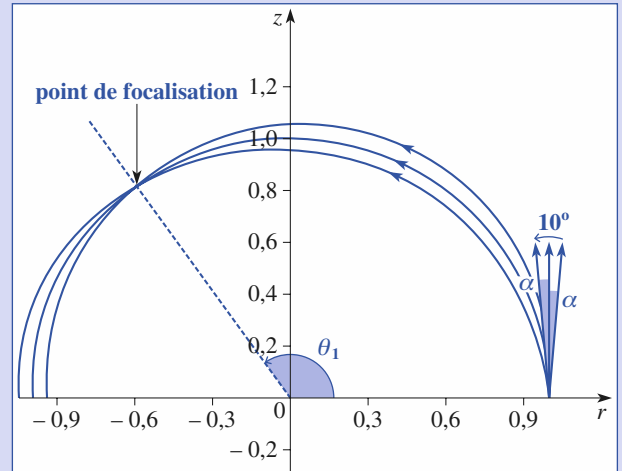


Mise en évidence de la focalisation pour  $\alpha = \pm 5^\circ$ .

Pour  $t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{2m}{eB}$ ,  $\varphi = 0$  ; à cette date  $\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ , soit encore  $127^\circ$ , ce qui correspond bien au résultat attendu.

3)  $\theta_1$  étant fixé, on fait varier  $A$  de façon à collecter le maximum d'électrons et on en déduit  $\frac{e}{m} = \frac{4A}{B^2 r_0^2}$ , ce qui correspond à une mesure très précise de  $\frac{e}{m}$ .

A.N. :  $V_0 - V_a = \frac{1}{4} \left(\frac{e}{m}\right) B^2 r_0^2 \ln \frac{b}{a} = 139 \text{ volts}$ .



Mise en évidence du point de focalisation avec  $\alpha = \pm 5^\circ$ .

# Annexe

## L'opérateur gradient

### 1. Définition

Soit une fonction scalaire  $f$  dont les valeurs  $f(M)$  dépendent des coordonnées d'espace : cette fonction définit un *champ scalaire* dont les *surfaces de niveau* ( $S$ ) ont pour équation  $f(M) = \text{cte}$ .

Considérons deux points arbitraires infiniment voisins  $M$  et  $M'$  (doc. 1) et notons :

$$d\vec{M} = \vec{MM'} \text{ et } df = f(M') - f(M).$$

**L'opérateur  $\vec{\text{grad}}$ , appliqué au champ scalaire  $f(M)$ , définit un champ vectoriel  $\vec{\text{grad}}(f(M))$  tel que, par définition :**

$$df = \vec{\text{grad}}(f(M)) \cdot d\vec{M}.$$

### 2. Propriétés

- Si  $M$  et  $M'$  sont deux points de la même surface de niveau ( $S$ ), alors, d'une part,  $d\vec{M} = \vec{MM'}$  est un vecteur du plan tangent en  $M$  à la surface ( $S$ ) et d'autre part :

$$df = f(M') - f(M) = 0$$

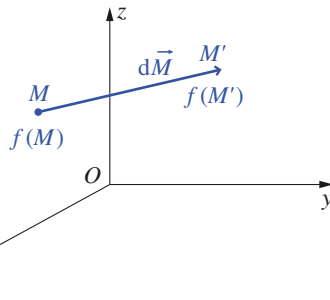
(doc. 2). De la relation de définition du gradient, nous concluons que :

**Le vecteur  $\vec{\text{grad}}(f(M))$  est orthogonal en  $M$  à la surface de niveau passant par ce point.**

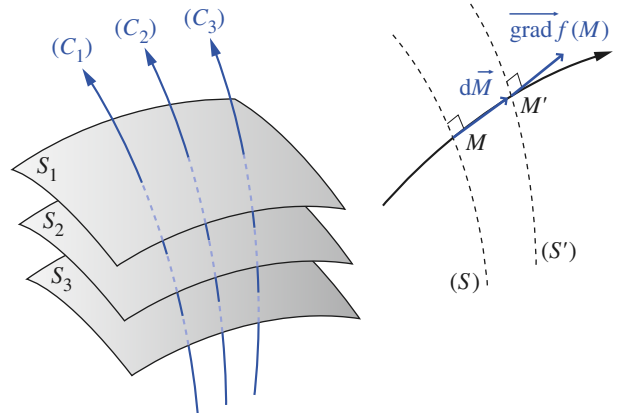
- Nous appellerons *lignes orthogonales* aux surfaces de niveau ( $S$ ), les courbes tangentes en chacun de leur point  $M$  au vecteur  $\vec{\text{grad}}(f(M))$ . Les lignes orthogonales sont aussi, par définition, des courbes orientées dans le sens du vecteur  $\vec{\text{grad}}(f(M))$  : ces courbes sont donc les lignes de champ de  $\vec{\text{grad}} f$ .

Ainsi, pour un champ scalaire  $f(M)$  donné, il est possible de définir une infinité de surfaces de niveau ( $S$ ) et une infinité de lignes orthogonales ( $C$ ) associées (doc. 3).

- Considérons une ligne orthogonale ( $C$ ) et un déplacement élémentaire  $d\vec{M} = \vec{MM'}$ , le long de la ligne et dans le sens de la ligne (doc. 4).



Doc. 1.



Doc. 3.

Doc. 4.

Les vecteurs  $d\vec{M}$  et  $\vec{\text{grad}}(f(M))$  étant alors colinéaires et de même sens, nous pouvons écrire :

$$df = \vec{\text{grad}}(f(M)) \cdot d\vec{M} > 0$$

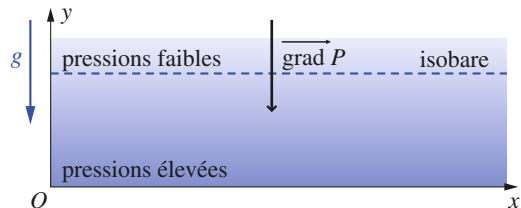
et conclure :

**Le vecteur  $\vec{\text{grad}}(f(M))$  est orienté dans le sens croissant de la fonction  $f$ .**

### 3. Où rencontre-t-on l'opérateur gradient en physique ?

#### ■ Gradient de pression

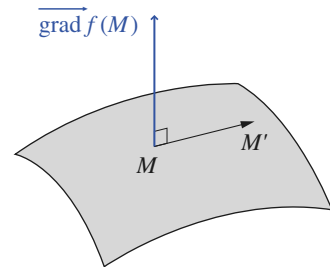
Considérons un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre. Les pressions les plus importantes sont obtenues pour les altitudes faibles. Le gradient de pression est dirigé vers le bas (doc. 5).



Doc. 5. Dans un fluide, il existe un gradient de pression.

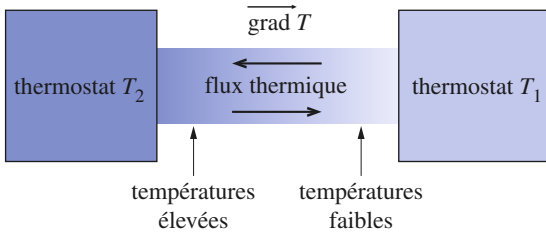
#### ■ Gradient de température

Considérons un milieu homogène situé entre deux thermostats aux températures  $T_1$  et  $T_2$  telles que  $T_2 > T_1$ . Les températures, en régime permanent, seront d'autant plus élevées que l'on sera au voisinage du thermostat à la température  $T_2$ . Le gradient de température est dirigé de  $T_1$  vers  $T_2$ . Le flux thermique est dirigé en sens inverse (doc. 6).



Doc. 2.

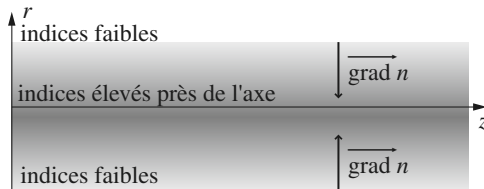




**Doc. 6.**  $T_2 > T_1$  : dans un solide il existe un flux thermique orienté en sens inverse du gradient de température.

### ■ Gradient d'indice

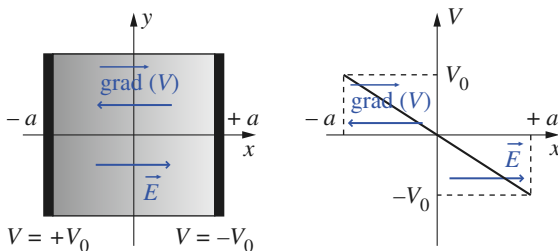
Considérons une fibre optique, cylindrique, dont l'indice optique est fonction de  $r$ , distance du point considéré à l'axe de la fibre. Pour qu'un rayon optique soit *stable* dans cette configuration, il faut que les indices les plus élevés soient situés proches de l'axe de la fibre. Le gradient d'indice est donc dirigé vers l'axe (doc. 7).



**Doc. 7.** Dans une fibre optique, ces gradients d'indice permettent de guider un rayon optique.

### ■ Gradient de potentiel

Soit un champ électrique  $\vec{E}$  dérivant d'un potentiel  $V$ , c'est-à-dire un champ de nature électrostatique. La relation liant le champ  $\vec{E}$  et le potentiel  $V$  est de la forme  $\vec{E} = -\text{grad } V$ . Le vecteur  $\text{grad } (V)$  étant orienté vers les potentiels croissants, le champ  $\vec{E}$  est dirigé vers les potentiels décroissants.



**Doc. 8.** Exemple de gradient de potentiel ( $V_0 > 0$ ).

## 4. Expressions du gradient

Pour trouver ses composantes, il suffit d'écrire :

$$df = d\vec{r} \cdot \text{grad } f,$$

en précisant l'expression du déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  dans le système de coordonnées utilisé.

### ■ Coordonnées cartésiennes (doc. 9)

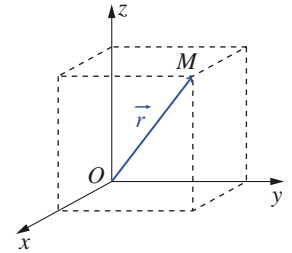
Nous écrivons :

$$\begin{cases} df(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz \\ d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z \\ df = d\vec{r} \cdot \text{grad } f = dx \cdot (\text{grad } f)_x + dy \cdot (\text{grad } f)_y + dz \cdot (\text{grad } f)_z \end{cases}$$

donc par identification des expressions de  $df$  :

$$\text{grad } f = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

**Doc. 9.** ►



### ■ Coordonnées cylindriques (doc. 10)

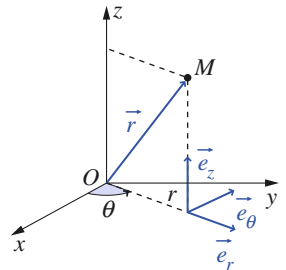
Nous écrivons :

$$\begin{cases} df(r, \theta, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z} dr + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z} d\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta} dz \\ d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \cdot \vec{e}_\theta + dz \cdot \vec{e}_z \\ df = d\vec{r} \cdot \text{grad } f = dr \cdot (\text{grad } f)_r + r d\theta \cdot (\text{grad } f)_\theta + dz \cdot (\text{grad } f)_z \end{cases}$$

Soit :

$$\text{grad } f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

**Doc. 10.** ►



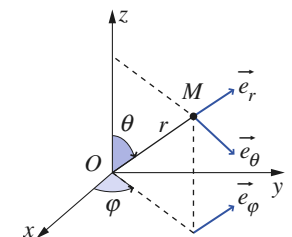
### ■ Coordonnées sphériques (doc. 11)

Nous écrivons :

$$\begin{cases} df(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} dr + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} d\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} d\varphi \\ d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \cdot \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \\ df = d\vec{r} \cdot \text{grad } f = dr \cdot (\text{grad } f)_r + r d\theta \cdot (\text{grad } f)_\theta + r \sin \theta d\varphi \cdot (\text{grad } f)_\varphi \end{cases}$$

Soit :

$$\text{grad } f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$



**Doc. 11.**

# I ndex

## A - C

Approximation des régimes lentement variables 117

### Champ

- de gradient 40
- de Hall 191
- électrostatique créé par
  - un dipôle 84-85
  - un fil infini chargé  $\lambda$  70
  - un cylindre chargé en surface 70
  - surfacique uniforme hère chargée en surface 72
  - une distribution quelconque 19
- gravitationnel 31
- magnétostatique créé par
  - un courant filiforme 163
  - un dipôle 165-167
  - un élément de courant 119
  - un fil rectiligne infini 142
  - un solénoïde (sur son axe) 132
  - un solénoïde infini 148-149
  - une nappe plane infinie 145
- magnétostatique uniforme 144

### Changement de référentiel

pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  176

### Circulation du champ

- électrostatique 40
- magnétostatique d'un fil 142

### Condensateur 51

- plan 52
  - Capacité 53
- Déflexion électrostatique 179

### Conducteurs en équilibre électrostatique 51

### Conduction d'un métal 186

### Conductivité électrique 189

### Conservation de la charge électrique 102

### Constante

- d'interaction électrostatique 18
- de Hall 191

### Courant

- de conduction 103
- de convection 104
- électrique 102
- particulaire 104

### Cyclotron 185

## D

### Dipôle

- Approximation dipolaire 165
- électrostatique
  - Actions d'un champ 88
  - champ créé 84-85
  - dipôle non rigide 93
  - Modèle du dipôle 82-83
  - Moment en O des forces 90
  - Objets polaires 82
  - Potentiel créé 83-84

### Dipôle magnétique

- Analogie avec le dipôle électrostatique 165
- Champ créé 165-167
- moment dipolaire 82, 163

### Discontinuité

- du champ électrostatique 29
- du champ magnétostatique 150

### Distribution de charge

- Antisymétrie plane 25
- Invariance par translation 27
  - rotation 27
- linéique 20
- surfacique 20
- Symétries 11, 24
  - cylindrique 69
  - élémentaire 24
  - multiple 29
  - plane 27, 67
  - sphérique 71
- volumique 20

### Distribution de courant

- Antisymétrie plane 108, 124
- filiforme 105
- Invariance
  - par rotation 110, 125
  - par translation 109, 125
- surfacique 107
- Symétries 108, 122
  - multiples 110
  - plane 108, 123
  - volumique 106

### Divers courants électriques 102

## E - F - G

### Échelle

- continu (milieu) 8
- macroscopique 8
- mésoscopique 8
- microscopique 7

### Électrons de conduction 186

### Énergie potentielle 49

- d'interaction 93
- d'interaction
  - de deux charges ponctuelles 50
- électrostatique 49

### Équation de transport 191

### Flux

- canalisation du flux magnétique 129
- du champ de gravitation 63
- du champ électrostatique 62, 65
  - d'une charge 62
- du champ magnétique 127

### Force

- de Laplace 193
- de Lorentz 117, 176

### Gradient

- Expression 205
- Opérateur 205

## I - L - M

### Intensité électrique 102

### Invariance de jauge 42

### Lignes de champ 22, 121

### Loi

- d'Ohm locale 188
- de Biot et Savart 118, 120
- de Coulomb 18

### Milieu continu 8

### Mobilité 189

### Moment magnétique atomique 164

## O - P - R

### Objets polaires 82

### Oscilloscope analogique Principe 178

### Particule chargée dans les champs $\vec{E}$ et/ou $\vec{B}$ 177

### Permittivité électrique du vide 18

---

Potentiel	Spectrographe	du potentiel électrostatique 46
d'une distribution 44	de Bainbridge 185	Travail de la force électrostatique 49
électrostatique 41	de masse 184	Tube de champ 23
Principe	Temps	Vecteur
de superposition 19, 120	de conduction 187	axial 126
Répartition de charges 7	de relaxation 187	Élément de courant 118
Résistance d'un conducteur filiforme	Théorème	Vitesse de dérive 18
cylindrique 189	d'Ampère 143, 145-149	
Résistivité 189	Choix du « contour d'Ampère »	
	145-148	
<b>S - T - V</b>	de Gauss 64	
Solénoïde infini	Topographie	
Limite 132, 148-149	du champ électrostatique 22	





*La collection de référence  
des classes préparatoires scientifiques*

# Électromagnétisme 1<sup>re</sup> année MPSI-PCSI-PTSI

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. Distribution de charges   | 6. Distributions de courants |
| 2. Champ électrostatique     | 7. Champ magnétique          |
| 3. Potentiel électrostatique | 8. Le théorème d'Ampère      |
| 4. Le théorème de Gauss      | 9. Dipôle magnétique         |
| 5. Dipôle électrostatique    | 10. La force de Lorentz      |

**Hachette Prépa** *le savoir-faire Hachette au service des prépas*

## MATHÉMATIQUES

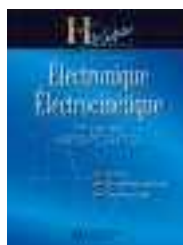
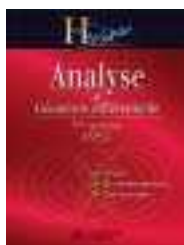
Algèbre et géométrie euclidienne MPSI  
Analyse et géométrie différentielle MPSI  
Algèbre et géométrie euclidienne PCSTI PTSTI  
Analyse et géométrie différentielle PCSTI PTSTI

## PHYSIQUE

Optique MPSI PCSTI PTSTI  
Mécanique MPSI PCSTI PTSTI  
Électromagnétisme MPSI PCSTI PTSTI  
Électronique-Électrocinétique MPSI PCSTI PTSTI  
Thermodynamique MPSI PCSTI PTSTI

## CHIMIE

Chimie 1 PCSTI 1<sup>re</sup> période  
Chimie 2 PCSTI 2<sup>e</sup> période  
(option PC)  
Chimie MPSI PTSTI  
(+ PCSTI option SI 2<sup>e</sup> période)



## EXERCICES & PROBLÈMES

*Des rappels de cours et de nombreux exercices  
corrigés pour s'entraîner toute l'année  
et pour préparer les concours*

**TOUT LE PROGRAMME  
EN UN SEUL VOLUME**



[www.hachette-education.com](http://www.hachette-education.com)

ISBN : 978-2-0118-1757-0



**HACHETTE**  
*Supérieur*

! VAMBAÇAS !