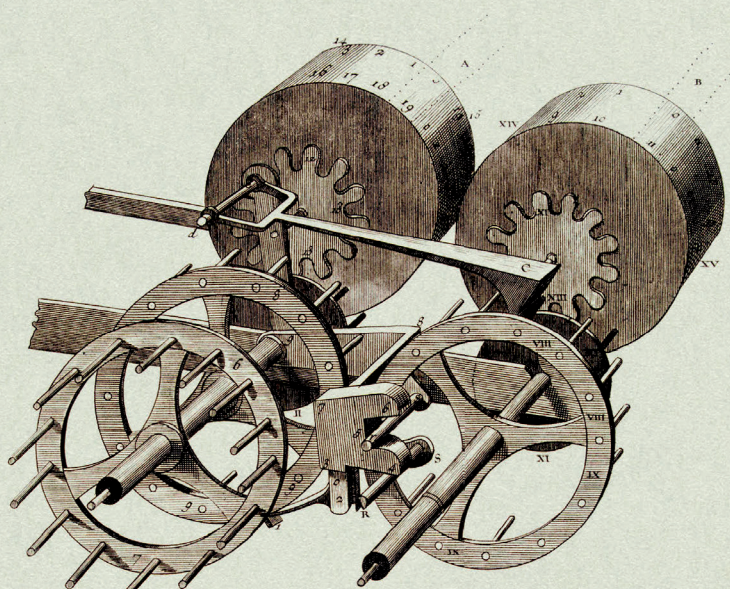


Sous la direction de
CHRISTIAN GILAIN
& ALEXANDRE GUILBAUD

Sciences mathématiques

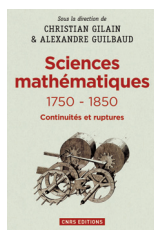
1750 - 1850

Continuités et ruptures



CNRS EDITIONS

Présentation de l'éditeur



Une tradition bien ancrée en histoire des mathématiques présente le passage du XVIII^e au XIX^e siècle comme une rupture radicale et globale, en liaison avec les bouleversements socio-politiques induits par la Révolution française. Fruit du travail d'un groupe composé de nombreux historiens des sciences, cet ouvrage se propose de discuter cette présentation standard liée à la périodisation classique établissant vers 1800 l'entrée dans l'ère de la « modernité » mathématique.

Dans cette perspective, les contributions rassemblées ici abordent le développement de diverses sciences mathématiques, pures ou appliquées, entre le milieu du XVIII^e siècle et celui du XIX^e, à la fois en France, lieu scientifique essentiel pour la période considérée, et dans d'autres pays, en particulier l'Allemagne et la Grande-Bretagne. Elles considèrent tout aussi bien les contenus des textes scientifiques que leurs contextes institutionnels, sociaux, culturels ou politiques.

Centrée sur l'analyse des continuités et des discontinuités sur le temps long de la période 1750-1850, cette étude met en évidence une complexité de dynamiques historiques et de temporalités bien éloignée de la dichotomie supposée entre les deux siècles.

Christian Gilain est professeur émérite et Alexandre Guilhaud maître de conférences à l'Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris 6). Ils sont tous deux membres de l'Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche. Leurs principaux travaux portent, respectivement, sur l'histoire de l'analyse mathématique et sur les applications des mathématiques depuis le XVIII^e siècle.

Sciences mathématiques 1750-1850

Continuités et ruptures

Sous la direction de
Christian GILAIN et Alexandre GUILBAUD

Sciences mathématiques
1750-1850
Continuités et ruptures

CNRS ÉDITIONS

15, rue Malebranche – 75005 Paris

Sommaire

Remerciements.....	7
Introduction.....	9

PARTIE I – ARTICULATION XVIII^e-XIX^e SIÈCLE : UN BILAN HISTORIOGRAPHIQUE (C. GILAIN ET A. GUILBAUD)

1. Une rupture radicale et globale ?.....	15
1.1. La construction de la rupture.....	15
1.2. La présentation historiographique standard.....	29
1.3. Difficultés de la présentation standard.....	31
2. Continuités et ruptures.....	41
2.1. La recherche mathématique : de l'Académie des sciences à l'Institut national.....	42
2.2. L'enseignement mathématique : des écoles d'ingénieurs du XVIII ^e siècle à l'École polytechnique et ses écoles d'application.....	47
2.3. Analyse mathématique.....	52
2.4. Algèbre et arithmétique	67
2.5. Géométrie	73
2.6. Mathématiques appliquées.....	79
2.7. Sur la rigueur	94

PARTIE II – RECHERCHES NOUVELLES

Présentation.....	113
CHAPITRE 1. <i>La place des mathématiques et des mathématiciens : recherche, enseignement, diffusion</i>	125
— L. Alfonsi et A. Guilbaud : « La guerre de Sept Ans (1756-1763) et ses conséquences pour les écoles militaires françaises »	127

— C. Ehrhardt et R. d'Enfert : « Les mathématiques dans les écoles centrales (1795-1802) : un chaînon entre l'Ancien Régime et le XIX ^e siècle »	155
— T. Morel et M. Bullynck : « Une révolution peut en cacher d'autres : le paysage morcelé des mathématiques dans l'espace germanophone et ses reconfigurations (1750-1850) »	181
— N. Verdier : « L'édition mathématique en France 1750-1850 : héritages et reconfigurations »	207
CHAPITRE 2. <i>Mathématiques, applications, interactions</i>	233
— D. Aubin : « Les sciences de l'observatoire : un tournant 1800 ? »	235
— F. Brechenmacher : « L'«équation séculaire», témoin des évolutions des sciences mathématiques de 1750 à 1850 »	263
— B. Bru : « Le calcul des probabilités : jeux de hasard, théorie des erreurs et analyse mathématique »	289
— C. Blondel et B. Wolff : « Coulomb et la difficile gestion du «mélange du Calcul & de la Physique» »	317
CHAPITRE 3. <i>Géométrie : entre tradition et modernité</i>	351
— C. Eckes : « Les travaux de Lambert sur la perspective et leur réception au début du XIX ^e siècle »	353
— P. Nabonnand : « L'étude des propriétés projectives des figures par Poncelet : une modernité explicitement ancrée dans la tradition »	381
— O. Bruneau : « La géométrie en Grande-Bretagne 1750-1830 »	403
CHAPITRE 4. <i>Le formel et le numérique</i>	441
— J.-P. Lubet : « Le calcul aux différences finies, une nouvelle branche de l'analyse »	443
— J.-L. Chabert : « Sur la résolution numérique des équations » ..	475
— J. Boucard : « Résidus et congruences de 1750 à 1850 : une diversité de pratiques entre algèbre et théorie des nombres » ..	509
REMARQUES FINALES	541
INDEX DES NOMS DE PERSONNES	547
LISTE DES AUTEURS	559

Remerciements

Nous tenons en premier lieu à remercier vivement tous les auteurs des articles pour leur investissement dans la préparation et la finalisation de ce livre, ainsi que pour les nombreux et fructueux échanges que nous avons eus avec eux dans le cadre du travail collectif de ces dernières années.

Nous adressons de même nos plus chaleureux remerciements à Hugues Chabot, Pierre Crépel, Marie-José Durand-Richard, Jean-Pierre Friedelmeyer, Irène Passeron, Christophe Schmit et Dominique Tournès pour leur aide précieuse à un stade ou à un autre de cette entreprise.

L'organisation de ce travail et notamment du séminaire mensuel créé au printemps 2010 a été possible grâce à l'aide constante de l'Institut de Mathématiques de Jussieu et de son équipe « Histoire des sciences mathématiques ». Nous sommes tout particulièrement reconnaissants à Catherine Goldstein, directrice de l'équipe pendant une grande partie de cette période, pour son attention bienveillante à l'égard de ce projet.

Nos remerciements vont aussi à Christian Gérini, Guillaume Jouve, Marie Jacob, Pierre Lamandé et Eduardo Noble pour leur participation aux travaux du groupe de travail, ainsi qu'aux nombreux autres collègues français ou étrangers qui ont accepté de venir présenter leurs travaux et en discuter dans le cadre du séminaire : Bruno Belhoste, Gilles Bertrand, Umberto Bottazzini, Anne Boyé, Patrice Bret, Jean-Luc Chappey, Michelle Chapront-Touzé, Olivier Darrigol, Christian Gérini, Frédéric Graber, Gérard Grimberg, Gert Schubring, Ivahn Smadja, auxquels il faut ajouter le regretté Joël Sakarovitch.

Ce projet a bénéficié pendant plusieurs années du soutien particulièrement précieux du Groupement de recherche « Histoire des mathématiques » (GDR 3398), rattaché à l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI) du CNRS et dirigé par Norbert Schappacher. Nous remercions également la Maison des Sciences de l'Homme de Lorraine pour son aide financière qui a permis des échanges réguliers avec les collègues du Laboratoire d'histoire des sciences et de philosophie – Archives Henri-Poincaré à Nancy.

Nous tenons aussi à manifester notre reconnaissance à Maurice Poulet et à toute l'équipe de CNRS Éditions pour leur confiance et une collaboration toujours agréable et efficace.

Nous voudrions enfin exprimer notre gratitude à nos familles pour leur patience et leur soutien tout au long de cette aventure.

C.G. et A.G
(Août 2015)

Introduction

Ce livre se propose de discuter la thèse, encore largement dominante dans l'historiographie des mathématiques, qui présente le passage du XVIII^e au XIX^e siècle comme une rupture radicale et globale. Cette thèse repose sur l'idée d'une synchronisation, à ce moment de l'histoire, d'un ensemble de ruptures portant aussi bien sur le contenu des sciences mathématiques que sur leur place dans le champ des savoirs et dans la société. Généralement localisée autour de la borne 1800, et associée aux bouleversements institutionnels, politiques et sociaux de la Révolution française, la rupture est alors pensée comme un véritable changement d'époque entre deux périodes distinctes du développement des mathématiques, reprenant ainsi la dichotomie traditionnelle entre histoire moderne et histoire contemporaine (« premodern period » et « modern period », respectivement, selon une terminologie courante dans le monde anglo-saxon).

Cependant, plusieurs travaux effectués dans ces dernières décennies, concernant aussi bien les mathématiques pures que les mathématiques appliquées, dans la seconde moitié du XVIII^e siècle ou la première moitié du XIX^e, ont mis en évidence de multiples continuités entre les deux siècles permettant de mieux comprendre la genèse des diverses ruptures de cette période, et d'évaluer, pour chacune, son ampleur et ses limites. Ces travaux, qui montrent notamment la nécessité de distinguer les temporalités, conduisent à s'interroger sur la pertinence de la thèse traditionnelle d'une mise en opposition globale entre les mathématiques des deux siècles.

Compte tenu de la nature de cette thèse, nous avons été conduits, pour la discuter, à considérer des champs temporel, spatial et disciplinaire suffisamment larges. Pris ensemble, les différents matériaux rassemblés portent ainsi sur une période d'un siècle environ, englobant le second XVIII^e siècle et le premier XIX^e; ils concernent les mathématiques pures comme les autres sciences mathématisées de l'époque et portent à la fois sur la situation des mathématiques en France, lieu scientifique essentiel pour la période en question, et sur celle d'autres pays, notamment l'Allemagne et la Grande-Bretagne.

L'ouvrage que nous présentons est le fruit des recherches d'un groupe de travail formé au printemps 2010 à l'Institut de Mathématiques de Jussieu et rassemblant une trentaine d'historiens des sciences mathématiques et

physiques appartenant à une dizaine d'institutions différentes, autour d'un double objectif : faire le point des études récentes sur cette période, et promouvoir de nouvelles recherches. Telle est la logique selon laquelle le contenu du livre s'organise.

Dans une première partie, un large bilan historiographique sur la représentation de l'articulation entre le XVIII^e et le XIX^e siècle nous conduit à dégager les éléments caractéristiques de ce que nous conviendrons d'appeler la présentation standard de l'histoire des mathématiques de cette période : un ensemble de ruptures de différentes natures – scientifiques, épistémologiques et sociales – se produit dans un temps court autour de 1800. Après avoir relevé un certain nombre de contradictions auxquelles conduit cette présentation standard, nous essayons de faire ressortir, à l'aide de recherches historiques récentes, la complexité de l'écheveau des continuités et des discontinuités dans cette période et, par là même, la nécessité de remettre en question la conception globalisante d'une rupture radicale au tournant des deux siècles, ainsi que la périodisation qui lui est associée.

La seconde partie de l'ouvrage rassemble quatorze articles originaux d'historiens des mathématiques ou de la physique. Ces articles sont organisés selon quatre chapitres qui correspondent à des thèmes dans lesquels se décline traditionnellement la thèse d'une opposition radicale entre le XVIII^e et le XIX^e siècle.

Le premier chapitre traite de l'évolution de la place des mathématiques et du statut des mathématiciens dans la société, en lien notamment avec les phénomènes de spécialisation et de professionnalisation scientifiques en France et en Allemagne. Le second s'attache au problème des interactions des mathématiques avec d'autres sciences mathématisées (l'astronomie, l'électricité, le magnétisme, les probabilités) dans le cadre général de l'évolution des relations entre mathématiques appliquées et mathématiques pures au cours de la période. Dédié à la géométrie, le troisième chapitre tente de mieux comprendre la nature du renouveau de ce domaine au XIX^e siècle, traditionnellement mis en avant par l'historiographie, en s'intéressant, d'une part, aux relations entre « anciennes » et « nouvelles » géométries et, d'autre part, au problème de l'évolution de la géométrie et de ses différentes composantes en Grande-Bretagne. Au travers du thème du formel et du numérique, le quatrième et dernier chapitre discute plusieurs autres sujets souvent associés à l'idée de rupture radicale entre le XVIII^e et XIX^e siècle : le passage d'une analyse « algébrique » formelle à une analyse « arithmétique » et rigoureuse, et la naissance de la théorie des nombres.

Divers dans leurs objets, leurs méthodes et leurs conclusions, et tout aussi attentifs aux contenus scientifiques qu'aux contextes institutionnels, sociaux, culturels ou politiques dans lesquels ils s'inscrivent, ces différents articles constituent une contribution substantielle au travail de réévaluation de l'histoire des mathématiques de cette période.

Quelques remarques finales nous permettront d'aborder des questions de nature méthodologique dans la perspective de favoriser le développement d'une dynamique de recherches dépassant la coupure entre les XVIII^e et XIX^e siècles. Nous espérons que cet ensemble de matériaux permettra ainsi d'engager et de nourrir un débat historiographique qui ne paraît pas encore avoir été ouvert dans toute sa généralité.

C. G. et A. G.

Principes d'édition

- Nous avons reproduit aussi fidèlement que possible les textes originaux dans les citations et dans les titres des ouvrages, même si l'orthographe est différente de celle qui est en usage aujourd'hui.
- Les textes en anglais ne sont pas traduits en français ; en revanche les textes écrits en d'autres langues le sont.

PARTIE I

ARTICULATION
XVIII^e-XIX^e SIÈCLE :
UN BILAN HISTORIOGRAPHIQUE

Un bilan historiographique

Christian GILAIN et Alexandre GUILBAUD

1. Une rupture radicale et globale ?

1.1. *La construction de la rupture*

Une tradition bien ancrée en histoire des mathématiques présente le passage du XVIII^e au XIX^e siècle comme une rupture radicale et globale. Encore récemment, la revue d'histoire des sciences *ISIS*¹ a publié un abondant dossier où cette thèse est développée de manière appuyée :

« When viewed together, the papers combine to tell a coherent story about the rise and fall of Enlightenment mathematics and the emergence of the nineteenth century's "rigorous" approach. » [Alexander 2006a, p. 682]

Deux éléments essentiels de la thèse défendue dans ce dossier apparaissent dans la citation précédente : la rigueur est le critère fondamental opposant les mathématiques du XIX^e siècle à celles du siècle précédent et ce critère est non seulement mathématique mais culturel. Les mathématiques du XVIII^e siècle sont ainsi présentées comme les mathématiques « des Lumières », tirant leurs caractéristiques du mouvement philosophique et culturel éponyme :

« enlightened mathematics was not rigorous. Strict mathematical rigor was a negative value in the mid-eighteenth-century world of the *Encyclopédie* because it was artificial and rigid » [Richards 2006, p. 703].

Les mathématiques du XVIII^e siècle sont considérées comme gouvernées par la seule valeur d'utilité, réduites à la recherche de résultats liés au monde physique, par contraste avec un XIX^e siècle où se développent les mathématiques pures, étudiées pour elles-mêmes, avec des préoccupations de fondements et de cohérence interne :

« Eighteenth-century mathematicians were usually content to reach correct and useful results that would aid in the understanding of the natural world. [...] [They] generally did not worry too much about the logical niceties of their methods. The usefulness of the result was deemed proof enough that the method must be essentially correct. Mathematical rigor was deemed the province of unimaginative pedants.

1. Fondée par George Sarton, la revue *ISIS* est la plus ancienne (le numéro 1 a paru en 1913) et la plus célèbre des revues internationales d'histoire des sciences.

But to their nineteenth-century successors this approach seemed dolefully inadequate. These new practitioners asserted that mathematics must be internally self-consistent, rigorous, and established on firm logical foundations. Only after a mathematical method was deemed secure under the field's own rigorous standards could it be "applied" to other fields. » [Alexander 2006b, p. 720]

Plusieurs des thèmes avancés dans ce dossier d'*ISIS* correspondent à des oppositions binaires entre les XVIII^e et XIX^e siècles, qui remontent loin dans l'historiographie des mathématiques. Nous allons présenter quelques jalons essentiels de cette construction historiographique.

DES OUVRAGES CLASSIQUES

Felix Klein, dans son ouvrage de référence sur l'histoire des mathématiques au XIX^e siècle, avait posé les pierres essentielles de la construction historiographique d'une rupture radicale avec le siècle précédent [Klein 1926/1979]². Selon lui, les mathématiques du XVIII^e siècle, très largement dominées par l'application du calcul différentiel et intégral en mécanique et en astronomie, sont caractérisées par « the powerful creations in which pure and applied mathematics united to answer the demands of the times » [*Ibid.*, p. 2], laissant à l'inverse peu de place au développement de travaux de mathématiques pures autonomes. Il affirme alors que : « The 19th century shows a totally different character. » [*Ibid.*]

Les mathématiques appliquées ne disparaissent pas³, mais conquièrent rapidement de nouveaux territoires : signe de cette évolution, « the creation of the whole of "mathematical physics", our theoretical tool in all areas of physics except mechanics. » [*Ibid.*], un domaine nouveau que le mathématicien présente plus loin comme le résultat d'une double rupture, en physique, puis en mathématiques⁴. L'opposition entre les deux siècles se

2. Il s'agit d'un ouvrage publié de manière posthume à partir de conférences données par Felix Klein (volume 1 en 1926, volume 2 en 1927). Voir la notice biographique sur Klein (1849-1925), rédigée par R. Tobies, dans [Dauben & Scriba 2002].

3. « Of course applied mathematics did not come to a stop » [Klein 1926/1979, p. 2].

4. « Suddenly, in the first decades of the new century, a period of intense discovery dawned. It opened with optics. [...] These physical discoveries provided a strong stimulus to mathematical productivity; for the confusing maze of these new ideas and theories urgently needed the ordering hand of the mathematician. » [*Ibid.*, p. 62-63] Dans cette citation, les découvertes physiques (« physical discoveries ») font référence, selon F. Klein [*Ibid.*, p. 62-63], à la découverte de lois expérimentales grâce auxquelles les mathématiques pourront être appliquées à de nombreux phénomènes physiques (en optique, électricité, magnétisme, etc.) dans les premières décennies du XIX^e siècle. En ce sens, la création de la physique mathématique correspond donc d'après lui à l'extension du champ d'application des mathématiques aux phénomènes physiques non mathématisés au XVIII^e siècle, c'est-à-dire à tous les domaines de la physique de cette époque excepté celui de la mécanique (« all areas of physics except mechanics »), pour reprendre l'expression de F. Klein dans la citation.

manifeste aussi, et surtout, par la place nouvelle donnée, au XIX^e siècle, aux mathématiques pures et à l'exigence de rigueur :

« But now pure mathematics came forward mightily in two, equally significant, ways. Whole new areas were created, such as the theory of functions of a complex variable and projective geometry ; secondly, the inherited possessions of science were subjected to critical examination in answer to the reawakened feeling for rigor, which had been somewhat repressed by the 18th century, in its surfeit of new discoveries. » [*Ibid.*, p. 2-3]

Pour F. Klein, cette mutation intellectuelle est étroitement liée aux changements sociaux provoqués par la Révolution française : la démocratisation de l'accès aux sciences, la spécialisation scientifique, la professionnalisation de l'enseignement. Dans ce cadre, l'École polytechnique de Paris, à laquelle il consacre l'essentiel de son chapitre II, apparaît emblématique de tous ces changements, avec une formation des cadres civils et militaires sur la base d'une éducation mathématique de haut niveau. F. Klein souligne que l'École polytechnique, par ses enseignants et ses anciens élèves, est à l'origine de presque toutes les grandes nouveautés scientifiques qui surviennent en France dans les premières décennies du XIX^e siècle. C'est le cas, notamment, pour la physique mathématique (Poisson, Fourier, Cauchy), pour la géométrie (Monge, Poncelet)⁵ et pour l'analyse (Cauchy). Ainsi, en ce qui concerne les nouvelles idées de Cauchy sur le calcul différentiel et intégral dans les années 1820, Klein affirme :

« We find in them, step by step, the beginnings of modern arithmetized analysis. It must seem to us all the more remarkable that it was just these ideas that grew out of his teaching activity at the *École Polytechnique*, proving how unusually high were the standards in pure mathematics of the *Polytechnique's* educational program even though it was directed mainly at practical applications. » [*Ibid.*, p. 78]

Cette image d'une harmonie entre un Cauchy inaugurant l'analyse moderne dans son enseignement en la fondant sur une base « arithmétique » (c'est-à-dire numérique), et une institution vouée aux sciences mathématiques, va s'imposer pour longtemps dans l'historiographie des mathématiques.

Dirk J. Struik⁶, dans son ouvrage d'histoire générale des mathématiques *A Concise History of Mathematics* (1^{re} éd., 1948 ; 4^e éd., 1987), résume ainsi les nouveautés qui apparaissent, selon lui, au début du XIX^e siècle, dans

5. « If Carnot's work already contains a vague presentiment of the direction in which modern geometry was to develop, then in Poncelet we find its great creator. He adopted Monge's and Carnot's ideas with the greatest brilliance and, conquering all difficulties, created a breakthrough. » [*Ibid.*, p. 73]

6. Voir la notice biographique sur Struik (1894-2000), rédigée par J. W. Dauben, dans [Dauben & Scriba 2002].

la nature des mathématiques et le statut des mathématiciens (spécialisation, professionnalisation), en les rattachant au contexte sociopolitique :

« The French Revolution and the Napoleonic period created extremely favorable conditions for the further growth of mathematics. [...] »

The new mathematical research gradually emancipated itself from the ancient tendency to see in mechanics and astronomy the final goal of the exact sciences. [...] The specialist developed, interested in science for its own sake. The connection with practice was never entirely broken, but it often became obscured. A sharper division than in previous times between practitioners of “pure” and “applied” mathematics accompanied the growth of specialization. The mathematicians of the nineteenth century were no longer at royal courts or in the salons of the aristocracy. Their chief occupation no longer consisted in membership in a learned academy ; they were usually employed by universities or technical schools and were teachers as well as investigators. [...] Mathematicians began to work in specialized fields ; and while Leibniz, Euler, and d’Alembert, can be described as “mathematicians” (as *géomètres* in the eighteenth-century meaning of the word), we think of Cauchy as an analyst, of Cayley as an algebrist, of Steiner as a geometer » [Struik 1987, p. 141-142].

En particulier, il souligne le rôle de l’École polytechnique :

« a school which soon developed into a leading institution for the study of general engineering and eventually became the model for all engineering and military schools of the early nineteenth century [...]. Instruction in theoretical and applied mathematics was an integral part of the curriculum. Emphasis was laid upon research as well as upon teaching. [...] ; many great French mathematicians were students, professors, or examiners at the Ecole Polytechnique » [*Ibid.*, p. 146].

Il insiste enfin sur deux autres critères opposant les mathématiques du XIX^e siècle à celles du XVIII^e, la rigueur et la préoccupation pour les fondements :

« Cauchy, along with his contemporaries – Gauss, Abel, and Bolzano – belongs to the pioneers of the new insistence on rigor in mathematics. The eighteenth century had been essentially a period of experimentation, in which results came pouring in with luxurious abundance. The mathematicians of this age had not paid too much attention to the foundation of their work [...]. The time had now arrived for a close concentration on the meaning of the results. [...] Cauchy gave the foundation of the calculus as we now generally accept it in our textbooks. » [*Ibid.*, p. 151]

Carl B. Boyer⁷, dans son ouvrage *A History of Mathematics* (1^{re} éd., 1968 ; 2^e éd. révisée par Uta C. Merzbach en 1989), place un chapitre

7. Voir la notice biographique sur Boyer (1906-1976), rédigée par J. W. Dauben, dans [Dauben & Scriba 2002].

« Mathematicians of the French Revolution » entre les chapitres intitulés « The Age of Euler » et « The Time of Gauss and Cauchy ». Il souligne particulièrement le rôle de cette période de la Révolution française dans ce qu'il qualifie de « revolutions » en mathématiques au début du XIX^e siècle :

« This chapter will show that mathematicians of France at the time of the Revolution not only contributed handsomely to the fund of knowledge, but that they were in large measure responsible for the chief lines of development in the explosive proliferation of mathematics during the succeeding century. We are even tempted to add to the already impressive list of revolutions of the time two more : a “geometric revolution” and an “analytic revolution”. » [Boyer 1968/1989, p. 524]

Morris Kline⁸, dans son volumineux ouvrage *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, publié en 1972, n'aborde pas les thèmes relatifs aux aspects sociaux ou politiques mais souligne tout aussi fortement l'opposition entre les deux siècles, dans les diverses branches des mathématiques. Dans un chapitre charnière, « Mathematics as of 1800 », les mathématiques du XVIII^e siècle apparaissent essentiellement comme des outils pour résoudre des questions de physique :

« Far more than in any other century, the mathematical work of the eighteenth was directly inspired by physical problems. In fact, one can say that the goal of the work was not mathematics, but rather the solution of physical problems ; mathematics was a means to physical ends. » [Kline 1972, p. 616]

Placée à la source de la motivation des travaux mathématiques, la réalité physique est aussi présentée comme garante de leur exactitude face au manque de rigueur des raisonnements :

« The physical meaning of the mathematics guided the mathematical steps and often supplied partial arguments to fill in nonmathematical steps. [...] Finally, the physical correctness of the conclusions gave assurance that the mathematics must be correct. » [*Ibid.*, p. 617]

Ce constat concerne particulièrement l'analyse mathématique, présentée comme marquée par les manipulations algébriques formelles, le manque de précision des concepts et des preuves. Le début du XIX^e siècle se caractériserait par une forte réaction à cette situation :

« Several mathematicians resolved to bring order out of chaos. The leaders of what is often called the critical movement decided to rebuild analysis solely on the basis of arithmetical concepts. [...] Rigorous analysis begins with the work of Bolzano, Cauchy, Abel, and Dirichlet and was furthered by Weierstrass. » [*Ibid.*, chap. 40, p. 947-948]

8. Voir la notice biographique sur Kline (1908-1992), rédigée par J. W. Dauben, dans [Dauben & Scriba 2002].

Kline souligne de même l'existence de ruptures nettes au début du XIX^e siècle en algèbre (chap. 25, 31)⁹, en théorie des nombres (chap. 25, 34)¹⁰ et en géométrie (chap. 35-36)¹¹.

DEUX COLLOQUES MARQUANTS

Une étape importante pour l'historiographie des mathématiques de la période considérée ici est la tenue de deux colloques en 1979, en Allemagne, dont les actes ont paru en 1981. Le premier [Mehrtens *et al.* 1981] est entièrement consacré à l'histoire sociale des mathématiques du XIX^e siècle ; le second [Jahnke & Otte (éd.) 1981] porte plus généralement sur l'histoire sociale des sciences au début du XIX^e siècle mais contient une grande partie dédiée aux mathématiques¹². Le but affirmé de ces ouvrages est double : souligner la rupture épistémologique qui s'opère en mathématiques (ou en sciences en général) au début du XIX^e siècle et montrer qu'elle est étroitement connectée à la rupture qui se produit au plan social et politique. Le changement en mathématiques est ainsi présenté comme lié à un véritable changement d'époque.

Dans son introduction de la première partie de [Mehrtens *et al.* 1981], Henk Bos présente clairement la problématique de l'ouvrage :

« The first half of the nineteenth century was a period of great changes in politics, in commerce and industry, in the arts, and in religious, philosophical and scientific thinking. For mathematics as well it was a period of deep change, in views on mathematics as a whole, in ideas about its foundations and the nature of its principal concepts, and in the educational function of the

9. Cela concerne d'abord le théorème fondamental de l'algèbre : « Gauss's approach to the fundamental theorem of algebra inaugurated a new approach to the entire question of mathematical existence. » [Kline 1972, p. 599] Struik, parmi beaucoup d'autres auteurs, indiquait aussi : « The dissertation [of Gauss, 1799] gave the first rigorous proof of the so-called "fundamental theorem of algebra", which states that every algebraic equation with real coefficients has at least one root and hence has n roots. » [Struik 1987, p. 142] L'autre nouveauté soulignée [Kline 1972, p. 754-756] est la solution du problème de la résolubilité par radicaux de l'équation algébrique générale de degré $n \geq 5$ (Abel en 1824-1826, Galois en 1831).

10. « Up to the nineteenth century the theory of numbers was a series of isolated though often brilliant results. A new era began with Gauss's *Disquisitiones Arithmeticae* which he composed at the age of twenty. » [Kline 1972, p. 813]

11. « In the early nineteenth century several great mathematicians decided that synthetic geometry had been unfairly and unwisely neglected and made a positive effort to revive and extend that approach. » [*Ibid.*, p. 834] Par ailleurs : « non-Euclidean geometry was the culmination of a long series of efforts in the area of Euclidean geometry. The fruition of this work came in the early nineteenth century during the same decades in which projective geometry was being revived and extended. However, the two domains were not related to each other at this time » [*Ibid.*, p. 861].

12. Plusieurs historiens des mathématiques ont participé aux deux colloques.

discipline. New institutions for the pursuit and teaching of mathematics and the sciences were created, and older institutions were radically transformed.» [*Ibid.*, p. 3]

Dans le texte suivant, qui a servi d'introduction au colloque, D. J. Struik développe les thèses que l'on a rencontrées précédemment dans son ouvrage général d'histoire des mathématiques. On y retrouve l'idée d'un renouvellement des sciences mathématiques au début du XIX^e siècle, caractérisé par le développement de la spécialisation¹³, la transformation du statut social des mathématiciens, le changement des institutions¹⁴ et, notamment, la création de l'École polytechnique¹⁵. Struik mentionne aussi l'ouverture du domaine de la physique mathématique sous l'impulsion de Fourier¹⁶, puis insiste sur le critère de la rigueur :

« The way the eighteenth century worked with a calculus without satisfactory foundation, with infinite series without satisfactory study of convergence and with the “paradoxes of infinity” in general, was found highly unsatisfactory. With the new rigor came new criteria for the convergence of series and new understanding of such concepts as continuity and function. We think of Cauchy, Gauss, Bolzano, Abel, Fourier, Dirichlet. » [*Ibid.*, p. 15]

S'interrogeant ici explicitement sur l'argumentation qui peut être fournie pour justifier l'affirmation d'une connexion entre la Révolution française et les nouvelles mathématiques, il répond alors :

« This we can probably do by realizing that the new mathematics was only one aspect of the vigorous pioneering, renovation and rebellion that went on in almost all aspects of intellectual and artistic, literary, religious, moral and scientific thinking of Europe, wherever the armies of the republic and empire had brought the slogans of liberty, equality and fraternity to every nook and corner between Cork and St. Petersburg. [...] Thus the new mathematics of the period was only one aspect of that vigorous pioneering and rebellion that went on in almost all intellectual life in this period from 1789 to 1848, between the first and the third French Revolution. » [*Ibid.*, p. 10-11]

En fait, l'argument se réduit à l'affirmation d'un postulat, celui d'une synchronisation de toutes les composantes d'une société – incluant les recherches mathématiques –, à une même époque et particulièrement dans les phases de bouleversements révolutionnaires.

13. En particulier : « This was also the age of periodicals purely devoted to mathematics. » [Struik 1981, p. 19]

14. « The archaic Académie des Sciences was replaced by the Institut » [*Ibid.*, p. 9].

15. « Here entirely new fields of mathematics were opened. » [*Ibid.*]

16. « Fourier demonstrated the power of his trigonometric series in what may be called the opening up of mathematical physics » [*Ibid.*, p. 14].

Dans l'introduction de l'ouvrage [Jahnke & Otte (éd.) 1981], correspondant au second colloque, les éditeurs insistent sur le fait que le passage du XVIII^e au XIX^e siècle constitue un tournant pour toutes les sciences et tous les savoirs :

« The relationship between scientific knowledge and empirical knowledge, between science and other cultural forms attains a particular relevance at a certain point in the dynamics of history. Foucault's case studies in the history of science illuminate this development admirably, especially the marked shift in his point of view when he was trying to cope with the problems of the situation around 1800. » [*Ibid.*, p. xvi]

La référence à Michel Foucault (*Les Mots et les choses* [1966] et *L'Archéologie du savoir* [1969]) qui apparaît à plusieurs reprises dans ces deux ouvrages de 1981 montre la volonté d'insérer les mathématiques ou les autres sciences dans le cadre d'une rupture radicale et globale entre les deux siècles, correspondant à un véritable changement d'époque (d'« épistémè » ou de « formation discursive »¹⁷).

Pour ce qui concerne les institutions d'éducation – la destruction des anciennes au cours de la Révolution française et l'établissement de nouvelles, avec le rôle central de l'École polytechnique –, les éditeurs reprennent essentiellement les thèses de F. Klein, en y référant explicitement [*Ibid.*, p. xx].

Dans la partie de l'ouvrage consacrée spécialement aux mathématiques au début du XIX^e siècle, Judith Grabiner résume ainsi l'opposition qu'elle voit entre les deux siècles :

« Eighteenth-century calculus was characterized by powerful techniques and novel results, nineteenth-century calculus by clear definitions and rigorous proofs. Throughout the nineteenth century, men like Cauchy, Bolzano, Abel, Weierstrass, and Dedekind advocated increased rigor in analysis. [...]

Eighteenth-century mathematicians, by contrast, are not noted for great contributions to the foundations of the calculus. The problems of most importance to eighteenth-century analysts were those which could be treated without paying much attention to the foundations of the calculus.

These men drew no strict line between the calculus and its applications, between mathematics and mathematical physics. » [Grabiner 1981b, p. 311-312]

Elle avance les causes sociales et épistémologiques suivantes pour le changement d'attitude relativement aux fondements : « the requirements of an

17. Remarquons que, pour M. Foucault, les mathématiques constituent cependant une science à part : « les mathématiques, seule pratique discursive qui ait franchi d'un coup le seuil de la positivité, le seuil de l'épistémologisation, celui de la scientificité et celui de la formalisation » [Foucault 1969, p. 246]. Et, selon lui, ce franchissement se situe historiquement dès leur origine.

expanding scientific community, philosophical questions, the need to teach » [*Ibid.*, p. 325].

Dans le même ouvrage, Ivor Grattan-Guinness¹⁸ aborde, quant à lui, la question de la physique mathématique en France¹⁹ entre 1800 et 1835. Il y présente le premier quart du XIX^e siècle comme une période marquée par des changements qualifiés de structurels²⁰, tant dans le domaine de la physique que dans celui des mathématiques :

« Around 1800, the branches of physics which had received substantial mathematical treatment were terrestrial and celestial mechanics, and some aspects of optics. [...] »

During the next quarter of a century, both the physics and the mathematics expanded greatly. Heat diffusion, electricity and magnetism received substantial mathematical as well as physical treatment, and the realm of optics was considerably extended. Similarly, the calculus was broadened by the accretion of new theories of the convergence of infinite series, complex variable and Fourier analysis, and greatly increased knowledge of some special functions and the theory of equations. For the rest of the century much work in both physics and mathematics was devoted to the extension and consolidation of the innovations made during these twenty-five years. » [Grattan-Guinness 1981, p. 349-350]

La naissance de la physique mathématique coïncide, en d'autres termes, avec un double mouvement de mathématisation et d'étude physique (« physical treatment ») de phénomènes restés hors de portée des mathématiques jusqu'au début du XIX^e siècle. Comme chez F. Klein²¹, nous retrouvons ainsi l'idée de conquête de nouvelles branches de la physique, distinctes de la mécanique, par les mathématiques autour de la borne 1800.

Avec ces deux ouvrages collectifs de 1981, le passage du XVIII^e au XIX^e siècle est ainsi devenu un cas exemplaire de croisement entre l'histoire des mathématiques, l'histoire des sciences et l'histoire générale socio-politique. Dans le cadre du fort courant qui s'est manifesté, à partir des années 1980, pour désenclaver l'histoire des mathématiques, cette présentation a fait florès. Nous prendrons encore plusieurs exemples pour l'illustrer. Le premier témoigne, au travers de la naissance de la physique mathématique, de la présence de la thèse de la rupture dans un cadre historiographique plus large que celui de l'histoire des mathématiques.

18. On trouvera abondamment cités ici les travaux, particulièrement importants, de l'historien des sciences mathématiques anglais Ivor Grattan-Guinness (1941-2014), récemment disparu.

19. Il avait aussi exposé sur ce thème lors du premier colloque, dont la préface renvoie au présent article [Mehrtens *et al.* 1981, p. xi].

20. Dans la partie 3 de l'article, « Physics and Mathematics : A Similarity of Structural Change » [Grattan-Guinness 1981, p. 352-353].

21. Voir la note 4.

LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE ET LA THÈSE DE LA RUPTURE RADICALE

Comme F. Klein avant lui, I. Grattan-Guinness présente, nous l'avons vu, la naissance de la physique mathématique comme l'un des changements marquant le passage du XVIII^e au XIX^e siècle. En lien avec le phénomène de professionnalisation et la reconfiguration du paysage institutionnel impulsée par la Révolution française, et symbolisée par la naissance de l'École polytechnique, les mathématiques connaîtraient en effet deux évolutions majeures au début du XIX^e, soulignées par le sous-titre « From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics » de ses *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840* [Grattan-Guinness 1990a] :

« The 18th-century differential and integral calculus (including some special functions and integrals, and the summation of series) became subsumed under mathematical analysis, a general theory of the calculus, convergence of infinite series, and functions, using limits as the unifying concept. At the same time 18th-century mechanics was supplemented by the mathematisation of heat diffusion, electricity and magnetism and by considerable advances in the mathematisation of optics, to become a spectrum of disciplines which I call "mathematical physics". » [*Ibid.*, p. 34]

Outre la profonde transformation conceptuelle de l'analyse mathématique, le début du XIX^e siècle se caractériserait ainsi par « the inauguration of mathematical physics »²² qui constitue un changement dans le sens où elle coïncide avec l'extension de la mathématisation à un ensemble de phénomènes restés hors de portée des mathématiques avant 1800 – et donc distincts de ceux mathématisés dans le cadre de la mécanique au XVIII^e siècle²³. Nous retrouvons sensiblement le même schéma chez John L. Greenberg, qui affirme :

« Then, suddenly, whole new vistas opened up. Beginning in the late eighteenth century, mathematics was made to serve hitherto unimagined fields of physics and classes of problems outside mechanics. The formation of new scientific institutions in France during the Revolution and the Empire, accompanied by a reorganization of education, helped facilitate the expansion

22. [Grattan-Guinness 1990b, p. 314].

23. Dans son article « The Varieties of Mechanics by 1800 », I. Grattan-Guinness définit la physique (« physics ») du XVIII^e siècle comme une discipline distincte de la mécanique dans la mesure où elle demeure essentiellement expérimentale, et sans lien avec les mathématiques : « Around 1800 [physics] was a heavily experimental but largely nonmathematical discipline. [...] Physics overlapped with mechanics in some topics involving matter (for example, elasticity and gases), optics, and sound ; but even in these situations the (non)role of mathematics led to significant differences in concern. » [Grattan-Guinness 1990b, p. 316] C. C. Gillispie fait état d'une conception similaire du domaine de la physique au XVIII^e siècle : voir *infra*.

of mathematical physics beyond the Paris Academy and assured the French a corner on the field until at least 1830. » [Greenberg 1986, p. 77-78]

L'idée selon laquelle la naissance de la physique mathématique marquerait une rupture apparaît également en histoire des sciences, par exemple dans l'ouvrage que Charles C. Gillispie consacre aux rapports entre sciences et politique sous la Révolution et l'Empire, et dans lequel il marque plus clairement encore la nature du changement :

« What distinguishes the writings to be considered [in mathematical physics], and many subsidiary contributions, is that the reasoning was mathematical and that [...] the findings are expressed in formulations of mathematical physics. The same cannot be said of any body of physics generated by a community of scientists prior to 1800 in France or to the late 1830s elsewhere. D'Alembert, to take an eminent example, would have regarded the phrase "mathematical physics", if not quite a contradiction in terms, at least as a conflation of unlike divisions of knowledge. The *Discours préliminaire* (1751) to the *Encyclopédie* distributes the sciences into two main branches, "Mathématiques" and "Physique générale et particulière". To the former belong geometry, arithmetic, and algebra, which d'Alembert calls "Pures", and also mechanics, astronomy, and geometric optics, which he designates as "Mixtes". All other knowledge of nature is "Physique", where the best to be expected is a "recueil raisonné", an organized collection of observations and experiments. » [Gillispie 2004, p. 675-676]

La rupture reposerait donc sur un bouleversement des rapports entre le domaine de la physique et celui des mathématiques au début du XIX^e siècle, un bouleversement incarné par la nouveauté que la physique mathématique constitue au regard de la stricte séparation qui prime entre la « Physique » et les « Mathématiques »²⁴ du XVIII^e d'après le plan d'organisation des connaissances proposé par d'Alembert dans le « Discours préliminaire » de l'*Encyclopédie*.

Thomas Kuhn souligne aussi la rupture constituée par la mathématisation « à grande allure vers 1800 » des théories physiques qualitatives héritées du XVIII^e siècle :

« Si ce n'est peut-être en optique, les publications scientifiques, qui, entre 1800 et 1825, formulent en termes pleinement mathématiques des objets jusqu'alors réservés à l'expérimentation, n'auraient pas pu être écrites deux décennies plus tôt, avant l'explosion de la mathématisation. » [Kuhn 1977/1990, p. 107]

24. Dans le « Discours préliminaire » de l'*Encyclopédie* (t. I, 1751), d'Alembert oppose les « sciences physico-mathématiques » (ou « mathématiques mixtes ») à la « Physique générale et expérimentale » (p. vij), ou « Physique générale » (p. xvij). La « physique particulière » constitue en revanche une autre branche « qui étudie les corps en eux-mêmes, & qui n'a que les individus pour objet. [...] ; d'où résultent l'Anatomie, l'Agriculture, la Médecine, & leurs différentes branches » (*Ibid.*).

Ce changement s'appuie sur l'idée d'une remise en cause des « barrières, tant conceptuelles qu'institutionnelles » [*Ibid.*] qui priment encore à la fin du XVIII^e siècle entre ce que qu'il convient selon lui d'appeler les « sciences classiques » (mathématisées) et les « sciences baconiennes » (expérimentales et qualitatives)²⁵. À la différence des auteurs précédents, T. Kuhn considère cependant ce mouvement de mathématisation des sciences baconiennes comme l'une des diverses facettes d'une évolution beaucoup plus large, celle d'une « seconde révolution scientifique » affectant l'ensemble des sciences pendant la première moitié du XIX^e siècle²⁶.

TEXTES DE SYNTHÈSE RÉCENTS

Nous considérerons à présent deux exemples de textes de synthèse récents. Ce type de textes – ouvrages généraux d'histoire des mathématiques ou articles d'encyclopédie – constitue souvent un bon indicateur des représentations historiographiques courantes.

The Rainbow of Mathematics. A History of the Mathematical Sciences, publié en 1997 par I. Grattan-Guinness, est un ouvrage général d'histoire des mathématiques bien documenté, nourri des nombreux travaux personnels de l'auteur et de ceux qu'il a édités dans l'encyclopédie *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, parue en 1994. Le livre, organisé chronologiquement, propose une périodisation de l'histoire des mathématiques où la borne 1800 joue un rôle essentiel. Ainsi, après le chapitre 6, consacré à la période 1750-1800 et avant les chapitres 8, 9, 10 dédiés à la période 1800-1860, le chapitre 7, « Institutions and the profession after the French Revolution », fait figure de charnière pour marquer le changement radical entre les XVIII^e et XIX^e siècles, et en souligner les causes supposées ; il est ainsi présenté dans le chapitre d'ouverture :

« In § 7 a survey is given of the new professional status of mathematics fostered in the early 19th century by the creation of new universities or equivalent institutions and the reinvigoration of certain old ones, and also a massive growth in publishing mathematics in books and journals. The French Revolution was the major single cause of change, and indeed France was by far the principal mathematical country between 1780 and 1830. » [Grattan-Guinness 1997, p. 4]

25. Cette terminologie est notamment reprise par I. Grattan-Guinness dans [1990a, p. 1278] et dans [1997, p. 352-353] cité ci-après.

26. Voir [Kuhn 1977/1990, chap. III et VIII]. Nous pourrions également mentionner la thèse de l'historien des sciences E. Bellone [1980] – citée par J. L. Greenberg [1986, p. 78] et I. Grattan-Guinness [1990a, p. 1294] –, qui présente, dans une optique différente de celle de T. Kuhn, le développement du domaine de la physique depuis le début du XIX^e siècle jusqu'à nos jours.

Ce chapitre 7 débute par une section significativement intitulée « A new époque : the Ecole Polytechnique ». Le rôle de la Révolution française dans ce changement d'époque est souligné : « After the Revolution of 1789, everything in France had to be changed, but it took a little time. Most of the educational institutions met their guillotine around 1793 » [*Ibid.*, p. 347]. Parmi les nouvelles institutions créées, l'École polytechnique est considérée comme la plus importante. I. Grattan-Guinness souligne le développement corrélatif de la professionnalisation : « This ensemble of institutions for research and teaching, and the opportunities thus provided for employment in both, gave a scientist the novel chance to be a truly professional person, with jobs paid for by the state » [*Ibid.*, p. 351]. Il note aussi les changements induits à partir de 1800 par la mathématisation de la physique, conçue jusqu'à la toute fin du XVIII^e comme un domaine essentiellement expérimental, celui des sciences « baconiennes », par opposition, selon la terminologie de T. Kuhn, aux sciences « classiques » :

« Analysis and mechanics formed the bulk of the so-called “classical sciences”. They stood in marked contrast to the “Baconian” sciences, in which experiment and observation were in the driving position and mathematics was modestly placed or even absent [...]. Partly for that reason, physics did not have a very high reputation in either research or education in the late 18th century.

This situation changed radically between 1800 and 1830, as major areas of physics came to be mathematicized : in chronological order, heat, physical optics, electrostatics [...] and magnetism, and the union of the last two in electromagnetism. » [*Ibid.*, p. 352-353]

L'apparition de journaux spécialisés en mathématiques au début du XIX^e siècle ainsi que l'accroissement du nombre de livres mathématiques publiés sont également mis en évidence.

On retrouve dans les trois chapitres suivants de l'ouvrage, consacrés à la période 1800-1860, les affirmations traditionnelles de nouveautés radicales : en géométrie (Monge, Poncelet...), en analyse (Fourier, Cauchy...), en théorie des nombres et algèbre (Gauss, Abel, Galois...), en physique mathématique (Fourier, Poisson, Laplace, Ampère...).

Considérons maintenant le chapitre « Mathematics » du quatrième volume, *Eighteenth-Century Science*, publié en 2003, de la collection *The Cambridge History of Science*. Ce texte de synthèse, rédigé par Craig Fraser, reprend des thèmes figurant dans les travaux antérieurs de l'auteur²⁷, en les rattachant davantage au contexte culturel et social. Il en ressort deux thèses essentielles. La première porte sur le statut des mathématiques au XVIII^e siècle et son lien supposé avec la pensée des Lumières :

27. Voir notamment [Fraser 1989].

« Considered broadly, mathematical activity in the eighteenth century was characterized by a strong emphasis on analysis and mechanics. [...] »

The close relationship between mathematics and mechanics had a basis that extended deep into Enlightenment thought. » [Fraser 2003, p. 305]

Il justifie cette dernière affirmation par le fait que d'Alembert, dans le « Discours préliminaire » de l'*Encyclopédie*, classe les mathématiques dans la « science de la nature », en les séparant de la logique considérée comme une « science de l'homme ». Le contraste est ainsi marqué avec le XIX^e siècle où la spécialisation impliquera un développement propre des mathématiques :

« The democratization of science that occurred in the nineteenth century, with the opening of scientific careers to a wide segment of society, was accompanied intellectually within each field by a rather narrow and proprietary specialization that was foreign to the spirit of inquiry in the age of Enlightenment. » [*Ibid.*, p. 306]

Une seconde thèse porte sur le contenu des mathématiques du XVIII^e siècle, caractérisé comme algébrique et formel : « Eighteenth-century confidence in formal mathematics was almost unlimited. » [*Ibid.*, p. 319] Ici aussi, Fraser fait le lien avec le contexte idéologique en parlant de l'« algebraic program of Enlightenment mathematics » [*Ibid.*, p. 325]. Plus précisément, cette caractérisation concerne l'analyse dans la seconde moitié du XVIII^e siècle :

« It is important to appreciate the distinctive philosophical character of eighteenth-century algebraic analysis, understood within the larger historical and intellectual evolution of mathematical analysis. The algebraic calculus of Euler and Lagrange was rooted in the formal study of functional equations, algorithms, and operations on variables. The values that these variables received, their numerical or geometrical interpretation, was logically of secondary concern. » [*Ibid.*, p. 324]

Avec cette analyse « algébrique », la seconde moitié du XVIII^e siècle se différencierait donc à la fois de la période antérieure, dominée par la géométrie, et de l'analyse « arithmétique » du XIX^e siècle :

« Lagrange's algebraic analysis should also be contrasted with the much more conceptual and intensional mode of reasoning that was characteristic of classical real analysis, the field that developed in the nineteenth century and became the foundation of the modern subject. » [*Ibid.*, p. 325]

Comme à de nombreuses reprises dans ce texte, le début du XIX^e siècle est alors présenté comme marquant l'apparition de la « modernité » en mathématiques. Fraser conclut d'ailleurs : « The transition from Euler and Lagrange to Cauchy and Weierstrass constituted a profound intellectual transformation in conceptual thought. » [*Ibid.*, p. 327]

On assiste ainsi à la construction historiographique d'une notion de mathématiques « des Lumières »²⁸, qui seraient marquées à la fois par une orientation utilitariste conduisant à sacrifier les mathématiques pures et par la domination d'une analyse algébrisée jouant le rôle d'un outil sans préoccupation de rigueur, mathématiques mises en opposition radicale avec les mathématiques autonomes et rigoureuses du XIX^e siècle. C'est dans cette lignée que se place le dossier de la revue *ISIS* dont nous sommes partis.

1.2. La présentation historiographique standard

Des textes cités au § 1.1, s'étalant sur près d'un siècle, se dégage une présentation standard du passage du XVIII^e au XIX^e siècle²⁹ : une rupture radicale et globale se produit dans un temps court autour de 1800, concernant aussi bien le contenu des mathématiques que leur place dans le champ des savoirs et le statut social des mathématiciens³⁰. La liste des oppositions entre le XVIII^e et le XIX^e siècle mises en avant peut varier d'un auteur à l'autre mais, dans tous les cas, la présentation de multiples ruptures supposées se produire de façon synchrone à ce moment précis de l'histoire marque la présence du modèle historiographique standard.

Reprenons les principales affirmations de ruptures à l'articulation des deux siècles que l'on a rencontrées dans les textes du § 1.1. Dans un profond mouvement de spécialisation, on passe alors de mathématiques considérées essentiellement comme des outils utiles dans l'étude du monde physique à des mathématiques développées pour elles-mêmes. Les mathématiques pures acquièrent ainsi leur autonomie et se caractérisent par une nouvelle exigence de rigueur, dans la définition des concepts, les démonstrations et le développement de l'étude des fondements. En même temps, le statut social des mathématiciens change, avec leur professionnalisation comme enseignants et chercheurs dans des écoles ou des universités et l'émergence de nouveaux modes d'échanges grâce à la création de journaux spécialisés. Les diverses sciences mathématiques sont aussi le théâtre de ruptures importantes dans leurs contenus. L'analyse « algébrique » formelle est rejetée au profit d'une analyse « arithmétique ». La théorie des nombres, marginale au XVIII^e, et l'algèbre des équations, dans l'impasse, subissent des

28. Pour une analyse critique de cette notion, voir [Gilain 2013].

29. Jeremy Gray [2004, p. 23-25] fait une description de ce qu'il appelle le « standard model » de l'histoire des mathématiques du XIX^e siècle, dont des éléments recoupent notre propos bien que celui-ci porte cependant sur un objet différent.

30. Nous avons sélectionné des textes particulièrement représentatifs de cette présentation standard et dont l'influence a été importante. Cependant, il faut noter que cette vision a été partagée jusque récemment par la plupart des historiens des mathématiques (y compris les directeurs du présent ouvrage...).

mutations fondamentales. La géométrie, délaissée au XVIII^e siècle, connaît un renouveau avec, notamment, la création de nouvelles branches de géométrie pure. Le début du XIX^e siècle est enfin marqué par la naissance d'un domaine, celui de la physique mathématique, lié à la mathématisation d'un ensemble de phénomènes physiques restés hors de portée des mathématiques au siècle précédent. On voit que les ruptures ainsi présentées sont de diverses natures : scientifiques, épistémologiques ou sociales.

Si certains auteurs, comme M. Kline, décrivent ces changements en restant dans le cadre d'une histoire « internaliste », la plupart des historiens, on l'aura noté, relient leur affirmation d'une rupture radicale en mathématiques aux changements dans la société et, notamment, à la rupture socio-politique de la Révolution française, dont on pourrait résumer l'impact de la manière suivante. La Révolution française opère une révolution dans l'éducation et, plus généralement, une révolution culturelle avec la démocratisation de l'accès aux savoirs, laquelle s'exprime par la création d'institutions d'enseignement et de recherche radicalement nouvelles. L'École polytechnique est l'emblème de ces changements³¹ : elle donne aux mathématiques un rôle majeur dans la formation des ingénieurs et des officiers, ainsi que dans l'élaboration et la diffusion des sciences. Les mathématiciens deviennent à la fois enseignants et chercheurs, avec un double phénomène de professionnalisation et de spécialisation, ce qui conduit à renforcer le rôle des mathématiques dans leurs applications aux diverses sciences, mais aussi à développer les mathématiques pures, étudiées pour elles-mêmes, avec l'accent mis sur la rigueur. Il s'agirait ainsi d'une sorte de réaction en chaîne, les changements politiques et sociaux radicaux impliquant rapidement des changements scientifiques et épistémologiques radicaux.

Dans ce cadre, la description du passage du XVIII^e au XIX^e siècle est marquée par l'utilisation d'un abondant vocabulaire de la rupture, que ce soit pour les mathématiques en général ou pour des domaines particuliers : « analytic revolution » et « geometric revolution » [Boyer 1968/1989, p. 524], « great revolution in mathematical rigor » [Grabiner 1981a, p. 166], « Cauchy's revolution in rigour » [Dauben 1992, p. 72], « decisive turning point » [Jahnke & Otte 1981, p. 21], « quite different paradigm³² » [Fraser 2003, p. 327], « the rebirth of mathematics » [Alexander 2006b, p. 720], « a new époque » [Grattan-Guinness 1997, p. 347], « a new era » [Kline 1972, p. 813].

Une autre manifestation du poids dans l'historiographie de la rupture radicale et globale entre les XVIII^e et XIX^e siècles est la fréquence de l'utilisation de la borne 1800 dans les diverses périodisations générales

31. Ce n'est cependant pas le cas chez Alexander [2010]. Voir plus loin dans le § 1.3.

32. Voir dans [Gillies 1992] une discussion sur l'applicabilité en histoire des mathématiques de ce concept proposé par Kuhn [1970/1972] pour penser les révolutions scientifiques.

proposées en histoire des mathématiques. Par exemple, dans l'encyclopédie *The Oxford Companion to the History of Modern Science* [Heilbron (éd.) 2003], l'article « Mathematics » est ainsi divisé en deux : « Mathematics to 1800 » et « Mathematics 1800 to the Present ». Cette deuxième partie, rédigée par I. Grattan-Guinness, s'ouvre d'ailleurs sur cette affirmation : « The initial changes in mathematics in the nineteenth century were consequences of the French Revolution. » [2003, p. 495] : Dans leur préface aux actes du Symposium sur « the History of Modern Mathematics », qui s'est tenu à New York en 1988, les éditeurs indiquent que leur ouvrage s'inscrit dans le cadre des recherches consacrées à « the modern era » de l'histoire des mathématiques, c'est-à-dire, pour eux, « the period roughly spanned by the publication of Gauss's *Disquisitiones arithmeticae* in 1801 to the advent of high-speed electronic computers around 1950 » [Rowe & McCleary 1989, p. xi]. Cette borne 1800, loin de marquer seulement la séparation entre deux siècles, correspond ainsi souvent à une volonté de délimiter l'avènement d'une nouvelle époque, celle de la « modernité » mathématique³³.

1.3. Difficultés de la présentation standard

Quand on considère les critères utilisés à l'appui de la présentation standard, on peut constater non seulement des variations mais aussi des contradictions entre les divers historiens voire chez un même auteur. Ces incohérences nous paraissent révélatrices des difficultés de cette présentation de l'évolution des mathématiques entre le XVIII^e et le XIX^e siècle.

Nous considérerons ici plusieurs exemples reflétant quatre types de difficultés, qui concernent : le rattachement des mathématiciens à l'une ou l'autre période, la caractérisation sociale et culturelle de la rupture entre les deux siècles, la temporalité des ruptures dans d'autres pays européens que la France et, enfin, l'articulation entre le schéma de mise en opposition des mathématiques des deux périodes et la naissance de la physique mathématique au début du XIX^e siècle.

Commençons par la question des acteurs et remarquons que, suivant le type d'argument mis en avant, tel mathématicien peut être classé parmi les « anciens », c'est-à-dire ceux du XVIII^e siècle, ou parmi les « modernes », c'est-à-dire ceux du XIX^e siècle.

Joseph Fourier est considéré par beaucoup d'historiens comme l'un des principaux représentants du renouveau de l'analyse, de la rupture avec

33. On peut ajouter que la récente « International Conference on the History of Modern Mathematics » qui s'est tenue en Chine, en 2010, avait pour thème *Cultures and elements of practices in mathematics, 1800-1930*.

l'analyse algébrique formelle, et l'un des créateurs de la physique mathématique au début du XIX^e siècle³⁴. Par exemple, Struik souligne l'importance des travaux de Fourier, non seulement pour l'intégration de l'équation aux dérivées partielles de la chaleur à l'aide des séries trigonométriques mais aussi pour l'émergence de la rigueur comme caractéristique essentielle des mathématiques du XIX^e siècle :

« It [les séries de Fourier] also received attention on its own merits. Its manipulation by Fourier fully opened the question of what to understand by a "function". This was one of the reasons why nineteenth-century mathematicians found it necessary to look more closely into questions concerning rigor of mathematical proof and the foundation of mathematical conceptions in general. » [Struik 1987, p. 150]

Si Fourier est ainsi classé parmi les « modernes » sur la base de ses apports scientifiques, il n'en est pas toujours de même lorsque sont considérés les aspects épistémologiques. Struik lui-même, à quelques pages d'intervalle, après avoir identifié le développement de la spécialisation, avec la division entre mathématiques « pures » et mathématiques « appliquées », comme l'une des caractéristiques du passage au XIX^e siècle³⁵, ajoute la note suivante, où il associe la pratique de Fourier, liant intimement l'analyse à l'étude des phénomènes physiques, à celle d'un mathématicien du XVIII^e siècle :

« The difference in approach [entre les deux siècles] found its classical expression in the remark by Jacobi on the opinions of Fourier, who still represented the utilitarian approach of the eighteenth century : "Il est vrai que Monsieur Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre une question de nombre vaut autant qu'une question du système du monde." » [Struik 1987, p. 141, n. 1].

Fourier apparaît alors comme classé parmi les « anciens », face à la modernité représentée par Jacobi, en 1830³⁶.

34. [Klein 1926/1979, p. 63-65 ; Kline 1972, p. 671-681 ; Struik 1981, p. 14, et 1987, p. 149-150 ; Grattan-Guinness 1981, p. 350-351, et 1997, p. 454-458].

35. Voir la citation *supra* au § 1.1 [Struik 1987, p. 141-142].

36. On retrouve cet argument opposant Fourier à Jacobi chez Alexander : « Therein lay the difference between Fourier and Jacobi, between the French and German mathematical traditions, and, above all, between the older generation of Enlightenment mathematicians and the new generation of Jacobi, Abel, and Galois. For Fourier, mathematics is derived from the world, and its goal is to reveal the hidden structure of the world and describe it as really is. [...] For Jacobi, in contrast, the physical structure of the world is entirely irrelevant for mathematics. » [2010, p. 179]

Lagrange constitue une autre figure caractéristique d'une telle ambivalence. Sur le plan scientifique, il est généralement considéré comme le symbole de l'analyse algébrique formelle du XVIII^e siècle, cible principale de la critique que fait Cauchy, au nom de la rigueur, contre la « généralité de l'algèbre », dans l'introduction de la première partie de son *Cours d'analyse de l'École polytechnique* (1821). C. Fraser insiste sur cet aspect en considérant que Lagrange partage avec Euler une « conception significantly different from the modern one, with its origins in Cauchy's early 19th-century work » [Fraser 1989, p. 318]³⁷.

Dans le dossier d'*ISIS*, A. Alexander choisit, quant à lui, d'opposer Lagrange à Abel pour illustrer la rupture entre le XVIII^e et le XIX^e siècle en ce qui concerne la notion de rigueur : « The correct results, which for Lagrange were both the purpose of analysis and the ultimate guarantee of its viability, were for Abel merely a puzzling aberration. For Abel, a mathematical discipline that was not systematic and rigorous was hardly worthy of the name. » [Alexander 2006b, p. 721]

En se plaçant sur un plan sociologique, on peut toutefois considérer que Lagrange satisfait à un critère essentiel de modernité : il enseigne dans les nouvelles institutions créées au moment de la Révolution française – l'École normale de l'an III et, surtout, l'École polytechnique, institution à laquelle il participe activement pendant de nombreuses années. Les ouvrages où il a présenté sa conception de l'analyse – *Théorie des fonctions analytiques* (1797) et *Leçons sur le calcul des fonctions* (1801, 1806) – sont d'ailleurs issus de ses cours à l'École polytechnique. Dans le même sens, on remarque que Struik commentant la *Mécanique analytique*, grand ouvrage de Lagrange publié en 1788, peut affirmer : « Lagrange's book was a triumph of pure analysis. The author so far as to stress in the preface : *On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage, seulement des opérations algébriques*. It characterized Lagrange as the first true analyst. » [Struik 1987, p. 134] Autrement dit, si l'on considère la question de la spécialisation, autre critère de modernité souvent avancé, notamment par Struik lui-même dans un passage figurant quelques pages plus loin³⁸, Lagrange, « analyste » comme Cauchy, apparaît comme un mathématicien du XIX^e siècle et non plus du XVIII^e...

Le cas de Gauss mérite lui aussi une attention toute particulière de ce point de vue. Klein lui consacre un long premier chapitre où sont mises en évidence la profondeur et la nouveauté de ses travaux dans les diverses sciences mathématiques. Cependant, d'un autre côté, il affirme que « Gauss was thoroughly an 18th century type » [Klein 1926/1979, p. 5], car il ne satisfait pas socialement aux caractéristiques modernes du XIX^e siècle :

37. Voir aussi les citations de C. Fraser présentées à la fin du § 1.1.

38. Voir la citation *supra* au § 1.1 [Struik 1987, p. 142].

« For him, scientific communication consisted of a copious correspondence with a few select men ; the classical form of his works does not distinguish him from any of his forerunners. To these traits is joined a declared aversion to teaching » [*Ibid.*].

Klein n'hésite pas alors à formuler un paradoxe révélateur des difficultés de la présentation standard :

« Here he [Gauss] showed himself more conservative than the older Monge who anticipated the development of the 19th century with his founding of the *Ecole polytechnique* (1794). But while Monge's circle of mathematical ideas remained within the 18th century, it was Gauss who truly inaugurated the new age with his totally modern thoughts. » [*Ibid.*]

Dans son histoire des mathématiques, Struik fait état de la même ambivalence au sujet du savant, présenté comme une « majestic figure » surplombant « the dividing line between eighteenth- and nineteenth-century mathematics » et dont les différentes facettes en font un mathématicien pouvant être rattaché aux deux périodes :

« His comparative isolation, his grasp of “applied” as well as “pure” mathematics, his preoccupation with astronomy and his frequent use of Latin have the touch of the eighteenth century, but his work breathes the spirit of a new period. » [Struik 1987, p. 142]

Cependant, beaucoup d'auteurs classent sans restriction Gauss parmi les mathématiciens du nouveau siècle sans aborder ces contradictions. Joseph Dauben, par exemple, présente d'abord la conception standard de la rupture entre XVIII^e et XIX^e siècle en articulant fortement les arguments socio-logiques et scientifiques :

« In the nineteenth century foundational questions became increasingly of interest and importance, in part for reasons that concern the sociology of mathematics involving both matters of institutionalization and professionalization. As mathematicians were increasingly faced with *teaching* the calculus, questions about how to define and justify limits, derivatives, and infinite sums, for example, became unavoidable. » [Dauben 1992, p. 73-74]

Le cours d'analyse de Cauchy à l'École polytechnique sert d'exemple à cette affirmation de Dauben, qui ajoute :

« Cauchy was not alone, however, in his concern for treating mathematics with greater conceptual rigour [...]. Others, like Gauss and Bolzano, were concerned also with such problems as treating convergence more carefully, especially without reference to geometric or physical intuitions. » [*Ibid.*, p. 74]

Mais, précisément, Gauss et Bolzano n'ont pas enseigné les mathématiques et ne satisfont pas au critère sociologique essentiel posé au départ comme

caractéristique de la rupture entre les deux siècles³⁹. La conjonction de deux éléments donnés à l'appui de la présentation standard – professionnalisation des mathématiciens comme enseignants et nouvelle rigueur en l'analyse –, présente chez Cauchy, ne l'est ni chez Gauss ni chez Bolzano.

Ainsi, selon le critère privilégié par l'historien, tel mathématicien apparaîtrait tantôt en amont et tantôt en aval de la rupture supposée entre le XVIII^e et le XIX^e siècle⁴⁰.

L'argument sociologique du changement radical de statut des mathématiciens entre le XVIII^e et le XIX^e siècle est, on l'a vu, l'un des critères importants donné à l'appui de la présentation standard. Cependant, si ce changement est généralement présenté comme lié au phénomène de spécialisation scientifique et d'autonomisation des mathématiques pures, les différences peuvent être considérables entre historiens pour ce qui est de la traduction sociale de ce phénomène. Dans le dossier d'*ISIS*, Alexander explicite ainsi sa conception du tournant :

« Enlightenment mathematicians were literally “men of the world” – intellectually, professionally, and personally. [...]

Things were very different, however, in the nineteenth century, when mathematics existed in a universe separate from our own, with its own rules and its own strange realities. Mathematicians now were not those with a special and deep understanding of our own world, but those unaccountably gifted with privileged access to an alternative and higher reality. The mathematician was, in this, rather like the Romantic poet » [Alexander 2006b, p. 725-726].

Pour lui, la rupture en mathématiques dans cette période correspond à la rupture culturelle entre les Lumières et le Romantisme et, dans le livre qu'il a publié après avoir dirigé le dossier d'*ISIS*, il explicite son point de vue en avançant que l'École polytechnique doit, en fait, être rattachée au courant des Lumières :

« The École polytechnique, an engineering school where advanced mathematics was studied for the express purpose of using it in the natural world, was the institutional embodiment of this Enlightenment view. » [Alexander 2010, p. 138]

39. C. Maigné et J. Sebestik soulignent ainsi, dans leur introduction aux premiers écrits de Bolzano : « En mathématique, Bolzano travaillait seul, loin de Prague, sans pouvoir vérifier ses théorèmes et ses démonstrations par l'enseignement et par la critique de ses pairs. » [2010, p. 60]

40. Un même savant peut être parfois considéré comme appartenant à des périodes historiques différentes en fonction de l'évolution de son œuvre, mais de telles périodisations biographiques n'apparaissent pas dans les appréciations des historiens présentées ci-dessus.

Selon Alexander, les nouveaux mathématiciens typiques sont ceux qui sont en rupture par rapport aux institutions, notamment Abel, Galois, Bolyai et... Cauchy⁴¹ :

« The new mathematics practiced by Cauchy, Galois, and Abel did not take over the academic field overnight. In France, the established center of mathematical learning, mathematics was for decades to come dominated by graduates of the École polytechnique, who carried on the Enlightenment tradition of applied mathematics into the nineteenth century. [...] It was in Germany that the new mathematics found its true home. » [Alexander 2010, p. 265]

On voit ainsi que l'adoption de la même conception d'une dichotomie entre le XVIII^e et le XIX^e siècle peut recouvrir des arguments historiques contradictoires, conduisant à des déplacements importants des lieux et des temps où est censée se situer la rupture essentielle.

En lien avec cette même difficulté, la présentation standard de la rupture entre le XVIII^e et le XIX^e siècle soulève aussi la question de sa cohérence avec les changements observés dans le développement des mathématiques hors de France.

Pour plusieurs auteurs, la rupture qui affecte les mathématiques françaises au tournant des deux siècles constitue un stimulus essentiel à l'origine des changements qui touchent les mathématiques dans d'autres espaces européens. Ce stimulus peut se traduire sous différentes formes : par exemple, l'influence directe de la Révolution française⁴², les conséquences du trauma de l'invasion napoléonienne⁴³ pour la Prusse, ou la réaction de certains pays à la domination de la France en mathématiques⁴⁴. La situation industrielle ou idéologique particulière d'un pays peut toutefois aussi favoriser ou freiner le changement : « England, the heart of the Industrial Revolution, remained mathematically almost sterile for several decades. Mathematics progressed most healthily in France and somewhat later in Germany, countries in which the ideological break with the past was most sharply felt » [Struik 1987, p. 141]. La prise en compte des contextes scientifiques, institutionnels et socioculturels locaux induit de même, selon

41. Alexander utilise ici, au profit d'une thèse très discutable (voir *infra* § 2.2), les travaux historiques publiés à partir des années 1980 qui ont mis en évidence les oppositions existant entre Cauchy et les instances de l'École polytechnique [Gilain 1989 ; Belhoste 1991].

42. « The French Revolution also in this domain showed its emancipating influence. » [Struik 1981, p. 15]

43. « It was the trauma of the Napoleonic invasion that woke Prussia up from its selfindulgence » [*Ibid.*, p. 14].

44. « Reactions to French dominance in science began to come from other countries », notamment la Prusse et la Grande-Bretagne [Grattan-Guinness 1997, p. 356].

le pays, ou le domaine concerné, des décalages temporels significatifs par rapport à la situation française et la borne temporelle (l'année 1800 ou la Révolution française selon les cas) qui lui est associée : la rupture essentielle pour les mathématiques allemandes aurait par exemple lieu dans le courant des années 1820 selon plusieurs auteurs⁴⁵, et dans les années 1830 pour ce qui concerne la naissance de la physique mathématique⁴⁶.

Au-delà de ces variations et décalages chronologiques, l'étude de certains pays révèle parfois aussi des contradictions manifestes. À la fin de son article consacré aux mathématiques du XVIII^e siècle, dans lequel il défend la présentation standard du tournant entre les deux siècles (voir § 1.1), C. Fraser ajoute une partie sur la situation en Grande-Bretagne, introduite en ces termes :

« The algebraic program of Enlightenment mathematics was taken up and extended by several English figures of the early nineteenth century. Although these researches fall somewhat outside the period of this essay, they are worthy of note here as a direct continuation of what was primarily an eighteenth-century development. The appeal of algebraic analysis to the English was due in considerable part to a reaction against the prevalent geometric synthetic spirit of British mathematics. » [Fraser 2003, p. 325]

Les travaux des mathématiciens britanniques du premier XIX^e siècle sont ainsi présentés comme se situant dans la continuité des travaux français du second XVIII^e. Si une rupture est signalée en Grande-Bretagne au début du XIX^e siècle, c'est avec les mathématiques britanniques du XVIII^e siècle dominées par la géométrie. Ce cas n'est donc pas compatible avec les caractéristiques de la présentation historiographique standard des mathématiques au début du XIX^e siècle, notamment avec le critère de rupture consistant à considérer l'analyse « algébrique » formelle comme une caractéristique des « mathématiques des Lumières ». La présentation standard n'a pas ici le caractère universel affirmé par ailleurs⁴⁷.

Les difficultés attenantes à la présentation standard de la rupture entre les deux siècles sont aussi particulièrement prégnantes lorsque l'on se penche sur la façon dont certains des critères associés à cette présentation s'articulent avec le problème de l'application des mathématiques entre 1750

45. [Struik 1981, p. 14-15 ; Grattan-Guinness 1997, p. 356-357].

46. [Klein 1926/1979, p. 203 ; Grattan-Guinness 1997, p. 437].

47. On observe un paradoxe du même type en ce qui concerne l'Allemagne. N. Jahnke indique en effet que l'analyse algébrique, telle qu'héritée de l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler (1748) et développée par l'école combinatoire de Hindenburg à la fin du XVIII^e siècle, devient la base de l'enseignement des mathématiques dans les lycées de Prusse après 1810 : « In the wake of Humboldt's educational reforms, algebraic analysis became the scientific background for the mathematical syllabus of the Gymnasium [...] because it was seen as an *elementary model of pure mathematics*. » [Jahnke 1993, p. 279]

et 1850. Deux tendances très différentes se font jour en terme de spectre d'étude dans la littérature précédemment passée en revue. Certains historiens, comme C. B. Boyer, M. Kline, J. L. Richards ou A. R. Alexander, se focalisent sur le seul développement des mathématiques pures pour le premier XIX^e siècle. D'autres historiens, comme F. Klein, I. Grattan-Guinness, ou C. C. Gillispie, intègrent au contraire la question de l'application des mathématiques (et notamment de la mathématisation du monde physique) dans leur façon d'approcher l'histoire des mathématiques au cours de cette période. Ce dernier angle d'étude, plus large, conduit notamment à l'apparition d'un critère de rupture absent des travaux du premier groupe d'historiens : la naissance de la physique mathématique après 1800. Il est intéressant de noter que ces variations ne sont pas sans conséquence sur l'appréhension d'un autre critère quasi unanimement défendu, quant à lui, chez les deux groupes d'auteurs : celui d'une mise en opposition de mathématiques fondamentalement motivées par l'étude du monde physique au XVIII^e, avec les mathématiques autonomes et développées pour elles-mêmes du XIX^e siècle. Chez ceux qui adoptent un angle d'étude plus large, la question du développement de la physique mathématique paraît en effet conduire à des éléments de continuité parfois incohérents avec ce dernier critère de rupture.

Tel est le cas de F. Klein, selon lequel la physique mathématique continue à entretenir des liens étroits avec les mathématiques pures dans le courant du premier XIX^e siècle malgré le mouvement de spécialisation qui émerge simultanément au début de la période (et conduit à une séparation entre mathématiques pures et mathématiques appliquées⁴⁸) : « Among applied subjects, mathematical physics claims particular interest, since it has maintained the most lively reciprocity with pure mathematics » [*Ibid.*, p. 203]. Si la physique mathématique possède ainsi toute sa place au sein de l'histoire des mathématiques de cette période⁴⁹, les innovations effectuées dans ce domaine à l'École polytechnique (par Poisson, Fourier et Cauchy) entre 1800 et 1830 ne vont pas, par ailleurs, sans emprunter certaines méthodes aux mathématiques mixtes (astronomie et mécanique) du second XVIII^e siècle :

48. « Mathematics separated from astronomy, geodesy, physics, statistics, etc. » [*Ibid.*, p. 3]

49. F. Klein consacre un tiers du chapitre I de son ouvrage [1926/1979], sur Gauss, aux travaux du savant en mathématiques appliquées (« Angewandte Mathematik » dans le texte original allemand de 1926, « applied mathematics » dans la traduction anglaise de 1979), un tiers du chapitre II, dédié aux mathématiques françaises entre 1800 et 1830, aux travaux de mécanique et de physique mathématique, ainsi que l'intégralité de son chapitre V à la mécanique et la physique mathématique en Allemagne et en Angleterre entre 1830 et 1880.

« The period we are considering showed the effects of that great astronomical epoch, the 18th century, which found its classic formulation in the works of Lagrange and Laplace. Of significant influence were the first successful attempts of Laplace to apply astronomical methods to the behavior of physical bodies considered as aggregates molecules [...]. Then, of course, there was the influence of Euler and Lagrange in the direction of the “phenomenological interpretation” of physical events. » [*Ibid.*, p. 62]

Quoique marquant une rupture avec le XVIII^e siècle, le développement de la physique mathématique au début du XIX^e mobiliserait donc certains héritages du siècle précédent, et notamment de la mécanique. Le titre même de la partie correspondante, « Mechanics and Mathematical Physics » [*Ibid.*], sous-tend clairement cette idée.

Compte tenu de la richesse et du spectre d'étude particulièrement large qui les caractérisent, les travaux d'I. Grattan-Guinness sur le développement de l'analyse et de la physique mathématique au XIX^e siècle, en particulier dans ses *Convolution in French Mathematics, 1800-1840* [Grattan-Guinness 1990a], constituent un apport important dans l'historiographie des mathématiques pour cette période. L'historien s'appuie en particulier sur une étude approfondie du développement de la mécanique à la fin du XVIII^e, dont il propose une classification en cinq branches (mécanique des solides et des fluides, mécanique céleste, mécanique terrestre, mécanique des ingénieurs, mécanique moléculaire) soumises à l'influence de trois traditions dominantes à la fin du siècle (newtonienne, variationnelle, et une dernière liée à l'ingénierie)⁵⁰. L'étude qu'il donne dès lors pour le premier XIX^e siècle montre clairement la persistance de plusieurs de ces branches et traditions et, ce faisant, l'existence de multiples continuités entre les deux périodes. Quoique l'historien défende, nous l'avons vu, plusieurs des critères associés au modèle standard, sa perspective d'étude, particulièrement attentive à la question du devenir et des modes de développement des mathématiques appliquées dans les premières décennies du XIX^e, le conduit finalement à une présentation singulièrement différente de celles des autres historiens, incompatible avec certains des critères avancés pour justifier la mise en opposition entre deux types radicalement différents de mathématiques pour l'avant et l'après 1800 :

« From around the middle of the [19th] century pure mathematics rose and rose in prominence until it has become the dominating part of the profession [...]: applied mathematicians have to be other people [...]. This has had its effect on the history of mathematics, where work on pure mathematics (of many periods) is pursued out of all proportion to their importance at those times. To understand the 19th century, it will be essential to place mechanics, engineering and mathematical physics at the centre of the stage, at least for

50. Voir [Grattan-Guinness 1990a, p. 35 ; 1990b ; 1994, vol. 2, p. 969-970 ; 1997, p. 303].

the first decades and substantially there for all later periods, both for France and for all other countries. » [Grattan-Guinness 1990a, p. 1304]

Le mouvement d'autonomisation des mathématiques pures vis-à-vis des mathématiques appliquées ne s'effectuerait donc que très progressivement au cours du siècle, nécessitant ainsi de redonner toute leur place aux secondes – qu'elles soient nouvelles, comme la physique mathématique, ou héritées du siècle précédent, comme la mécanique et les mathématiques de l'ingénieur – dans l'histoire des mathématiques du premier XIX^e siècle, et notamment de ses trois premières décennies.

Nous venons, au travers de ces différents exemples, de passer en revue plusieurs types de difficultés illustrant les incohérences qui peuvent se manifester chez les historiens, entre l'idée de mise en opposition des mathématiques des deux siècles, les critères qui y sont associés, et leur traduction effective dans les récits historiques proposés. Nous avons ainsi constaté que la traduction sociale d'un critère de la présentation standard (le phénomène de spécialisation et d'autonomisation des mathématiques pures) peut conduire à des présentations historiques contradictoires (École polytechnique héritière de l'Ancien Régime versus symbole de nouveauté). Un critère de rupture peut encore, chez un même historien, se trouver simultanément affirmé à l'échelle globale et contredit dans un espace culturel et social particulier (exemple de la Grande-Bretagne perpétuant l'analyse algébrique formelle du XVIII^e siècle). Inversement, un spectre d'étude plus large (études des mathématiques pures et des mathématiques appliquées) entraîne l'existence d'un critère de rupture spécifique (naissance de la physique mathématique) en même temps que la remise en question de certains autres aspects de la présentation standard de la rupture entre les deux siècles (spécialisation progressive versus liens étroits entre mathématiques pures et appliquées dans les premières décennies du XIX^e). Les mathématiciens de l'époque ne se laissent pas plus facilement classer entre les deux périodes et les caractéristiques des mathématiques qui y sont respectivement attachées selon la présentation standard, ce qui conduit ainsi à de nombreuses présentations contradictoires selon le critère considéré.

Toutes ces incohérences sont la marque que la présentation standard de la rupture entre les deux siècles concentre trop d'éléments d'opposition à la fois sur un temps trop court, dans un espace culturel et scientifique trop complexe et dans un cadre mathématique trop large. La périodisation présumée par ce mode de présentation et les critères de natures très différentes (scientifiques, épistémologiques, sociales) qui l'accompagnent et la justifient ne parviennent pas à rendre compte de l'ensemble des facettes de l'histoire des mathématiques pour cette période.

2. Continuités et ruptures

Nous avons relevé au § 1.2 un ensemble de critères que l'on trouve formulés à l'appui de l'idée de rupture radicale et globale en mathématiques entre le XVIII^e et le XIX^e siècle. Après avoir pointé certaines incohérences de cette présentation standard de l'articulation entre les deux siècles, nous souhaitons à présent réexaminer les divers critères de rupture avancés à la lumière de recherches, pour la plupart récentes, qui nous semblent fournir des éléments permettant de remettre en cause leur pertinence⁵¹.

Compte tenu de l'ampleur du sujet et de la riche littérature existante, nous ne prétendons bien sûr aucunement à l'exhaustivité. Nous avons au contraire choisi de nous concentrer sur certains des thèmes à partir desquels se déclinent traditionnellement les différents critères de rupture entre le XVIII^e et le XIX^e siècle. Nous commencerons par nous intéresser au problème du mouvement de professionnalisation et de spécialisation touchant les mathématiques et aux aspects sociaux et institutionnels qui y sont attachés, d'abord au travers de l'histoire de l'Académie des sciences et de ses transformations (2.1), puis par le biais d'une mise en perspective des nouveautés de l'enseignement à l'École polytechnique au regard de celui prodigué dans les écoles d'ingénieurs, notamment militaires, à partir du milieu du XVIII^e siècle (2.2). Le critère consistant à opposer l'analyse « arithmétique » rigoureuse du XIX^e à celle « algébrique » et formelle du second XVIII^e sera, quant à lui, successivement examiné sous quatre angles (2.3) : les fondements du calcul infinitésimal, la question des séries et formules de Taylor, l'évolution de la notion de fonction, et la création de nouveaux domaines de l'analyse pure dans la seconde moitié du XVIII^e siècle. Deux parties seront ensuite dédiées aux thèses sur le renouveau, souvent situé au début du XIX^e siècle, de l'algèbre, de l'arithmétique (2.4) et de la géométrie (2.5) : nous nous intéresserons notamment aux contributions de Gauss en algèbre et en théorie des nombres, à celle de Galois sur la résolution par radicaux des équations algébriques, ainsi qu'à la rupture souvent incarnée par Monge dans le domaine de la géométrie. Le thème de l'application des mathématiques, au centre de la partie suivante (2.6), conduira à nous interroger sur la temporalité du mouvement de spécialisation, notamment celui de la séparation entre mathématiques pures et appliquées qui lui est associé, et à relativiser la mise en opposition entre deux types radicalement différents de mathématiques au XVIII^e et au XIX^e siècle ; nous aborderons également, dans cette même optique, les conditions et les ressorts du développement de la physique mathématique

51. Il convient de préciser que certaines de ces recherches particulières peuvent être le fait d'historiens qui, par ailleurs, expriment un accord avec le schéma global standard du passage entre les deux siècles.

en liaison avec ceux des domaines de la mécanique et de la physique. Notre dernière partie (2.7) sera enfin l'occasion de revenir sur un thème présenté comme emblématique de la rupture entre les deux siècles, celui de la rigueur, en soulignant la nécessité de considérer l'historicité de cette notion.

2.1. *La recherche mathématique : de l'Académie des sciences à l'Institut national*

Un des lieux essentiels de la recherche mathématique en France aux XVIII^e et XIX^e siècles est certainement l'Académie des sciences de Paris, dans ses diverses formes historiques⁵². Après l'ouvrage pionnier de Roger Hahn [1971] sur l'histoire de cette institution, des travaux très divers ont enrichi notre connaissance du sujet⁵³. Plusieurs de ces nouvelles recherches marquent une évolution dans l'appréciation du rôle du XVIII^e siècle relativement aux questions de la professionnalisation et de la spécialisation scientifiques.

Dans son ouvrage *Science Reorganized*, consacré à une étude générale des sociétés scientifiques au XVIII^e siècle et, en particulier, des académies des sciences européennes, James McClellan [1985] considère que les historiens qui refusent l'idée d'une professionnalisation de la science au XVIII^e siècle se fondent sur des critères trop rétrospectifs⁵⁴, et affirme : « By late in the century, in and around the scientific societies, a scientific practice developed that was functionally indistinguishable from nineteenth-century professionalism. » [McClellan 1985, p. xxv] Dans le dernier chapitre de son livre, il explicite les éléments qui lui permettent de défendre cette position et résume ainsi les résultats de son étude :

« Yet it seems safe to say that the scientific societies were central to the definition of a new, eighteenth-century kind of scientist. They were the most important forums for the best science. Scientifically they were largely self-governing, and they exercised considerable power and control over the scientific community. They provided status and socially recognized roles ; they provided recognition and certification. They offered employment and

52. Tandis que J. Heilbron [2003] note un certain déclin de l'importance scientifique des académies au cours du XIX^e siècle, M. Crosland [1992] met en évidence le rôle que continue de jouer l'Académie des sciences de Paris, même si d'autres structures scientifiques émergent alors en France.

53. Voir, notamment, la bibliographie complémentaire dans [Hahn 1971/1993], la bibliographie de [Brian & Demeulenaere-Douyère 1996], les références figurant dans l'introduction et les chapitres de [Brian & Demeulenaere-Douyère 2002], ainsi que les ouvrages utilisés dans la suite de ce paragraphe.

54. Il cite plusieurs travaux des années 1960 et 1970, notamment ceux de Joseph Ben-David et de Everett Mendelsohn.

access to employment possibilities. They gave science a new set of leading institutions, and they organized and actived science on all levels. They defined local, national, and international communities of scientists. At the highest level they embodied and supervised the elite in the world of science. If the ranking men who made up these institutions were not scientists and committed professionals, then the words have no meaning. » [McClellan 1985, p. 250]

Maurice Crosland, tout en consacrant l'essentiel de son livre *Science Under Control* à la période 1795-1914 de l'Académie des sciences de Paris⁵⁵, est amené à établir des comparaisons intéressantes avec la situation de l'institution sous l'Ancien Régime. Rappelant les divergences des historiens sur la détermination du moment historique où la science se professionnalise, il remarque qu'elles peuvent notamment provenir de ce que :

« The subject of professionalisation of science is complicated not only by the fact that it happened at different times in different countries but also because of differences between the various sciences. » [Crosland 1992, p. 28]

Ainsi, en France⁵⁶ : « Even under the old regime, to be a member of the Academy was to be recognised as a *savant*. » [*Ibid.*, p. 26] Mais, souligne-t-il, la situation est très différente en Grande-Bretagne pour la Royal Society de Londres, bien que celle-ci ait été fondée antérieurement.

M. Crosland étudie aussi un autre aspect, que n'abordait pas McClellan, celui de la spécialisation scientifique :

« A second feature of French science was its high degree of specialisation of fields of investigation. As previously mentioned, the Royal Academy of Sciences distinguished six sciences : mathematics⁵⁷, astronomy, mechanics, chemistry, botany and anatomy. Yet for more than a century after this in Britain there was no corresponding specialisation. » [*Ibid.*, p. 28-29]

L'Académie des sciences de Paris, créée en 1666, a, en effet, été fortement structurée en 1699 avec la décision de Louis XIV de lui octroyer un règle-

55. Il s'agit plus précisément, entre 1795 et 1815, de la Première Classe de l'Institut national des sciences et des arts.

56. Adoptant pour définir la professionnalisation un ensemble de critères scientifiques et sociaux – maîtrise d'un domaine de connaissance, rémunération suffisante, autogouvernement de la science –, Gillispie [1980, § II.2] considère que l'Académie royale des sciences ne les remplit pas. Cependant, il reconnaît que le premier critère est satisfait et que le troisième, qu'il considère comme le plus décisif, est proche de l'être dans les faits bien qu'il ne le soit pas dans la forme. Quant au second critère, une partie seulement des académiciens – les pensionnaires – sont régulièrement rémunérés alors que les autres doivent, en effet, cumuler leur fonction avec un poste dans l'enseignement ou l'administration ; cependant McClellan [1985, chap. VII] souligne que le statut d'académicien permet souvent d'ouvrir la porte à de tels emplois.

57. L'intitulé officiel à l'Académie était « Géométrie ».

ment doté de 50 articles définissant son fonctionnement. Dès lors, les académiciens sont divisés hiérarchiquement en 4 « classes » (honoraires, pensionnaires, associés, et élèves bientôt rebaptisés adjoints). Les académiciens des trois dernières sortes sont répartis scientifiquement en 6 groupes égaux (de 8 membres), correspondant chacun à une « science ». Il y a ainsi trois classes⁵⁸ de sciences mathématiques : une dédiée aux mathématiques pures (Géométrie), deux aux mathématiques mixtes (Mécanique et Astronomie). Une quatrième classe rattachée à la division des sciences mathématiques a été créée par la réforme de 1785 (Physique générale). Cependant, si l'on assiste, au cours du XVIII^e siècle, à un processus de spécialisation des mathématiciens, cela ne correspond pas toujours à l'intitulé des classes⁵⁹. Si la classe d'astronomie, par la stabilité de ses membres et le contenu de leurs travaux, va correspondre assez bien à l'institutionnalisation prévue par le règlement de 1699, ce ne sera pas le cas pour les classes de géométrie et de mécanique : plusieurs académiciens passeront de l'une à l'autre⁶⁰, et ce indépendamment de leur profil scientifique. On verra plus loin ce qu'il en a été après 1795.

En 1793, l'Académie des sciences est supprimée par la Convention nationale, comme les autres académies. Deux ans plus tard, c'est aussi la Convention qui crée l'Institut national des sciences et des arts, nouvelle institution⁶¹ rassemblant les diverses spécialités scientifiques et artistiques en trois classes⁶². La Première Classe, dédiée aux sciences mathématiques ou physiques, est divisée en 10 sections.

M. Crosland consacre le § 3 du chapitre 2 de son livre au thème « Change and continuity ». Il note d'abord les changements d'une institution à l'autre : « There were a number of obvious differences between the old Academy and the First Class of the Institute. » [*Ibid.*, p. 58] Les scientifiques se trouvent maintenant dans la même structure que les autres spécialistes, ce qui concrétise l'idée de l'unité encyclopédique du savoir ; la hiérarchie des académiciens en différents rangs est supprimée et le système d'élection pour les divers postes académiques est généralisé. Puis, M. Crosland insiste sur la continuité :

58. C'est le règlement de 1785 qui va introduire le terme « classe » en ce sens scientifique, officialisant ainsi un usage courant. Ici, nous utiliserons ce terme selon cette acception pour toute la période de l'Académie royale.

59. Voir [Gilain 2002].

60. Ces changements de classe ont été interdits par le roi à partir de 1768.

61. Institution largement inspirée par le plan d'Instruction publique de l'encyclopédiste Condorcet : voir [Hahn 1971/1993, p. 423 ; Crosland 1992, § 2.1 ; Gillispie 2004, § II.2 et § VII.2].

62. Le terme « classe » prend donc ici un nouveau sens. La Première Classe retrouvera l'ancien nom d'Académie des sciences en 1816.

« But although there were these striking differences between the old Academy and the First Class, there was also considerable continuity. Of all the Classes of the Institute, the First Class probably corresponded most closely to the previous Royal Academy. » [*Ibid.*, p. 59]

Il explicite les divers éléments qui justifient cette affirmation :

« There was a remarkable degree of continuity in the membership of the two bodies. [...] If the continuity of membership is the most striking feature of resemblance between the two bodies, almost equally striking is the continuity in the conception of science. [...] There was also a great deal of continuity in the procedures of the First Class » [*Ibid.*, p. 59, 60, 62].

Ces continuités sont particulièrement marquées pour les sciences mathématiques, auxquelles M. Crosland consacre le § 4 de son chapitre 4. Les quatre premières sections de l'Institut national correspondent exactement aux quatre classes antérieures de l'Académie royale des sciences : section « Mathématiques » (à nouveau nommée « Géométrie » en 1803), « Arts mécaniques » (à nouveau nommée « Mécanique » en 1803), Astronomie, « Physique expérimentale » (à nouveau nommée « Physique générale » en 1803). De plus, souligne M. Crosland : « One of the features of the mathematics section was that the first six members had all been members of the former Royal Academy. » [*Ibid.*, p. 135] Les six membres de la section de Mathématiques sont, en effet, Lagrange et Laplace, nommés par le Directoire en 1795, ainsi que Borda, Bossut, Legendre et Delambre, élus. Cependant, il faut remarquer une certaine mobilité dans la répartition des académiciens : sur les six membres de la classe de Mathématiques, trois faisaient partie de la classe de Mécanique de l'Académie royale, alors qu'à l'inverse des membres de l'ancienne classe de Géométrie, Vandermonde et Cousin, deviennent respectivement membres des sections Arts mécaniques et Physique expérimentale de l'Institut national. Plus généralement, sur les 24 membres des 4 sections de mathématiques nommés ou élus, en 1795, 20 étaient déjà membres des classes de sciences mathématiques de l'ancienne Académie, mais avec des croisements multiples entre les classes. On retrouve ici le phénomène aperçu dans l'Académie royale et que M. Crosland appelle des anomalies [*Ibid.*, chap. 4, § 2] : la section d'appartenance des académiciens ne correspond pas toujours exactement à leur profil scientifique⁶³.

La fonction scientifique de l'Académie royale des sciences s'est doublée d'un rôle politico-administratif important, particulièrement à partir des

63. Il cite ainsi Ampère, élu en 1814 à la section de Géométrie et qui y restera après son orientation scientifique vers la physique dans les années 1820, Poisson élu en 1812 à la section de Physique générale, Cauchy nommé en 1816 à celle de Mécanique et Liouville, élu en 1840 dans la section d'Astronomie alors qu'il n'est pas astronome [Crosland 1992, p. 130, 132, 141, 143].

années 1770 et du ministère Turgot, au début du règne de Louis XVI. Déjà mis en évidence par Gillispie [1980], ce phénomène a été davantage encore documenté grâce au développement des travaux sur Condorcet⁶⁴ depuis les années 1980⁶⁵. À partir d'une étude détaillée de l'entreprise destinée à déterminer la population du royaume, dans les années 1780, Éric Brian [1994] a montré les interactions fortes entre académiciens mathématiciens, travaillant notamment sur le calcul des probabilités, et le courant réformateur de l'administration. Dans la conclusion de son ouvrage, il souligne l'importance historique de ce phénomène :

« Les dernières décennies de l'Ancien Régime furent, en France, le temps fort d'un profond renouvellement de la division sociale du travail entre savants et commis de l'État. Son laboratoire fut une Académie des sciences soucieuse d'affirmer son utilité politique autant que de maîtriser le succès croissant au cours du siècle des ouvrages savants et spécialisés de toute nature. Son terrain d'expérimentation fut la société parisienne des académiciens et des administrateurs réformateurs de la monarchie, lieu de conjonction des processus séculaires par lesquels un appareil d'État autonome a émergé des structures sociales propres à la monarchie absolue. La Révolution puis l'Empire, en ont scellé des éléments durables. » [Brian 1994, p. 347]

Le développement du rôle des savants dans le processus de modernisation de l'État, qui apparaît dans les années 1770, s'affirmera dans la période de la Révolution et de l'Empire⁶⁶.

Plusieurs études sur l'Académie des sciences de Paris⁶⁷ font donc ressortir l'existence en France d'un phénomène de professionnalisation et de spécialisation des savants, notamment des mathématiciens, dès le milieu du XVIII^e siècle. Si la suppression de l'Académie en 1793 a bien sûr introduit une rupture, la création de la Première Classe de l'Institut national rétablit nombre de caractéristiques du système de recherche scientifique existant auparavant.

64. Condorcet a été adjoint du secrétaire perpétuel Grandjean de Fouchy à partir de 1773, puis secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences en 1776.

65. Outre l'ouvrage classique de Baker [1975/1988], voir notamment [Crépel & Gilain 1989 ; Bru & Crépel 1994].

66. Voir, notamment, [N. & J. Dhombres 1989, chap. 7, 9].

67. D'autres académies européennes ont aussi joué un rôle important dans le développement de la recherche mathématique et la professionnalisation de ses pratiques au cours du XVIII^e siècle. Jeanne Peiffer souligne ainsi : « Celui qui sut le mieux profiter des conditions offertes par ce nouveau type d'institution (les Académies de Pétersbourg et de Berlin), fut de loin Euler. En leur sein, il a rédigé ses célèbres traités et y a déployé une activité régulière et féconde [...]. Il y effectua son travail de recherche, tant en mathématiques pures que dans le domaine de la technologie, contre une rémunération adéquate, sans devoir dédier ses résultats aux princes qui protégeaient ces académies. Ses relations avec celles-ci semblent avoir été simplement contractuelles. » [2009, p. 449-450]

2.2. L'enseignement mathématique : des écoles d'ingénieurs du XVIII^e siècle à l'École polytechnique et ses écoles d'application

Comme beaucoup d'auteurs, C. C. Gillispie souligne le caractère exceptionnel de la production scientifique française entre 1770 et 1830 :

« In Europe generally, the French establishment predominated throughout the half-century and more of which the Revolution was the centerpiece, from the 1770s through the 1820s. The chemical revolution, analytical and celestial mechanics, the rigorization of the calculus, the mathematicization of physics, botanical systematics, comparative anatomy, experimental physiology, clinical medicine – French scientists were the prime movers and French institutions the initial loci of all these new departures along the road of modernization. » [Gillispie 2004, p. 2]

Dans son chapitre II, où il analyse les projets éducatifs de la Révolution, il ajoute une section consacrée à l'héritage de l'Ancien Régime (« The educational legacy of the old regime »), justifiée par la remarque suivante :

« The range and quality of French science on the eve of the Revolution would be inexplicable in the absence of the educational system through which the great majority of the Academy of Science, along with other members of the literate public, had passed. » [*Ibid.*, p. 135]

En se référant à plusieurs travaux des années 1970 et 1980, il peut, en effet, affirmer : « France did then possess a considerable set of educational institutions. » [*Ibid.*, p. 129]

En fait, la question de l'enseignement scientifique au XVIII^e siècle avait déjà été étudiée dans les années 1960 dans un ouvrage collectif, dirigé par René Taton. Celui-ci y indique clairement, dans sa préface, le but de l'entreprise : « Nous espérons ainsi réussir à situer les origines de certaines réalisations spectaculaires de la Révolution française dans ce domaine et à expliquer partiellement le brillant essor de la science française à la fin du XVIII^e siècle et au début du XIX^e siècle. » [Taton 1964/1986, p. 7] Sans vouloir tirer des conclusions définitives d'une enquête qui, indique-t-il, demanderait à être complétée par des recherches précises sur la période révolutionnaire, il croit pouvoir avancer :

« Cependant on peut noter que cette étude confirme la force des obstacles d'ordre politique et social qui s'opposaient à la démocratisation de l'enseignement, mais qu'elle révèle en même temps la clairvoyance des efforts menés en vue d'une modernisation des programmes et des méthodes, efforts qui annoncent certaines des réalisations les plus lucides de la Révolution. » [*Ibid.*, p. 11]

Une partie importante du livre est consacrée à l'enseignement scientifique dans les écoles militaires, avec des articles de Roger Hahn et René Taton. R. Hahn montre qu'une place importante dévolue aux mathématiques dans

les écoles régimentaires d'artillerie a entraîné alors le recrutement de nombreux professeurs [*Ibid.*, p. 516-517, 536-538]. L'École royale militaire de Paris, quant à elle, a recruté des professeurs de mathématiques dont certains sont devenus membres de l'Académie des sciences : Jeaurat, Laplace, Cousin et Legendre [*Ibid.*, p. 538-539].

De plus, le milieu du siècle voit la création d'écoles destinées à la formation d'ingénieurs civils ou militaires pour les divers corps. Après l'École des Ponts et Chaussées pour les ingénieurs civils (1747)⁶⁸, une école pour ingénieurs militaires est fondée : l'École royale du Génie à Mézières (1748). Cette fondation s'accompagne d'une double innovation : le ministre de la Guerre d'Argenson, académicien honoraire, nomme un examinateur d'entrée et de sortie, chargé en outre de publier un cours complet de mathématiques servant de base à l'enseignement et aux examens ; il s'agit de Charles-Étienne-Louis Camus, pensionnaire géomètre à l'Académie des sciences. En 1756, l'École royale des élèves de l'artillerie à La Fère est fondée avec le même système et le même examinateur. Un peu plus tard, en 1764, la défaite de la guerre de Sept Ans conduit le ministre Choiseul à réformer profondément les écoles d'officiers de la Marine (Brest, Rochefort, Toulon) et à nommer un examinateur chargé de publier un cours : l'académicien Étienne Bézout, membre de la classe de mécanique depuis 1758⁶⁹.

En 1768, à la mort de Camus, Charles Bossut, professeur à Mézières, le remplace comme examinateur de cette école et son manuel de mathématiques se substitue à celui de Camus ; Gaspard Monge devient alors professeur à la place de Bossut. Par ailleurs, Bézout devient aussi examinateur de l'École d'artillerie, et publie un cours adapté de celui écrit pour la Marine. À la mort de Bézout, en 1783, Laplace⁷⁰ lui succède comme examinateur de l'École d'artillerie et Monge⁷¹ reprend sa place d'examinateur de la Marine.

Trois éléments importants ressortent de ces événements : le rôle important joué par les mathématiques dans les écoles militaires au XVIII^e siècle tant dans la formation que dans la sélection des élèves ; la tendance à

68. Sur l'histoire de cette école, voir l'ouvrage d'Antoine Picon *L'Invention de l'ingénieur moderne. L'École des Ponts et Chaussées, 1747-1851*. L'auteur indique : « Première école d'ingénieurs française, [...] elle est aussi la seule à traverser sans encombre la Révolution. Jusqu'à la grande réforme de 1851 se maintiennent en outre certaines caractéristiques de l'établissement primitif [...]. Cette remarquable continuité à travers l'une des périodes les plus troublées de l'histoire de France est à l'origine du choix des bornes de notre étude. Elle trouve en même temps sa contrepartie dans les nombreuses transformations qui affectent le contenu de l'enseignement et les métiers auxquels prépare l'École. » [Picon 1992, p. 20]

69. Voir la biographie de Bézout par Liliane Alfonsi [2011].

70. Laplace est académicien des sciences depuis 1773.

71. Monge est académicien des sciences depuis 1780.

l'uniformisation des enseignements avec l'usage de manuels officiels⁷² ; enfin, un certain lien établi entre l'enseignement et la recherche notamment par le rôle donné aux académiciens des sciences dans le contenu des cours et des examens⁷³.

Taton conclut son article sur l'École de Mézières en soulignant les éléments de continuité avec l'École polytechnique :

« Certes, l'École polytechnique a, dès ses débuts, des objectifs et des ambitions beaucoup plus vastes que l'École de Mézières. [...] Cependant, l'esprit de l'enseignement est identique : associer à une culture théorique de haut niveau une formation technique fondée à la fois sur une étude précise des principes et sur des exercices d'application proches de la réalité. [...]

La majorité des hommes qui participèrent à la création de l'École polytechnique – à l'exception de Lamblardie, directeur de l'École des ponts et chaussées – Monge, Carnot et Prieur en particulier, avaient une expérience directe et précise des conditions de fonctionnement de l'École du génie » [Taton 1964/1986, p. 611].

Il remarque aussi que l'École de Mézières, outre sa fonction de formation d'ingénieurs et d'officiers, a pu jouer un rôle d'éveil à la recherche dans la mesure où plusieurs anciens élèves ont réalisé une œuvre scientifique marquante (Carnot⁷⁴, Coulomb, etc.).

De nouvelles recherches sur l'École polytechnique, publiées à partir des années 1980, ont fait progresser notre connaissance de la genèse et du fonctionnement de cette institution, ainsi que du rôle qu'y jouent les mathématiques⁷⁵. Sur la question du lien avec l'École de Mézières, ces travaux ont permis de préciser les conclusions de R. Taton, tout en les confirmant sur l'essentiel. Dans son ouvrage de synthèse sur l'histoire de

72. Sur les manuels de mathématiques utilisés à l'époque, voir, notamment, [Dhombres 1985 ; Lamandé 1987 ; Alfonsi 2011].

73. Dans son ouvrage *L'État, l'armée, la science : L'invention de la recherche publique en France (1763-1830)*, Patrice Bret étudie le rôle joué par l'Armée dans le développement d'une recherche scientifique publique en France après la guerre de Sept Ans. Après avoir rappelé le rôle de l'Académie des sciences dans le travail d'expertise pour l'État, l'auteur indique : « Phénomène d'une autre nature, mais qui participe de la même préoccupation d'organisation rationnelle des services de l'État, la monarchie institua parallèlement un enseignement technique et structura ses corps savants, spécialement les ingénieurs, civils ou militaires. Elle développait ainsi les bases d'un véritable service public, dans lequel le militaire tenait une place centrale, parce que – confiscation de la tradition féodale par la monarchie moderne – la fonction première de l'État était la fonction guerrière, mais son domaine d'intervention s'étendait de plus en plus. » [Bret 2002, p. 31]

74. Voir la biographie de Carnot par J. et N. Dhombres [1997].

75. On peut citer, notamment, les travaux suivants : [Langins 1980, 1987, 1991 ; Gilain 1981, 1989 ; Dhombres 1987 ; Belhoste 1989, 2003 ; Belhoste *et al.* 1994, 1995 ; Belhoste, Picon & Sakarovitch 1990 ; Julia 1995].

l'École polytechnique, B. Belhoste présente ainsi les rapports entre les deux Écoles :

« L'enseignement à Mézières est fondé sur l'application des sciences mathématiques et physiques à l'art de l'ingénieur, ce qui en fait le prototype du curriculum polytechnicien. C'est là que sont systématisées par Monge les méthodes géométriques pour l'apprentissage du dessin d'ingénieur qui deviendront célèbres après 1794 sous le nom de géométrie descriptive. La filiation directe existant entre l'École de Mézières et l'École polytechnique, tant au point de vue pédagogique qu'au point de vue institutionnel, met en évidence, par-delà la rupture révolutionnaire, une continuité sous-jacente entre le modèle d'éducation militaire du XVIII^e siècle et le modèle d'éducation technocratique du siècle suivant, qui en est l'héritier structural. » [Belhoste 2003, p. 166-167]

Les rapports entre l'École polytechnique et les anciennes écoles militaires en matière de recrutement ont aussi été étudiés par Dominique Julia, en particulier dans son article « Le modèle méritocratique entre Ancien Régime et Révolution » :

« sans conteste, le maintien du concours constitue une originalité forte de l'École centrale des Travaux publics⁷⁶ par rapport aux autres créations contemporaines. Mais ce maintien est pour partie dû à tout ce dont l'École hérite : à savoir les expériences d'enseignement et d'évaluation des connaissances qui s'étaient développées dans les grands corps techniques, particulièrement militaires, à la fin de l'Ancien Régime. Ce n'est d'ailleurs pas un hasard si les mêmes hommes qui étaient examinateurs des grands corps techniques militaires à la veille de la Révolution : Monge pour la Marine, Laplace pour l'Artillerie, Bossut pour le Génie ont joué un rôle tout à fait décisif, à des titres divers, dans les premières années de l'École polytechnique » [Julia 1995, p. 33].

Il poursuit : « Pour comprendre la genèse de la méritocratie scolaire telle qu'elle s'incarne à l'École polytechnique, il est donc tout à fait légitime de considérer ce qui s'est passé dans les trois grands corps techniques militaires au cours de la seconde moitié du XVIII^e siècle. » [*Ibid.*] D. Julia met alors en évidence les éléments essentiels déjà relevés : la mise en place à partir du milieu du siècle du système d'examineur unique, membre de l'Académie des sciences, interrogeant sur la base du manuel de mathématiques qu'il a rédigé.

Évidemment, sur bien des plans, l'École polytechnique marque aussi des ruptures très importantes. La première, comme l'indique D. Julia, est l'ouverture démocratique de ses conditions d'accès :

76. C'est le nom initial, en 1794, de ce qui deviendra l'École polytechnique dès 1795.

« On ne saurait d'abord trop souligner la rupture qu'introduit l'article VI de la Déclaration des Droits de l'Homme et du Citoyen par rapport à l'Ancien Régime : tous les citoyens étant égaux aux yeux de la loi, "sont également admissibles à toutes dignités, places et emplois publics, selon leur capacité et sans autre distinction que celle de leurs vertus et de leurs talents". Il faudrait naturellement pouvoir suivre comment s'est opérée la mise en œuvre de ce principe affirmé dans les divers emplois publics. Notons simplement que saute ainsi le verrou qui avait bloqué l'ensemble des réformes militaires tentées sous l'Ancien Régime » [*Ibid.*, p. 39].

Cette ouverture s'est aussi manifestée quantitativement par l'ampleur des recrutements à Polytechnique, ce qui contrastait, par exemple, avec l'École de Mézières qui avait vu ses effectifs fondre dans les dernières années de l'Ancien Régime, notamment en raison du renforcement des conditions imposées aux élèves quant à leurs preuves de noblesse.

Un autre changement important est l'instauration d'un enseignement scientifique de base commun pour tous les futurs ingénieurs civils et militaires. L'organisation initiale de l'enseignement conçue par Monge, en 1794, prévoyait même la formation complète de tous les ingénieurs dans la même école. Ainsi, écrit B. Belhoste :

« Loin d'être improvisés, ces textes fondateurs sont le fruit d'une réflexion déjà longue sur la manière d'améliorer la formation des ingénieurs et des artistes. Monge a voulu y combiner l'expérience accumulée dans les anciennes écoles d'ingénieurs avec l'idéal pédagogique des Lumières. » [Belhoste 2003, p. 197]

Cependant, dès 1795, sont rétablies des écoles spécialisées, comme avant la Révolution, qui deviennent les écoles d'application de l'École polytechnique. Sont aussi reconduits dans leurs fonctions, pour l'admission dans ces écoles, les examinateurs de mathématiques antérieurs : Bossut (Écoles du Génie, des Ponts et Chaussées, etc.) et Laplace (Écoles de l'artillerie, des ingénieurs de vaisseaux, etc.).

À l'origine, une double mission est confiée à l'École polytechnique : assurer la formation de base de tous les futurs ingénieurs civils ou militaires et diffuser les sciences dans leurs avancées les plus récentes. Une tension entre ces deux missions (que l'ordonnance de 1816 qualifiera respectivement de « but spécial » et de « but général ») se manifesterait tout au long de l'histoire de l'institution, notamment pour les mathématiques et leurs enseignements. On sait maintenant que l'enseignement de Cauchy a fait l'objet de vives critiques au sein de Polytechnique et que la réalité historique ne correspond pas à l'image idyllique présentée par F. Klein et reprise après lui (voir *supra* § 1.1)⁷⁷. Elle ne correspond pas non plus, cependant, à la

77. Voir, notamment, [Gilain 1981, 1989 ; Belhoste 1991, 2003].

thèse récemment défendue par Alexander [2010, p. 138 et suiv.] voulant faire de Cauchy quelqu'un de totalement rebelle vis-à-vis de cette École. Cauchy, en défendant le contenu théorique de haut niveau de son cours d'analyse se plaçait, de fait, dans l'une des traditions de Polytechnique, celle notamment des cours de Lagrange, avec l'objectif de diffuser le dernier état des sciences.

Une mise en perspective avec la situation des écoles d'ingénieurs, et en particulier des écoles militaires créées en France au milieu du XVIII^e siècle, permet donc de mieux évaluer ce qui constitue les réelles nouveautés apportées par l'École polytechnique et ce dont elle hérite, notamment l'importance accordée aux mathématiques dans la sélection et la formation des élites.

2.3. Analyse mathématique

L'analyse mathématique⁷⁸, nous l'avons vu au § 1.1, occupe une place particulièrement importante dans la justification de la thèse historiographique d'une rupture radicale entre le XVIII^e et le XIX^e siècle. La figure de Cauchy cristallise particulièrement cette rupture, avec son cours d'analyse à l'École polytechnique, souvent considéré comme le point de départ de l'analyse moderne, une analyse « arithmétique » rigoureuse signant la fin de l'analyse « algébrique »⁷⁹ formelle qui serait caractéristique de la seconde moitié du XVIII^e siècle, d'Euler à Lagrange.

Plusieurs travaux effectués dans ces dernières décennies mettent cependant en évidence des éléments de continuité significatifs entre le XVIII^e et le XIX^e siècle, contribuant à modifier quelque peu l'image traditionnelle de cette présentation de l'histoire de l'analyse. Nous aborderons quelques thèmes qui nous semblent susceptibles d'éclairer la question des

78. Ce terme « analyse » recouvre à l'époque de nombreuses acceptions différentes. Nous désignons ici par « analyse » le domaine des mathématiques que l'on appelait aussi « analyse des quantités infinies » ou « nouvelle analyse », réservant le terme « algèbre » à ce que l'on nommait « analyse des quantités finies » ou « analyse ordinaire ». On trouve une distinction de ces deux domaines, analyse et algèbre, dans la classification des sciences mathématiques figurant dans le tome 3 de l'*Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, en 1789 ; cette classification n'est cependant pas alors stabilisée [Gilain 2010].

79. L'expression « analyse algébrique » désigne ici une catégorie historiographique souvent utilisée pour caractériser un certain type de pratique de l'analyse [Fraser 1989 ; Jahnke 2003]. Il est nécessaire de la distinguer de la dénomination « analyse algébrique » désignant un domaine des mathématiques, soit dans le sens d'une partie précédant le calcul différentiel et intégral (dans la tradition de l'*Introductio in analysin infinitorum* (1748) d'Euler) comme dans le cours d'analyse de l'École polytechnique au début du XIX^e siècle [Gilain 1989], soit dans le sens d'une théorie autonome des mathématiques pures comme dans certains programmes scolaires en Allemagne [Jahnke 1993, 1996].

continuités et des ruptures entre les deux siècles sur ce sujet : les fondements du calcul infinitésimal et la notion de limite, les séries et les formules de Taylor, la notion de fonction et la création de nouvelles branches de l'analyse pure.

LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL ET LA NOTION DE LIMITE

Une des affirmations, que l'on trouve de manière récurrente, est que les mathématiciens du XVIII^e siècle, orientés vers les nombreuses applications de l'analyse, se sont désintéressés de la question de ses fondements et qu'il a fallu attendre le XIX^e siècle pour qu'une rupture s'opère, principalement avec le cours de Cauchy à l'École polytechnique dans les années 1820, où celui-ci fonde l'analyse infinitésimale sur le concept de limite. Dans un tel récit, le XVIII^e siècle n'apparaît que par l'entremise de quelques rares « précurseurs », notamment d'Alembert, avec ses courts articles de l'*Encyclopédie*⁸⁰.

Dans un ouvrage récent, Gert Schubring a pu, néanmoins, présenter un recensement très riche de travaux témoignant de l'intérêt pour les questions de fondements de l'analyse dans la seconde moitié du XVIII^e siècle. Sur cette base, il peut ainsi affirmer :

« It is a widespread opinion to think of eighteenth-century mathematics as unconcerned with the foundations and as interested only in the further development of analysis. As we have seen with the concepts of negative numbers as well as with the infinitely small quantities, the mathematicians were, in contrast, very anxious to clarify basic concepts. » [Schubring 2005, p. 285]

Parmi les travaux où apparaît une préoccupation pour les fondements, Schubring s'est notamment intéressé aux ouvrages didactiques choisissant de présenter le calcul infinitésimal à partir de la méthode des limites [*Ibid.*, chap. III, § 8]. Situé dans la lignée des travaux de Newton et de Maclaurin, d'Alembert apparaît ainsi, non plus comme un « précurseur » isolé de Cauchy, mais comme l'initiateur de tout un courant dans la seconde moitié du XVIII^e siècle et au début du XIX^e, dont Cauchy est héritier. Les articles de d'Alembert dans l'*Encyclopédie*⁸¹ sont, en effet, suivis de nombreux ouvrages ou mémoires présentant le calcul infinitésimal sur la base de la notion de limite, et faisant référence à l'encyclopédiste : on peut en parti-

80. On trouve par exemple un tel récit dans [Boyer 1959] où le chapitre « The Rigorous Formulation » sur le XIX^e succède au chapitre « The Period of Indecision » sur le XVIII^e siècle.

81. Aux articles DIFFÉRENTIEL (1754) et LIMITE (1765), republiés dans l'*Encyclopédie méthodique. Mathématiques* (1784, 1785), et souvent cités, il faut ajouter le chapitre « Sur les Principes Métaphysiques du calcul infinitésimal » de ses *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie* (1767, t. 5, § XIV).

culier citer Cousin (1777, 1796), Martin (1781), L'Huilier⁸² (1786, 1795), Stockler (1794)⁸³.

Lacroix a joué un rôle essentiel pour donner à ce courant toute son ampleur [Schubring 2005, chap. V, § 2.4]. Il a choisi la méthode des limites dans son *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* (1802, 1806), qui lui sert de base pour son cours d'analyse à l'École polytechnique. En 1805, le programme officiel du cours (1^{re} année) indique d'ailleurs : « Etablir les notions des différentielles sur la théorie des limites »⁸⁴. Or, c'est l'année où Cauchy entre à l'École polytechnique et où Lacroix va être son professeur d'analyse [Gilain 1989, p. 5]. Certes, après 1811 et l'offensive de l'école d'application de l'artillerie et du génie de Metz contre le contenu de l'enseignement mathématique de l'École polytechnique, le programme change [Gilain 1989, p. 6-7 ; Schubring 2005, chap. IV-V]. Pour l'année 1815-1816, notamment, il stipule : « Exposer les principes du calcul différentiel par la considération des infiniment petits », mais la nuance suivante est apportée : « faire voir, dans les cas les plus simples, l'accord de cette méthode avec celle des limites ou du développement en série ».

Le travail de Cauchy dans son cours d'analyse, à partir de janvier 1817, fondant le calcul différentiel et intégral sur le concept de limite⁸⁵ (le programme officiel ne fixant pas alors la méthode de présentation), s'inscrit donc dans une *tradition*. Mais une telle affirmation de continuité ne doit pas, bien sûr, faire oublier l'existence de différences substantielles entre les divers travaux sur les limites, ces différences pouvant porter tant sur la définition et la formalisation de la notion de limite que sur le rôle donné à cette notion dans l'ensemble de l'analyse mathématique. Ainsi, si d'Alembert suppose, explicitement, que la limite constitue une borne infranchissable et, implicitement, que le processus de convergence de la variable vers la limite se produit de façon monotone, ces restrictions seront progressi-

82. Le mémoire de L'Huilier, « Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs », a obtenu le prix proposé en 1784 par l'Académie des sciences de Berlin. Le sujet de ce prix était ainsi justifié : « L'utilité qu'on retire des Mathématiques, l'estime qu'on a pour elles, & l'honorable dénomination de *Sciences exactes* par excellence qu'on leur donne à juste titre, sont dues à la clarté de leurs principes, à la rigueur de leurs démonstrations, & à la précision de leurs théorèmes. Pour assurer à cette belle partie de nos connoissances la continuation de ces précieux avantages, on demande *Une théorie claire & précise de ce qu'on appelle Infini en Mathématique* » (*Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1784 (1786), p. 12).

83. Voir [Schubring 2005, chap. III, § 8.4, 8.5]. Sur Stockler et les fondements du calcul infinitésimal, voir aussi [Saraiva 2001].

84. C'était d'ailleurs le cas depuis la publication de programmes officiels en l'an IX. La commission du programme d'analyse était composée de Legendre, Laplace et Bossut [Gilain 1989, p. 33, n. 19].

85. Voir [Gilain 1989, p. 9 et 51].

vement levées, notamment chez Cauchy⁸⁶. Si la précision de l'usage du concept de limite reste chez lui encore inégale⁸⁷, l'apport essentiel de Cauchy est sans doute lié à la place qu'il donne à ce concept dans sa reconstruction de l'ensemble de l'architecture de l'analyse (et autant du calcul intégral que du calcul différentiel)⁸⁸.

LE FORMEL ET LE NUMÉRIQUE : SÉRIES ET FORMULES DE TAYLOR

Sur cette question du formel et du numérique aux XVIII^e et XIX^e siècles, Bourbaki, dans ses *Éléments d'histoire des mathématiques*, avait prononcé un jugement sans appel :

« d'Alembert, en 1768, exprime des doutes sur l'emploi des séries non convergentes. Mais l'autorité des Bernoulli et surtout d'Euler fait que de tels doutes sont exceptionnels à cette époque.

Il est clair que des mathématiciens qui auraient eu l'habitude de faire servir les séries au calcul numérique n'auraient jamais négligé ainsi la notion de convergence ; et ce n'est pas un hasard que le premier qui, en ce domaine comme en beaucoup d'autres, ait amené le retour aux méthodes correctes, ait été un mathématicien qui, dès sa prime jeunesse, avait eu l'amour du calcul numérique : C. F. Gauss » [Bourbaki 1960/1984, p. 191-192].

Cependant, dans le chapitre consacré à « L'Analyse mathématique au dix-huitième siècle » de l'ouvrage *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, Jean Dieudonné, l'un des fondateurs du groupe Bourbaki, donne une appréciation fort différente :

« Contrairement à une opinion très répandue, il ne faudrait pas croire que les analystes du dix-huitième siècle soient indifférents aux questions d'approximation et de convergence ; ils s'intéressent presque tous au Calcul numérique [...] et leurs mémoires contiennent de nombreux exemples où ils n'hésitent pas à pousser l'évaluation des nombres qu'ils définissent à plus de 20 décimales. Quelques exemples suffisent à montrer qu'ils ont un sens intuitif très correct de la notion de limite et de la plus ou moins grande rapidité de convergence d'une suite vers une limite. » [Dieudonné 1978, p. 21]

Malgré cela, la vision historiographique dominante de l'analyse pratiquée par les mathématiciens du XVIII^e siècle reste aujourd'hui celle d'une manipulation des séries sans égard pour les questions de convergence et d'une utilisation des fonctions représentées de manière formelle par leur développement en série de Taylor. C'est ce qu'indique, par exemple, N. Jahnke dans le chapitre « Algebraic Analysis in the 18th Century » du livre *A History of Analysis* :

86. Voir [Grabiner 1981a, chap. 4].

87. Voir [Schubring 2005, chap. VI].

88. Notamment pour les démonstrations d'existence. Voir [Gilain 1981].

« The most important tool for the representation of functions was *power series*. Mathematicians of the 18th century mostly regarded power series as infinite polynomials. To a large extent, polynomials and power series behave in calculations in the same way. It would have appeared artificial to regard them as essentially different entities. » [Jahnke 2003, p. 108]

En réalité, on peut déjà trouver les deux manières, numérique ou analytique, d'utiliser les séries chez les mathématiciens du XVIII^e siècle. C'est ce que formalise Condorcet dans le *Supplément à l'Encyclopédie* (t. 4, 1777) où, dans un ajout à l'article SÉRIE de d'Alembert dans l'*Encyclopédie* (t. XV, 1765), il indique :

« On peut regarder une série sous deux aspects, d'abord comme étant la valeur d'une certaine quantité, alors il faut que la série soit convergente ; & , dans ce cas, plus on prend de termes, plus leur somme approche de la grandeur cherchée. On peut encore regarder une série comme l'expression d'une quantité quelconque, expression assujettie à une certaine forme. Si la quantité n'est pas réellement susceptible de cette forme, le nombre des termes de la série ne peut être fini ; mais ils suivent entr'eux une certaine loi, & c'est de la connoissance de cette loi qu'on peut partir pour trouver la fonction finie qui, développée en série, auroit produit la série donnée. »

Remarquons que les termes de convergence et de divergence des séries étaient alors utilisés dans des sens non univoques. Un travail remarquable de clarification a néanmoins été effectué par le mathématicien portugais J. A. da Cunha⁸⁹, travail que Adolf P. Yushkevich [1973] a remis en lumière. On trouve, en effet, dans le livre IX de l'ouvrage *Principios mathematicos* de da Cunha, écrit dans les années 1770 et publié de manière posthume en 1790, une nouveauté importante : la démonstration de la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$, par comparaison avec une série géométrique, ce résultat lui

permettant alors de définir rigoureusement l'exponentielle, puis la fonction logarithme comme sa réciproque. Des discussions entre historiens ont certes porté sur l'interprétation de la définition de la convergence utilisée par da Cunha, compte tenu des défauts de la traduction française, mais elles n'ont pas remis en cause l'appréciation sur l'importance du travail du savant portugais. Yushkevich a aussi étudié la réception de la traduction française de cet ouvrage et montré la réaction positive de Gauss dès l'année de la publication des *Principes mathématiques* de da Cunha, en 1811 [Yushkevich 1978].

89. José Anastácio da Cunha (1744-1787) a été officier d'artillerie puis professeur dans la faculté de mathématiques de l'université de Coimbra, faculté créée par la réforme universitaire de 1772 au Portugal. Homme des Lumières, il a été persécuté par l'Inquisition après la fin du gouvernement de Pombal. Voir [Bebiano 1996 ; Saraiva 2012].

La construction de Lagrange, dans sa *Théorie des fonctions analytiques* en 1797, consistant à fonder le calcul différentiel sur le développement des fonctions en série entière, conçu a priori comme toujours possible sauf en quelques points isolés, est souvent présentée comme emblématique de la conception formaliste erronée de l'analyse au XVIII^e siècle⁹⁰. Cependant, le travail de Lagrange autour de la série de Taylor ne se réduit pas à des manipulations d'égalités formelles. J. Grabiner [1981a, 1990] a mis en évidence l'importance de son apport pour l'établissement des formules de Taylor avec reste (*Théorie*, 1^{re} partie, chap. VI; *Calcul*, leçon 9)⁹¹. Le but de Lagrange est, pour obtenir la valeur de la fonction, d'évaluer le reste de la série lorsqu'on ne garde qu'un nombre fini de termes, « ou du moins de trouver des limites [c'est-à-dire des bornes] de l'erreur qu'on commet en négligeant ce reste. La détermination de ces limites », ajoute-t-il, « est surtout d'une grande importance dans l'application de la Théorie des fonctions à l'Analyse des courbes et à la Mécanique, pour pouvoir donner à cette application la rigueur de l'ancienne Géométrie » (*Calcul*, p. 85-86).

Dans la *Théorie*, Lagrange établit d'abord une formule de Taylor avec reste intégral, puis démontre la célèbre formule de Taylor avec reste « de Lagrange », grâce à un « lemme général »⁹² énonçant que si, sur l'intervalle (a, b) , la dérivée d'une fonction f est toujours positive, alors la différence $f(b) - f(a)$ l'est aussi. Certes, la démonstration de Lagrange n'est pas sans lacune, car elle suppose implicitement une propriété d'uniforme dérivabilité de la fonction f , mais cette lacune va subsister longtemps et, en particulier, chez Cauchy. J. Grabiner caractérise ainsi la démonstration de ce lemme : « [the proof] is entirely algebraic and proceeds by manipulating inequalities in a delta-epsilon way » [Grabiner 1996/2010, p. 203]. Lagrange va utiliser cette formule de Taylor avec reste pour obtenir des développements finis de type asymptotique qui constituent un outil essentiel pour les études locales et vont lui permettre, notamment, de développer une théorie du contact des courbes, dans la 2^e partie de sa *Théorie*, consacrée aux applications géométriques [Delcourt 2011, § 4.2].

90. Dans leur étude récente sur la théorie des fonctions de Lagrange, G. Ferraro et M. Panza indiquent : « We thus aim to provide a better understanding of Enlightenment mathematics and to show that the foundations of mathematics did not, for Lagrange, concern the solidity of its ultimate bases, but rather purity of method – the generality and internal organization of the discipline. » [2012, p. 95] Voir aussi [Ferraro 2008].

91. On utilise ici les abréviations *Théorie* pour la *Théorie des fonctions analytiques* (an V-1797 ; *Œuvres*, t. IX) et *Calcul* pour les *Leçons sur le calcul des fonctions* (an IX-1801 ; nouv. éd., 1806 ; *Œuvres*, t. X). Ces ouvrages sont issus de leçons données par Lagrange aux meilleurs élèves de l'École polytechnique ; on trouvera quelques nouvelles précisions sur ses leçons dans [Phili 2012].

92. Dans son *Calcul*, la présentation lagrangienne est quelque peu différente : le savant établit directement la formule « de Taylor-Lagrange », à l'aide du lemme, sans passer par la formule avec reste intégral.

Dans un article où elle se propose de dissiper un certain nombre de mythes de l'histoire des mathématiques, J. Grabiner peut ainsi faire figurer : « Sixth Myth : Lagrange was a Formalist. He Tried to Rigorize the Calculus, But Failed Because of His Unreflective Reliance on Formal Power Series » [Grabiner 2007/2010, p. 251]. Une telle perspective permet à la fois de mieux comprendre la genèse de la théorie de Cauchy du développement des fonctions en série, et de déterminer sur quels points elle s'écarte de celle de Lagrange⁹³. Cauchy inverse l'ordre lagrangien en commençant par établir la formule de Taylor avec reste avant d'étudier son développement éventuel en série infinie convergente, mais il utilise beaucoup de techniques et de résultats de Lagrange. La complexité de la situation apparaît clairement dans cette synthèse de J. Grabiner :

« Lagrange's use of inequalities in the calculus was in the same spirit as his use of inequalities in algebra ; they figured not in definitions, but in the determination of the finite approximations needed in applications and problem-solving. For Lagrange, even the remainder for a Taylor series was just a way of finding, in general terms, the error made when an infinite series is replaced by a finite approximation. Once again the exact mathematics of the nineteenth century has as an important forerunner the previous century's approximate mathematics. » [Grabiner 1981a, p. 122]

Le rôle de l'algèbre dans ces ouvrages didactiques de Lagrange ne se réduit donc pas à l'utilisation d'égalités formelles éventuellement infinies ; il pratique aussi une algèbre des *inégalités* portant sur les valeurs numériques des fonctions⁹⁴. Ces deux aspects, analytique et numérique, tout en faisant l'objet de développements séparés, étaient sans doute liés chez Lagrange par la certitude de l'existence d'un lien univoque entre une fonction et sa série de Taylor. C'est ce lien que Cauchy rompt à l'aide de ses contre-exemples de fonctions indéfiniment dérivables mais non analytiques en un point⁹⁵. À une certaine dualité formel-numérique⁹⁶, Cauchy substitue une unité fondée sur le numérique.

LA NOTION DE FONCTION

Au milieu du XVIII^e siècle, Euler reconstruit non seulement l'analyse mais aussi l'ensemble des mathématiques sur la base de la notion de fonc-

93. On peut ajouter que les leçons de Lagrange ont entraîné rapidement plusieurs travaux sur la formule de Taylor avec reste, notamment un mémoire d'Ampère publié en 1806 dans le *Journal de l'École polytechnique*, alors qu'il était répétiteur du cours d'analyse de Lacroix, avec Cauchy comme élève.

94. Voir aussi sur ce point [Ovaert 1976].

95. Voir [Gilain 1981, p. xxxvii-xxxix].

96. Il y a ainsi un double héritage de Lagrange. La réception de l'aspect formel a été, comme on sait, particulièrement active en Grande-Bretagne.

tion. L'évolution du contenu de cette notion constitue donc un élément important à considérer pour évaluer les rapports entre les deux siècles.

N. Jahnke résume ainsi une thèse courante sur l'histoire de cette notion de fonction :

« The close attachment of the concept of function to the idea of formula profoundly distinguished 18th-century analysis from that of the 19th century (Fraser 1989). The treatment of functions was global, and a study of their local behavior was missing. » [Jahnke 2003, p. 132]

L'étude de A. P. Yushkevich [1976], où il défend l'idée qu'Euler a formulé successivement deux notions de fonction distinctes, conduit à une présentation différente de cette histoire. La première définition d'Euler apparaît dans son *Introductio* de 1748⁹⁷ : une fonction d'une variable est alors définie comme une « expression analytique » composée d'une variable et de constantes (*Introductio*, t. I, art. 4). Euler appelle courbe « continue » une courbe qui représente « une seule fonction déterminée », et courbe « discontinue » une courbe composée de « portions de différentes courbes continues », qui ne sont donc pas, d'après lui, formées suivant « une seule loi constante » (*Introductio*, t. II, art. 9)⁹⁸.

Un problème de mathématiques mixtes, celui des cordes vibrantes, va à la fois montrer la force de cette conception de la fonction à l'époque et la nécessité de la faire évoluer. D'Alembert et Euler établissent que le déplacement longitudinal $y(x, t)$ d'une corde vibrante satisfait à une équation aux

dérivées partielles que l'on peut écrire sous la forme normalisée : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

En tenant compte des conditions aux limites et en supposant une vitesse initiale nulle de la corde, la solution de cette équation s'exprime sous la forme : $y = \varphi(x + t) - \varphi(t - x)$, où φ est une fonction impaire et de période $2l$ (avec l la longueur de la corde). La fonction φ est une fonction « arbitraire » qui correspond, à un coefficient près, à celle qui détermine la forme initiale de la corde.

Une controverse s'est développée entre d'Alembert, qui impose à cette fonction φ d'être E-continue⁹⁹ (c'est-à-dire exprimée par une seule formule analytique) au nom des nécessités du calcul différentiel, et Euler qui,

97. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 2 tomes, Lausanne, 1748 (*Opera Omnia*, série I, vol. 8-9). Trad. fr. par J. B. Labey, *Introduction à l'analyse infinitésimale*, 2 tomes, Paris, 1796-1797.

98. Cette classification sera, à juste titre, critiquée (voir *infra*). Cependant R. Thiele souligne la signification profonde de la démarche d'Euler : « This simple fact of dividing functions shows an important change : now in mathematics functions are not only a tool, but objects in themselves. » [2007, p. 384]

99. C'est-à-dire continue dans un sens équivalent à celui d'Euler (1748) ; nous empruntons cette terminologie commode à J. Lützen [1983/2007].

dépassant le cadre de sa propre définition de 1748, accepte l'usage de fonctions « discontinues » au nom de la réalité physique des formes initiales possibles de la corde (lignes brisées, courbes librement tracées à la main). D'après Yushkevich, c'est la prise en compte de ces fonctions E-discontinues, a priori non représentées par des expressions analytiques uniques, qui conduit Euler à donner en 1755, dans ses *Institutiones calculi differentialis*, la définition plus générale suivante :

« Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x , sont appelées fonctions de x . » (Euler 1755, p. 4)¹⁰⁰

Yushkevich [1976, § 13, 15] développe l'idée que cette seconde définition d'Euler initie une lignée de définitions de la notion de fonction qui aboutira à la conception générale de Dirichlet, vers 1830.

Jesper Lützen [1983/2007, p. 200], constatant qu'Euler ne considère pas de fonctions très générales dans ses divers travaux¹⁰¹, pense, lui, qu'il ne faut pas surestimer la portée de cette définition chez le savant bâlois¹⁰². Par-delà les définitions données, il est, en effet, important de considérer les types de fonctions réellement utilisées par les divers mathématiciens. Cependant, Lützen estime que cette nouvelle définition générale d'Euler a eu une influence sur la suite de l'histoire :

« The generalization of the function concept [...] was also gradually accepted. In this process Euler's 1755 function definition was influential, regardless of his own interpretation of it. For after 1755 it became normal to reproduce this definition in textbooks on analysis, and slowly mathematicians began to realize its true generality. But this process took almost a century. » [Lützen 1983/2007, p. 204]

Nous regarderons seulement quelques étapes, dans la période 1750-1850, de cette longue évolution.

100. Euler, *Institutiones calculi differentialis*, Saint-Petersbourg, 1755 (*Opera Omnia*, série I, vol. 10). La traduction française de ce passage figure dans Yushkevich [1976/1981, p. 49].

101. Il faut noter cependant l'intérêt d'un mémoire d'Euler sur les fonctions discontinues (« De usu functionum discontinuarum in analysi »), publié en 1767 dans les *Novi commentarii* (*Opera Omnia*, série I, vol. 23). J. Dhombres considère que ce texte « ouvrait des perspectives tout à fait nouvelles pour l'Analyse » et qu'Euler y opérait un « véritable tournant épistémologique » [Dhombres 1988, p. 67-68].

102. Ferraro [2000, chap. 18] s'écarte davantage encore de la thèse de Yushkevich.

Il faut d'abord noter que la position de d'Alembert, contrairement à ce qui est encore souvent écrit, n'est pas restée figée sur cette question. Dans ses *Opuscules mathématiques* tardifs, il élargit la classe des fonctions admissibles, au-delà des fonctions E-continues, pour la résolution de l'équation des cordes vibrantes. Cette évolution avait été signalée, partiellement, par Yushkevich [1976/1981, p. 50]. Elle a depuis été mise en évidence dans toute son ampleur par les travaux de G. Jouve et A. Guilbaud¹⁰³. En fait, l'idée de départ de d'Alembert était d'éviter les « sauts de courbure » des solutions, de façon à ce que les deux membres de l'équation aux dérivées partielles aient un sens précis (recherche de solutions classiques). Dans ses écrits, il a longtemps identifié cette condition d'absence de saut de courbure avec celle que la fonction ne change pas d'expression analytique, c'est-à-dire qu'elle soit E-continue. Il a progressivement pris conscience qu'il est possible d'abandonner cette dernière condition, trop forte, tout en maintenant celle concernant l'absence de sauts de courbure¹⁰⁴. Cette nouvelle position apparaît dans le tome VIII de ses *Opuscules* (1780, § VI) et, encore plus clairement, dans le tome IX resté inédit¹⁰⁵. Une telle conception conduit donc d'Alembert à s'intéresser non seulement au caractère global de l'expression analytique des fonctions mais aussi à la situation locale en certains points où il impose un raccordement « de classe C^n » (comme on dirait aujourd'hui).

On peut penser que cette évolution de d'Alembert est une conséquence des nouveaux problèmes apparus dans les travaux sur les équations aux dérivées partielles de la propagation du son¹⁰⁶ et de l'écoulement des fluides [Guilbaud & Jouve, § 3]. À cela s'ajoute l'influence possible de Condorcet dont les réflexions sur la nature des fonctions « arbitraires » entrant dans les équations aux dérivées partielles marquent des avancées dès 1765¹⁰⁷ [Dugac 1983, § 6]. Dans son mémoire « Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », publié en 1774¹⁰⁸, Condorcet consacre l'article V au thème « De la continuité des fonctions arbitraires ». Il y défend l'idée qu'il est possible de considérer, dans le cadre des équations aux dérivées partielles, des fonctions définies par des formules différentes dans divers domaines. Comme l'indiquent A. Guilbaud et G. Jouve : « Il présente ainsi deux exemples de fonctions polynomiales par morceaux, dont il ajuste les

103. [Jouve 2007, t. I, Partie II, chap. 3 ; Guilbaud & Jouve 2009, § 3].

104. Sa position reste donc différente de celle d'Euler.

105. Il s'agit du manuscrit Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut de France (Paris).

106. Sur le rôle de l'acoustique dans le développement de l'analyse harmonique de Daniel Bernoulli à Fourier, voir [Darrigol 2007].

107. Dans son ouvrage *Du calcul intégral*, p. 92-93.

108. Dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences* pour l'année 1771.

coefficients afin que les valeurs des dérivées premières et secondes coïncident aux points de changement d'expression. » [2009, p. 105] Les auteurs citent alors la conclusion de Condorcet qui montre l'évolution de la notion de fonction continue par rapport à la première définition d'Euler : « on voit qu'il suffiroit ici que cette courbe fût composée de lignes qui, courbes ou droites, se touchent, *c'est-à-dire qu'elle fût continue quant à sa description & non quant à son équation analytique* » (nous soulignons). Condorcet a d'ailleurs lui-même donné une définition générale de la notion de fonction, dans la lignée de la seconde définition d'Euler, dans son *Traité du calcul intégral* de 1778-1782, resté inédit mais dont les premières feuilles, imprimées en 1786, ont circulé¹⁰⁹.

Quelques années plus tard, J. Charles va mettre en cause clairement la distinction eulérienne entre fonctions « continues » et fonctions « discontinues ». Dans son mémoire « Recherches sur les intégrales des équations aux différences finies, et sur d'autres sujets », publié en 1785¹¹⁰, il consacre une dernière partie à un « Fragment sur les fonctions discontinues », où l'on peut lire :

« Il y a une autre espèce de discontinuité, mais qui est ainsi nommée improprement ; c'est quand un effet, ayant suivi une loi pendant un certain temps ou le long d'une certaine abscisse, la quitte brusquement pour en suivre une autre, comme feroit un corps qui décriroit un polygone. Mon intention est de prouver par des exemples, que quand les loix particulières sont données en nombre quelconque, on peut toujours trouver la loi générale, & que l'algèbre, telle qu'elle est actuellement, suffit pour l'exprimer. [...]

Au reste, non seulement on peut exprimer un système de plusieurs lignes par une formule unique, & par conséquent regarder cette ligne comme unique ; je dis de plus, qu'un système composé de surfaces, de lignes & de points, peut encore être exprimé par une formule unique. » (p. 585-586)

Charles expose de nouveau ce point de vue dans l'article INTÉGRAL (*Calcul intégral des équations en différences partielles*) du tome II de l'*Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, paru aussi en 1785. On trouve donc déjà ici le type de critique révélant la contradiction induite par la classification eulérienne des fonctions, que l'on retrouvera plus tard, notamment chez Cauchy en 1844, avec l'exemple de la fonction $\sqrt{x^2}$ – qui apparaît « continue » ou « discontinue » selon l'expression utilisée pour la définir. Cette position de Charles, signalée par Yushkevich dans son article sur la notion de fonction [1976/1981, p. 52], a été analysée en détail par Jean-Pierre Lubet [2001, p. 145-147].

109. Voir [Yushkevich 1976, § 13 ; Gilain 1988, p. 102, 110].

110. Dans le tome X des *Mémoires présentés par divers savans* (à l'Académie des sciences de Paris).

Yushkevich cite aussi le mémoire d'Arbogast « sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles » (1791), qui a remporté le prix proposé en 1787 par l'Académie des sciences de Pétersbourg¹¹¹. Le savant alsacien y défend le point de vue d'Euler dans la controverse des cordes vibrantes, en considérant que, outre les fonctions E-continues et les fonctions E-discontinues, il est possible d'admettre dans les fonctions « arbitraires » des fonctions qu'il appelle « discontigues », ce qui correspond à la notion actuelle de fonctions discontinues en des points isolés.

On constate donc que, notamment en liaison avec les recherches sur les problèmes physico-mathématiques, on assiste dès la seconde moitié du XVIII^e siècle à un mouvement de réflexion théorique sur la notion de fonction, à sa généralisation progressive et donc à un élargissement de la classe des fonctions utilisées en analyse. À la représentation par une formule analytique globale, succède la considération de fonctions définies par morceaux avec une étude locale aux points de raccordement, et même l'idée d'utiliser des fonctions sans représentation analytique *a priori*. Tout cela a préparé le terrain aux travaux de Fourier et de Dirichlet au siècle suivant :

« In J. Fourier's works [...] one can find some comprehension of the generality of Euler's 1755 definition but the first mathematician who really took it seriously and understood the implications of the permissible pathologies was J. P. G. Lejeune-Dirichlet [...], after whom our function concept is justly named. » [Lützen 1983/2007, p. 204]

Fourier donne, en effet, une définition très générale de la notion de fonction comme correspondance entre valeurs numériques, en liaison avec les problèmes physiques posés par la théorie de la chaleur, et, en même temps, il affirme que toute fonction « arbitraire » sur un intervalle peut être exprimée analytiquement par une série trigonométrique et il le montre explicitement pour plusieurs exemples de fonctions E-discontinues, c'est-à-dire continues par morceaux au sens actuel¹¹². En 1829, Dirichlet complètera et précisera le travail de Fourier en donnant des conditions suffisantes sur les fonctions pour qu'elles soient développables en séries trigonométriques et avancera que toutes ne le sont pas, en construisant l'exemple célèbre d'une fonction dis-

111. L'Académie décide de choisir le sujet du prix « dans l'Analyse pure : parce que c'est sur la perfection ultérieure de cette partie de la Mathématique qu'est uniquement fondée l'espérance, de résoudre quelque jour avec un heureux succès les Problèmes les plus difficiles de la Mathématique appliquée. [...] Le problème des cordes vibrantes est sans contredit un des plus fameux de la Mathématique appliquée. » (*Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, t. V, année 1787 (1789), p. 4)

112. Si le mouvement de généralisation de la notion de fonction est important, les travaux de Fourier montrent en même temps l'intérêt de la recherche d'expressions analytiques de ces fonctions plus générales afin de les soumettre aussi au calcul. Sur la problématique de Fourier voir l'étude d'A. Herreman [2013].

continue (au sens actuel) en tout point, égale à c si x est rationnel et à $d \neq c$ si x est irrationnel. Cependant, quelle que soit l'importance de l'apport de Dirichlet, ce n'est qu'une étape de l'histoire de la notion de fonction, de ses généralisations et de ses représentations¹¹³, histoire qui ne semble pas marquée par un changement radical sur un temps court au début du XIX^e siècle¹¹⁴.

NOUVELLES BRANCHES ET THÉORIES EN ANALYSE

Un des arguments fréquents de la présentation standard est d'opposer les mathématiques du XVIII^e siècle qui seraient vouées à l'étude du monde physique aux mathématiques du XIX^e siècle développées pour elle-mêmes. Ainsi, M. Kline conclut le chapitre « Partial Differential Equations in the Eighteenth Century » de son ouvrage par l'affirmation : « The efforts were directed to solving the special equations that arose in physical problems. The theory of the solution of partial differential equations remained to be fashioned and the subject as a whole was still in its infancy. » [Kline 1972, p. 543] Cependant, l'un des phénomènes importants que l'on peut observer, particulièrement à partir du milieu du XVIII^e siècle, est la naissance de plusieurs nouvelles branches et théories importantes de l'analyse pure.

C'est le cas pour les équations aux dérivées partielles¹¹⁵. Après les travaux dédiés, avant 1740, au développement du calcul différentiel et intégral à plusieurs variables dans un cadre géométrique ou analytique¹¹⁶, c'est effectivement un problème de mécanique des milieux continus qui conduit d'Alembert et Euler à poser et à résoudre une EDP linéaire d'ordre deux, l'équation des ondes, au milieu des années 1740. Cependant, à partir des années 1760, ces auteurs vont aussi étudier les EDP pour elles-mêmes, hors de tout contexte physique. C'est ce que souligne J. Lützen¹¹⁷ :

« Alongside the study of physically interesting PDEs, mathematicians also tried to design general methods to solve various classes of PDEs. First, d'Alembert and Euler tried to systematize and generalize their methods based on exact differentials and multipliers, and produced what may be called the first treatises on the subject : d'Alembert's *Recherches de calcul intégral* (1768) and the third volume of Euler's *Institutiones calculi integralis* (1770). » [Lützen 1994, p. 462]

113. Ainsi, la fonction très générale de Dirichlet s'avèrera représentable analytiquement en un sens défini par Lebesgue en 1905 [Monna 1972, p. 71]. Voir aussi [Lützen 2003b].

114. La plupart des historiens décrivant le travail de Cauchy de refondation de l'analyse ne font d'ailleurs pas ressortir un apport spécifique de sa part sur la notion générale de fonction.

115. La terminologie courante à l'époque était « équations aux différences partielles » : EDP en abrégé dans la suite (PDE en anglais).

116. Voir [Engelsman 1984 ; Greenberg 1995, chap. 7].

117. On retrouve la même constatation dans [Houzel 2002b, § 4].

G. Jouve, après une étude détaillée du mémoire de d'Alembert de 1768¹¹⁸ et de ses liens avec les travaux d'Euler, de Lagrange et de Condorcet, notamment, conclut : « On peut donc dire que le calcul aux différences partielles est conçu par les principaux analystes comme une branche autonome de l'Analyse à partir du début des années 1770. » [Jouve 2008, p. 177]

Une autre branche importante de l'analyse apparaît dans les années 1740 : le calcul des variations. Craig Fraser en résume ainsi l'histoire au XVIII^e siècle :

« The calculus of variations began as a disparate set of problems and techniques in the early eighteenth century. It was synthesized into a branch of mathematics by Leonhard Euler in the 1740s and was radically reformulated by Joseph Louis Lagrange using his δ -algorithm in the next decade. Both men also used variational ideas extensively in mechanics » [Fraser 1994a, p. 343].

On peut préciser les étapes de cette histoire grâce aux divers travaux de l'auteur :

« The calculus of variations was established as a distinct branch of analysis with the publication in 1744 of Euler's *Methodus inveniendi curvas lineas*. Euler succeeded in formulating the variational problem in a general way, in identifying standard equational forms of solution and in providing a systematic technique to derive them. His work included a classification of the major types of problems and was illustrated by a wide range of examples. » [Fraser 1994c, p. 103]

Après cette création de la nouvelle branche par Euler, l'apport de Lagrange, à partir de 1755 et pendant une cinquantaine d'années, en modifie profondément le contenu :

« Lagrange showed that Euler's theory could be efficiently recovered using his new method, and demonstrated its superiority in handling problems involving variable end-points. Euler, in turn, adopted the δ -algorithm and coined the name "calculus of variations" for the new mathematics. » [Fraser 1994a, p. 347]

Fraser conclut ainsi la section consacrée au XVIII^e siècle de son article :

« With Lagrange's theory, the calculus of variations had completed the formative phase of its historical development [...]. Although later researchers would introduce new concepts, deepen the theory and extend its geometrical applications, the basic structural character of the subject was in place. » [*Ibid.*]

118. Ce mémoire, « Recherches de calcul intégral », a paru dans ses *Opuscules mathématiques* (t. IV, 1768, Mémoire 26).

La seconde moitié du XVIII^e siècle voit aussi la création de la théorie de l'intégration en termes finis par l'encyclopédiste Condorcet, soixante ans avant Liouville qui y attachera son nom [Gilain 1988 ; Lützen 1990, chap. IX]. Après l'échec de sa recherche, dans les années 1760, d'une théorie générale du calcul intégral, dans la lignée de Fontaine, Condorcet définit, dans les années 1770, une nouvelle problématique qui va le conduire à des résultats significatifs. Après avoir délimité une classe de fonctions qu'il appelle « analytiques », correspondant aux fonctions « finies, explicites ou implicites » de Liouville (c'est-à-dire les fonctions élémentaires explicites ou implicites), il pose le double problème de déterminer *a priori* si une expression différentielle ou une équation différentielle donnée admet une intégrale élémentaire et, si c'est le cas, de la calculer. Dans son *Traité du calcul intégral* de 1778-1782, resté inédit mais dont des éléments ont circulé, il parvient, notamment, à des résultats importants concernant les primitives de fonctions élémentaires. Ainsi donne-t-il la forme précise de l'intégrale d'une fonction algébrique, si elle est élémentaire : c'est la somme d'une fonction algébrique et d'une combinaison linéaire, à coefficients constants, de logarithmes de fonctions algébriques. Il s'agit du théorème dit « de Liouville », considéré comme fondamental dans la théorie de l'intégration en termes finis ; c'est un résultat énoncé par Abel en 1828 et démontré par Liouville en 1833.

Les preuves de Condorcet de ce type de résultats sont lacunaires car elles s'appuient sur ce que l'on appelle le « principe de Laplace », énoncé par celui-ci en 1814 et dont la recherche d'une démonstration a constitué le point de départ des travaux de Liouville. Cependant, à partir des résultats ainsi obtenus, Condorcet montre que le double problème de la théorie – existence et calcul d'une intégrale élémentaire – se ramène souvent à la recherche de solutions rationnelles d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. Il en déduit, notamment, que l'intégrale de la fonction $\frac{e^x}{x}$ n'est pas une fonction élémentaire, résultat d'impossibilité particulièrement caractéristique d'une démarche de construction théorique dans un cadre de mathématiques pures.

À partir de ces quelques exemples, il nous semble qu'un approfondissement de notre connaissance de l'analyse mathématique dans le second XVIII^e siècle ¹¹⁹ permette donc, là encore, d'éclairer bien des aspects des

119. Dans la conclusion de son ouvrage sur le développement du *Calculus* en Grande-Bretagne, N. Guicciardini note la sous-estimation fréquente de la nouveauté de l'analyse pratiquée au XVIII^e siècle : « However, it seems to me that the eighteenth century was not a period of Kuhnian normal science (to use a fashionable terminology) [...]. During this century the calculus was transformed: in a way a new calculus was created. » [Guicciardini 1989, p. 141]

travaux du premier XIX^e siècle et de repérer de multiples continuités entre les deux siècles¹²⁰, en même temps que des ruptures répondant à des temporalités et des ressorts parfois différents de ceux généralement associés à la présentation standard.

2.4. Algèbre et arithmétique

Si, comme nous l'avons vu au § 1.3, Gauss a pu être considéré sous plusieurs aspects, notamment sociologiques, comme proche des mathématiciens du XVIII^e siècle, il apparaît aussi, et parfois chez les mêmes auteurs, comme emblématique d'une rupture située vers 1800 grâce à ses travaux de mathématiques pures. Sont notamment mises en avant les deux premières publications de Gauss, qui concernent l'algèbre et la théorie des nombres. Pour Struik, par exemple :

« Some of his early discoveries were published in his Helmstedt dissertation of 1799 and in the impressive *Disquisitiones arithmeticae*¹²¹ of 1801. The dissertation gave the first rigorous proof of the so-called “fundamental theorem of algebra” [...].

[...] the beginning of modern number theory is sometimes dated from the publication of this book [the *D.A.*]. Its core is the theory of quadratic congruences, forms and residues ; it culminates in the law of quadratic residues [...] for which Gauss gave the first complete proof. Gauss was as fascinated by this theorem as by the fundamental theorem of algebra » [Struik 1987, p. 142-143].

Nous aborderons successivement trois thèmes importants figurant dans ces écrits de Gauss.

LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE¹²²

Dans sa thèse d'habilitation, publiée en 1799, Gauss donne une démonstration du théorème qu'il nomme « théorème fondamental de la théorie des équations »¹²³, énoncé sous la forme : tout polynôme à coefficients réels se décompose en un produit de facteurs réels du premier ou du second

120. Une autre forme de continuité apparaît entre le second XVIII^e siècle et le premier XIX^e dans le domaine des équations différentielles ordinaires, où D. Tournès souligne l'homogénéité de la période allant de 1750 à 1880 environ en ce qui concerne la marginalisation de l'usage des figures [Tournès 2012] et la non-utilisation des méthodes graphomécaniques [Tournès 2009].

121. En abrégé : *D.A.*, dans la suite.

122. En abrégé : TFA, dans la suite. Il est aussi souvent dénommé « théorème de d'Alembert-Gauss » en France.

123. Expression originale : « theorema fundamentale doctrinae aequationum » (*Carl Friedrich Gauss Werke*, vol. III, p. 8, 10).

degré¹²⁴. Cette démonstration est précédée d'une longue première partie où il se livre à une analyse critique des travaux de ses prédécesseurs, notamment d'Alembert, Euler et Lagrange. Dans l'introduction de sa quatrième démonstration du TFA, en 1849, Gauss caractérise ainsi lui-même son premier travail sur le sujet : « Le mémoire paru en 1799 [...] avait un double but, d'abord de montrer que toutes les démonstrations tentées jusque-là du plus important théorème de la théorie des équations algébriques, étaient insuffisantes et illusoirs, et ensuite de donner une nouvelle preuve parfaitement rigoureuse. »¹²⁵

Gauss a ainsi fixé lui-même sa place dans l'histoire et ce double argument a été largement repris dans l'historiographie depuis la fin du XIX^e siècle¹²⁶ où l'on a vu fleurir l'affirmation qu'il avait été le premier à donner une véritable démonstration du TFA. Par un double mouvement de surestimation de la rigueur de la démonstration de Gauss et de sous-estimation de la valeur de celles de ses prédécesseurs, une rupture radicale a été construite sur ce point entre le XVIII^e et le XIX^e siècle¹²⁷.

Les deux affirmations de Gauss ont toutefois été remises en question. D'une part, sa démonstration n'est pas parfaitement rigoureuse mais comporte des lacunes qui n'ont été comblées qu'au XX^e siècle. D'autre part, les travaux de ses prédécesseurs ont pu être réévalués. Une critique essentielle faite par Gauss de ces travaux est que leurs auteurs ne démontrent pas mais supposent *a priori* l'existence de racines d'un polynôme, racines de nature inconnue mais avec lesquelles ils s'autorisent à calculer comme s'il s'agissait de nombres ordinaires ; ce ne sont donc pas des démonstrations sur l'existence des racines, mais seulement sur leur forme, souligne-t-il. La critique de Gauss est justifiée en ce qui concerne les démonstrations de type algébrique d'Euler et de Lagrange mais, ces démonstrations n'ont pas été définitivement invalidées car cette lacune logique allait pouvoir être comblée plus tard, grâce, notamment, aux travaux de Kronecker. Comme l'indique Isabella Bachmacova :

124. Forme réelle du théorème, équivalente à l'énoncé de l'existence d'au moins une racine complexe ou de la décomposition en un produit de facteurs du premier degré à coefficients complexes.

125. Texte original : « Die im Jahre 1799 erschienene Denkschrift [...] hatte einen doppelten Zweck, nämlich erstens, zu zeigen, dass sämtliche bis dahin versuchte Beweise dieses wichtigsten Lehrsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen ungenügend und illusorisch sind, und zweitens, einen neuen vollkommen strengen Beweis zu geben. » (*Carl Friedrich Gauss Werke*, vol. III, p. 73).

126. C'est le cas, notamment chez Loria [1891] et dans les deux éditions, allemande et française, de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques* [Netto 1899 ; Le Vavasseeur 1907].

127. Kline écrit ainsi : « Gauss's approach to the fundamental theorem of algebra inaugurated a new approach to the entire question of mathematical existence. » [Kline 1972, p. 599]

« il n'y avait pas de cercle vicieux, parce qu'en réalité on peut construire un corps de décomposition pour chaque équation algébrique, sans recourir à l'existence du corps des nombres complexes [...] ou au théorème fondamental d'algèbre » [Bachmacova 1960, p. 215].

Cependant, le reproche de Gauss de supposer *a priori* l'existence de racines formelles s'applique mal à l'égard du mémoire de d'Alembert. La démonstration de type analytique ou (analytico-géométrique) que présente ce dernier dans son mémoire de 1746¹²⁸ ne nécessite pas, contrairement aux démonstrations algébriques, de supposer la factorisation linéaire *a priori* du polynôme. Svetlana Petrova [1974, p. 257] a ainsi montré que la démonstration de d'Alembert ne contient pas de faute logique, même si elle comporte des lacunes techniques, qui peuvent d'ailleurs être comblées¹²⁹. On a pu donc avancer que le TFA a bien un statut de théorème d'existence chez d'Alembert, cela ressortant non seulement du contenu du mémoire de 1746, mais aussi de l'article ÉQUATION qu'il écrit pour l'*Encyclopédie* (t. V, 1755). À partir de l'existence d'au moins une racine complexe, assurée par le mémoire de 1746, il en déduit la décomposition du polynôme en facteurs linéaires dont il démontre l'unicité, ce qui lui permet d'assurer qu'un polynôme de degré n a bien n racines complexes, distinctes ou confondues. D'Alembert y présente sa conception de la structure de la théorie générale des équations algébriques en mettant son théorème d'existence au fondement de la théorie et en le dénommant ainsi « proposition fondamentale de l'algèbre »¹³⁰.

Si le mémoire de Gauss de 1799 a joué un rôle historique important du fait, notamment, de la clarté de sa critique des démonstrations algébriques du TFA et de leur lacune logique sur la question de l'existence des racines, on peut donc, sur plusieurs points, le situer dans la continuité des travaux de d'Alembert : démonstration « analytico-géométrique » du TFA qui évite de supposer la factorisation formelle des polynômes et place de ce théorème au fondement de la théorie générale des équations algébriques.

128. D'ailleurs, dans son texte de 1799, Gauss nuance fortement sa critique à l'égard de la démonstration de d'Alembert, sur ce point essentiel, en indiquant que le nerf de celle-ci n'était pas brisé et qu'une démonstration rigoureuse pouvait être construite à partir d'elle.

129. Ce diagnostic mathématique a été confirmé et précisé : voir [Balthus 2004 ; d'Alembert 2007, annexes 2a et 2b].

130. Voir [Gilain 1991, § 6 ; 2007, § IV]. On peut ajouter que d'Alembert a aussi étendu son théorème au cas des polynômes à coefficients complexes à l'occasion de nouvelles recherches sur le calcul intégral, publiées dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences* pour l'année 1769. Gauss n'opérera pas cette extension avant sa dernière démonstration, en 1849.

LES RECHERCHES ARITHMÉTIQUES

L'ouvrage *Disquisitiones arithmeticae* publié par Gauss en 1801 a souvent été considéré comme créant d'un seul coup et sans prémices une nouvelle discipline – la théorie des nombres au sens moderne. F. Klein, par exemple, a ainsi écrit :

« In the *Disquisitiones Arithmeticae* Gauss created modern number theory in its true sense and fixed its whole subsequent development. Our amazement at this achievement increases when we consider that Gauss created this whole world of thought purely out of himself and by himself, without any outside stimulus. » [Klein 1926/1979, p. 24]

Des recherches récentes portant sur l'aval ou sur l'amont des *D.A.* conduisent à faire évoluer ce schéma historiographique.

L'étude [Goldstein *et al.* 2007] montre la complexité de la réception de l'ouvrage au XIX^e siècle, avec des temporalités différentes suivant les thèmes et les pays. Deux éléments apparaissent notamment : cette réception ne saurait se réduire à la lignée, souvent privilégiée, des travaux des mathématiciens allemands sur la théorie algébrique des nombres et la constitution de la discipline « théorie des nombres » n'apparaît pas vraiment avant le milieu du XIX^e siècle [Goldstein & Schappacher 2007].

En ce qui concerne les travaux antérieurs à Gauss dans ce domaine, ils ont notamment fait l'objet d'un ouvrage d'André Weil où le mathématicien étudie en détail l'apport de Fermat, Euler, Lagrange et Legendre, quatre savants qu'il considère comme les fondateurs de la théorie des nombres moderne¹³¹, et par rapport auxquels il situe ainsi la place de Gauss : « The greatness of Gauss lies in his having brought to completion what his predecessors had initiated, no less than in his inaugurating a new era in the history of the subject. » [Weil 1984, p. ix]

Les recherches de M. Bullynck [2009a,b, 2010], dans une approche d'histoire sociale, ont apporté récemment de nouveaux éléments sur la genèse des *D.A.* dans les années 1790 et sur les sources dont a pu disposer Gauss dans le contexte du second XVIII^e siècle en Allemagne. Il en ressort que trois thèmes ont joué un rôle particulièrement important. Il s'agit d'abord des problèmes de restes, qui renvoient à une longue tradition dans des domaines très divers, théoriques et pratiques, et qui font l'objet de nouveaux travaux à partir du milieu du XVIII^e siècle :

« Finally, Gauss's congruences, functioning as an equation, a relationship and a tool for abbreviating calculation, reshaped this fragmented field of mathematics [...] into a coherent theory. All singular problems, previously treated by Euler and Hindenburg, appear in Section II of the *Disquisitiones Arithme-*

131. « These are the founders of modern number theory. » [Weil 1984, p. ix]

ticae and are aptly solved using congruences, with many indications on how to abbreviate the calculations. » [Bullynck 2009a, p. 68]

L'entreprise de construction de tables de diviseurs, avec un grand projet à la fois pratique et théorique lancé par Lambert en 1770, joue également un rôle. Relayé par les milieux académiques à Berlin et à Saint-Pétersbourg, ce projet a abouti à la publication de vastes tables dont l'impact apparaît aussi dans les enseignements mathématiques des universités de plusieurs états allemands dans les dernières décennies du XVIII^e siècle. Une analyse du contenu des *D.A.* à la lumière de ce phénomène en montre l'influence :

« It is of great use when one tries to put Gauss' work into a historical context. The *Disquisitiones*, which are often described as a book of wonders falling from the sky, then becomes a phenomenon that can be accounted for. It turns out to be the brilliant culmination of half a century of research which started from Euler's various texts and was actively stimulated by Lambert's project on factor tables and his appeal for a coherent and complete theory of numbers in general, and in particular of factoring. » [Bullynck 2010, p. 206]

Enfin, l'étude des périodes dans les expressions décimales des fractions avec, notamment, les travaux de Lambert et de Hindenburg, est aussi un sujet qui a influencé le jeune Gauss :

« The fact that decimal periods were a research topic in the second half of the 18th century clearly inspired Gauss in writing parts III and VI of his *Disquisitiones Arithmeticae*. Familiar with the problem in 1793 [...], Gauss seems to have pursued the topic until 1797, when he first drafted his solution, which would become part of the *Disquisitiones* in 1801. » [Bullynck 2009b, p. 155]

Gauss va cependant plus loin, sur cette question, que ses prédécesseurs ou contemporains : « Gauss was the first to solve the problems involved, both theoretically and practically, in the most complete manner possible. [...] this topic might have been one of the inspirations for his concept of a congruence. » [*Ibid.*]

Tous ces éléments contribuent à sortir du mythe, longtemps entretenu, d'un jeune Gauss présenté comme créant ex nihilo la théorie moderne des nombres.

LA RÉOLUTION PAR RADICAUX DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

Dans la section VII des *D.A.*, Gauss présente aussi ce que Van der Waerden [1985, p. 89] considère comme constituant, avec ses preuves du TFA, sa plus importante contribution à la théorie des équations algébriques : la résolution par radicaux de l'équation cyclotomique générale $x^m - 1 = 0$. Cette partie de l'ouvrage a connu une réception immédiate en France et son importance exceptionnelle a été soulignée, notamment par Lagrange [Goldstein *et al.* 2007, § I.2]

Mais le problème de la résolution par radicaux des équations algébriques a aussi produit un autre mythe de jeune génie solitaire, celui d'Évariste Galois¹³². Bien que marqués par un décalage chronologique important, les travaux de Galois ont alimenté la thèse de la rupture radicale entre le XVIII^e et le XIX^e siècle. Cependant, si ses écrits, notamment son mémoire de 1831 « Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux », comprennent des nouveautés essentielles, là encore plusieurs études portant tant sur l'aval que sur l'amont permettent aujourd'hui de mieux situer leur place dans l'histoire de l'algèbre. Ainsi, des travaux d'histoire conceptuelle comme ceux de Hans Wussing [1969/1984], de Lubos Novy [1973] ou de Christian Houzel [2002a, § IV-V], montrent bien la nécessité, pour comprendre l'évolution du problème de la résolubilité par radicaux, de considérer la séquence allant de Lagrange (1770) à Galois (1830) :

« Lagrange saw the “metaphysics” of the procedures for the solution of algebraic equations by radicals in this connection between the degree of the resolvent and the valuedness of rational functions [...]. His discovery was the starting point of the subsequent development due to Ruffini, Abel, Cauchy, and Galois. » [Wussing 1969/1984, p. 78]

En effet, dans son mémoire « Réflexions sur la résolution algébrique des équations », publié en 1772-1773, Lagrange compare diverses méthodes de résolution antérieures qui ont permis de résoudre le problème pour un degré de l'équation inférieur ou égal à 4, et montre que dans ces cas, on peut trouver une fonction des racines (la « résolvante » de Lagrange) qui, lorsqu'on les permute, prend un nombre de valeurs différentes inférieur au degré. D'où sa proposition de rechercher de telles fonctions des racines pour les degrés supérieurs à 4. La liste des travaux présentés, à la suite de Lagrange, varie quelque peu d'un historien à l'autre mais comprend, en général, à la fois des mathématiciens qui sont parvenus à la résolubilité par radicaux de certains types d'équations (Vandermonde, en 1774, pour l'équation cyclotomique de degré 11 et Gauss pour le cas général, dans la section VII des *D.A.*), et des mathématiciens qui ont démontré l'impossibilité de la résolubilité par radicaux de l'équation générale du 5^e degré (Ruffini, avec une lacune ; Abel, en 1826, qui donne la première démonstration correcte). Quant à Galois :

« he was able to complete the work of Lagrange, Ruffini, Gauss, Abel and Cauchy – the group-theoretic formulation of the theory of solvability of algebraic equations – and discloses the inner forces of the theory that would trigger the development of the (permutation-theoretic) group concept in the following decades. » [Wussing 1969/1984, p. 102]

132. Encore récemment, on trouve ce mythe théorisé sous la forme du héros romantique par Alexander [2006b, 2010].

Wussing souligne ainsi que Galois « was part of a mathematical tradition » [*Ibid.*, p. 104]

Les récents travaux de Caroline Ehrhardt [2011], dans une optique d'histoire sociale et culturelle, replacent la formation et les recherches de Galois dans le cadre des institutions et des pratiques du milieu mathématique parisien des années 1820 et 1830, et permettent de récuser la thèse du génie solitaire en opposition sur tous les plans avec son temps. Il apparaît que les écrits de Galois ont été rendus possibles par l'assimilation de tout un héritage savant relatif à la théorie des équations algébriques et, notamment, des travaux de Lagrange et de Gauss. C'est sur cette base que l'on peut analyser ce qui constitue, en même temps, sa profonde originalité quant au choix de ses thèmes et la manière de les traiter :

« Mais, surtout, la seule proximité des écrits de ces deux mathématiciens [Gauss et Lagrange] suffit à affirmer que [...] Galois mobilise un outillage mental qui fait partie de l'univers des possibles en 1830. Elle démontre donc, une fois encore, que les mathématiques de Galois ne se situent pas hors de leur temps. En outre, cette parenté atteste que la démarche mise en œuvre par Galois ne s'inscrit pas dans la ligne dominante et reconnue par tous de la théorie des équations¹³³ : nous avons là un indicateur à la fois de l'ancrage de Galois dans son époque et de la position marginale de ses mathématiques. » [Ehrhardt 2011, p. 80]

Le cas de Galois illustre l'utilité, y compris pour des travaux situés vers 1830 et marquant une forte nouveauté par rapport aux travaux antérieurs, d'élargir l'échelle et de prendre en compte les continuités avec les travaux du second XVIII^e siècle.

2.5. Géométrie

La géométrie est aussi un domaine où la rupture entre XVIII^e et XIX^e siècle a été fortement mise en avant. Dans son ouvrage de 1837, Michel Chasles ouvrait ainsi l'exposé de la cinquième époque de son histoire de la géométrie :

« Dans ces derniers temps, après un repos de près d'un siècle, la Géométrie pure s'enrichit d'une doctrine nouvelle, la *Géométrie descriptive*, qui était le complément nécessaire de la Géométrie analytique de Descartes, et qui, comme elle, devait avoir des résultats immenses, et marquer une ère nouvelle dans l'histoire de la Géométrie. Cette science, ajoutait-il, est due au génie créateur de Monge. » [Chasles 1837, p. 189]

133. « En effet, si les travaux de Lagrange font partie des acquis considérés comme importants et incontestés de la théorie des équations, ils n'en sont pas encore pour autant d'actualité dans les années 1820-1830. Lagrange lui-même avait invité ses successeurs à privilégier la résolution numérique sur la résolution algébrique » [Ehrhardt 2011, p. 72-73].

Un tel récit est souvent repris dans l'historiographie où Monge apparaît comme le personnage essentiel de la rupture avec le XVIII^e siècle, tant sur le plan scientifique que sur le plan sociologique : c'est à la fois le fondateur de l'École polytechnique et de la géométrie descriptive, et l'initiateur, par ses cours, du renouveau de la géométrie au XIX^e siècle. Struik, met notamment en avant le critère de spécialisation comme mesure de sa modernité :

« Monge was one of the first modern mathematicians whom we recognize as a specialist : a geometer – even his treatment of partial differential equations has a distinctly geometrical touch.

Through Monge's influence geometry began to flourish at the Ecole Polytechnique. » [Struik 1987, p. 147]

Cependant, R. Taton [1951] avait déjà émis l'hypothèse que l'on devait chercher l'origine des connaissances de Monge sur la géométrie descriptive bien en amont, dans son enseignement à l'École du génie de Mézières. Cette conjecture a été validée par des travaux récents qui ont permis de reconstruire de façon assez précise la genèse de cette théorie. Bruno Belhoste [1990] a pu montrer que le manuscrit intitulé *Traité des ombres dans le dessin géométral*, publié en 1847 par T. Olivier, correspond à un cours écrit en 1763 par Chastillon, fondateur et directeur de l'École de Mézières :

« Rédigé un an avant l'arrivée de Monge à Mézières, il montre ce qu'était alors l'enseignement du dessin à l'École du génie. Mieux, il fournit, comme on verra, le "chaînon manquant" dans la préhistoire de la géométrie descriptive, entre les grands traités de coupe des pierres et les premiers textes de Monge » [Belhoste 1990, p. 107-108].

En effet, un manuscrit de Monge intitulé *Des ombres*, a pu être daté de 1768 au plus tard. « On verra, écrit Belhoste, que cette proximité [avec celui de Chastillon] n'est pas seulement temporelle et qu'il existe entre les deux mémoires une véritable filiation. » [*Ibid.*, p. 108] Ce mémoire montre que, dès cette date, Monge possède les techniques de la géométrie descriptive ; celle-ci apparaît ainsi comme « l'héritière en ligne directe d'une tradition de géométrie pratique qui existait à Mézières avant l'arrivée de Monge » [*Ibid.*, p. 131]. Cependant, Belhoste souligne aussi la distance existant entre les deux traités : « Chez Monge, les constructions sont purement géométriques. [...] il traite le problème des ombres non plus en architecte mais en mathématicien. » [*Ibid.*, p. 134]

Joël Sakarovitch a confirmé ces analyses de Belhoste en y apportant quelques précisions. Le texte de Monge *Des ombres*, ainsi qu'un second texte de 1768, *De la perspective*, présentent une « grande proximité de pensée, et de présentation, avec les épreuves de géométrie descriptive » [Sakarovitch 1998, p. 233]. Il apparaît que « Monge eut très tôt une idée claire d'un mode de représentation de l'espace commun à associer à diverses situations » [*Ibid.*, p. 240], et Sakarovitch montre que c'est l'ensei-

gnement de la « théorie de la coupe des pierres » à l'École de Mézières qui a joué le rôle clé dans la genèse de cette conceptualisation. Même si l'on manque de documents directs sur cet enseignement de Monge, « il ne fait donc aucun doute que cette “théorie” contient l'essentiel des outils géométriques qui caractérisent la discipline enseignée une vingtaine d'années plus tard à l'École normale et à l'École polytechnique » [*Ibid.*, p. 243].

Ce qui va changer dans la période de la Révolution française, c'est la large diffusion que Monge va pouvoir donner à la géométrie descriptive, transformée en nouvelle discipline grâce à ses enseignements à l'École normale¹³⁴ et à l'École polytechnique, alors que, semble-t-il, l'École de Mézières exigeait que ce savoir fût gardé secret.

Motivés par l'enseignement de la coupe des pierres à Mézières, les travaux géométriques de Monge à partir de la fin des années 1760 se caractérisent par le fait qu'ils concernent l'espace à trois dimensions. C'est vrai, bien sûr, pour ceux relatifs à la géométrie descriptive dont on vient de parler, mais aussi pour ses travaux que l'on peut rattacher aux domaines de la géométrie analytique ou de la géométrie différentielle, selon une terminologie postérieure, c'est-à-dire concernant l'application de l'algèbre ou de l'analyse infinitésimale à la géométrie [Taton 1951, chap. III-IV].

Dans son ouvrage *History of Analytic Geometry*, Carl B. Boyer [1956] soulignait déjà l'importance des progrès effectués en matière de géométrie analytique à trois dimensions, durant ces années-là : « The interest of Lagrange and Monge lay especially in three dimensions, and it is here that contributions were made also by their contemporaries. The decade from 1771 to 1781 was, in fact, perhaps the most significant of all in the development of coordinate geometry in three-space. » [Boyer 1956, p. 206] Outre Lagrange et Monge, il signale les travaux de Meusnier et Tinseau, élèves de Monge à l'École de Mézières ainsi que les travaux d'Euler et de ses disciples à Saint-Petersbourg, et résume : « Cartesian geometry for three-space was taking on its definitive modern form » [*Ibid.*, p. 208]. Boyer ajoute qu'il faut attendre un traité de Lacroix de 1798-1799 pour que soit fait pour la dimension deux ce que Lagrange et Monge ont fait pour la dimension trois : « [Lacroix] did for plane coordinate geometry essentially what Monge and Lagrange had done earlier for solid analytic geometry. In this there is sufficient glory for all three, for they made Cartesian geometry what it is today. » [*Ibid.*, p. 218]

À la suite de R. Taton [1951, chap. IV], J. Sakarovitch souligne aussi l'importance des travaux de Monge en géométrie différentielle effectués dès les années 1770 et combien ils sont révélateurs de sa façon de raisonner dans l'espace. Il cite, en particulier, le premier mémoire présenté par Monge

134. Voir la réédition commentée de ses leçons à l'École normale de l'an III dans [Dhombres 1992].

à l'Académie des sciences en 1771 (publié seulement en 1785), sur les développées et les courbes à double courbure : « C'est essentiellement ce mémoire que Monge reprendra dans sa première leçon de "géométrie différentielle" en l'an III. » [Sakarovitch 1998, p. 239] Dans son article consacré à l'histoire des courbes gauches de Clairaut à Darboux, Jean Delcourt souligne également l'importance de ce même texte :

« Dans ce mémoire, Monge impose une nouvelle vision. Non seulement il va faire progresser la théorie de façon considérable mais il va également promouvoir une nouvelle façon de faire de la géométrie : les objets de l'espace, courbes, plans, surfaces vont tous être mis à contribution et vont se mouvoir, s'envelopper, s'engendrer. » [Delcourt 2011, p. 240]

Un autre mémoire, celui sur la théorie des déblais et des remblais, présenté à l'Académie des sciences en 1776, puis dans une seconde version en 1781, apparaît comme caractéristique de la démarche de Monge :

« il s'agit d'un problème concret rencontré par les officiers du génie qui doivent édifier des fortifications. Le mémoire de Monge, s'il ne donne pas de réponse pratique au problème, fournit en revanche une remarquable étude de géométrie différentielle, qui sera le point de départ de la théorie de la courbure des surfaces. Le géomètre montre à cette occasion à la fois sa capacité à théoriser un problème concret et le rôle de stimulant intellectuel que ce type de théorisation joue dans la gestation de son œuvre scientifique » [Sakarovitch 1998, p. 239-240].

On peut d'ailleurs ajouter que ce mémoire a donné l'occasion à Condorcet, en tant que secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, d'affirmer sa confiance dans l'avenir des mathématiques à un moment où certains semblaient en douter¹³⁵ : « nous sommes loin d'avoir épuisé toutes les applications de l'Analyse ou de la Géométrie, et qu'au lieu de croire approcher du terme où ces sciences doivent s'arrêter, parce qu'elles auraient atteint la limite des forces de l'esprit humain, nous devons avouer bien plutôt que nous ne sommes encore qu'aux premiers pas de cette carrière immense »¹³⁶.

Monge et les disciples dont il a été le professeur à l'École de Mézières ou à l'École polytechnique sont généralement crédités de la renaissance de la géométrie pure, synthétique, au début du XIX^e siècle, mouvement interprété comme une illustration de la spécialisation des mathématiques pures

135. À partir notamment d'une lettre de Lagrange à d'Alembert de 1781, l'idée d'un pessimisme général à la fin du XVIII^e siècle quant à l'avenir des mathématiques, particulièrement des mathématiques pures, est utilisée dans l'historiographie pour alimenter la présentation standard d'une coupure entre les deux siècles : voir [Kline 1972, p. 623 ; Struik 1981, p. 9-10 et 1987, p. 136-137 ; Alexander 2006, p. 720].

136. *Histoire de l'Académie royale des sciences*, année 1781 (1784), p. 34-35. Cette opinion de l'encyclopédiste Condorcet sera abondamment développée dans ses divers écrits : voir, notamment, [Crépel & Gilain 1989].

caractéristique de la rupture avec le XVIII^e siècle. Cependant, dans son article « The physicalist tradition in early nineteenth century French geometry », Lorraine Daston présente une interprétation de ce mouvement assez éloignée du schéma standard :

« During the first decades of the nineteenth century, synthetic geometry experienced a renaissance among French mathematicians in the form of descriptive and projective geometry. One striking aspect of this revival was the attempt of its most prominent representatives [...] to broaden the scope of traditional geometric methods through the introduction of explicitly physicalist techniques and concepts such as transformation, projection and continuity. » [Daston 1986, p. 269]

Ainsi : « synthetic geometers such as Poncelet and Chasles inherited a philosophical as well as a mathematical program from Carnot and Monge that made an intimate relation between mathematics and the physical sciences the basis for a claim for synthetic geometry's superiority to analysis » [*Ibid.*]¹³⁷. Loin d'assister à la spécialisation des disciplines et au développement des mathématiques pures pour elles-mêmes, c'est le mouvement inverse, une interaction forte entre géométrie et mécanique y compris dans ses aspects les plus pratiques, qui préside, selon L. Daston, au développement de la nouvelle géométrie synthétique dans le cadre de l'École polytechnique :

« Once motion was accepted as an integral part of geometry, the boundaries between geometry and rational mechanics became increasingly indistinct. The format of the Ecole Polytechnique's curriculum, with intertwined the study of descriptive geometry with that of military fortifications and practical mechanics in the interest of a well-rounded engineering background, also tended to merge the two disciplines. » [*Ibid.*, p. 282]

Compatible avec l'affirmation de J. Sakarovitch selon lequel Monge « s'inscrit dans un vaste mouvement d'idées, et fait de [lui] un héritier direct des Encyclopédistes » [Sakarovitch 1998 p. 247], cette interprétation illustre le mélange de continuités et de ruptures dans l'œuvre du mathématicien.

D'après les positions d'Alexander vis-à-vis des Lumières et de l'École polytechnique (voir § 1.3), le sujet essentiel manifestant la rupture avec le XVIII^e siècle en géométrie n'est pas pour lui l'un de ceux sur lesquels travaillait Monge. C'est dans l'émergence de la géométrie non euclidienne qu'il décèle les caractéristiques correspondant au renouveau des mathématiques au début du XIX^e siècle :

137. Dans son article sur la géométrie au XIX^e siècle, publié dans l'encyclopédie *The Cambridge History of Science*, J. L. Richards réfère à l'article de L. Daston, mais souligne : « But Cauchy's rigor was not the rigor of the physicalist geometers » [Richards 2003, p. 456].

« Nowhere is the transition from the “real” world to the mathematical one, from the useful and concrete to the useless and beautiful, more in evidence than in the emergence of non-Euclidean geometry in the early nineteenth century. [...] »

Because of geometry’s status as the bedrock of classical mathematics, it is its transformation that most completely captures the transition from the “natural” mathematics of the Enlightenment to the “otherworldly” mathematics of the early nineteenth century. » [Alexander 2010, p. 210]

Dans cette interprétation, János Bolyai est, pour lui, l’archétype du héros romantique incompris¹³⁸.

La création de la géométrie non euclidienne au XIX^e siècle est, on le sait, un évènement qui aura des conséquences importantes non seulement pour la géométrie, mais aussi pour la conception de la nature des mathématiques en général. Cependant, la vision d’une théorie achevée aussitôt que créée par un savant isolé, dès le début du XIX^e siècle, n’est pas celle retenue par la plupart des historiens. Dans le chapitre consacré à « Mathematical analysis and geometries, 1800-1860 », de son ouvrage *The Rainbow of Mathematics*, I. Grattan-Guinness souligne : « It [non-Euclidean geometry] would be ranked among the most famous achievements of the entire century », tout en ajoutant : « but up to 1860 the interest was rather slight » [1997, p. 400]. En effet, la publication vers 1830 des mémoires de Bolyai et de Lobatchevsky, dans des lieux périphériques, passe largement inaperçue : « Reactions to the new geometry of Bolyai and Lobachevsky [...] were indifferent or even hostile in their lifetimes. Gauss accepted their findings, but did little in public to defend their cause¹³⁹ », indique J. Gray [1994, p. 880]. Cela peut s’expliquer par le contexte d’alors : « by the start of the nineteenth century, the widespread view was that Euclidean geometry correctly describes the world, and that it is built up logically from axioms which themselves are incontrovertible truths. » [*Ibid.*, p. 879] Outre la question de la forme des publications de ces auteurs, J. Gray y ajoute celle des lacunes de leur contenu : « by the strictest canons, the work of Bolyai and Lobachevsky was flawed, for no proof of the consistency of their original assumption

138. Gauss est d’ailleurs jugé « ambivalent » car : « for him, as for his Enlightenment predecessors, the ultimate test of mathematics is its application to the physical world » [*Ibid.*, p. 230].

139. La complexité de la position de Gauss apparaît dans une lettre à Olbers de 1817 citée par J. Gray [1989, chap. 7]. Gauss y indique : « I come more and more to the view that the necessity of our geometry cannot be proved [...] one must not rank Geometry with Arithmetic, which is truly *a priori*, but with Mechanics ». Remarquons que cette conception de la géométrie, classée dans les mathématiques appliquées avec la mécanique (les mathématiques pures étant composées de l’arithmétique, de l’algèbre et de l’analyse) est aussi celle défendue par Bolzano dans son mémoire de 1817 sur le théorème des valeurs intermédiaires.

about parallel lines was given. The possibility remained that their theory was nothing more than some formulas in analysis, spuriously dressed up as geometry » [*Ibid.*, p. 881].

C'est tardivement, dans les années 1860, que les choses changent radicalement : « Matters changed decisively with the publication of Eugenio Beltrami's description of non-Euclidean geometry in 1868. He presented a description of Lobachevsky's non-Euclidean geometry in terms of the points inside a disc. » [*Ibid.*] L'interprétation par Beltrami de la géométrie non euclidienne dans le cadre de la géométrie différentielle d'une surface à courbure négative, puis d'un disque du plan euclidien, va en effet permettre d'établir le caractère indémontrable du postulat des parallèles¹⁴⁰. La temporalité de l'évolution de la géométrie non euclidienne au XIX^e siècle ne correspond donc pas à la présentation donnée par Alexander.

2.6. *Mathématiques appliquées*

L'un des critères le plus souvent associé à la présentation standard de la rupture entre le XVIII^e et le XIX^e siècle consiste à opposer les mathématiques du XVIII^e fondamentalement guidées et motivées par l'application de l'analyse à l'étude du monde physique aux mathématiques autonomes et développées pour elles-mêmes qui émergent au début du XIX^e siècle. Ce changement serait en particulier le fruit d'un mouvement de spécialisation et de professionnalisation conduisant à une séparation disciplinaire entre ces nouvelles mathématiques pures et les différentes branches des mathématiques appliquées (telles que la mécanique, l'astronomie, etc.).

Comme nous le constatons dans le § 1.3, la thèse de la rupture radicale et globale entre les deux siècles cohabite dans le même temps avec deux façons de concevoir le domaine des mathématiques et la place qu'y occupent les applications. Certains historiens se focalisent sur les seules mathématiques pures du premier XIX^e et se contentent d'en opposer les caractéristiques à celles du siècle précédent. D'autres tentent au contraire d'intégrer la question de l'application des mathématiques à leur présentation du tournant entre les deux périodes. Plus large, cette seconde perspective va de pair, chez ces historiens, avec la mise en exergue d'une autre manifestation de la rupture, la naissance de la physique mathématique, ainsi

140. Dans [Voelke à paraître], l'auteur montre que la notion d'espace non euclidien apparaît, avec celle d'espace euclidien, chez Beltrami : « Ce n'est donc pas dans le cadre de la géométrie non euclidienne proprement dite que la notion d'espace non euclidien apparaît, mais dans celui de la géométrie différentielle. En offrant une interprétation de la géométrie non euclidienne, la géométrie différentielle donne simultanément un contenu à la notion d'espace non euclidien. » Sur ces développements qui ont conduit à l'acceptation de la géométrie non euclidienne par la communauté mathématique dans le dernier tiers du XIX^e siècle, on peut consulter [Gray 1989 ; Voelke 2005].

que la mise au jour de dynamiques d'évolution et de reconfiguration plus complexes à la charnière des deux siècles. Cette voie cherchant à démêler les fils de mathématiques conçues comme plurielles a fait l'objet de nombreux approfondissements ces dernières décennies, dont il convient d'évaluer les répercussions sur ces différents critères d'opposition.

LE PROBLÈME DE LA SPÉCIALISATION

Nous avons déjà eu l'occasion de mentionner plusieurs travaux qui, par la mise en évidence de nouvelles branches et théories importantes de l'analyse pure (théorie des équations aux dérivées partielles, calcul des variations, notamment ¹⁴¹) faisant leur apparition dans le courant du second XVIII^e (§ 2.3), conduisaient à relativiser l'idée de mathématiques essentiellement tournées, au cours de cette période, vers l'étude du monde physique.

I. Grattan-Guinness interroge en outre, nous l'avons vu (§ 1.3), la pertinence de ce critère de mise en opposition pour le XIX^e siècle. Constatant en effet que le processus d'autonomisation des mathématiques pures vis-à-vis des mathématiques appliquées à l'étude du monde physique ne s'effectue que de façon progressive au cours du premier XIX^e, l'auteur défend la nécessité de replacer les différentes branches des mathématiques appliquées (mécanique, physique mathématique et ingénierie) au cœur de l'histoire des mathématiques de cette période. Cette idée, selon laquelle la séparation entre mathématiques pures et appliquées s'effectuerait sur le temps long du XIX^e et se traduirait ainsi par la persistance d'importantes composantes appliquées à l'intérieur des mathématiques des premières décennies, apparaît chez plusieurs auteurs. Elle questionne à la fois la temporalité du phénomène de spécialisation et la pertinence du critère de mise en opposition des mathématiques des deux siècles.

Ce problème a été récemment abordé dans le cadre d'un colloque international à Oberwolfach intitulé « From "Mixed" to "Applied" Mathematics : Tracing an important dimension of mathematics and its history », et dont le compte rendu présente l'objectif général en ces termes :

« For a long time, research in the history of mathematics has mostly focused on developments in pure mathematics. In recent years, however, some significant research has changed this situation. The conference brought together historians of mathematics actively involved in this reorientation, in order to take stock of what has been achieved, and to identify historical problems yet to be solved. » [Oberwolfach 2013, Introduction, p. 657]

141. Voir aussi [Gilain 2008], qui s'intéresse aux relations entre analyse et mécanique au XVIII^e siècle sur le problème de la résolution des systèmes différentiels linéaires.

Dans leur introduction, les trois organisateurs, M. Epple, T. H. Kjeldsen et R. Siegmund-Schulze insistent de prime abord sur l'une des premières difficultés posées par le sujet : « There is no, and there has never been, a once and for all fixed notion of “applied” mathematics. » [*Ibid.*] Tentant dès lors d'en préciser les conditions d'émergence, R. Siegmund-Schulze montre que si l'apparition du terme « mathématiques appliquées » intervient dès la seconde moitié du XVIII^e siècle en Allemagne, et un peu avant 1800 en France¹⁴², le processus d'institutionnalisation d'une discipline séparée des mathématiques pures n'aboutit quant à lui que beaucoup plus tardivement¹⁴³ :

« The institutionalization of “applied mathematics” as a separate sub-discipline of its own, with funding for journals and institutes [...] was reserved for a later period of “reemergence of applications” and the so-called second Industrial-technical revolution [...] around 1900. » [Siegmund-Schulze 2013, p. 664]

L'historien mentionne en particulier les écarts temporels existant de ce point de vue entre l'Allemagne, où la séparation s'effectue précocement, et la France, où elle intervient plus tard au XIX^e siècle¹⁴⁴. Il insiste d'ailleurs, exemple de Jacobi à l'appui – à la fois considéré comme un représentant de l'émergence des mathématiques pures en Allemagne, mais dont les travaux s'orientent vers les mathématiques appliquées à la fin de sa vie –, sur : « the dangers of a one-sided picture become obvious, which describes 19th century mathematics as a succession of “utilitarian” French followed by “pure” German mathematics » [*Ibid.*].

Dans le même compte rendu, J. Lützen souligne clairement la persistance d'une forte connexion entre recherches mathématiques et applications à l'École polytechnique au début du XIX^e siècle : « In the beginning of the century the French polytechnic tradition valued applied mathematics highly and the majority of mathematical researches were closely connected with applications. » [Lützen 2013, p. 687]

Ce constat confirme les travaux d'autres historiens, tels que B. Belhoste, pour lequel l'École polytechnique aurait fortement contribué à ce qu'il présente comme la consolidation d'une tradition française d'application de la science :

« a persisting interest in applications can hardly be explained by the mere existence of the École polytechnique. As it developed at the start of the

142. [Siegmund-Schulze 2013, p. 663-664].

143. Ce constat est également souligné dès l'introduction du compte rendu : « A more explicit distinction between “pure” and “applied” mathematics gradually came to the fore during the 19th century, while an institutional separation of “applied” and “pure” mathematical research in journals, university positions and, eventually, institutes was a matter of the 20th century. » [Oberwolfach 2013, Introduction, p. 658]

144. « The older bifurcation pure/mixed mathematics, was replaced in Germany and somewhat later in France [...] by pure/applied » [Siegmund-Schulze 2013, p. 664].

nineteenth century, mathematical activity was indeed inscribed in an applied science tradition which, as we said, dominated academic life even prior to the Revolution. The École polytechnique, however, played a decisive role in consolidating this tradition » [Belhoste 2001, p. 25].

J. Dhombres insiste de même sur la coexistence des deux types de mathématiques, pures et appliquées, dans l'ensemble des travaux produits par la communauté mathématique française des premières décennies du XIX^e siècle :

« La volonté explicite de mathématiser, c'est-à-dire de construire des théories mathématiques suscitées par des applications ou de déduire des applications d'une interprétation de théories déjà élaborées, est notable chez Monge et chez beaucoup de mathématiciens contemporains. Très rares d'ailleurs sont les mathématiciens du demi siècle concerné qui ne s'occupèrent que de mathématiques pures. La variété des intérêts scientifiques d'un Gauss, d'un Laplace, ou d'un Cauchy, est bien connue. Mais de même, un Carnot, un Monge, un Fourier ou un Poncelet multiplièrent les interventions d'applications des mathématiques. » [Dhombres 1986, p. 254-255]

Dans l'article qu'elle consacre à la tradition « physicaliste » dans la géométrie française du début du XIX^e siècle, L. Daston mentionne elle aussi la place très importante de la physique théorique et des mathématiques appliquées dans l'ensemble des travaux produits par les mathématiciens après 1800¹⁴⁵, voire même l'absence d'une vraie division disciplinaire, dans les premières décennies du XIX^e siècle, entre mathématiques appliquées et mathématiques pures : « it is interesting to note that no sharp distinction between the two disciplines then existed » [Daston 1986, p. 290]. Ainsi : « Of the five members of the Mathematics Section of the Académie des Sciences, only Cauchy devoted more than 15% of his total scientific output during the years 1830-1832 to pure mathematics » [*Ibid.*].

D'après ces différents auteurs, nous serions donc bien loin, dans les premières décennies du XIX^e, de mathématiques fondamentalement différentes de ce qu'elles étaient dans le courant du second XVIII^e siècle, et pour cause¹⁴⁶ : le processus de spécialisation souvent attaché au tournant des

145. « The research interests of the great majority of early 19th century mathematicians clustered around the intersection of theoretical physics and applied mathematics » [Daston 1986, p. 290].

146. Un très bel exemple de continuité en la matière nous est donné par M. Armatte [2004] à propos de la théorie des erreurs, « une branche des mathématiques appliquées dont les travaux se sont étalés sur une assez longue période (1750-1820) » [*Ibid.*, p. 141]. L'auteur montre notamment que la « synthèse dite de Laplace et Gauss qui intervient dans les premières années du XIX^{ème} prend la forme d'un tiercé "gagnant" associant la moyenne, la loi "normale" et les "moindres carrés", qui dominera la méthodologie des sciences d'observations » [*Ibid.*, p. 142] et constituera durablement, malgré les importantes améliorations apportées (par Poisson, Cauchy, Bravais, etc.), le noyau de la théorie mathématique des erreurs pour le XIX^e et les premières décennies du XX^e siècle [*Ibid.*, § 6].

deux périodes ne s'effectueraient de fait que de façon progressive au cours du siècle, notamment en France, où l'École polytechnique contribuerait au maintien d'une orientation très appliquée des recherches en mathématiques.

Il est intéressant de constater que l'historienne de la physique Elizabeth Garber parvient à une conclusion très similaire par le biais d'un angle d'étude différent, celui des relations entre les recherches dans le domaine de la physique et des mathématiques entre 1780 et 1830 :

« French mathematicians and experimentalists pursued their renewed disciplines as professions with the boundaries of those disciplines that were laid down in the eighteenth century. The transformations occurred within those boundaries and did not allow physicists to transcend them. » [Garber 1999, p. 135]

Malgré un renouveau tangible dans les deux domaines, ici considérés comme des « disciplines »¹⁴⁷, physique et mathématiques poursuivraient donc leur développement de façon autonome dans la stricte continuité des frontières héritées du siècle précédent. La première demeurerait essentiellement expérimentale et hermétique aux interactions avec le domaine des mathématiques, tandis que les mathématiques, tout aussi imperméables aux questionnements de la physique, seraient condamnées, de leur côté, à rester une méthode qui se nourrit des problèmes d'autres disciplines pour étendre son domaine d'application¹⁴⁸. E. Garber affirme par ailleurs : « None of the mathematicians or experimentalists of France separated their work from the needs of the state or the consideration of solving practical problems. » [*Ibid.*, p. 135] En somme, les mathématiques des trois premières décennies du XIX^e siècle ne se distingueraient donc pas, dans leurs objectifs et leurs méthodes, fondamentalement guidés par les applications, des mathématiques mixtes du second XVIII^e. Même la refondation conceptuelle dont l'analyse fait l'objet au même moment – et qui va souvent de concert, dans l'expression du schéma standard de rupture, avec l'idée de nouvelles mathématiques, autonomes et rigoureuses (voir § 2.3) – n'y change rien :

« In the same decades, the implicit assumptions at the foundations of the calculus were forced into the open. [...] The foundations were reworked and the first formal and logically defensible form for the calculus emerged from that work. In France at least, these changes were not accompanied by the redrawing of the boundaries between mathematics and physics. » [*Ibid.*, p. 24]

147. L'idée d'une physique constituée en tant que discipline ne va pas de soi pour le XVIII^e siècle : voir la note 149.

148. « a method that reached into other disciplines for its problems to expand its domain » [*Ibid.*, p. 132].

Ces différents historiens plaident, on le voit, en faveur d'un processus progressif de spécialisation et de reconfiguration du domaine des sciences mathématiques au XIX^e siècle dont la traduction effective répond à des temporalités différentes de celle généralement associée à la présentation standard de la rupture entre les deux périodes. Le problème, qui touche à la fois la question de l'évolution des relations entre mathématiques pures et appliquées et celle de leurs relations avec des champs de recherche connexes (tels que ceux de la physique ou de la mécanique), complexifie bien sûr d'autant celui de la contextualisation historique des termes que nous employons pour désigner les différents domaines en présence à cette époque. Outre les mathématiques appliquées, nous rencontrons également des difficultés de ce type à propos de la physique et de la physique mathématique – difficultés intimement liées entre elles dans la mesure où, rappelons-le, la naissance de la physique mathématique au début du XIX^e siècle va généralement de pair, selon la présentation standard, avec l'idée d'une physique essentiellement expérimentale soudainement mathématisée à partir de 1800¹⁴⁹.

Pour la physique mathématique, ces difficultés se manifestent, d'une part, au travers des nombreux flottements dont le terme paraît encore faire l'objet dans la littérature : il n'est pas rare en effet de le voir utilisé pour désigner (de façon contradictoire avec l'idée selon laquelle le nouveau domaine émergerait au début du XIX^e siècle) les sciences physico-mathématiques du XVIII^e siècle (ou certaines de leurs branches)¹⁵⁰ ou, au contraire, de le voir employé dans son sens moderne¹⁵¹. Elles se manifestent, d'autre part, dans les variations qui s'expriment parfois entre historiens à propos du statut du nouveau domaine, tantôt considéré comme une

149. Notons, au sujet de la physique, qu'aucun domaine disciplinaire constitué et portant ce nom n'existe en tant que tel au début du XIX^e siècle et, a fortiori, au XVIII^e siècle, au cours duquel le sujet n'est de fait que tardivement reconnu – il le sera notamment à l'occasion de la réforme de l'Académie des sciences du 23 avril 1785, qui crée une classe de « Physique générale » [Crosland 1992, p. 146-148 ; Crépel 2006].

150. J. L. Richards [2006, p. 703] évoque par exemple les propos de Buffon sur « mathematics and mathematical physics » dans le « Premier Discours » de son *Histoire naturelle* (1749) ; J. L. Greenberg [1986] intitule un article « Mathematical Physics in Eighteenth-Century France » ; B. Belhoste [2003, p. 288] mentionne une « physique mathématique, qui naît au XVIII^e siècle de la fusion des mathématiques mixtes (astronomie d'observation, optique géométrique, etc.) et de la mécanique céleste » ; M. Blay [2001, p. 115] présente la *Mécanique analytique* de Lagrange (1788) comme « le premier exemple totalement abouti de cet idéal déductif de la mathématisation et de la constitution corrélatrice d'une physique mathématique ».

151. I. Grattan-Guinness assume explicitement l'emploi du terme en ce sens : « The terms "mathematical analysis" and "mathematical physics" are used in their modern senses to refer to the classical theories. Thus the categories used [...] should need no special explanation » [1990a, p. 34].

nouvelle branche des mathématiques, ou assimilé à la physique théorique qui émerge à cette époque selon le point de vue disciplinaire adopté¹⁵².

Comme le relève en outre C. C. Gillispie, la mention du terme dans les écrits de l'époque soulève également son lot de difficultés. L'auteur s'étonne par exemple de l'existence, dès 1784-1785, d'un cours de Cousin affichant un sujet très proche de celui de la physique mathématique du XIX^e siècle¹⁵³, alors même que la présentation de la « Physique mathématique » par Delambre dans son rapport à l'Empereur de 1809 coïncide plutôt avec l'idée de physique expérimentale et de développements de nouveaux instruments de mesure qu'avec celle de physique mathématisée¹⁵⁴.

Malgré le rôle majeur, unanimement souligné par les historiens, de l'École polytechnique dans le développement rapide du mouvement de mathématisation du domaine de la physique au début du XIX^e siècle, l'examen de ses programmes d'enseignement donne également des indices plaidant en faveur d'une évolution plus tardive des relations entre physique et mathématiques. C. C. Gillispie mentionne ainsi le fait que l'ancienne division entre physique expérimentale et mathématiques du XVIII^e gouverne toujours le plan d'enseignement de l'École à son ouverture en 1794¹⁵⁵. Dans son ouvrage de synthèse sur l'histoire de l'institution, B. Belhoste souligne aussi ce paradoxe :

« Voilà qui amène à se demander quel genre de physique s'enseigne à l'École. [...] la physique enseignée est-elle mathématique ou expérimentale ? Comme on va voir, la réponse est, sans conteste, qu'à tous les niveaux du curriculum l'enseignement porte sur la physique expérimentale. Il reste à comprendre ce que ce choix signifie. En particulier, pourquoi l'hégémonie des mathématiques à l'École polytechnique ne se traduit-il pas dans l'enseignement des sciences physiques, alors même que la physique mathématique fait l'objet de nombreux travaux de la part de savants polytechniciens ? » [Belhoste 2003, p. 288]

152. E. Garber note qu'à l'inverse de l'historien des mathématiques I. Grattan-Guinness, qui considère la physique mathématique « as mathematics », l'historien de la physique J. Heilbron accepte quant à lui « the term “physique-mathématique” as physics, not mathematics » [Garber 1999, p. 101]. D. Aubin pointe clairement les enjeux historiques et historiographiques de ce problème : « I suggest that what we need to understand is not only the transition from mixed mathematics to applied mathematics, but rather to the dyad applied mathematics-theoretical physics. » [Aubin 2013, p. 699]

153. « as far back as the 1770s Cousin was giving courses at the Collège de France with the phrase “physique mathématique” in the title, and that in 1784-85 his subject was “Les progrès de l'analyse et en quoi ils peuvent servir aux progrès de la physique” » [Gillispie 2004, p. 682].

154. « What Delambre had in mind in writing “Physique mathématique” was quantitative data developed by means of exact instruments, such as Coulomb's torsion balance » [Gillispie 2004, p. 676].

155. « These distinctions still governed the design of the curriculum when the École Polytechnique opened its doors in 1794. “Physique générale” was a relatively trivial course treating the properties of bodies. “Physique particulière” was simply chemistry. Neither had anything to do with mathematics. » [Gillispie 2004, p. 676]

En dépit de ces difficultés, plusieurs études apportent malgré tout des résultats permettant de réexaminer la temporalité et les ressorts de la rupture associée à l'émergence de la physique mathématique. Nous les présenterons ici relativement à deux questions principales : les relations de la physique mathématique avec deux autres domaines de recherche, celui la mécanique, d'une part, et de la physique d'autre part.

MÉCANIQUE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Nous venons de passer en revue plusieurs études exprimant l'idée selon laquelle les mathématiques françaises du début du XIX^e constituent pour partie le prolongement de celles du XVIII^e siècle en raison du rôle majeur que continuent à y jouer les applications. Contradictoire avec l'idée de mise en opposition des caractéristiques des mathématiques des deux périodes, cette conception conduit également à s'interroger sur la rupture constituée par la naissance de la physique mathématique, dans la mesure où cette rupture paraît souvent synonyme, dans l'historiographie, de conquête d'un nouveau domaine d'application par les mathématiques : celui d'une physique considérée comme distincte de la mécanique au XVIII^e en raison de son approche essentiellement expérimentale et du peu de liens qu'elle entretient avec les mathématiques.

Tel est le cas de H. Bos, selon lequel la naissance de la physique mathématique, si elle marque bien un changement, s'inscrit cependant aussi dans un processus sur le temps long dont la principale rupture « occurred by the end of the seventeenth century » [Bos 1993, p. 167] avec la création du calcul différentiel et intégral et, par là même, du domaine de l'analyse mathématique :

« Analysis was developed further during the eighteenth century in interaction with mechanics, celestial mechanics and fluid mechanics. [...]

This development continued during the nineteenth century. Analysis as a mathematical subdiscipline broadened and deepened ; new parts of physics were mathematized by means of analysis, notably the theories of elasticity, heat, and electricity. The result was *classical mathematical physics* » [*Ibid.*, p. 169].

Les similarités entre le programme fondant le développement de l'analyse appliquée à la mécanique au XVIII^e siècle¹⁵⁶ et celui de la physique

156. « That development was inspired by the endeavor to understand such processes of change as the motion of bodies under the influence of forces, planetary motions, motion of fluids through channels, etc. In all these cases one knew (or assumed one knew [...]) the process in the small [...] and one wanted to know the complete process ; hence : differential equations, to be solved by analysis. » [*Ibid.*, p. 169]

mathématique au XIX^e siècle¹⁵⁷ montrent bien, selon l'historien, à quel point la percée (« break-through ») initiée à la fin du XVII^e siècle avec la naissance du calcul différentiel et intégral a pu constituer une étape essentielle à l'ensemble de ce processus. En d'autres termes, considérée sous l'angle du développement de l'analyse, la physique mathématique apparaît donc comme le prolongement de la mécanique du XVIII^e siècle.

I. Grattan-Guinness insiste de même dans ses travaux sur les rapports étroits liant le développement du nouveau domaine à celui des cinq différentes branches (mécanique des solides et des fluides, mécanique céleste, mécanique terrestre, mécanique des ingénieurs, mécanique moléculaire) héritées, selon sa propre classification (voir § 1.3), de la mécanique du XVIII^e siècle :

« In tandem with the development of mechanics in its five areas [...], mathematical physics grew out of mechanics in the early nineteenth century as mathematicization was introduced into heat theory, physical optics, and electricity and magnetism » [Grattan-Guinness 1994, p. 1141].

Conçue comme une extension, la physique mathématique se construit donc à partir de ce legs en même temps qu'elle englobe les nombreuses avancées dont les cinq branches de la mécanique continuent de faire l'objet au début du XIX^e siècle – au point d'ailleurs d'en former encore la plus importante composante au terme des trois premières décennies¹⁵⁸. Cette coexistence de neuf et d'ancien se traduit factuellement par « many connections between the traditional and new areas, not merely on physical grounds but also because of the versatility of application of the mathematics » [Grattan-Guinness 1981, p. 351]. Elle implique donc de nombreux éléments de continuités entre le développement de la physique mathématique du XIX^e et celui de la mécanique du XVIII^e siècle, par exemple en terme de méthodes de mathématisation :

« Some of the mathematical methods and techniques were new, but many had been tried and tested in mechanics, which itself continued to develop in all its parts and traditions [...] and to interact with these new fields. » [Grattan-Guinness 1997, p. 437]

157. « The paradigmatic program of classical mathematical physics was : search for *natural laws*, formulated as *mathematical formulas* which express functional relations between the physical quantities involved. Apply these laws in the description of processes of change in nature, primarily by deriving the differential equations which describe the change locally. Then use of analysis for solving the resulting differential equations, thereby arriving at the descriptions of the global processes of change. » [*Ibid.*]

158. « Mechanics, already impressive in range by 1800, became the still broader discipline of mathematical physics by 1830 » [Grattan-Guinness 1990a, p. 1292].

Trois principaux styles de mathématisation seraient notamment utilisés, les deux premiers constituant un héritage du siècle précédent, le troisième correspondant à la rupture introduite par Cauchy en analyse :

« Around 1800 the algebraic style was dominant : it was inspired by Lagrange, and exhibited also by Ampère, L. Carnot, Laplace and Poisson. It was challenged by the geometrical style (of which Euler was the chief 18th-century exponent), which was maintained by Fourier, Hachette and Monge and continued later by Dupin, Fresnel, Lamé and Navier. Then in the 1820s the analytical style used by Cauchy gained converts among the new generation (Duhamel, Liouville and Sturm) » [Grattan-Guinness 1981, p. 360].

Il serait vain d'espérer dresser ici la liste des nombreuses continuités et ruptures entre les diverses branches de la mécanique du XVIII^e siècle et de la physique mathématique du XIX^e, telles qu'elles apparaissent dans les *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840* d'I. Grattan-Guinness [1990a]. Un examen détaillé de l'imposante table des matières [*Ibid.*, p. 7-30], ainsi que l'historien y invite lui-même le lecteur, suffira cependant à prendre conscience de la complexité de l'écheveau ainsi obtenu.

Si cet ouvrage constitue toujours l'étude de référence pour l'histoire des mathématiques appliquées dans le courant du premier XIX^e, il faut aussi noter le « sérieux problème historiographique »¹⁵⁹ auquel l'auteur explique s'être trouvé confronté en raison du caractère encore fortement lacunaire de l'histoire des mathématiques au XVIII^e siècle en général, et de la mécanique en particulier, notamment pour trois de ses branches : la mécanique analytique, la mécanique des ingénieurs et l'histoire de l'enseignement de la mécanique¹⁶⁰. Il explique ainsi :

« The situation is somewhat alleviated by a fact [...] : that various publications of around 1800 summed up “the state of the art” for many aspects of the 18th-century work and were a major influence on the understanding of the 19th-century figures, even if that understanding can *now* be exposed as incomplete or imbalanced. But I am not at all content with my treatment of the 18th-century achievements, which hopefully will receive one day the attention that they deserve. » [Grattan-Guinness 1990a, p. 65-66]

Certaines de ces lacunes ont pu depuis être comblées grâce à un important renouveau de l'historiographie pour cette période. De nombreuses études ont ainsi permis de réévaluer le rôle de Daniel Bernoulli, Jean Bernoulli, Fontaine, Maclaurin, Clairaut, d'Alembert, Boscovich et d'autres, sur le processus de construction de la mécanique rationnelle et analytique au XVIII^e siècle, et de préciser leurs influences respectives sur les travaux de Laplace et de Lagrange, que ce soit du point de vue de la formalisation des

159. « serious historiographical problem » [*Ibid.*, p. 65].

160. [Grattan-Guinness 1990a, p. 65-66 et 270-271 ; 1990b, p. 330 ; 1994, p. 970].

principes et des lois mécaniques (principe de d'Alembert, principes newtoniens, principe de moindre action, principe des travaux virtuels, etc.), des méthodes de mathématisation ou du développement d'outils mathématiques pour la résolution des équations obtenues (tels que le calcul des variations ou le calcul aux dérivées partielles)¹⁶¹. Parmi les questions les plus étudiées pour le premier XIX^e figure notamment la réception de la *Mécanique analytique* de Lagrange (1^{re} éd., 1788 ; 2^{de} éd., 1811-1815)¹⁶². D'autres travaux, dédiés à l'enseignement¹⁶³ de la mécanique ou à ses liens avec l'ingénierie et le domaine de la technique¹⁶⁴, fournissent également des matériaux laissant espérer de nouvelles mises en perspective du développement des mathématiques appliquées dans le courant du premier XIX^e siècle.

PHYSIQUE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Le critère de rupture associé à la naissance de la physique mathématique repose sur l'idée de mathématisation d'un ensemble de phénomènes restés hors de portée des mathématiques, et notamment de l'analyse mathématique, jusqu'au début du XIX^e siècle. Cet ensemble de phéno-

161. Les travaux d'éditions critiques d'œuvres complètes en cours pour Euler, les Bernoulli et plus récemment d'Alembert, ont contribué à ce renouveau : voir [Euler 1980, 1986] (ainsi que [Truesdell 1954, 1955, 1960, 1968]), [Bernoulli 2002] et [d'Alembert OC 2002, 2006, 2007, 2008, 2009, 2011]. Pour Clairaut, le travail effectué par O. Courcelle [clairaut.com] fournit également des matériaux très précieux. Nous renvoyons en outre aux travaux de : M. Blay [1992, 2001, 2002] pour ce qui concerne le processus de construction de la mécanique rationnelle dans la première moitié du XVIII^e siècle ; J. L. Greenberg [1995] et I. Passeron [1994] sur les contributions de Fontaine, Clairaut et d'Alembert dans le domaine de l'hydrostatique ; G. Grimberg [1998], O. Darrigol [2005], L. Ferreiro [2007], A. Guilbaud [2007] et J. S. Calero [2008] dans le domaine de l'hydrodynamique ; S. Demidov [1982, 1989], S. Engelsmann [1984], G. Jouve [2007], A. Guilbaud et G. Jouve [2010] pour ce qui concerne la théorie des équations aux dérivées partielles ; C. Gilain [2008] sur les systèmes différentiels linéaires, ou C. Fraser [1997] et M. Panza [2003] à propos de l'influence d'Euler sur les travaux de Lagrange en mécanique analytique. Sur la *Mécanique céleste* de Laplace (5 vol., 1799-1825) et ses liens avec le développement de la mécanique rationnelle et analytique au XVIII^e siècle, voir, notamment, [Grattan-Guinness 1990a, p. 312-330 ; Gillispie 1997 ; Hahn 2004, 2013].

162. Plusieurs historiens montrent que les méthodes et travaux de Lagrange sur le calcul des variations et son approche de la mécanique ne connaîtront un regain d'intérêt que plusieurs décennies plus tard : voir [Grattan-Guinness 1990a, p. 325 ; Dahan Dalmedico 1992, p. 60 ; Fraser 1994b, p. 978]. Sur le caractère axiomatique du principe des vitesses virtuelles lagrangien, et les discussions dont il fait l'objet dans la première moitié du XIX^e siècle, voir [Grattan-Guinness 1990a, p. 302-308 ; Pulte 1998, 2000, 2005].

163. Nous renvoyons sur ce sujet aux travaux cités dans le § 2.2.

164. Sur la question de la mécanique des ingénieurs, de ses relations avec les mathématiques et le champ de la technique, de ses acteurs, ou de son inscription économique, administrative et institutionnelle, voir par exemple [Picon 1989, 1992, 1994 ; Belhoste *et al.* 1990 ; Vérin 1993 ; Alder 1997 ; Ferreiro 2007 ; Graber 2009 ; Chatzis 2010 ; Szulman 2011].

mènes, et les études dont ils font l'objet au XVIII^e, se voient souvent associés à un domaine, la physique, présenté comme distinct de la mécanique en raison, précisément, du caractère essentiellement expérimental et non mathématique de ses méthodes¹⁶⁵. La rupture repose, ce faisant, sur l'idée d'une transformation simultanée de ce domaine et de ses relations avec les mathématiques autour de la borne 1800.

Différentes études présentent des résultats conduisant à discuter ce schéma supposant la synchronisation de plusieurs types de changements, en physique et en mathématiques. Deux questions semblent particulièrement avoir été explorées de ce point de vue : celle de l'évolution des techniques expérimentales et celle des relations entre, d'une part, les méthodes de mathématisation de la physique mathématique et, d'autre part, les cadres physiques sur lesquelles ces méthodes s'appuient.

L'historien John L. Heilbron considère que l'éclosion de la physique mathématique serait le fruit de deux aspects essentiels, les débuts de l'expérimentation de précision, et l'influence décisive du modèle newtonien sur le programme de l'école de physique laplacienne à partir de la toute fin du XVIII^e siècle :

« For most of the 18th century [...] the fit between calculation and observation that made the reputation of the gravitationnal theory could not be duplicated in any branch of experimental physics. Beginning around 1770, the situation changed rapidly, as electricity, magnetism, and heat began to yield to the sort of analysis that had ordered the motions of the planets [...]. These achievements inspired and exemplified the program described by Laplace in 1796 [...]. This program had become plausible by the 1790s owing to an increasingly intrumentalist approach to physical theory » [Heilbron 1993, p. 5-6].

Les changements incarnés par la naissance de la physique mathématique reposeraient ainsi sur une autre rupture, nettement décalée en amont de la borne 1800, et marquant la naissance d'un esprit de quantification (« quantifying spirit ») dans le domaine expérimental¹⁶⁶.

Plusieurs autres historiens de la physique insistent également sur l'importance de ce facteur¹⁶⁷. Tel est le cas d'E. Garber, qui situe plutôt

165. Cette distinction entre physique et mécanique fait souvent écho, dans l'historiographie concernée, à la division opérée par d'Alembert dans le « Discours préliminaire » de l'*Encyclopédie* (t. I, 1751) entre la « physique générale » (ou « physique générale et expérimentale ») et les « sciences physico-mathématiques » comme la mécanique. Certaines études montrent cependant que les frontières entre les deux domaines ne sont pas aussi nettes si l'on examine de plus près leur traitement dans le corps même de l'*Encyclopédie* : voir [Crépel 2006 ; Firode 2006].

166. Voir aussi [Heilbron 1990, p. 1-23 ; Frängsmyr *et al.* 1990].

167. T. L. Hankins [1985, p. 50] et C. Licoppe [1996, p. 243-317] signalent aussi l'évolution qui s'opère en matière de techniques expérimentales à partir des années 1760-1770, mais sans établir de lien direct avec la question de l'éclosion de la physique mathématique.

l'évolution dans le courant des années 1780 : « In the 1780s physical experiments became quantitative and the results of these experiments expressed algebraically. [...] This new source, experimental physics, might possibly open up untold opportunities for mathematics and mathematicians. » [Garber 1999, p. 102] L'historien de la physique T. S. Feldman souligne de même¹⁶⁸ :

« Around 1770 natural philosophers began to work out precise experimental techniques and to apply them systematically to the collection of quantitative data. The combination of this “exact experimental physics” with increasingly sophisticated mathematical theories created, around the turn of the century, a recognizably modern, mathematical physics. » [Feldman 1985, p. 127]

C. C. Gillispie voit quant à lui une condition nécessaire (quoique non suffisante) à l'éclosion de la physique mathématique : « Experimental and observational technique had developed to the point that data could be obtained with sufficient precision to serve in the production and verification of formulas. » [Gillispie 2004, p. 677]

L'influence de ce même facteur est en revanche beaucoup plus rarement relevée par les historiens des mathématiques. Ces derniers se sont, à l'inverse, majoritairement penchés sur un autre problème, celui des approches physiques sur lesquels reposent les méthodes de mathématisation de la nouvelle physique mathématique.

Comme le rappelle T. Archibald, « two basic mathematical approaches to physical questions are in evidence at the beginning of the nineteenth century » [Archibald 2003, p. 197]. La première correspond au modèle mécanique moléculaire d'action à distance porté par Laplace et son école à partir de la toute fin du XVIII^e siècle, la seconde, souvent qualifiée de phénoménologique, à la nouvelle physique inaugurée par Fourier, et fondée sur l'idée de propagation et de milieu continu. La thèse émise par Robert Fox [1974], selon laquelle la première approche, rapidement en concurrence avec la seconde, lui céderait progressivement sa place dans le courant des années 1810, paraît avoir influencé la façon dont l'histoire des mathématiques présente la naissance de la physique mathématique, et conduit à un schéma historique qu'Amy Dahan Dalmedico résume synthétiquement en ces termes (pour mieux le remettre en question, nous y reviendrons) :

« Cette mathématisation, engagée par Laplace, s'est accompagnée d'une contestation du modèle laplacien, au moins dans sa vocation à se présenter comme le modèle moléculaire universel d'explication des phénomènes, et de l'émergence d'une nouvelle physique, en rupture avec le réductionnisme mécaniste, dont la figure emblématique est sans aucun doute Fourier. » [Dahan Dalmedico 1992, p. 4]

168. Voir aussi [Feldman 1983, 2003].

Ce schéma privilégiant la rupture opérée par Fourier à celle du programme laplacien, se retrouve par exemple chez I. Grattan-Guinness, selon lequel :

« The first major innovation was Fourier's work on heat diffusion. Initially presented to the Institut de France in 1807, it was the first substantial mathematical treatment of a physical phenomenon which did not fall within Newton's laws of mechanics. » [Grattan-Guinness 1981, p. 350]

Initiée par cette rupture, la naissance de la physique mathématique répondrait dès lors à un processus corrélativement lié au déclin du programme de mathématisation proposé par Laplace :

« The decline of the programme [...] *correlates positively* with the broadening of mechanics and Laplacian physics into mathematical physics [...], although one cannot conclude that the new creators *deliberately* went out of their way to create non-Laplacian theories » [Grattan-Guinness 1990a, p. 1289].

Le même schéma apparaît également chez C. C. Gillispie [2004, p. 677], ou dans l'ouvrage que J. Dhombres et J.-B. Robert [1998, p. 21] consacrent à Fourier, « créateur de la physique-mathématique ».

Dans son étude dédiée à Cauchy et la scène mathématique française des premières décennies du XIX^e siècle, ainsi que dans le dossier qu'elle dirige sur le sujet de la mathématisation entre 1780 et 1830 dans la *Revue d'histoire des sciences*, A. Dahan Dalmedico [1989, 1992] parvient cependant à la mise au jour de nouvelles dynamiques grâce à une prise en compte accrue des liens entre mathématiques et physique. Ces travaux questionnent en premier lieu la logique du schéma selon lequel le déclin du cadre physique porté par l'école laplacienne formaliserait ainsi une rupture entre un premier modèle d'inspiration mécanique et newtonienne, et le modèle physique phénoménologique inauguré par la mathématisation du phénomène de propagation de la chaleur par Fourier. Sans remettre en question les liens qui unissent l'école laplacienne à la tradition newtonienne du siècle précédent, ou la rupture induite par Fourier¹⁶⁹, A. Dahan Dalmedico montre que les travaux de Cauchy se situent plutôt « dans un entre-deux » : le mathématicien et physicomathématicien français travaille de fait historiquement dans le second cadre physique avant de rallier le premier. Étudiée par C. Blondel [1989], la contribution d'Ampère en électrodynamique, qui conjugue les deux aspects, constitue aussi un exemple des

169. Cette rupture repose notamment selon elle sur l'idée que « l'unité de la nature et des lois de l'univers ne peut plus résider dans les seuls principes de la physique newtonienne », qu'« il faut éviter les hypothèses sur la microstructure de la matière » et, par conséquent, que l'objectif essentiel de Fourier est à présent « d'obtenir les équations aux dérivées partielles de propagation [...] conçues comme des équations phénoménologiques » [Dahan Dalmedico 1992, p. 144].

relations complexes entretenues entre les procédés de mathématisation mis en œuvre et les deux approches physiques à disposition : celui d'un savant contraint, en raison des difficultés mathématiques rencontrées via l'approche phénoménologique, de « développer mathématiquement une théorie physique » (l'électrodynamique newtonienne fondée sur l'action à distance) « dont il récuse les fondements » [Blondel 1989, p. 136].

A. Dahan Dalmedico met aussi en évidence la prégnance, au XIX^e siècle, de deux « styles de mathématisation » distincts hérités du processus de construction théorique de l'hydrodynamique au XVIII^e : celui géométrique d'Euler, et celui analytique de Lagrange¹⁷⁰. Ces deux styles, à l'origine selon elle d'un clivage épistémologique durable en physique mathématique, conjugués avec les deux approches physiques en présence, laplacienne et phénoménologique, la conduisent ainsi à un écheveau articulé autour de plusieurs fils unissant les pratiques des mathématiques mixtes du second XVIII^e à celles de la physique mathématique du premier XIX^e siècle :

« Un même fil (méthode physico-géométrique, hypothèses d'idéalisation mathématique etc.) unit Euler, Fourier, et le “premier” Cauchy, un autre (appel aux actions moléculaires) relie Laplace, Navier, Poisson et le “deuxième” Cauchy. Mais un troisième (l'utilisation des méthodes variationnelles) joint Lagrange, Navier et va jusqu'à Green. Et on pourrait mettre en évidence un quatrième qui irait de Lagrange à Fourier, et se poursuivrait jusqu'à Mach (remplacer la notion de cause par celle de fonction) etc. » [1992, p. 428]

Les continuités entre les deux périodes mobilisent donc à la fois les approches mathématiques et les cadres de représentation physique sur lesquels ces approches s'appuient. Elles rappellent aussi, au passage, la nécessité de prendre en compte l'héritage mécanique du XVIII^e pour comprendre certains enjeux du développement de la physique mathématique au XIX^e siècle.

Ces différents exemples, centrés sur la question de l'application des mathématiques et de leurs relations avec les domaines de la mécanique et de la physique au cours de la période 1750-1850, conduisent finalement à la mise au jour de dynamiques plus complexes que le schéma de présentation standard de rupture entre les deux siècles le laisse entendre. Certaines études remettent en cause la temporalité associée, selon ce schéma, au processus de spécialisation et d'autonomisation des mathématiques pures vis-à-vis des mathématiques appliquées au XIX^e siècle, battant ainsi en brèche l'idée de mathématiques fondamentalement différentes, dans les premières décennies du XIX^e, des mathématiques gouvernées par les appli-

170. Voir aussi [Dahan Dalmedico 1989 ; Darrigol 2005]. I. Grattan-Guinness, nous l'avons vu, partage également ce point de vue : voir [1981 ; 1997, p. 345-346].

cations du XVIII^e. D'autres résultats soulignent les nombreuses continuités liant le développement de la physique mathématique avec celui de la mécanique au XVIII^e siècle, le rôle joué par la rupture précoce en matière de techniques expérimentales, ou encore la dialectique complexe, en terme de continu et discontinu, posée par le problème des méthodes de mathématisation et de leur évolution à la charnière des deux siècles.

2.7. Sur la rigueur

Comme on l'a vu au § 1, le thème de la rigueur joue un rôle essentiel parmi les arguments en faveur du modèle standard d'une rupture radicale en mathématiques entre le XVIII^e et le XIX^e siècle. Dans sa longue « Introduction » à la réédition de la première partie du cours d'Analyse de Cauchy à l'École polytechnique, Umberto Bottazzini [1992] rappelle la force de la thèse selon laquelle la rigueur advient en analyse au début du XIX^e siècle :

« Cauchy's *Cours d'analyse* is commonly considered today a milestone in the history of mathematical analysis. It is the recognized source of a modern concept of rigour as opposed to the looseness of eighteenth-century mathematicians towards the foundations of their science. [...]

This historical interpretation has its natural background in the traditional picture, which is favoured by many historians and mathematicians, that eighteenth-century mathematics was poor both in concepts and methods. » [Bottazzini 1992, p. XI]

Il souligne que la source de cette thèse se situe chez les mathématiciens de la fin du XIX^e siècle :

« Such an image was created by mathematicians during the last decades of the nineteenth century when the development towards an increasing, arithmetical, rigour in analysis took place. The effort of rebuilding mathematical analysis on the sound basis of the arithmetic of natural numbers led to a critical review of the whole body of results provided by the mathematicians of the past centuries. The new standards of rigour became the standards of judgment for measuring both correctness and acceptability of those results. All that can perhaps be significant for working mathematicians who are not interested in history, but it is historically questionable, for it reduces history to a search for forerunners of the present. » [*Ibid.*, p. XI]

Au contraire d'une historiographie présentant la différence entre le XVIII^e et le XIX^e siècle en termes de passage de la non-rigueur à la rigueur, Bottazzini souligne la nécessité de prendre en compte l'historicité de cette notion de rigueur¹⁷¹ :

171. Voir aussi, sur ce même thème, [Bottazzini 2001, p. 34-35].

« The point is that mathematical rigour is in itself a historical concept and therefore in process. Eighteenth-century mathematics claimed to be rigorous and actually they were rigorous according to the standards of their time. The same could be said for Cauchy, Abel and their contemporaries as well as for Weierstrass, Dedekind and so forth. [...] Therefore, the interesting historical question is not to measure whether and how much the mathematicians of the past were “rigorous” according to today’s standards, but to investigate how and why did the concept of rigour change and new standards arise. » [*Ibid.*, p. XV-XVI]

Dans la période considérée ici, il est frappant de voir que les accusations de manque de rigueur se croisent, montrant le caractère relatif de cette notion. Cela est particulièrement souligné par J. Dhombres et J.-B. Robert dans leur biographie de Fourier :

« N'est-il pas savoureux de vérifier que le mathématicien Fourier auquel on reproche dès 1807 une rigueur insuffisante – et la mesure de cette rigueur est pourtant à ce moment-là l'ancienne mesure de l'analyse algébrique d'Euler et Lagrange – soit précisément celui qui ait permis de tester la nouvelle rigueur, celle apportée par Cauchy. La tester pour la trouver insuffisante¹⁷² ! Comment ne pas voir que le concept de rigueur n'a pas la clarté et l'utilité que trop lui octroient pour raconter l'histoire des mathématiques du XIX^e siècle, et du coup édulcorer la présence de la pensée de Fourier. Non que l'on ne puisse définir, après coup, des niveaux de rigueur, mais puisque le but est de les hiérarchiser – rigueur de Cauchy, rigueur de Dirichlet, rigueur de Weierstrass, etc. – il faut penser en terme de construction, et voir les mathématiciens du XIX^e siècle comme des architectes : ils bâtissent et rebâtissent l'analyse [...]. Et leurs différentes rigueurs sont le fruit de cette construction, non l'enjeu. » [Dhombres & Robert 1998, p. 657]

Ainsi, est mis en évidence par ces historiens le danger d'une conception anhistorique de la rigueur, alors que le vrai problème est de déterminer à chaque étape les avancées effectuées sur ce plan tout en en précisant les limites. Cette démarche permet, en particulier, de relativiser la tendance des acteurs à vouloir marquer une rupture avec leurs prédécesseurs en utilisant cet argument. On a vu au § 2.4 qu'il en était ainsi de Gauss au sujet du théorème fondamental de l'algèbre. C'est aussi le cas de Cauchy qui, dans l'introduction de la première partie de son cours d'analyse de l'École polytechnique, en 1821, affirme¹⁷³ : « Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne

172. Les auteurs font sans doute allusion à une remarque figurant dans un mémoire d'Abel de 1826, où ce dernier utilise un développement en série trigonométrique de Fourier pour faire voir qu'un théorème énoncé par Cauchy sur les séries de fonctions continues n'est pas général.

173. *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. 1^{re} Partie – Analyse algébrique*, 1821, p. ij.

jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. » Déclaration célèbre, clairement dirigée contre les méthodes de Lagrange lequel, dans l'introduction de son propre cours d'analyse de l'École polytechnique, se démarquait de ses prédécesseurs avec le même type d'argument¹⁷⁴ : « L'objet de cet Ouvrage est de donner la théorie des fonctions [...] ; de résoudre par cette théorie les principaux problèmes d'analyse, de géométrie et de mécanique, qu'on fait dépendre du calcul différentiel ; et de donner par là, à la solution de ces problèmes, toute la rigueur des démonstrations des Anciens. »

Si l'importance de l'apport de Cauchy sur ce plan est généralement reconnu, le degré de rigueur de ses travaux est, depuis longtemps, un objet de débats voire de controverses entre historiens. J. Lützen présente une position équilibrée, en distinguant deux niveaux du travail de Cauchy :

« it is the entire architecture of Cauchy's calculus rather than its separate elements that makes it so different from its predecessors. [...] »

Yet, even when read in context it is difficult to rescue Cauchy completely. There remains a certain indeterminateness in several of his definitions and certain problems in some of his central proofs that were only resolved by the subsequent development of his ideas » [Lützen 2003a, p. 161].

U. Bottazzini [1992] et G. Schubring [2005, chap. VI] exposent plusieurs de ces discussions entre historiens, qui portent sur la nature exacte de certains concepts ou théorèmes du cours d'analyse de Cauchy à l'École polytechnique (notions de limite, d'infiniment petit, de continuité des fonctions, théorème sur la somme d'une série de fonctions continues, démonstration de l'existence de l'intégrale définie, etc.). G. Schubring insiste particulièrement sur les influences dont a pu bénéficier Cauchy, provenant de ses prédécesseurs et de ses contemporains, pour la construction de son cours à l'École polytechnique, cours dont, par ailleurs, plusieurs éléments seront précisés, complétés voire corrigés, notamment par les mathématiciens allemands (Dirichlet, Seidel, Weierstrass, etc.)¹⁷⁵.

* *
*

Nous avons mis en évidence, dans le § 1, les caractéristiques de la présentation standard de l'évolution des mathématiques entre le XVIII^e et le XIX^e siècle, les divers critères utilisés pour manifester l'existence d'une rupture radicale et globale entre les deux siècles, et les résultats contradictoires auxquels ils peuvent conduire. Le § 2 était ensuite consacré à un réexamen, à la lumière de recherches récentes, de la pertinence de ces

174. *Théorie des fonctions analytiques*, 2^e éd., 1813, p. 6.

175. Voir, notamment, [Schubring 2005, chap. VII ; Lützen 2003a].

critères, tant du point de vue de la question du statut des mathématiciens que du contenu des diverses sciences mathématiques, pures ou appliquées. Si, dans chaque cas, nous avons effectivement pu constater l'existence de discontinuités dans cette période, la présence de continuités significatives est cependant aussi apparue de façon tout aussi manifeste. L'analyse plus précise de chaque rupture (sa situation chronologique, sa nature exacte, son ampleur et ses limites), conjuguée à la mise en exergue des éléments de continuités entre les deux périodes, montre par ailleurs à quel point il paraît difficile de considérer que toutes ces ruptures partielles soient synchrones et tellement articulées entre elles que l'on puisse les amalgamer en une rupture globale sur un temps court autour de 1800.

Pris séparément, chacun des éléments de continuité dégagés ici ne suffirait sans doute pas à remettre en cause la présentation standard, mais si l'on prend en compte leur ensemble, on est nécessairement conduits à s'interroger sur la pertinence de cette présentation. Il n'est pas rare cependant, que des auteurs qui parviennent, dans le cadre de recherches particulières, à des résultats allant significativement à l'encontre du schéma standard, réaffirment ce même schéma, sans discussion, dans le cadre de présentations historiques plus générales (livres de synthèses, encyclopédies, etc.). En réalité, il semble bien que la dichotomie XVIII^e-XIX^e siècle fonctionne souvent comme un véritable postulat auquel on adhère implicitement, même au prix de certaines contradictions. L'une des raisons de cette situation tient sans doute au déficit traditionnel d'études sur le XVIII^e siècle¹⁷⁶, auquel s'ajoute le cloisonnement des domaines de recherches – le développement récent des recherches sur le XVIII^e siècle, en liaison avec l'élargissement des problématiques en histoire des mathématiques, a cependant permis une certaine évolution.

Pouvoir évaluer la présentation standard dans sa globalité exigeait de mettre en place une méthodologie adaptée. Elle est ici fondée sur l'élargissement des échelles considérées : allongement de la temporalité grâce au choix de la fourchette 1750-1850 comme période d'étude ; élargissement géographique en considérant non seulement la France, mais aussi l'Allemagne et la Grande-Bretagne ; enfin, extension des domaines scientifiques en prenant en compte à la fois les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. Cet élargissement fait mieux apparaître, par exemple, la place singulière qu'occupent les mathématiques en France dès le milieu du XVIII^e siècle en jouant un rôle essentiel tout autant dans la recherche que dans la sélection et la formation des élites civiles et militaires. Il permet de mettre en évidence la part significative des travaux de mathématiques

176. C. Boyer écrivait, avec une certaine pointe d'humour : « The eighteenth century had the misfortune to come after the seventeenth and before the nineteenth. » [Boyer 1968/1989, p. 523]

pures dans le second XVIII^e siècle en même temps que le poids toujours important des mathématiques appliquées dans le premier XIX^e, ou encore le fait que la rupture dans les mathématiques britanniques entre les deux siècles puisse être le résultat d'un phénomène de continuité entre la France et la Grande-Bretagne.

Aucune recherche d'exhaustivité n'était, bien sûr, envisageable compte tenu de l'ampleur des domaines en jeu et nous avons dû laisser de côté plusieurs sujets¹⁷⁷. Cependant, le nombre et la variété des éléments rassemblés, et considérés suivant des échelles chronologiques, géographiques et thématiques élargies, suffisent, nous semble-t-il, à dessiner une vision de cette période substantiellement différente de la présentation standard d'une rupture générale sur tous les plans (scientifiques, épistémologiques et sociaux), concentrée autour de 1800, et marquant l'entrée dans l'ère de la « modernité » mathématique. Il ne s'agit pas, pour nous, de proposer de substituer à la conception d'une rupture radicale entre les deux siècles celle d'une continuité générale, ni de présenter une construction globale alternative. Il nous semble qu'à ce stade l'important est de multiplier les études sur les continuités, les ruptures et leurs interactions pour tenter de s'approcher au plus près de la réalité historique complexe de cette période.

Les recherches nouvelles présentées dans les articles de la partie II suivante, très diverses dans leurs objets, leurs méthodes ou leurs conclusions, sont des contributions à ce travail de réévaluation et au débat historiographique auquel ce livre engage.

177. Il faut, en particulier, souligner l'intérêt des recherches qui se sont développées dans la dernière période sur les journaux scientifiques et, notamment, mathématiques, prenant en compte un ensemble élargi d'objets. Cela a conduit à l'ouverture de questions nouvelles, par exemple, sur les relations du phénomène de spécialisation des journaux avec la professionnalisation des savants, d'une part, et avec l'encyclopédisme, d'autre part. Voir sur ces sujets [Gispert 2001 ; Bret & Chappey 2012 ; Peiffer *et al.* 2013 ; Gérini & Verdier 2014].

BIBLIOGRAPHIE¹⁷⁸

- [Alder 1997] Ken Alder, *Engineering the Revolution. Arms and Enlightenment in France, 1763-1815*, Chicago & London : The University of Chicago Press, 1997.
- [d'Alembert OC 2002] Jean le Rond d'Alembert, *Œuvres complètes, Premiers textes de mécanique céleste (1747-1749)*, série I, vol. 6, M. Chapront-Touzé (éd.), Paris : CNRS Éditions, 2002.
- [d'Alembert OC 2006] J. le R. d'Alembert, *Œuvres complètes, Précession et nutation (1749-1752)*, série I, vol. 7, M. Chapront-Touzé et J. Souchay (éd.), Paris : CNRS Éditions, 2006.
- [d'Alembert OC 2007] J. le R. d'Alembert, *Œuvres complètes, Textes de mathématiques pures (1745-1752)*, série I, vol. 4a, C. Gilain (éd.) avec la collaboration de S. Petrova et L. Koelblen, Paris : CNRS Éditions, 2007.
- [d'Alembert OC 2008] J. le R. d'Alembert, *Œuvres complètes, Opuscules mathématiques, tome I (1761)*, série III, vol. 1, P. Crépel, A. Guilbaud et G. Jouve (dir.), Paris : CNRS Éditions, 2008.
- [d'Alembert OC 2009] J. le R. d'Alembert, *Œuvres complètes, Inventaire analytique de la correspondance 1741-1783*, série V, vol. 1, I. Passeron (éd.), avec la collaboration de A.-M. Chouillet et J.-D. Candaux, Paris : CNRS Éditions, 2009.
- [d'Alembert OC 2011] J. le R. d'Alembert, *Œuvres complètes, Opuscules mathématiques, tome III (1764)*, série III, vol. 3, F. Ferlin (éd.), avec la collaboration de A. Mayrargue, Paris : CNRS Éditions, 2011.
- [Alexander 2006a] Amir R. Alexander, « Introduction », dossier Focus : Mathematical Stories, *ISIS*, 97/4 (2006), p. 678-682.
- [Alexander 2006b] A. R. Alexander, « Tragic Mathematics : Romantic Narratives and the Refounding of Mathematics in the Early Nineteenth Century », *ISIS*, 97/4 (2006), p. 714-726.
- [Alexander 2010] A. R. Alexander, *Duel at dawn : heroes, martyrs, and the rise of modern mathematics*, Cambridge (Mass.) : Harvard University Press, 2010.
- [Alfonsi 2011] Liliane Alfonsi, *Étienne Bézout, 1730-1783, mathématicien des Lumières*, Paris : L'Harmattan, 2011.
- [Archibald 2003] Thomas Archibald, « Analysis and Physics in the Nineteenth Century : The Case of Boundary-value Problems », dans [Jahnke (éd.) 2003, p. 197-211].
- [Armatte 2004] Michel Armatte, « La théorie des erreurs (1750-1820), enjeux, problématiques, résultats », dans E. Barbin et J.-P. Lamarche (dir.), *Histoires de probabilités et de statistiques*, Paris : Éllipses édition, 2004, p. 141-160.
- [Aubin 2013] David Aubin, « Observatory Mathematics in the Nineteenth Century : Mathematization and Observation », dans [Oberwolfach 2013, p. 696-700].
- [Bachmacova 1960] Isabella Bachmacova, « Le théorème fondamental de l'algèbre et la construction des corps algébriques », *Archives internationales d'histoire des sciences*, 13 (1960), p. 211-222.
- [Baker 1975/1988] Keith Michael Baker, *Condorcet. From natural philosophy to social mathematics*, Chicago : University of Chicago Press, 1975. Trad. fr., *Condorcet, raison et politique*, Paris : Hermann, 1988.

178. Cette bibliographie comporte seulement les références aux sources secondaires et aux œuvres complètes. Les références aux sources primaires figurent dans le cours du texte.

- [Balthus 2004] Christopher Balthus, « D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra », *Historia Mathematica*, 31/4 (2004), p. 414-428.
- [Bebiano 1996] Natália Bebiano, « Mathematical Horizons : Light and Darkness in Portugal in the 18th Century », *Historia Mathematica*, 23 (1996), p. 239-245.
- [Belhoste 1989] Bruno Belhoste, « Les origines de l'École polytechnique. Des anciennes écoles d'ingénieurs à l'École centrale des Travaux publics », *Histoire de l'éducation*, 42 (1989), p. 13-53.
- [Belhoste 1990] B. Belhoste, « Du dessin d'ingénieur à la géométrie descriptive. L'enseignement de Chastillon à l'École royale du génie de Mézières », *In Extensio*, n° 13 (juillet 1990), p. 103-135.
- [Belhoste 1991] B. Belhoste, *Augustin-Louis Cauchy. A biography*, Springer, 1991.
- [Belhoste 2001] B. Belhoste, « The École Polytechnique and Mathematics in Nineteenth-Century France », dans U. Bottazzini et A. Dahan Dalmedico (éd.), *Changing Images in Mathematics. From the French Revolution to the New Millennium*, London & New York : Routledge, 2001, p. 15-30.
- [Belhoste 2003] B. Belhoste, *La Formation d'une technocratie : l'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris : Belin, 2003.
- [Belhoste, Picon & Sakarovich 1990] Bruno Belhoste, Antoine Picon et Joël Sakarovich, « Les exercices dans les écoles d'ingénieurs sous l'Ancien Régime et la Révolution », *Histoire de l'éducation*, 46 (1990), p. 53-109.
- [Belhoste et al. 1990] Bruno Belhoste et al., « Le moteur hydraulique en France au XIX^e siècle : concepteurs, inventeurs et constructeurs », *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, n° 29 (1990).
- [Belhoste et al. 1994] Bruno Belhoste, Amy Dahan Dalmedico et Antoine Picon (dir.), *La Formation polytechnicienne, 1794-1994*, Paris : Dunod, 1994.
- [Belhoste et al. 1995] Bruno Belhoste, Amy Dahan Dalmedico, Dominique Pestre et Antoine Picon (dir.), *La France des X : deux siècles d'histoire*, Paris : Economica, 1995.
- [Bellone 1980] Enrico Bellone, *A World on Paper. Studies on the Second Scientific Revolution*, trad. angl. par M. et R. Giacconi, Cambridge (Mass.) & London : The MIT Press, 1980.
- [Bernoulli 2002] Daniel Bernoulli, *Die Werke von Daniel Bernoulli. Hydrodynamic II*, Gleb K. Mikhailov (éd.), vol. 5, Basel : Birkhäuser, 2002.
- [Blay 1992] Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVII^e et XVIII^e siècles*, Paris : PUF, 1992.
- [Blay 2001] M. Blay, « La mathématisation de la nature », dans M. Blay et E. Nicolaidis (dir.), *L'Europe des sciences. Constitution d'un espace scientifique*, Paris : Éditions du Seuil, 2001, p. 115-134.
- [Blay 2002] M. Blay, *La science du mouvement de Galilée à Lagrange*, Paris : Belin, 2002.
- [Blondel 1989] Christine Blondel, « Vision physique "éthérienne", mathématisation "laplacienne" : l'électrodynamique d'Ampère », *Revue d'histoire des sciences*, 42/1-2 (1989), p. 123-137.
- [Bos 1993] Henk J. M. Bos, *Lectures in the History of Mathematics*, AMS / LMS, 1993. Réimpr. en 1997.
- [Bottazzini 1992] Umberto Bottazzini, « Introduction » dans A.-L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Première partie : Analyse algébrique*, rééd. Bologna : CLUEB, 1992, p. IX-CLXVII.

- [Bottazzini 2001] Umberto Bottazzini, « From Paris to Berlin : Contrasted Images of Nineteenth-Century Mathematics », dans U. Bottazzini et A. Dahan Dalmedico (éd.), *Changing Images in Mathematics. From the French Revolution to the New Millennium*, London & New York : Routledge, 2001, p. 31-47.
- [Bourbaki 1960/1984] Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, 1^{re} éd., 1960 ; 2^e éd. revue et augmentée, Paris : Hermann, 1969 ; rééd., Paris : Masson, 1984.
- [Boyer 1956] Carl. B. Boyer, *History of Analytic Geometry*, New York : Scripta Mathematica, 1956.
- [Boyer 1959] C. B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York : Dover, 1959.
- [Boyer 1968/1989] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, 1968 ; 2^e éd. révisée par Uta C. Merzbach, 1989.
- [Bret 2002] Patrice Bret, *L'État, l'armée, la science. L'invention de la recherche publique en France (1763-1830)*, Rennes : Presses Universitaires de Rennes, 2002.
- [Bret & Chappey 2012] Patrice Bret et Jean-Luc Chappey, « Spécialisation vs encyclopédisme ? », *La Révolution française* [En ligne], 2 (2012), mis en ligne le 15 septembre 2012.
- [Brian 1994] Éric Brian, *La Mesure de l'État. Administrateurs et géomètres au XVIII^e siècle*, Paris : Albin Michel, 1994.
- [Brian & Demeulenaere-Douyère 1996] Éric Brian et Christine Demeulenaere-Douyère (dir.), *Histoire et mémoire de l'Académie des sciences. Guide de recherches*, Paris : Éditions Tec & Doc, 1996.
- [Brian & Demeulenaere-Douyère 2002] É. Brian et C. Demeulenaere-Douyère (dir.), *Règlement, usages et science dans la France de l'absolutisme*, Paris : Éditions Tec & Doc, 2002.
- [Bru & Crépel 1994] Bernard Bru et Pierre Crépel (éd.), *Condorcet. Arithmétique politique. Textes rares ou inédits (1767-1789)*, Paris : INED, 1994.
- [Bullynck 2009a] Maarten Bullynck, « Modular arithmetic before C. F. Gauss : Systematizations and discussions on remainder problems in 18th-century Germany », *Historia Mathematica*, 36 (2009), p. 48-72.
- [Bullynck 2009b] M. Bullynck, « Decimal periods and their tables : A German research topic (1765-1801) », *Historia Mathematica*, 36 (2009), p. 137-160.
- [Bullynck 2010] M. Bullynck, « Factor tables 1657-1817, with notes on the birth of number theory », *Revue d'histoire des mathématiques*, 16 (2010), p. 141-224.
- [Calero 2008] Julián Simón Calero, *The Genesis of Fluid Mechanics 1640-1780*, Dordrecht : Springer, 2008.
- [Chasles 1837] Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles, 1837.
- [Chatzis 2010] Konstantinos Chatzis, « Theory and Practice in the Education of French Engineers from the Middle of the 18th Century to the Present », *Archives internationales d'histoire des sciences*, vol. 60, n° 164 (juin 2010), p. 43-78.
- [clairaut.com] Olivier Courcelle, *Chronologie de la vie de Clairaut (1713-1765)*, <http://www.clairaut.com>.
- [Crépel 2006] Pierre Crépel, « La "physique" dans l'Encyclopédie », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 40-41 (2006), p. 251-283.
- [Crépel & Gilain 1989] Pierre Crépel et Christian Gilain (dir.), *Condorcet mathématicien, économiste, philosophe, homme politique*, Paris : Minerve, 1989.
- [Crosland 1992] Maurice Crosland, *Science Under Control. The French Academy of Sciences 1795-1914*, Cambridge : Cambridge University Press, 1992.

- [Dahan Dalmedico 1989] Amy Dahan Dalmedico (éd.), « La mathématisation 1780-1830 », *Revue d'histoire des sciences*, 41/1-2 (1989), p. 5-172.
- [Dahan Dalmedico 1992] A. Dahan Dalmedico, *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'École Française*, Argenteuil : Éditions du Choix & Paris : Librairie A. Blanchard, 1992.
- [Darrigol 2005] Olivier Darrigol, *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, New York : Oxford University Press, 2005.
- [Darrigol 2007] O. Darrigol, « The acoustic origins of harmonic analysis », *Archive for History of Exact Sciences*, 61 (2007), p. 343-424.
- [Daston 1986] Lorraine J. Daston, « The Physicalist Tradition in Early 19th Century French Geometry », *Studies in the History and Philosophy of science*, 17/3 (1986), p. 269-295.
- [Dauben 1992] Joseph W. Dauben, « Appendix (1992) : revolutions revisited » dans [Gillies 1992, p. 72-82].
- [Dauben & Scriba 2002] Joseph W. Dauben et Christoph J. Scriba (éd.), *Writing the History of Mathematics : Its Historical Development*, Basel : Birkhäuser, 2002.
- [Delcourt 2011] Jean Delcourt, « Analyse et géométrie, histoire des courbes gauches de Clairaut à Darboux », *Archive for History of Exact Sciences*, 65 (2011), p. 229-293.
- [Demidov 1982] Serghei S. Demidov, « Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de J. d'Alembert », *Revue d'histoire des sciences*, 35/1 (1982), p. 3-42.
- [Demidov 1989] S. S. Demidov « D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles », dans *Jean d'Alembert, savant et philosophe : Portrait à plusieurs voix*, Paris : Éditions des Archives contemporaines, 1989, p. 333-350.
- [Dhombres 1985] Jean Dhombres, « French mathematical textbooks from Bézout to Cauchy », *Historia Scientiarum*, 28 (1985), p. 91-137.
- [Dhombres 1986] J. Dhombres, « Mathématisation et communauté scientifique française (1775-1825) », *Archives internationales d'histoire des sciences*, 36 (1986), p. 249-293.
- [Dhombres 1987] J. Dhombres, « L'École polytechnique et ses historiens », dans A. Fourcy, *Histoire de l'École polytechnique*, Paris : Belin 1987 (1^{re} éd. 1828), p. 7-69.
- [Dhombres 1988] J. Dhombres, « Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18^e siècle », *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, 9 (1988), p. 23-68.
- [Dhombres 1992] J. Dhombres (dir.), *L'École normale de l'an III. Leçons de mathématiques*, Paris : Dunod, 1992.
- [N. & J. Dhombres 1989] Nicole et Jean Dhombres, *Naissance d'un pouvoir : sciences et savants en France (1793-1824)*, Paris : Payot, 1989.
- [J. & N. Dhombres 1997] J. et N. Dhombres, *Lazare Carnot*, Paris : Fayard, 1997.
- [Dhombres & Robert 1998] Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert, *Joseph Fourier, 1768-1830, créateur de la physique-mathématique*, Paris : Belin, 1998.
- [Dieudonné 1978] Jean Dieudonné, « L'Analyse mathématique au dix-huitième siècle », dans J. Dieudonné (dir.), *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, vol. I, chap. I, Paris : Hermann, 1978.
- [Dugac 1983] Pierre Dugac, « Euler, d'Alembert et les fondements de l'analyse », dans *Leonhard Euler 1707-1783. Beiträge zu Leben und Werk*, Basel : Birkhäuser, 1983, p. 171-184.

- [Ehrhardt 2011] Caroline Ehrhardt, *Évariste Galois. La fabrication d'une icône mathématique*, Paris : Éditions de l'EHESS, 2011.
- [Engelsman 1984] Steven B. Engelsman, *Families of Curves and the Origins of Partial Differentiation*, Amsterdam : North-Holland, 1984.
- [Euler 1980] Leonhard Euler, *Opera Omnia, Correspondance avec Clairaut, d'Alembert et Lagrange*, série IV A, vol. 5, A. P. Jushkevich et R. Taton (éd.), Basel : Birkhäuser, 1980.
- [Euler 1986] L. Euler, *Opera Omnia, Correspondance avec Maupertuis et Frédéric II*, série IV A, vol. 6, P. Costabel, E. Winter, A. T. Grigorijan et A. P. Jushkevich (éd.), Basel : Birkhäuser, 1986.
- [Feldman 1983] Theodore S. Feldman, *The history of meteorology, 1750-1800. A study of the quantification of experimental physics*, PhD thesis, University of California, Berkeley, 1983.
- [Feldman 1985] T. S. Feldman, « Applied Mathematics and the Quantification of Experimental Physics : The Example of Barometric Hypsometry », *Historical Studies in the Physical Sciences*, 15/2 (1985), p. 127-195.
- [Feldman 2003] T. S. Feldman, article « Mathematization and quantification », dans [Heilbron (éd.) 2003], p. 497-498].
- [Ferraro 2000] Giovanni Ferraro, « Functions, Functional Relations, and the Laws of Continuity in Euler », *Historia Mathematica*, 27 (2000), p. 107-132.
- [Ferraro 2008] G. Ferraro, *The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s*, Springer, 2008.
- [Ferraro & Panza 2012] Giovanni Ferraro et Marco Panza, « Lagrange's theory of analytical functions and his ideal of purity of method », *Archive for History of Exact Sciences*, 66 (2012), p. 95-197.
- [Ferreiro 2007] Larrie D. Ferreiro, *Ships and Science. The Birth of Naval Architecture in the Scientific Revolution 1600-1800*, Cambridge (Mass.) : MIT Press, 2007.
- [Firode 2006] Alain Firode, « Les catégories de la mécanique dans l'*Encyclopédie* », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 40-41 (2006), p. 179-192.
- [Foucault 1966] Michel Foucault, *Les Mots et les choses*, Paris : Gallimard, 1966.
- [Foucault 1969] M. Foucault, *L'Archéologie du savoir*, Paris : Gallimard, 1969.
- [Fox 1974] Robert Fox, « The Rise and Fall of Laplacian Physics », *Historical Studies in the Physical Sciences*, 4 (1974), p. 89-136.
- [Frängsmyr et al. 1990] Tore Frängsmyr, John L. Heilbron et Robin E. Rider (éd.), *The quantifying spirit in the 18th century*, University of California Press, 1990.
- [Fraser 1989] Craig G. Fraser, « The Calculus as Algebraic Analysis : Some Observations on Mathematical Analysis in the 18th Century », *Archive for History of Exact Sciences* 39/4 (1989), p. 317-335.
- [Fraser 1994a] C. G. Fraser, « Calculus of variations », dans [Grattan-Guinness 1994], p. 342-350].
- [Fraser 1994b] C. G. Fraser, « Classical mechanics », dans [Grattan-Guinness 1994], p. 971-986].
- [Fraser 1994c] C. G. Fraser, « The Origins of Euler's Variational Calculus », *Archive for History of Exact Sciences*, 47/2 (1994), p. 103-141.
- [Fraser 1997] C. G. Fraser, *Calculus and Analytical Mechanics in the Age of Enlightenment*, Norfolk : Variorum, 1997.
- [Fraser 2003] C. G. Fraser, « Mathematics », dans [Porter 2003], p. 305-327].

- [Garber 1999] Elizabeth Garber, *The Language of Physics. The Calculus and the Development of Theoretical Physics in Europe, 1750-1914*, Boston-Basel-Berlin : Birkhäuser, 1999.
- [Gérini & Verdier 2014] Christian Gérini et Norbert Verdier (éd.), *L'émergence de la presse mathématique en Europe au 19^e siècle*, Milton Keynes : College Publications, 2014.
- [Gilain 1981] Christian Gilain, « Introduction », dans Augustin Louis Cauchy, *Équations différentielles ordinaires. Cours inédit (fragment)*, Paris-Québec : Études vivantes & New York : Johnson Reprint, p. XI-LVI.
- [Gilain 1988] C. Gilain, « Condorcet et le calcul intégral », dans R. Rashed (éd.), *Sciences à l'époque de la Révolution française. Recherches historiques*, Paris : Librairie A. Blanchard, 1988, p. 87-147.
- [Gilain 1989] C. Gilain, « Cauchy et le cours d'analyse de l'École polytechnique », *Bulletin de la Société des Amis de la Bibliothèque de l'École polytechnique*, 5 (1989), p. 3-145.
- [Gilain 1991] C. Gilain, « Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral », *Archive for History of Exact Sciences*, 42 (1991), p. 91-136.
- [Gilain 2002] C. Gilain, « La classification des mathématiques à l'Académie royale des sciences (1699-1785) », dans [Brian & Demeulenaere-Douyère 2002, p. 511-520].
- [Gilain 2007] C. Gilain, « Introduction générale », dans [d'Alembert OC, 2007, p. xiii-cvii].
- [Gilain 2008] C. Gilain, « Mathématiques mixtes et mathématiques pures chez d'Alembert : le cas des systèmes différentiels linéaires », *Archives internationales d'histoire des sciences*, vol. 58, n° 160-161 (2008), p. 99-131.
- [Gilain 2010] C. Gilain, « La place de l'analyse dans la classification des mathématiques : de l'*Encyclopédie* à la *Méthodique* », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 45 (2010), p. 109-128.
- [Gilain 2013] C. Gilain, « Sur l'expression "Mathématiques des Lumières" », dans S. Mazauric et P.-F. Moreau (dir.), *Raison et passions des Lumières*, Paris : L'Harmattan, 2013, p. 213-226.
- [Gillies 1992] Donald Gillies (éd.), *Revolutions in Mathematics*, Oxford : Clarendon Press, 1992.
- [Gillispie 1980] Charles Coulston Gillispie, *Science and polity in France : the end of the old regime*, Princeton : Princeton University Press, 1980.
- [Gillispie 1997] C. C. Gillispie, *Pierre-Simon Laplace, 1749-1827 : a life in exact science*, Princeton : Princeton University Press, 1997.
- [Gillispie 2004] C. C. Gillispie, *Science and polity in France : the revolutionary and Napoleonic years*, Princeton & Oxford : Princeton University Press, 2004.
- [Gispert 2001] Hélène Gispert, « Les journaux scientifiques en Europe », dans M. Blay et E. Nicolaïdis (dir.), *L'Europe des sciences. Constitution d'un espace scientifique*, Paris : Seuil, 2001, p. 191-211.
- [Goldstein et al. 2007] Catherine Goldstein, Norbert Schappacher, Joachim Schwermer (éd.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Springer, 2007.
- [Goldstein & Schappacher 2007] Catherine Goldstein et Norbert Schappacher, « A Book in Search of a Discipline (1801-1860) », dans [Goldstein et al. 2007, p. 3-65].
- [Graber 2009] Frédéric Graber, *Paris a besoin d'eau. Projet, dispute et libération technique dans la France napoléonienne*, Paris : CNRS Éditions, 2009.

- [Grabiner 1981a] Judith V. Grabiner, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, Cambridge (Mass.) & London : The MIT Press, 1981.
- [Grabiner 1981b] J. V. Grabiner, « Changing Attitudes Toward Mathematical Rigor : Lagrange and Analysis in the Eighteenth and Nineteenth Centuries », dans [Jahnke & Otte (éd.) 1981, p. 311-330].
- [Grabiner 1990/2010] J. V. Grabiner, *The Calculus as Algebra : J.-L. Lagrange, 1736-1813*, Garland, 1990 ; réimpr. dans [Grabiner 2010, p. 1-124].
- [Grabiner 1996/2010] J. V. Grabiner, « The Calculus as Algebra, the Calculus as Geometry : Lagrange, Maclaurin and their Legacy », dans R. Calinger (éd.), *Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*, The Mathematical Association of America, 1996, p. 131-143 ; réimpr. dans [Grabiner 2010, p. 191-207].
- [Grabiner 2007/2010] J. V. Grabiner, « Why Should Historical Truth Matter to Mathematicians ? Dispelling Myths while Promoting Maths », *Bulletin of the British Society for the History of Mathematics*, 22/2 (2007), p. 78-91 ; réimpr. dans [Grabiner 2010, p. 243-255].
- [Grabiner 2010] J. V. Grabiner, *A Historian Looks Back. The Calculus as Algebra and Selected Writings*, Washington : The Mathematical Association of America, 2010.
- [Grattan-Guinness 1981] Ivor Grattan-Guinness, « Mathematical Physics in France, 1800-1835 », dans [Jahnke et Otte (éd.) 1981, p. 349-370].
- [Grattan-Guinness 1990a] I. Grattan-Guinness, *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840*, 3 vol., Basel : Birkhäuser, 1990.
- [Grattan-Guinness 1990b] I. Grattan-Guinness, « The Varieties of Mechanics by 1800 », *Historia mathematica*, 17 (1990), p. 313-338.
- [Grattan-Guinness 1994] I. Grattan-Guinness (éd.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, 2 vol., London & New York : Routledge, 1994.
- [Grattan-Guinness 1997] I. Grattan-Guinness, *The Rainbow of Mathematics. A History of the Mathematical Sciences*, New York & London : W.W. Norton & Company, 1997.
- [Grattan-Guinness 2003] I. Grattan-Guinness, « Mathematics 1800 to the Present », dans [Heilbron (éd.) 2003, p. 495-497].
- [Grattan-Guinness 2005] I. Grattan-Guinness (éd.), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, Elsevier, 2005.
- [Gray 1989] Jeremy J. Gray, *Ideas of Space : Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*, Oxford : Clarendon Press, 1989 (1^{re} éd., 1979).
- [Gray 1994] J. Gray, « Euclidean and non-Euclidean geometry », dans [Grattan-Guinness 1994, p. 877-886].
- [Gray 2004] J. Gray, « Anxiety and Abstraction in Nineteenth-Century Mathematics », *Science in Context*, 17/1-2 (2004), p. 23-47.
- [Greenberg 1986] John L. Greenberg, « Mathematical Physics in Eighteenth-Century France », *ISIS*, 77 (1986), p. 59-78.
- [Greenberg 1995] J. L. Greenberg, *The Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut*, Cambridge University Press, 1995.
- [Grimberg 1998] Gérard Grimberg, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, thèse de doctorat, Université Paris 7, 1998.
- [Guicciardini 1989] Niccoló Guicciardini, *The development of Newtonian calculus in Britain 1700-1800*, Cambridge University Press, 1989 ; rééd. 2003.
- [Guilbaud 2007] Alexandre Guilbaud, *L'hydrodynamique dans l'œuvre tardive de D'Alembert 1766-1783*, thèse de doctorat, Université Lyon 1, 2007.

- [Guilbaud & Jouve 2009] Alexandre Guilbaud et Guillaume Jouve, « La résolution des équations aux dérivées partielles dans les *Opusculs mathématiques* de D'Alembert (1761-1783) », *Revue d'histoire des mathématiques*, 15/1 (2009), p. 59-122.
- [Hahn 1971/1993] Roger Hahn, *The Anatomy of a Scientific Institution: The Paris Academy of Sciences, 1666-1803*, Berkeley : University of California Press, 1971. Trad. fr., Paris : Éditions des Archives contemporaines, 1993.
- [Hahn 2004] R. Hahn, *Le Système du monde : Pierre Simon Laplace, un itinéraire dans la science*, Gallimard, 2004.
- [Hahn 2013] R. Hahn (éd.), *Correspondance de Pierre Simon Laplace (1749-1827)*, Turnhout : Brepols, 2 vol., 2013.
- [Hankins 1970/1990] Thomas L. Hankins, *Jean d'Alembert. Science and the Enlightenment*, Oxford University Press, 1970 ; rééd. Gordon and Breach, 1990.
- [Hankins 1985] T. L. Hankins, *Science and the Enlightenment*, Cambridge University Press, 1985.
- [Heilbron 1990] John L. Heilbron, « Introduction », dans [Frängsmyr *et al.* 1990, p. 1-23].
- [Heilbron 1993] J. L. Heilbron, *Weighing Imponderables and Other quantitative Science Around 1800* (Historical Studies in the Physical and Biological Sciences, Supplement to vol. 24, part. 1), Berkeley : University of California Press, 1993.
- [Heilbron 2003] J. L. Heilbron, « Academies and learned societies », dans [Heilbron (éd.) 2003, p. 1-5].
- [Heilbron (éd.) 2003] J. L. Heilbron (éd.), *The Oxford Companion to the History of Modern Science*, Oxford University Press, 2003.
- [Herreman 2013] Alain Herreman, « L'inauguration des séries trigonométriques dans la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier et dans la controverse des cordes vibrantes », *Revue d'histoire des mathématiques*, 19 (2013), p. 151-243.
- [Houzel 2002a] Christian Houzel, *La Géométrie algébrique. Recherches historiques*, Paris : Librairie A. Blanchard, 2002.
- [Houzel 2002b] C. Houzel, « Les équations aux dérivées partielles : 1740-1780 », dans A. Michel et M. Paty (dir.), *Analyse et dynamique. Études sur l'œuvre de d'Alembert*, Les Presses de l'Université Laval, 2002, p. 237-258.
- [Jahnke 1993] Niels Jahnke, « Algebraic Analysis in Germany, 1780-1840 : Some Mathematical and Philosophical Issues », *Historia mathematica*, 20 (1993), p. 265-284.
- [Jahnke 1996] N. Jahnke, « The Development of Algebraic Analysis from Euler to Klein and its Impact on School Mathematics in the 19th Century », dans R. Calinger (éd.), *Vita mathematica : Historical research and integration with teaching*, Washington : Mathematical Association of America, 1996, p. 145-151.
- [Jahnke 2003] N. Jahnke, « Algebraic Analysis in the 18th Century », dans [Jahnke (éd.) 2003, p. 105-136].
- [Jahnke (éd.) 2003] N. Jahnke (éd.), *A History of Analysis*, AMS-LMS (coll. History of Mathematics, vol. 24), 2003.
- [Jahnke & Otte 1981] Niels Jahnke et Michael Otte, « Origins of the program of "arithmetization of mathematics" », dans [Mehrtens *et al.* 1981, p. 21-49].
- [Jahnke & Otte (éd.) 1981] N. Jahnke et M. Otte (éd.), *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*, Dordrecht : Reidel, 1981.
- [Jouve 2007] Guillaume Jouve, *Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783). Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions*, thèse de doctorat, Université Lyon 1, 2007.

- [Jouve 2008] Guillaume Jouve, « Le rôle de d'Alembert dans les débuts d'une étude programmatique des équations aux dérivées partielles (1760-1783) », *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XXVIII-2 (2008), p. 167-181.
- [Julia 1995] Dominique Julia, « Le modèle méritocratique entre Ancien Régime et Révolution », dans [Belhoste et al. 1995, p. 33-50].
- [Klein 1926/1979] Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert*, vol. I, Berlin : Springer, 1926. Trad. angl. dans R. Hermann (éd.), *Lie Groups : History, Frontiers and Applications*, vol. IX, Brookline : Math Sci Press, 1979.
- [Kline 1972] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.
- [Kuhn 1970/1972] Thomas Kuhn, *La Structure des révolutions scientifiques*, trad. fr., Paris : Flammarion, 1972 (1^{re} éd. angl., 1962 ; 2^e éd. rév., 1970).
- [Kuhn 1977/1990] T. Kuhn, *La Tension essentielle*, trad. fr., Paris : Flammarion, 1990 (1^{re} éd. angl., 1977).
- [Lamandé 1987] Pierre Lamandé, « Les manuels de Bézout », *Rivista di storia della scienza*, 4 (1987), p. 339-375.
- [Langins 1980] Janis Langins, « Sur la première organisation de l'École polytechnique », *Revue d'histoire des sciences*, 33 (1980), p. 289-313.
- [Langins 1987] J. Langins, *La République avait besoin de savants*, Paris : Belin, 1987.
- [Langins 1991] J. Langins, « La préhistoire de l'École polytechnique », *Revue d'histoire des sciences*, 44 (1991), p. 61-89.
- [Le Vavas seur 1907] Raymond Le Vavas seur, « Les fonctions rationnelles », *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, t. I, vol. 2, fasc. 1, 1907, p. 1-232.
- [Licoppe 1996] Christian Licoppe, *La Formation de la pratique scientifique. Le discours de l'expérience en France et en Angleterre (1630-1820)*, Paris : La Découverte, 1996.
- [Loria 1891] Gino Loria, « Il teorema fondamentale della Teoria delle equazioni algebriche », *Rivista di Matematica*, 1 (1891), p. 185-248.
- [Lubet 2001] Jean-Pierre Lubet, *Quelques aspects de l'analyse à l'époque de Lagrange – le rôle des analogies*, thèse de doctorat, Université de Lille, 2001.
- [Lützen 1983/2007] Jesper Lützen, « Euler's Vision of a General Partial Differential Calculus for a Generalized Kind of Function », *Mathematics Magazine*, 56 (1983), p. 299-306 ; rééd. dans W. Dunham (éd.) *The Genius of Euler. Reflections on his Life and Work*, Washington : The Mathematical Association of America, 2007, p. 197-207.
- [Lützen 1990] J. Lützen, *Joseph Liouville 1809-1882 : Master of Pure and Applied Mathematics*, Springer, 1990.
- [Lützen 1994] J. Lützen, « Partial Differential Equations », dans [Grattan-Guinness 1994, p. 452-469].
- [Lützen 2003a] J. Lützen, « The Foundation of Analysis in the 19th Century », dans [Jahnke (éd.) 2003, p. 155-195].
- [Lützen 2003b] J. Lützen, « Between Rigor and Applications. Developments in the Concept of Function in Mathematical Analysis », dans [Nye 2003, p. 468-487].
- [Lützen 2013] J. Lützen, « Applications in the 19th century », dans [Oberwolfach 2013, p. 687-690].
- [Maigné & Sebestik 2010] Carole Maigné et Jan Sebestik, « Introduction », dans *Bernard Bolzano. Premiers écrits : Philosophie, Logique, Mathématique*, Paris : Vrin, 2010, p. 11-65.

- [McClellan 1985] James E. McClellan III, *Science Reorganized : scientific societies in the eighteenth century*, New York : Columbia University Press, 1985.
- [Mehrtens et al. 1981] Herbert Mehrstens, Henk Bos, Ivo Schneider (éd.), *Social History of Nineteenth-Century Mathematics*, Birkhäuser, 1981.
- [Monna 1972] Antonie Frans Monna, « The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue », *Archive for History of Exact Sciences*, 9 (1972), p. 57-84.
- [Netto 1899] Eugen Netto, « Rationale Funktionen einer Veränderlichen ; ihre Nullstellen », *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, article IB1a, p. 227-254.
- [Novy 1973] Lubos Novy, *Origins of modern algebra*, Leyden : Noordhoff international Publication, 1973.
- [Nye 2003] Mary Jo Nye (éd.), *The Modern Physical and Mathematical Sciences*, (The Cambridge History of Science, vol. 5), Cambridge University Press, 2003.
- [Oberwolfach 2013] « From “Mixed” to “Applied” Mathematics : Tracing an important dimension of mathematics and its history », Workshop au Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, organisé par M. Eppe, T. H. Kjeldsen et R. Siegmund-Schultze, *Oberwolfach Reports*, vol. 10, n° 1 (2013), p. 657-729.
- [Ovaert 1976] Jean-Louis Ovaert, « La thèse de Lagrange et la transformation de l'analyse », dans C. Houzel, J.-L. Ovaert, P. Raymond et J.-J. Sansuc, *Philosophie et calcul de l'infini*, Paris : Maspero, 1976, p. 157-200.
- [Panza 2003] Marco Panza, « The Origins of Analytic Mechanics in the 18th Century », dans [Jahnke (éd.) 2003, chap. 5, p. 137-153].
- [Passeron 1994] Irène Passeron, *Clairaut et la Figure de la Terre au XVIII^e siècle. Cristallisation d'un nouveau style autour d'une pratique physico-mathématique*, thèse de doctorat, Université Paris 7, 1994.
- [Peiffer 2009] Jeanne Peiffer, « Mathématiciens à la Cour et à l'Académie », dans C. Bartocci et P. Odifreddi (dir.), *La mathématique I. Les lieux et les temps*, Paris : CNRS Éditions, 2009, p. 425-450.
- [Peiffer et al. 2013] Jeanne Peiffer, Maria Conforti et Patrizia Delpiano (dir.), « Les journaux savants dans l'Europe moderne. Communication des savoirs », *Archives internationales d'histoire des sciences*, 63 (2013), p. 3-497.
- [Petrova 1974] Svetlana Petrova, « Sur l'histoire des démonstrations analytiques du théorème fondamental de l'algèbre », *Historia Mathematica*, 1 (1974), p. 255-261.
- [Phili 2012] Christine Phili, « Le manuscrit du cours de Lagrange à l'École polytechnique (1797-1798) », dans S. Féry (dir.), *Aventures de l'analyse de Fermat à Borel*, Nancy : PUN-Éditions universitaires de Lorraine, 2012, p. 337-366.
- [Picon 1989] Antoine Picon, « Les ingénieurs et la mathématisation. L'exemple du génie civil et de la construction », *Revue d'histoire des sciences*, 42/1-2 (1989), p. 155-172.
- [Picon 1992] A. Picon, *L'Invention de l'ingénieur moderne : l'École des Ponts et Chaussées, 1747-1851*, Paris : Presses de l'ENPC, 1992.
- [Picon 1994] A. Picon, « Les rapports entre sciences et techniques dans l'organisation du savoir, milieu XVIII^e – milieu XIX^e siècle », *Revue de synthèse* (IV) 115/1-2 (1994), p. 103-120.
- [Porter 2003] Roy Porter (éd.), *Eighteenth-Century Science*, (The Cambridge History of Science, vol. 4), Cambridge University Press, 2003.
- [Pulte 1998] Helmut Pulte, « Jacobi's Criticism of Lagrange : The Changing Role of Mathematics in the Foundations of Classical Mechanics », *Historia mathematica*, 25 (1998), p. 154-184.

- [Pulte 2000] H. Pulte, « Beyond the Edge of Certainty : Reflections on the Rise of Physical Conventionalism », *Philosophia Scientiae*, 4/1 (2000), p. 47-68.
- [Pulte 2005] H. Pulte, « Joseph Louis-Lagrange, Mécanique analytique, first edition (1788) », dans [Grattan-Guinness 2005, chap. 16, p. 208-224].
- [Richards 2003] Joan L. Richards, « The Geometrical Tradition : Mathematics, Space, and Reason in the Nineteenth Century », dans [Nye 2003, p. 449-467].
- [Richards 2006] J. L. Richards, « Historical Mathematics in the French Eighteenth Century », *ISIS*, 97/4 (2006), p. 700-713.
- [Rowe & McCleary 1989] David E. Rowe et John McCleary (éd.), *The History of Modern Mathematics*, vol. I, Academic Press, 1989.
- [Sakarovitch 1998] Joël Sakarovitch, *Épures d'architecture : De la coupe des pierres à la géométrie descriptive XVI^e-XIX^e siècles*, Basel : Birkhäuser, 1998.
- [Saraiva 2001] Luis Saraiva, « Garção Stockler and the Foundations of Calculus at the End of the 18th Century », *Revista Brasileira de História da Matemática*, 1 (2001), p. 75-100.
- [Saraiva 2012] L. Saraiva, « Mathematical Analysis in Portugal in the Period 1772-1822 », dans S. Féry (dir.), *Aventures de l'analyse de Fermat à Borel*, Nancy : PUN-Éditions universitaires de Lorraine, 2012, p. 501-531.
- [Schubring 2005] Gert Schubring, *Conflicts between generalization, rigor, and intuition. Numbers concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany*, Springer, 2005.
- [Siegmond-Schultze 2013] Reinhard Siegmund-Schultze, « The establishment of the notion and of the word “applied mathematics” around 1800 », dans [Oberwolfach 2013, p. 663-665].
- [Struik 1981] Dirk J. Struik, « Mathematics in the early part of the nineteenth century », dans [Mehrtens et al. 1981, p. 6-20].
- [Struik 1987] D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 4^e éd. révisée, New York : Dover, 1987 (1^{re} éd., 1948).
- [Szulman 2011] Éric Szulman, *La Navigation intérieure de Colbert à la Révolution : genèse d'une catégorie d'action publique et émergence de la notion de réseau*, thèse de doctorat, Université Paris 1, 2011.
- [Taton 1951] René Taton, *L'Œuvre scientifique de Monge*, Paris : PUF, 1951.
- [Taton 1964/1986] R. Taton (dir.), *Enseignement et diffusion des sciences en France au dix-huitième siècle*, 1964 ; rééd. Paris : Hermann, 1986.
- [Thiele 2007] Rüdiger Thiele, « The Rise of the Function Concept in Analysis », dans R. Baker (éd.), *Euler Reconsidered. Tercentenary essays*, Heber City : Kendrick Press, 2007, p. 366-405.
- [Tournès 2009] Dominique Tournès, *La Construction tractionnelle des équations différentielles*, Paris : A. Blanchard, 2009.
- [Tournès 2012] D. Tournès, « Diagrams in the theory of differential equations (eighteenth to nineteenth centuries) », *Synthese*, 186 (2012), p. 257-288.
- [Truesdell 1954] Clifford Ambrose Truesdell, « Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687-1765 », dans *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, série II, vol. 12, Zürich : Orell Füssli, 1954, p. VII-CXXV.
- [Truesdell 1955] C. A. Truesdell, « Editor's Introduction », dans *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, série II, vol. 13, Zürich : Orell Füssli, 1955, p. IX-CXVIII.
- [Truesdell 1960] C. A. Truesdell, « Editor's Introduction : The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788 », dans *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, série II, vol. 11-2, Zürich, 1960.

- [Truesdell 1968] C. A. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, New York : Springer Verlag, 1968.
- [Van der Waerden 1985] Bartel Leendert Van der Waerden, *A history of algebra from al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1985.
- [Vérin 1993] Hélène Vérin, *La Gloire des ingénieurs. L'intelligence technique du XVI^e au XVIII^e siècle*, Paris : Albin Michel, 1993.
- [Voelke 2005] Jean-Daniel Voelke, *Renaissance de la géométrie non euclidienne entre 1860 et 1900*, Bern : Peter Lang, 2005.
- [Voelke à paraître] J.-D. Voelke, « La naissance du concept d'espace non euclidien », dans L. Bioesmat-Martagon (dir.), *Contributions à la biographie des espaces géométriques*, Nancy : PUN-EDULOR, à paraître.
- [Weil 1984] André Weil, *Number theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre*, Boston-Basel-Stuttgart : Birkhäuser, 1984.
- [Wussing 1969/1984] Hans Wussing, *The Genesis of the Abstract Group Concept. A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*, Cambridge : The MIT Press, 1984 (éd. allemande originale, 1969).
- [Yushkevich 1973] Adolf P. Youschkevitch, « J. A. da Cunha et les fondements de l'analyse infinitésimale », *Revue d'histoire des sciences*, 26/1 (1973), p. 3-22.
- [Yushkevich 1976/1981] A. P. Youschkevitch, « The concept of function up to the middle of the 19th century », *Archive for History of Exact Sciences*, 16 (1976), p. 37-85. Trad. fr., « Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^e siècle », dans *Fragments d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P. n° 41, 1981, p. 7-68.
- [Yushkevich 1978] A. P. Youschkevitch, « C. F. Gauss et J. A. da Cunha », *Revue d'histoire des sciences*, 31/4 (1978), p. 327-332.

PARTIE II

RECHERCHES NOUVELLES

Présentation

Le bilan historiographique de la partie I, qui nous a conduits à remettre en cause l'évidence de la présentation standard du passage du XVIII^e au XIX^e siècle conçu comme une rupture radicale et globale, invite à de nouvelles recherches pour analyser les continuités et les ruptures qui marquent l'évolution complexe des sciences mathématiques dans la période 1750-1850. Cette partie II présente des recherches originales allant dans ce sens. Elle contient quatorze articles écrits par dix-huit auteurs explorant cette problématique de manières très diverses, dans les sujets comme dans les méthodes. Bien entendu, l'ensemble de ces contributions ne vise nullement à l'exhaustivité. Il s'agit de dégager de nouveaux matériaux devant permettre d'alimenter la réflexion et le débat.

Les articles sont organisés selon quatre chapitres correspondant à des thèmes qui, dans l'historiographie, nourrissent traditionnellement la thèse d'une opposition radicale entre les deux siècles : la place des mathématiques et des mathématiciens dans la société, en liaison avec les phénomènes de spécialisation et de professionnalisation ; les interactions entre les mathématiques pures, les mathématiques appliquées et les sciences physiques ; la géométrie et ses différentes branches entre tradition et modernité ; l'articulation entre analyse, algèbre et arithmétique.

Les quatre contributions du premier chapitre traitent successivement de l'enseignement dans les écoles militaires au sortir de la guerre de Sept Ans, de l'enseignement secondaire dans les écoles centrales entre 1795 et 1802, de l'évolution du paysage institutionnel et éditorial des mathématiques dans l'espace germanophone, et du monde de l'édition mathématique français dans le second XVIII^e et le premier XIX^e siècle. Elles apportent des éclairages sur l'évolution de la place des mathématiques et le rôle des mathématiciens dans la seconde moitié du XVIII^e siècle qui permettent de mieux comprendre les changements qui s'opèrent au moment de la Révolution française et au début du XIX^e siècle.

Liliane Alfonsi et Alexandre Guilbaud s'intéressent en premier lieu aux réformes mises en place dans les écoles de formation des ingénieurs et des officiers de l'Artillerie, du Génie et de la Marine, à la suite de la sévère défaite, maritime et terrestre, essuyée par la France lors de la véritable guerre mondiale que fut la guerre de Sept Ans (1756-1763). Parmi ces transformations, passées au crible de chacun des trois corps, les deux auteurs mettent l'accent sur la montée en puissance du principe méritocratique – c'est-à-dire l'idée de l'utilité de juger les élèves d'après le mérite

plutôt que d'après la naissance –, ce qui se traduit notamment par l'extension du principe des examens et des concours dans les écoles avec un rôle majeur accordé aux mathématiques dans la sélection et la formation des élèves. La nomination par le ministre de la Guerre et de la Marine, Choiseul, des mathématiciens Bézout et Bossut comme examinateurs et rédacteurs des manuels d'enseignement joue un rôle central dans ce cadre. Leurs ouvrages (pour la Marine, l'Artillerie et pour le Génie, respectivement), qui connaissent une grande diffusion, développent des innovations pédagogiques, avec l'introduction de compléments de haut niveau dont des éléments tirés de leurs propres travaux de recherche ; leurs expériences balistiques ou hydrodynamiques, que les deux académiciens réalisent au sein même des écoles, marquent de même l'entrée de la recherche de haut niveau dans les institutions d'enseignement militaires d'Ancien Régime. Après sa mort en 1783, les successeurs de Bézout à ses postes d'examineur, Monge à la Marine et Laplace à l'Artillerie, se situent dans cette même lignée, et joueront le rôle que l'on sait dans la naissance ou les premiers temps de l'École polytechnique au moment de la Révolution. Centré sur les premières décennies du second XVIII^e, cet article veut ainsi montrer l'intérêt de mettre en perspective les changements révolutionnaires des années 1790 avec ceux initiés et motivés, dans les années 1760, par le besoin de faire évoluer la formation et les conditions de recrutement des élites françaises après le fiasco de la guerre de Sept Ans.

Caroline Ehrhardt et Renaud d'Enfert abordent la question de l'évolution de l'enseignement des mathématiques à la fin du XVIII^e siècle et au début du XIX^e, à travers une étude dédiée aux écoles centrales. Fruit de la Révolution, créées en 1795 à la place des collèges d'Ancien Régime, puis remplacées à leur tour par les lycées dès 1802, ces écoles constituent à elles seules une forte rupture dans l'enseignement secondaire : en terme d'élargissement de l'accès aux cours, de diversification et de spécialisation des contenus enseignés, et dans la mesure où se constitue, par leurs biais, un premier corps d'enseignants de mathématiques. Cependant, grâce à une étude des trajectoires professionnelles et des pratiques d'enseignement de ces professeurs, réalisée sur la base d'une analyse de leurs réponses à l'enquête de l'an VII du ministre de l'Intérieur, les deux historiens renouent certains fils entre l'Ancien Régime et le XIX^e siècle, jusqu'alors masqués par l'effet de rupture révolutionnaire. Confrontés à la nécessité d'adapter leurs pratiques à des finalités diverses – l'apprentissage des notions indispensables dans la vie professionnelle, et la préparation au concours d'entrée à l'École polytechnique pour les meilleurs élèves –, ces enseignants, majoritairement issus des anciens collèges (et, dans une moindre mesure, des écoles militaires) d'Ancien Régime, s'appuient de fait sur les pratiques et les savoir-faire acquis avant la Révolution, comme les manuels de Bézout, de Bossut et de La Caille, qui restent de loin les sources les plus utilisées, et

dont la structure commune, fondée sur le quatuor « arithmétique/géométrie/algèbre/applications de l'algèbre à la géométrie », imprégnera durablement l'enseignement mathématique secondaire. Cette expérience des écoles centrales signe ainsi une période de transition pour les enseignants de mathématiques, qui, tout en se structurant progressivement en un corps professionnel, et en concourant ainsi à la formation d'une communauté mathématique plus large, transmettent aussi une part de leur propre héritage à la génération suivante.

Dans leur article, Thomas Morel et Maarten Bullynck étudient l'évolution de la place des mathématiques dans l'espace germanophone entre 1750 et 1850. À une tradition historiographique focalisée sur la mise en évidence d'une rupture marquée par l'institutionnalisation des mathématiques pures dans le cadre des réformes dans les universités du Nord de l'Allemagne au début du XIX^e siècle, les deux historiens opposent la nécessité de prendre en compte l'ensemble du contexte culturel, politique et institutionnel complexe des États allemands depuis le milieu du XVIII^e siècle. Ils mettent en pratique ce changement d'échelle en suivant deux approches : une étude détaillée de la situation des mathématiques dans les différentes institutions d'enseignement et de recherche (des écoles primaires aux universités en passant par les académies techniques), et l'analyse des transformations que connaît la littérature mathématique allemande dans sa production et sa diffusion en exploitant les principaux journaux de recension entre 1765 et 1826. Au contraire d'une rupture nette et radicale, les auteurs mettent en évidence une multitude de ruptures asynchrones liées aux diverses réformes qui s'échelonnent et se répondent dans le temps et selon les différents États : si les universités s'orientent vers les mathématiques pures dans les années 1820, la création et le développement d'académies militaires et d'écoles techniques depuis la fin de la guerre de Sept Ans méritent aussi d'être mieux prises en compte au regard du rôle qu'y jouent les mathématiques. Créé en 1826, le *Journal de Crelle* apparaît de même comme le premier succès obtenu après une longue série de tentatives de création de journaux spécialisés en mathématiques amorcée dès le début des années 1780, et qui n'aboutira donc pas avant plusieurs décennies, au terme d'un mouvement de différenciation progressive des supports de diffusion, et grâce à l'émergence d'une communauté de mathématiciens suffisamment large pour constituer un vrai public de lecteurs.

La contribution de Norbert Verdier nous ramène en France et nous invite à l'exploration d'un sujet encore peu étudié, celui de l'évolution du monde de l'édition mathématique, c'est-à-dire du milieu des libraires, imprimeurs et libraires-imprimeurs investis dans la production d'ouvrages de mathématiques entre 1750 et 1850. Grâce à l'établissement d'une première cartographie de cet espace éditorial complexe et hétérogène, complétée par des études de cas sur de grandes maisons d'édition, l'auteur dégage de

premières tendances et dynamiques d'évolution sur le temps long de la période. Il apparaît ainsi qu'un nombre déjà important d'imprimeurs ou libraires éditent des livres de mathématiques dans la seconde moitié du XVIII^e siècle. Le nombre augmente cependant beaucoup après la Révolution, dans la période 1790-1810, elle-même suivie d'un net reflux. N. Verdier constate en outre l'apparition, dans les années 1790, d'une appellation « imprimeurs-libraires pour les mathématiques » témoignant de la volonté de certaines entreprises d'afficher une spécialisation. Ces ruptures n'excluent pas, pour autant, l'existence de continuités significatives dans l'édition mathématique entre les deux siècles. Plusieurs des grands libraires et imprimeurs du premier XIX^e siècle s'inscrivent dans des traditions familiales et commerciales anciennes. Des empires éditoriaux spécialisés, tels que celui de Bachelier pour les mathématiques, et d'Hachette pour l'enseignement, coexistent avec des maisons d'édition conservant une activité thématique plus diversifiée, comme celle de Didot : autant d'exemples qui tendent à nuancer l'idée d'une rupture nette entre une activité éditoriale marquée par l'encyclopédisme des Lumières pour le XVIII^e siècle, et par la spécialisation au siècle suivant.

Les quatre contributions du deuxième chapitre portent sur l'astronomie et les observatoires, sur le statut d'une équation algébrique permettant de déterminer la stabilité des systèmes mécaniques terrestres ou célestes, sur les probabilités, leurs applications et leur théorie analytique, ainsi que sur les travaux de Coulomb dans les domaines de l'électricité et du magnétisme. De cet ensemble émergent des processus plus complexes que ne le laissent envisager certains critères traditionnellement associés à l'idée de rupture radicale vers 1800 : parmi eux, la thèse consistant à opposer des mathématiques guidées par la seule idée d'application au XVIII^e siècle à des mathématiques pures autonomes et rigoureuses au siècle suivant, ou celle présentant la naissance de la physique mathématique comme un autre marqueur de discontinuité à la charnière entre les deux siècles.

David Aubin s'interroge dans son article sur les raisons qui ont conduit nombre d'historiens de l'astronomie à parler d'un tournant vers 1800. Deux changements reconnus comme majeurs se situent pourtant bien en amont et en aval de cette borne : ce que l'on appelle souvent la « révolution astronomique », avec les travaux de Copernic, au XVI^e siècle, et de Newton à la fin du XVII^e, d'une part, et la naissance de l'astrophysique dans la seconde moitié du XIX^e siècle, d'autre part. À l'inverse, une série d'événements marquants pour l'histoire de l'astronomie se concentrent à la charnière des XVIII^e et XIX^e siècles : la découverte d'une nouvelle planète, Cérès, la publication de la *Mécanique céleste* de Laplace, les premières applications de la méthode des moindres carrés, ou encore la mise en place du système métrique et la fondation du Bureau des Longitudes. D. Aubin souligne néanmoins la nécessité de replacer ces événements dans un

cadre temporel plus large, ce dont témoignent les contributions des deux personnages centraux de cette période charnière, Laplace et Herschel. Si les programmes qu'ils dessinent pour l'astronomie influencent profondément son développement au cours de la première moitié du XIX^e siècle, ces programmes ne s'inscrivent pas moins dans la stricte continuité de développements amorcés au siècle précédent, qu'il s'agisse de l'introduction des méthodes analytiques en astronomie (Laplace se situe ici, aux côtés de Lagrange, dans la droite ligne des innovations d'Euler, d'Alembert et Clairaut dans les années 1740), ou du gain en précision des tables et des instruments, et de la mise en place de programmes d'observation du ciel (dont les travaux d'Herschel, qui découvre Uranus dès 1781, paraissent emblématiques). À défaut, donc, d'observer de réelles discontinuités dans les fondements scientifiques et épistémologiques de l'astronomie au tournant du XIX^e siècle, l'auteur suggère que l'impression de rupture générale vers 1800 résulte des changements qui s'opèrent dans la place donnée à l'observatoire, en tant qu'institution, dans le nouveau contexte social, politique et économique postrévolutionnaire.

L'étude de Frédéric Brechenmacher débute avec les travaux de d'Alembert, généralisés par Lagrange, établissant un critère qui permet de caractériser la stabilité mécanique des petites oscillations d'un système de corps par la nature des racines d'une équation algébrique spécifique. Cette dernière sera couramment désignée au XIX^e siècle sous le nom d'« équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes » en raison de son transfert, par Lagrange et Laplace dans les années 1770-1780, à l'analyse de la stabilité du système solaire. Grâce à une étude intertextuelle basée sur la mise en réseaux des nombreux textes faisant référence à cette équation tout au long du XIX^e siècle, F. Brechenmacher met en évidence la formation d'une véritable culture algébrique commune à l'échelle européenne, qui se manifeste dans des domaines très variés des mathématiques pures et des mathématiques mixtes : mécanique céleste, mécanique des figures d'équilibre, algèbre, géométrie, analyse complexe, arithmétique. Au-delà de ces constats valables sur le temps long, cette étude veut aussi attirer notre attention sur les multiples fragmentations décelables au sein de la culture de l'équation séculaire au XIX^e siècle dès lors que l'analyse se focalise sur des enjeux de légitimation plus spécifiques à chaque contexte théorique ou institutionnel (rigueur en analyse, généralité en algèbre, diverses écoles mathématiques, par exemple) : en d'autres termes, si cette culture particulière témoigne d'une certaine continuité entre les deux bornes de la période 1750-1850, celle-ci masque aussi un réseau de lignes de fragmentation, décelables à des échelles plus fines.

L'étude que propose Bernard Bru s'inscrit aussi sur le temps long, celui de l'histoire d'un problème remontant au moins au début du XVII^e siècle, consistant à jeter n dés à f faces et à demander le nombre de chances

d'obtenir une somme s . Nous suivons ici, au travers de ses transformations au fil du temps, tout un pan du développement complexe du calcul des probabilités aux XVIII^e et XIX^e siècles et de ses interactions avec l'analyse mathématique et la mécanique céleste. Après la formule obtenue de manière combinatoire, l'auteur passe successivement en revue la première solution analytique de Moivre en 1730, la variante continue de la formule obtenue par Simpson en 1755 dans le cadre de la théorie probabiliste des erreurs d'observation, les résultats de Lagrange et, bien sûr, les recherches de Laplace à partir des années 1770 qui n'aboutiront qu'en 1810 à la solution complète du problème dans le cadre d'une théorie analytique cohérente. Parfaitement rigoureuse dans le cas de dés à un nombre fini de faces, la démonstration de Laplace est cependant insuffisante pour le passage au cas infini, et devra attendre les analystes de la belle Époque pour trouver toute sa rigueur. Quoique reprise par Poisson, la théorie laplacienne de ce problème tombe en effet dans un relatif oubli pendant plus d'un siècle, et si elle ressurgit au XX^e siècle, c'est par le biais d'une publication de Poincaré de 1886 présentant une démonstration du problème tout aussi peu rigoureuse, en fait, que celle de Laplace qui n'est d'ailleurs pas citée. À défaut d'une rupture, B. Bru pointe ici un cas de transmission souterraine, précédée d'un bel exemple de changements dans la continuité incarnée par un problème évoluant à la charnière de l'analyse, de la mécanique céleste, et d'une théorie des probabilités en cours de construction.

C'est aux travaux de Coulomb, et au « mélange du Calcul & de la Physique » que le savant et ingénieur, sorti de l'école du Génie, promet et revendique dès ses premiers travaux de mécanique, que Christine Blondel et Bertrand Wolff s'intéressent dans la dernière contribution de ce chapitre. De ses recherches sur l'équilibre des voûtes, la résistance des piliers de soutènement et le frottement dans le courant des années 1770 jusqu'à la série de sept mémoires qu'il dédie à l'étude de l'électricité et du magnétisme à la fin de la décennie suivante, les auteurs suivent pas à pas l'évolution des modes d'utilisation concrète des mathématiques par le savant dans ses différentes tentatives d'application du calcul aux phénomènes physiques, avec l'objectif de mieux cerner l'originalité de ses apports. Leur étude relève notamment une rupture épistémologique amorcée par Coulomb au cours de l'établissement de la loi de la torsion avec le passage d'une loi empirique à une loi théorique justifiée par les propriétés géométriques du phénomène étudié. Ses travaux en électricité et magnétisme marquent une nouvelle articulation entre mathématiques et physique avec la recherche de lois non plus seulement théoriques mais fondamentales, c'est-à-dire traduisant la réalité physique des phénomènes à l'échelle microscopique. Cette articulation, fondée ontologiquement, doit pouvoir se justifier expérimentalement par un accord extrême entre les résultats de l'expérience et ceux du calcul, d'où la recherche de la plus grande

précision dans les mesures et la gestion des inévitables approximations physiques et mathématiques perturbant cet accord. Si les travaux de physique mathématique des premières décennies du XIX^e siècle tranchent clairement – par le recours à des mathématiques plus sophistiquées ou par l’abandon des recherches de lois empiriques – avec la méthode de Coulomb, celle-ci n’en initie pas moins, d’après les deux historiens, une nouvelle manière d’étudier la physique, dès les années 1770, qui influencera la façon de l’enseigner en France et dans d’autres pays européens au début du XIX^e siècle, et dont les acteurs de la physique mathématique conserveront certains aspects, notamment la nécessité de l’accord systématique entre théorie et expérience, et la confiance dans la capacité des mathématiques à traduire les phénomènes physiques les moins susceptibles a priori d’offrir de prise au calcul.

Les trois contributions du troisième chapitre s’intéressent tour à tour à la réception des travaux de Lambert sur la perspective et la géométrie de la règle, à l’inscription par Poncelet de ses propres travaux de géométrie projective dans l’histoire de la géométrie pure et, pour finir, à l’évolution du poids respectif des diverses branches de la géométrie en Grande-Bretagne entre 1750 et 1830. Loin d’une simple rupture en géométrie entre les deux siècles, il en ressort un mélange chez les géomètres du début du XIX^e siècle entre innovations et traditions, ces dernières pouvant correspondre à des continuités réelles ou à des constructions à des fins de justification.

Ce troisième chapitre s’ouvre avec l’étude que Christophe Eckes consacre aux travaux du savant mulhousien Lambert sur la perspective et la géométrie de la règle et leur réception au début du XIX^e siècle. Dans son ouvrage *La perspective affranchie de l’embarras du plan géométral* publié en 1759, simultanément en français et en allemand, Lambert propose, pour le dessin des figures en perspective, des méthodes nouvelles qui vont être adoptées dans l’enseignement de certaines académies d’art allemandes, comme celle de Berlin. Publiée en 1774, uniquement en allemand, la seconde édition de l’ouvrage contient une addition formée de quinze problèmes de géométrie à la règle seule pour laquelle Lambert a pu être considéré, jusque récemment dans l’historiographie, comme un « précurseur » de la géométrie projective de Poncelet. À la suite de l’historienne K. Andersen, selon laquelle Poncelet ne devait pas connaître le texte de Lambert au moment de l’élaboration de sa théorie, C. Eckes remet également en cause cette thèse continuiste en replaçant les recherches du savant sur la géométrie de la règle dans leur contexte historique spécifique : ses travaux originaux sur la perspective mais aussi la tradition des problèmes mathématiques récréatifs. D’après C. Eckes, Poncelet et Chasles sont eux-mêmes à l’origine de cette construction établissant Lambert comme l’un des précurseurs de leurs

théories, dans le but de promouvoir leur projet de nouvelle géométrie synthétique concurrençant la géométrie analytique. Si la thèse d'une filiation directe entre les travaux de Lambert et ceux de Poncelet apparaît ainsi artificielle, l'article montre aussi que la genèse de la géométrie projective s'est nourrie d'autres travaux de géométrie de la règle liés à des problèmes de géométrie pratique impliquant des données inaccessibles.

La contribution de Philippe Nabonnand se propose d'étudier l'argumentaire développé par Poncelet dans son *Traité des propriétés projectives des figures* (1822) pour légitimer la double rupture que le mathématicien introduit par rapport aux travaux antérieurs : rupture avec la tradition de la géométrie analytique, affirmée par l'intention de ne pas utiliser les moyens de l'algèbre, et rupture avec la pratique traditionnelle de la géométrie pure « des Anciens », associée à la volonté de développer la généralité de la géométrie synthétique. L'auteur montre que cet argumentaire repose paradoxalement sur des références à des traditions s'exprimant dans les travaux de ses prédécesseurs, des plus anciens aux plus récents : tradition euclidienne assurant la rigueur des démonstrations sur la figure primitive ; tradition newtonienne dans l'étude des coniques dont la théorie sert de terrain d'expérience aux nouvelles méthodes projectives ; principe « de continuité » pour étendre les résultats à une classe entière de figures. Pour justifier l'adoption de son principe de continuité dont la pertinence a été discutée par ses contemporains, notamment Cauchy, le principal argument du mathématicien consiste ainsi à montrer que ce même principe est déjà couramment utilisé depuis longtemps en géométrie analytique. S'agissant de son programme de recherche en géométrie, la revendication de nouveauté assumée par Poncelet va donc étroitement de pair, selon P. Nabonnand, avec la volonté d'inscrire son approche dans des traditions géométriques, et plus largement, dans un héritage mathématique nécessaire au mathématicien pour faire la preuve de la rigueur et de la généralité de ses méthodes.

Dans la dernière contribution de ce chapitre, Olivier Bruneau explore le sujet, encore peu étudié, de l'évolution de la géométrie et de ses différentes branches en Grande-Bretagne, entre la mort de Maclaurin et le début de l'ère victorienne. Au regard de la problématique de l'ouvrage, le thème paraît d'autant plus intéressant que le poids de la tradition géométrique classique est souvent avancé pour expliquer l'image de déclin et de marginalisation traditionnellement associée aux mathématiques britanniques au cours de cette période – image récemment discutée pour ce qui concerne l'analyse mathématique. Sur la base d'un corpus constitué à partir d'un recensement le plus complet possible des ouvrages et articles (dans les périodiques comme dans les encyclopédies) traitant de géométrie entre 1750 et 1830, O. Bruneau livre une première cartographie des travaux britanniques de la période, d'abord présentée en fonction des types de

géométrie développés (géométrie classique, géométrie pratique et perspective, géométrie descriptive, application de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie), puis analysée à la lumière des différents lieux et modes de production et de diffusion de la géométrie identifiés. De là, plusieurs tendances se dessinent. La période paraît en premier lieu marquée par une incontestable prégnance de la géométrie classique, notamment dans l'enseignement, s'appuyant sur une tradition insulaire mais aussi sur la réception d'ouvrages continentaux au début du XIX^e siècle. Le domaine de l'application de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie n'est cependant pas absent au XVIII^e siècle, notamment à partir des années 1770, même si les publications en la matière augmentent de façon spectaculaire au début du XIX^e siècle sous l'influence continentale. Comme c'est le cas pour l'analyse mathématique, la cartographie ainsi établie montre aussi la forte réactivité du milieu écossais, qui intègre très rapidement les sources du Continent, dont les *Éléments de géométrie* de Legendre dès les premières années du XIX^e siècle, suivis de près par la géométrie descriptive de Monge, qui fait l'objet d'articles dans les encyclopédies dès la décennie 1810. Il faut cependant attendre les années 1820 pour voir apparaître des ouvrages entièrement consacrés à la géométrie « algébrique ». Très proches du milieu écossais, les académies militaires et le riche corpus encyclopédique britanniques semblent, ici encore, devoir jouer un important rôle de relais entre la Grande-Bretagne et le Continent à la charnière des deux siècles.

Les trois contributions du quatrième et dernier chapitre abordent la question complexe des rapports entre analyse, algèbre et arithmétique au travers d'un thème commun, celui du formel et du numérique. La première étude porte, dans ce cadre, sur le développement d'une théorie des différences finies en France et en Grande-Bretagne, la deuxième sur l'évolution des travaux sur la résolution numérique des équations au cours du second XVIII^e et du premier XIX^e siècle. Elles mettent toutes deux en lumière plusieurs éléments allant à l'encontre des arguments souvent avancés pour marquer la rupture radicale entre les deux siècles : le rôle du formalisme algébrique dans le second XVIII^e siècle français et son renforcement dans le premier XIX^e siècle britannique ; les préoccupations de calcul numérique et de convergence des procédés d'approximation tout au long de la période ; le souci de rigueur et son évolution ; la constitution au XVIII^e siècle de nouvelles branches de l'analyse pure. La dernière étude aborde le numérique en lien avec la théorie des nombres, souvent considérée comme emblématique de l'autonomisation des mathématiques pures au début du XIX^e siècle, en la replaçant dans le cadre plus général de l'évolution des recherches en arithmétique et de leurs liens avec l'algèbre et l'analyse entre 1750 et 1850.

La première contribution traite de l'évolution du statut du calcul aux différences finies dans la recherche et l'enseignement mathématiques du

XVIII^e siècle jusqu'au milieu du XIX^e. Attentif aux circulations entre la Grande-Bretagne et le Continent, Jean-Pierre Lubet décrit une histoire en trois étapes dont il montre que les articulations mutuelles ne peuvent être comprises qu'à la lumière des passages de témoin qui se jouent entre un côté et l'autre de la Manche. À une première étape, au XVII^e siècle et dans la première moitié du XVIII^e, au cours de laquelle de premiers résultats émergent progressivement chez certains mathématiciens britanniques, succède une deuxième étape qui voit, dans la seconde moitié du XVIII^e siècle, le calcul aux différences finies se constituer sur le Continent comme une branche à part entière de l'analyse mathématique, avec son corpus théorique et ses nombreuses applications notamment au calcul numérique ; les mathématiciens anglais de la première moitié du XIX^e siècle réutilisent alors sélectivement ces mêmes travaux, au cours d'une troisième étape, pour développer leur propre théorie du calcul aux différences finies. Les transitions entre ces trois périodes révèlent, selon J.-P. Lubet, des mouvements de transfert et de réappropriation associés au développement et au déclin successifs de la thématique sur le Continent ou en Grande-Bretagne. Ni rupture radicale, ni continuité simple, l'histoire du calcul aux différences finies à la charnière entre le XVIII^e et le XIX^e siècle présente donc plutôt l'exemple d'une bifurcation d'un calcul continental vers un calcul britannique qui se construit sur cet héritage du second XVIII^e, mais en y privilégiant des méthodes symboliques, celles d'Arbogast, simultanément mal perçues par les mathématiciens français du début du XIX^e siècle, qui choisissent un autre chemin.

Dans sa contribution, Jean-Luc Chabert s'intéresse à un point important du domaine de l'analyse numérique : le problème de la résolution approchée d'équations algébriques dont les coefficients sont des nombres réels donnés. Après une première étape consistant à localiser et séparer les racines, la résolution numérique des équations est obtenue en général par des approximations successives fournissant des suites de nombres convergeant plus ou moins vite vers les racines cherchées. Comme le montre l'auteur, l'histoire de ce problème entre le milieu du XVIII^e et le milieu du XIX^e siècle s'articule autour de quatre méthodes principales à partir desquelles on peut suivre l'évolution, sur le temps long, de deux questions essentielles : la suite des valeurs approchées converge-t-elle vers la racine cherchée et, dans ce cas, peut-on maîtriser le degré de l'approximation et mesurer la rapidité de la convergence ? Sur les quatre méthodes, deux présentent peu d'évolution sur la période pour des raisons différentes : la résolution à l'aide des fractions continues, que Lagrange établit d'emblée de façon rigoureuse en 1769 mais dont la convergence est lente, et la méthode des séries récurrentes de Daniel Bernoulli, qui reste peu ou prou dans l'état dans lequel la laisse Euler en 1748, malgré les travaux que lui consacre Fourier en 1831, à savoir sans démonstration ni

mesure de sa convergence. Le développement des deux autres méthodes présente en revanche des dynamiques différentes. Celle de Newton-Raphson, héritée des travaux britanniques du second ^{xvii}e et du premier ^{xviii}e siècle, se voit dotée d'une évaluation précise de sa convergence par Fourier en 1818 – soit cinquante ans après l'établissement, par Mouraille, en 1768, des conditions de cette convergence dans un cadre géométrique. La méthode des développements en série, initiée grâce à l'établissement d'une « formule d'inversion » établie de façon formelle par Lagrange en 1770, fait montre d'une évolution progressive, avec des démonstrations de convergence dans des cas particuliers au ^{xviii}e siècle et un résultat général sur la convergence de la série et la majoration de l'erreur obtenu seulement dans les années 1830 par Cauchy grâce à l'analyse complexe. Ainsi, dans ce domaine de la résolution numérique des équations, une grande continuité apparaît dans les problèmes posés et les méthodes utilisées pour les résoudre même si des progrès substantiels sont effectués dans la période tant en ce qui concerne les démonstrations de convergence que les techniques d'évaluation des erreurs.

Jenny Boucard clôt ce quatrième et dernier chapitre par un article où elle discute le récit historique qui présente la théorie des nombres comme marquée par une rupture radicale en 1801 avec la publication des *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, rupture qui aurait induit dès la première moitié du ^{xix}e siècle le contenu univoque d'une nouvelle discipline centrée sur les congruences, la théorie algébrique des nombres et celle des formes. Prolongeant les critiques récemment formulées contre cette thèse dans un ouvrage consacré à la réception de l'ouvrage de Gauss, l'auteure se propose de mettre en évidence la grande diversité des pratiques arithmétiques à l'œuvre dans la première moitié du ^{xix}e siècle et de montrer comment cette diversité ne se comprend que par l'existence de traditions remontant au second ^{xviii}e siècle. Elle s'appuie, pour ce faire, sur l'étude d'un corpus d'environ 250 références construit à partir du relevé systématique, dans les différentes publications de la période 1801-1850, des occurrences de la notion de congruence introduite par Gauss, ainsi que de celle de résidu qui y est associée. La multiplicité des pratiques en théorie des nombres apparaît particulièrement sur la scène française jusqu'alors insuffisamment étudiée, avec notamment les travaux de Cauchy dans les années 1830-1840. Ce corpus permet aussi d'analyser la façon dont cet ensemble de textes du premier ^{xix}e siècle réfèrent aux travaux du ^{xviii}e et se positionnent par rapport eux. L'analyse de J. Boucard conduit ainsi à la mise en lumière d'au moins deux filiations principales entre les deux siècles : l'une issue des travaux de Lagrange et de Legendre, axée sur l'étude des équations indéterminées à l'aide de méthodes algébriques ou analytiques, l'autre reliant Euler et Gauss, centrée sur l'usage de notions et de méthodes arithmétiques spécifiques, comme les résidus et les congruences.

Finalement, ces contributions laissent paraître de nombreuses continuités et ruptures asynchrones entre le XVIII^e et le XIX^e siècle, de même que le rôle important, et souvent négligé, de différents phénomènes de transferts et de recomposition de méthodes, d'objets et de traditions entre les deux siècles, ici observés grâce à des changements d'échelles culturels, géographiques et disciplinaires entre la France, la Grande-Bretagne, l'Allemagne, entre l'analyse, l'algèbre, l'arithmétique, la géométrie, leurs applications, ou leurs interactions. Ces dynamiques historiques, scientifiques et sociales plus complexes que ne le sous-tend l'idée de rupture radicale entre le XVIII^e et le XIX^e, appellent à leur tour de nouvelles recherches pour poursuivre ce travail de remise en question de la présentation standard et de la périodisation qui lui est associée en histoire des mathématiques.

C. G. et A. G.

CHAPITRE 1

La place des mathématiques
et des mathématiciens :
recherche, enseignement, diffusion

La guerre de Sept Ans (1756-1763) et ses conséquences pour les écoles militaires françaises

Liliane ALFONSI et Alexandre GUILBAUD

La guerre de Sept Ans, qui se déroule de 1756 à 1763, peut être considérée, à bien des égards, comme un événement majeur et mondial aux conséquences importantes et durables, non seulement sur les finances et l'organisation des différents États belligérants mais aussi sur leur rayonnement et leur puissance. Elle oppose deux coalitions, l'une formée par la France, l'Autriche, l'Espagne, la Russie et la Suède, l'autre constituée de la Grande-Bretagne, de la Prusse et du Portugal. Certaines de ces puissances possédant des territoires sur d'autres continents, la guerre de Sept Ans se déroule aussi bien sur terre que sur mer, et non seulement en Europe, mais aussi en Amérique du Nord et du Sud, en Afrique et en Asie.

La France sort vaincue et humiliée de cette guerre, à la fois sur le plan maritime, où la marine française, indéniablement inférieure à la marine britannique, se voit presque totalement anéantie, et sur le plan terrestre, où la supériorité de l'armée prussienne de Frédéric II s'affirme nettement. Le 10 février 1763, le Traité de Paris signe l'abandon aux Anglais de toutes les possessions françaises d'Asie (en dehors des cinq comptoirs de l'Inde), de l'Amérique du Nord et du Sénégal. Le 15 février, le traité de Hubertsbourg met fin au conflit sur le continent européen et, si la France n'y perd aucun territoire, il entérine néanmoins la défaite de son armée de terre. Le constat est surtout accablant pour la marine française : la destruction de la flotte par les navires anglais, l'indiscipline et les erreurs des commandants de vaisseaux rendent indispensables sa reconstruction en même temps que la réorganisation de la formation de ses officiers.

Étienne-François de Choiseul, ministre de la Marine et de la Guerre depuis 1761¹, va mettre à profit le temps de paix ouvert par la signature des deux traités pour reconstruire l'outil militaire français. Nous nous intéresserons ici aux conséquences de ses réformes sur l'évolution des conditions de recrutement et des formations en mathématiques dans les écoles militaires françaises de l'Artillerie, du Génie et de la Marine. Notre étude, qui

1. Il demeure ministre de la Marine jusqu'en 1766 et de la Guerre jusqu'en 1770.

s'appuie pour ce faire sur plusieurs travaux existants², approfondira en particulier la question du lien entre enseignement et recherche qui émerge dans ce contexte de l'après guerre de Sept Ans.

I. La remise en question de la noblesse comme critère de recrutement

L'une des conséquences de la guerre de Sept Ans sur les écoles militaires est la tentative de remise en cause du préalable de noblesse dans le recrutement des élèves-officiers des différents corps. Cette contestation ne prend cependant pas la même forme dans la Marine, le Génie ou l'Artillerie. C'est dans la Marine que le critère de noblesse est le plus fort et le plus strict, et c'est aussi ce corps qui a montré les plus grandes faiblesses face à l'ennemi.

1. Dans la Marine

Depuis 1689, les compagnies des Gardes du Pavillon et de la Marine – futurs officiers navigants de ce corps – ne sont accessibles qu'aux nobles gentilshommes, c'est-à-dire aux nobles possédant quatre degrés de noblesse en ligne paternelle (le garde, son père, son grand-père paternel et le père de ce dernier doivent tous être nobles). Les multiples défaites maritimes de la guerre de Sept Ans, souvent causées ou favorisées par l'incompétence des capitaines de vaisseaux et par l'impunité due à leur rang, et surtout le désastre des Cardinaux en 1759³, sont à l'origine d'une remise en question de ce préalable de noblesse dans le recrutement des officiers. Divers mémoires en témoignent⁴ : de plus en plus nombreux après la capitulation française, ces documents transmis à Choiseul pointent les défauts du recrutement et de la formation des Gardes ; les passages que l'on y trouve soulignés ou annotés de la main même du ministre illustrent son intérêt et son adhésion à ces critiques.

Un écrit de 1763 détaille ainsi les imperfections auxquelles, selon l'auteur, il faudrait remédier. En plus de l'instruction à donner aux Gardes, le problème du recrutement exclusif de la noblesse est abordé : on ne sauvera pas la Marine française « à moins qu'il n'y ait absolument que le mérite qui

2. Voir, notamment, l'ouvrage dirigé par R. Taton [1964 (dir.)], les travaux de D. Julia [1989, 1995], M. Vergé-Franceschi [1999], P. Bret [2002], L. Ferreiro [2007] et L. Alfonsi [2011, à paraître].

3. La bataille des Cardinaux, qui se déroule le 20 novembre 1759 dans la baie de Quiberon, constitue l'une des plus importantes défaites de la flotte française face à la marine britannique.

4. Voir, pour d'autres exemples, [Julia 1989, p. 57-62] et [Alfonsi à paraître].

soit admis » et la noblesse n'en est pas un critère : « Je dirais franchement que les Gardes de la Marine est un corps de gentilshommes, où il se trouve beaucoup de la plus haute noblesse ; ils sont tous de très braves gens ; mais je dirai hautement que cela n'est pas suffisant, que la bravoure d'un marin sans expérience ne doit être comptée pour rien » [AN-Marine, G/122, f. 207v]. La marine, poursuit-il, est dans le pire état « depuis qu'on a cru que la naissance seule était un titre bien suffisant pour des hommes de mer sans pratique, et que ce préjugé a fait donner l'exclusion et fermer la porte au vrai mérite [...] voilà la vraie source de nos maux, et si les Duquesne, les Jean Bart et les Duguay-Trouin ont été des prodiges, ils l'ont été doublement pour avoir percé au travers de cette basse jalousie qui ne cherchait qu'à les faire échouer parce qu'ils étaient nés roturiers [...] par l'ordre de rang, vous mettez un homme inepte au niveau du mérite » [*Ibid.*, f. 211-219]⁵.

En 1764, un rapport rédigé par Rodier, premier commis à la Marine, reprend ces critiques pour influencer les décisions finales de Choiseul qui s'apprête à publier une ordonnance pour réorganiser les écoles de Gardes de la Marine :

« La navigation deviendrait une ressource immense dans l'état : tant pour le pauvre gentilhomme qu'on néglige et abandonne, que pour le noble et le jeune homme de famille honnête que le service de terre adopte sans répugnance et sans dédain et que la constitution de la Marine rejette et avilit. [...] Sans la constitution de la Marine qui n'admet que des gentilshommes, la navigation en France serait mieux établie et plus encouragée [...] Le métier de la mer est un métier dur, un métier qui veut que l'on soit dur pour soi, et par là un métier presque roturier » [*Ibid.*, f. 92-105].

Choiseul, qui prend la question très au sérieux, écrit un premier projet [AN-Marine, G/127] qui prouve son adhésion aux arguments évoqués. Mais cela ne se retrouvera pas dans le texte final de l'ordonnance : « Le choix des Gardes de la Marine sera fait par Sa Majesté ; il n'en sera reçu aucun, s'il n'est Gentilhomme » [SHMV, cote ms 73, t. 98, 2^e semestre 1764]. Malgré sa propre opinion et ses idées éclairées, le ministre a donc cédé aux pressions de la noblesse dont il fait lui-même partie⁶.

5. Dans toutes les citations de l'article, les passages en caractères italiques sont soulignés par nous, alors que les passages soulignés par un trait le sont dans le texte d'origine.

6. L'exigence de noblesse sera abandonnée le temps de la brève existence de l'École du Havre, créée en 1773 et supprimée en 1775. Voir [Julia 1989, p. 69-75] et [Alfonsi à paraître].

*2. Dans le Génie et l'Artillerie*⁷

Dans le Génie et l'Artillerie le préalable de noblesse pour le recrutement n'est ni exprimé ni appliqué de la même façon que dans la Marine. L'auteur d'un mémoire de 1761 sur les défauts du recrutement dans la Marine écrit : « On reçoit tous les jours dans des régiments de terre, des fils de négociants, de médecins, d'avocats, de capitaines même, tandis qu'on refuse aux enfants du même état [...] de les admettre au service de mer » [AN-Marine, G/122, f. 9-10]. Le premier commis à la Marine Rodier, nous l'avons vu plus haut, donnait de même le service de terre en exemple. Cela peut expliquer l'absence, dans les archives du Génie et de l'Artillerie, de mémoires semblables à ceux que recevait Choiseul de la Marine.

Issue d'une autre guerre, celle de succession d'Autriche (1740-1748), qui avait montré l'insuffisance de la formation des ingénieurs militaires, l'École royale du Génie, chargée de former le corps des ingénieurs du Roi, était créée à Mézières le 10 mai 1748, ouvrant ses portes à tout jeune homme « né sujet du roi, âgé de quinze ans révolus et issu de famille honnête » [SHAT, 2/G/126], capable de réussir le concours d'entrée basé sur les mathématiques. Sa brève réunion avec l'École royale d'Artillerie, de 1756 à 1758, conduit à un changement dans son recrutement qui devient, comme dans l'Artillerie, en principe réservé à la noblesse.

La guerre de Sept Ans change cependant la donne en augmentant les besoins d'Ingénieurs du Roy : l'ordonnance du 4 décembre 1762 fait passer le nombre d'élèves recrutés de trente à cinquante et cette augmentation entraîne, non une baisse du niveau du concours d'entrée, mais une plus grande démocratisation du recrutement. L'ordonnance demande en effet que les candidats fournissent au ministre de la Guerre :

« leur extrait de baptême, et un mémoire précis & circonstancié de l'état actuel de leur famille, des charges qu'elle possède ou qu'elle a possédées, & dans lequel il sera spécifié si leurs parents ont servi & dans quel corps ils ont servi, afin que sur le rapport qui en sera fait à Sa Majesté, Elle accorde ou refuse aux sujets proposés, la permission de subir l'examen » [Ordonnance 1762, p. 2-3].

On est loin de la qualité de gentilhomme, exigée par la Marine, ou même de preuves patentes de noblesse. En 1769, par exemple, sur 43 sujets autorisés à passer l'examen d'entrée, 16 seulement sont des nobles.

7. Nous ne parlerons pas de l'École militaire de Paris, fondée en 1751 et réservée à cinq cents jeunes gentilshommes sans fortune – priorité étant donnée à ceux dont le père était mort à la guerre. En effet, cette école ne concernait pas des jeunes gens mais des enfants qui choisissaient, à la fin de leur scolarité, soit de présenter le concours des écoles du Génie ou de l'Artillerie, pour les meilleurs, soit d'entrer dans l'infanterie ou la cavalerie. Si elle donnait ainsi l'exclusivité aux gentilshommes, elle ne pénalisait pas les roturiers dans les recrutements d'officiers. Voir [Hahn 1964a].

L'École royale d'Artillerie fondée à La Fère en 1756 est créée au début de la guerre de Sept Ans pour améliorer le niveau des artilleurs en l'alignant sur la même exigence au concours d'entrée et les mêmes études scientifiques que les ingénieurs du Génie. Il est demandé aux candidats de fournir des preuves de noblesse mais, outre que la qualité de gentilhomme n'est pas exigée, on se contente de témoignages attestant que la famille du candidat vit « noblement » [SHAT, 1/W/62].

La guerre de Sept Ans amplifie le recrutement de roturiers sous l'impulsion de Jean-Baptiste Vaquette de Gribeauval, nommé inspecteur général de l'Artillerie en 1764. Dès 1763, ce dernier propose à Choiseul de « réduire à peu de choses les droits de l'ancienneté, anéantir ceux de la protection, donner toutes faveurs aux talents supérieurs et les initier au commandement » [Nardin 1982, p. 117]. Chargé en 1765 de la modernisation du corps de l'Artillerie, il fait réserver la moitié des places de lieutenant (grade obtenu par les élèves de l'École d'Artillerie à leur sortie) à des sous-officiers (non nobles) ayant suivi des cours de mathématiques.

II. Les conséquences de la guerre de Sept Ans sur l'organisation et le contenu de l'enseignement en mathématiques

Le 11 avril 1748, le comte d'Argenson, ministre de la Guerre, envoie une circulaire aux Directeurs des Fortifications afin que les futurs ingénieurs du Génie reçoivent une instruction contenant davantage de savoirs théoriques, alliés à un véritable apprentissage de terrain et à un renforcement de l'enseignement du dessin. L'École de Mézières, fondée le mois suivant, est la première école militaire exigeant un concours d'entrée. L'examineur, qui est aussi le rédacteur du cours de mathématiques de l'école, n'est pas choisi parmi les militaires mais, pour assurer l'indépendance de l'examen et un haut niveau scientifique, parmi les membres de l'Académie des sciences : c'est Charles-Étienne-Louis Camus, académicien et professeur de mathématiques à l'Académie d'architecture, qui est nommé.

Cette structure donnant entière satisfaction, elle est étendue en 1756 au moment de la création de l'École royale du Génie et de l'Artillerie à La Fère. Après la séparation des deux corps en 1758, l'école du Génie retourne à Mézières laissant celle de l'Artillerie à La Fère avec le même principe de recrutement, le même examinateur, Camus, et le même cours rédigé par ce dernier. Cette extension à l'Artillerie des principes de l'École du Génie, est due à Gribeauval qui, envoyé en mission en Prusse en 1754, avait noté la supériorité des artilleurs prussiens et voulait, sentant la guerre proche, améliorer le niveau des artilleurs français, tâche qu'il poursuivra après la défaite de 1763.

Contrairement au Génie et à l'Artillerie, les écoles des Gardes du Pavillon et de la Marine n'avaient connu aucun changement depuis leur

création par l'ordonnance du 15 avril 1689 dans les trois ports de Brest, Toulon et Rochefort. Elles auraient pu avoir un niveau scientifique correct, puisque le programme prévu par l'ordonnance, qui comportait l'arithmétique, la géométrie, la maîtrise du compas et des instruments astronomiques, était assez complet pour l'époque. Néanmoins, comme l'explique R. Hahn, « ce qui en principe aurait dû aboutir à un enseignement scientifique avancé, ne mena en fait qu'à un résultat médiocre. Les archives sont remplies de rapports se plaignant de la disparité entre le texte des ordonnances et leur application » [1964b]. Ces rapports portent sur le manque d'uniformité des connaissances des élèves selon les ports, l'hétérogénéité du niveau dans les classes, l'insuffisance des locaux, l'absence de cours imprimés et d'instruments nautiques, une discipline extrêmement défailante, etc. En 1749, Maurepas, ministre de la Marine, tente d'homogénéiser les enseignements des trois ports en demandant au père Du Chatelard, enseignant de mathématiques à Toulon, de rédiger un cours qui serait utilisé dans les trois écoles ; mais, outre que ce cours semble avoir été d'un niveau consternant, il ne fut utilisé ni à Brest ni à Rochefort [Vergé-Franceschi 1999, p. 247]. L'entrée dans les écoles se fait sans examen, et seule l'ancienneté décide de l'avancement. Comme les cours, le niveau requis pour le passage d'une classe (prévue pour durer un an) à l'autre et l'indulgence dans l'attribution des grades en fin d'études dépendent du port dans lequel l'élève est placé. On le voit, des trois corps c'est la Marine qui exige le changement le plus radical et c'est donc ces écoles que Choiseul choisit de réformer après la défaite de 1763. Ce changement touchera aussi, nous le verrons, le domaine de l'architecture navale.

1. Les changements dans la Marine

LES ÉCOLES DES GARDES DU PAVILLON ET DE LA MARINE

Après le Traité de Paris, certains, citant les grands marins d'autrefois, Jean Bart, Abraham Duquesne, vainqueurs sans avoir fait d'études, accusent le manque de pratique des officiers d'être la cause de la défaite, tandis que d'autres incriminent leur incapacité théorique. Bigot de Morogues, directeur de l'Académie de Marine, défend, avec d'autres académiciens, la formation théorique. Or, ce dernier est forcément convaincant : officier d'artillerie passé à la Marine en 1736, il a prouvé ses qualités de scientifique en améliorant l'aération et la ventilation des bateaux⁸ et de commandant lors de la bataille des Cardinaux – son vaisseau, le « Magnifique », fut l'un des

8. Maurepas, ministre de la Marine de 1723 à 1749, lui avait confié cette tâche. Le manque d'aération à l'intérieur des bateaux créait un vrai problème de santé pour les marins [Carré 1984].

rares à se battre efficacement contre les Anglais. Choiseul prend le parti des théoriciens et l'« Ordonnance du Roi concernant les Gardes du Pavillon et de la Marine » du 14 septembre 1764, va radicalement changer l'organisation des écoles et leur enseignement. Tout en faisant preuve de souci pédagogique⁹, elle recommande de pousser la formation scientifique le plus loin possible pour les meilleurs : « Si quelques gardes, après avoir fini le cours d'obligation, veulent étendre plus loin leurs connaissances, le commandant prescrira aux maîtres de leur en faciliter l'étude par des leçons particulières » [SHMV, ms 73, t. 98]. L'ordonnance impose surtout le même cours aux trois écoles – « Il sera composé, par ordre de Sa Majesté, un cours d'éléments des différentes sciences qui conviennent au service de la marine ; cet ouvrage sera commun aux 3 ports, il servira de point fixe aux examens que sa majesté se propose d'établir ; et par cette unité d'instruction, les gardes qui changeront de département, reprendront facilement le cours de leurs études » [*Ibid.*] – et prévoit la nomination d'un examinateur indépendant : « Il sera envoyé chaque année, par ordre de Sa Majesté, un examinateur pour interroger les gardes de chaque classe. Cet examen sera fait publiquement en présence des commandants des ports et des commandants de chaque compagnie » [*Ibid.*]. Par ailleurs elle organise la scolarité sur trois ans et impose la réussite à l'examen pour passer d'une classe à l'autre, ainsi que le principe d'avancement au mérite [*Ibid.*, art. LXXIX, LXXXIII-LXXXIV]. L'ordonnance établit donc le rôle fondamental des études théoriques pour les officiers de la marine et Choiseul prend exemple sur les écoles du Génie et de l'Artillerie, qui sont aussi sous sa responsabilité, en créant des examens. Seule différence, mais de taille, il ne prévoit pas d'examen d'entrée.

Comme dans les autres corps, l'examineur et la personne chargée de composer le cours ne seront qu'un seul et même homme : Étienne Bézout. S'il s'agit, comme Camus, d'un mathématicien reconnu, membre de l'Académie des sciences, Bézout n'a en revanche que 33 ans lorsqu'il est nommé à ce poste le 1^{er} octobre 1764¹⁰. Outre ses qualités scientifiques, il a déjà l'habitude des examens et des cours dans les autres corps puisque, depuis 1761, il dispense avec l'abbé Nollet des enseignements de physique expérimentale à La Fère et à Mézières et aide parfois Camus à faire passer les examens dans ces mêmes écoles.

9. « Pour éviter la confusion, faire en sorte que tous les gardes soient occupés, ne donner à chaque maître que le nombre de gardes qu'il peut instruire, proportionner les instructions à leurs connaissances ; les compagnies seront divisées en plusieurs détachements, observant autant qu'il sera possible que les gardes destinés à prendre leçons ensemble, soient de même capacité » [SHMV, ms 73, t. 98].

10. Camus est âgé de 49 ans quand il est désigné examinateur et rédacteur de cours pour le Génie, et de 57 ans quand on lui attribue les mêmes charges pour l'Artillerie.

Le cours annoncé par l'ordonnance royale sera en fait un cours de mathématiques, ce qui n'est pas anodin. Il illustre la volonté de Bézout de mathématiser tous les savoirs scientifiques, sans se contenter de textes uniquement descriptifs et de modes d'emploi. Son *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine* comprend cinq tomes en six volumes, publiés de 1764 à 1769 et respectivement dédiés à l'arithmétique (1764), la géométrie et la trigonométrie (1765), l'algèbre (1766), la mécanique (2 vol., 1767) et la navigation (1769).

Bézout organise l'emploi du temps des élèves en prévoyant, pour chaque classe et chaque jour, deux heures de mathématiques ; et en sus, pour les deuxième et troisième classes, une heure de pilotage (mathématiques appliquées à la navigation) et une heure de construction (application de la mécanique et de l'hydrostatique). Son cours de mathématiques, qui forme à lui seul le programme théorique des trois années des écoles, va en élever très sensiblement le niveau et tout de suite connaître un énorme succès bien au-delà de la Marine et de l'armée en général. Ce succès ne se démentira pas pendant près d'un siècle, comme le prouvent ses innombrables rééditions et traductions en langues étrangères¹¹.

LE COURS POUR LA MARINE DE BÉZOUT : UNE NOUVELLE CONCEPTION D'UN COURS DE MATHÉMATIQUES

En quoi ce cours est-il novateur ? Il l'est d'abord par son contenu. Sans parler du dernier volume, spécifique à la Marine, les quatre premières parties constituent le cours de mathématiques générales le plus complet jamais publié jusque-là. Bézout est le premier à ajouter le calcul différentiel et intégral aux trois parties traditionnellement abordées par les autres auteurs, l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie. Il y introduit aussi les mathématiques appliquées qui ne faisaient jamais partie d'un cours de mathématiques générales et étaient, éventuellement, abordées de façon très élémentaire dans des traités à part. Seul Camus avait joint un volume de mécanique, mais qui ne traitait en fait qu'une partie de la statique, essentiellement appliquée à l'architecture. Bézout étudie quant à lui la statique, la dynamique et la mécanique des fluides en utilisant le calcul différentiel et intégral. En dehors de l'arithmétique et de la géométrie, dont le contenu reste très classique, son cours est aussi bien plus riche en algèbre, domaine de recherche privilégié du savant, nous y reviendrons.

Novateur, ce cours l'est aussi par sa présentation. Chaque notion ou résultat est accompagné de nombreux exemples et applications détaillés et, quand c'est possible, concrets. Le parti pris de simplicité, dans l'expression et dans le fait de considérer certaines notions intuitives comme évidentes,

11. Voir [Alfonsi 2011, p. 236-238 et 339-348].

est très poussé chez Bézout. Il est alors le seul, avec Clairaut, à soulever des questions de pédagogie dans les préfaces de ses cours. Il faut aussi remarquer la présentation matérielle totalement nouvelle, qui distingue explicitement résultats de bases et approfondissements. En permettant une lecture de ses livres à plusieurs niveaux, Bézout adapte son cours à chacun, au débutant comme à l'initié, et élargit le public de ses lecteurs.

Enfin ce cours est aussi et surtout novateur dans la mesure où ce n'est pas seulement celui d'un enseignant, mais aussi celui d'un chercheur. Si ses deux volumes de mécanique se nourrissent des récents et difficiles ouvrages de d'Alembert sur le sujet – le *Traité de dynamique* (1^{re} éd., 1743 ; 2^e éd., 1758), auquel il a collaboré, et le *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* (1744) –, Bézout élève le contenu de son volume d'algèbre jusqu'au niveau de ses propres travaux sur les équations algébriques. D'une part, ses recherches récentes présentées à l'Académie en 1764 et 1765 [Bézout 1767b, 1768] apparaissent dans son *Algèbre* de 1766, et elles en portent, par là même, le niveau bien au-dessus de celui d'un cours classique. D'autre part, la volonté d'inscrire ses travaux dans son cours a obligé l'auteur à les reprendre, et c'est sans doute cela qui a abouti, non seulement à une amélioration notable – le degré de la résultante obtenue par le Bézoutien [Alfonsi 2011, p. 141-144] est au plus égal au produit des degrés des deux équations – mais aussi à une méthode, celle de l'extension du Bézoutien pour des degrés différents, qu'il n'avait pas réussi à obtenir dans son mémoire de 1764. Bézout donne donc la primeur de ce résultat à un manuel d'enseignement et non à un mémoire académique. L'enseignement et la recherche apparaissent pour la première fois complémentaires et s'enrichissent mutuellement : le premier, par la clarté et la précision qu'il demande aux méthodes, oblige parfois la seconde à se développer.

Dans le *Traité de navigation* [1769], Bézout fait de même état des techniques les plus récentes¹², et n'hésite pas, là aussi, à présenter le résultat de ses propres recherches, expérimentales cette fois-ci. En 1767, l'Académie lui confie l'étude d'une nouvelle lunette pour calculer la longitude grâce aux satellites de Jupiter ; on retrouve dans son cours cette expérimentation et les conclusions qu'il en a tirées. En 1769 il informe l'Académie de Marine, dont il est également membre, qu'il effectue des recherches sur les erreurs commises dans la lecture d'un octant et qu'il donnera une table de ces erreurs dans son *Traité de navigation* – ce qui sera effectivement le cas.

On peut d'ailleurs noter que le ministre Choiseul, comme son successeur (le duc de Choiseul-Praslin, son cousin) sont prêts à financer des recherches pour améliorer la Marine royale, et soutiennent donc Bézout

12. Pour le calcul de la longitude notamment, avec l'étude des satellites de Jupiter, sujet du prix de l'Académie des sciences en 1766, et le calcul par les distances lunaires, perfectionné régulièrement par cette même Académie dans ses éphémérides.

dans ses démarches. Choiseul écrit en 1766 aux commandants des ports de Brest, Rochefort et Toulon où le mathématicien va venir faire passer les examens des élèves :

« [Bézout] pourra avoir l'occasion de faire dans le port, diverses observations et expériences sur la mécanique et l'hydraulique ainsi que sur d'autres parties intéressantes de la marine. Je vous prie également de lui procurer toutes les facilités qui dépendront de vous. » [SHMB, 1/A/107]

En 1768, grâce à l'appui de Bézout¹³, Thévenard, capitaine du port de Lorient, obtient 5000 livres de Choiseul-Praslin pour conduire de nouvelles expériences sur la résistance des fluides à partir de celles réalisées par Borda en 1763¹⁴.

En nommant examinateur et rédacteur du cours, un mathématicien, académicien de surcroît, et totalement indépendant des milieux maritimes, Choiseul élève ainsi le niveau théorique des officiers de marine, et rend les examens les plus impartiaux possibles.

L'ÉCOLE DES INGÉNIEURS CONSTRUCTEURS DE LA MARINE

Si la guerre de Sept Ans conduit aussi à des changements importants dans le domaine de l'architecture navale, la première évolution marquante en matière d'enseignement remonte à l'année 1741, avec la création d'une « petite école de marine » à Paris, par le botaniste Henri-Louis Duhamel du Monceau, membre de l'Académie des sciences depuis 1728, et nommé Inspecteur général de la Marine en 1739. Mise en place grâce au soutien du ministre Maurepas, installée chez les propres parents de Duhamel du Monceau avant de migrer à l'Imprimerie royale en 1738, puis au Palais du Louvre en 1753, l'école vise à assurer l'éducation de quelques jeunes constructeurs (souvent hommes de l'art) sélectionnés sur les chantiers navals et dotés d'une pension le temps de leur formation à Paris. Duhamel fait appel aux services de Camus pour les mathématiques, à ceux du célèbre constructeur Blaise Ollivier pour la partie pratique de l'instruction¹⁵, et entame la rédaction de ses *Éléments de l'architecture navale, ou Traité pratique de construction*

13. Celui-ci écrit au duc de Choiseul-Praslin : « Il est constant que pour établir une bonne théorie des fluides, et, par conséquent les principes de la construction des vaisseaux, il faut avoir recours à l'expérience. Il n'est pas moins certain que ces expériences ne peuvent être concluantes qu'autant qu'elles seront faites en grand, qu'elles seront multipliées et exécutées par des personnes intelligentes et exercées. Celles que M. Thévenard médite, me paraissent propres à jeter du jour sur cette partie essentielle à la construction [...] Je pense donc monseigneur, que les fonds que vous voudrez bien lui accorder pour cet objet seront utilement employés. » [AN-Marine, G/101]

14. D'après [Montucla 1799-1802, t. IV, p. 442-448]. Selon [Mascart 1919, p. 83], ces expériences de Borda remonteraient aux années 1756-1757.

15. Voir [Duhamel 1749].

des vaisseaux, afin de fournir un manuel à ses élèves. Pour leur rendre l'ouvrage accessible, il explique s'y être rapproché autant que faire se peut des usages des constructeurs et de leur façon de calculer, et ajoute :

« J'ai aussi évité, autant que je l'ai pû, d'avoir recours aux principes de Mathématique, non-seulement dans la vûe d'être plus utile à ceux qui n'ont que des connoissances superficielles de cette Science ; mais encore & principalement, parce que Mrs. Bouguer & Euler ont traité la partie Théorique de l'Architecture Navale d'une façon si élégante & si complète, qu'on est dispensé pour long-tems de travailler sur le plan qu'ils ont choisi. Les ouvrages de ces Mrs. seront utiles aux habiles Constructeurs, & le mien est consacré à l'instruction des jeunes gens ; un ouvrage de ce genre leur étoit nécessaire & manquoit entierement. » [Duhamel 1752, p. ij]

Si les mathématiques du *Traité du navire* de Bouguer [1746]¹⁶ et de la *Scientia navalis* d'Euler [1749], dont il est question ici¹⁷, ont donc disparu au profit du dessin et des règles élémentaires de l'arithmétique, Duhamel s'appuie cependant en divers endroits sur le traité de Bouguer dont il traduit (et discute parfois) le contenu sous une forme accessible aux élèves¹⁸. Il revendique d'ailleurs l'idée de complémentarité entre ces deux ouvrages théoriques et son propre traité, dont il espère qu'il « sera utile pour faciliter l'intelligence des sublimes spéculations » de Bouguer et d'Euler, et « mettre en état de faire une application précise des regles que ces grands Géometres ont établi [*sic*] » [Duhamel 1752, p. ij]. Ses *Elémens de l'architecture navale*, publiés en 1752, constitueront, avec les travaux théoriques de Bouguer, les principaux manuels de construction de l'école pendant plusieurs décennies¹⁹.

Après avoir été fermée en 1759 en raison des besoins en constructeurs sur les chantiers au moment de la guerre, l'existence de l'école se voit officialisée grâce à l'« Ordonnance du Roi, concernant les Ingénieurs-constructeurs de la Marine, du 25 Mars 1765 » [Ordonnance 1765], qui marque la volonté de Choiseul, suite à l'anéantissement de la flotte, de réformer le domaine de la construction en motivant notamment « de plus en plus l'étude des sciences qui font la base de cet art » [*Ibid.*, p. 2]. Cette ordonnance crée un nouveau corps, celui des Ingénieurs-constructeurs, et

16. Bouguer est une des références de Bézout dans les applications de son cours à la Marine : voir [Alfonsi 2010].

17. Sur ces deux traités, voir [Calero 2008, p. 143-149].

18. Au sujet, par exemple, de la détermination de la résistance éprouvée par le navire de la part du fluide, Duhamel indique que « M. Bouguer en fournit les moyens dans son Traité du Navire ; mais pour que les jeunes Constructeurs qui n'ont pas assez de Mathématiques [...] n'agissent point tout-à-fait en aveugles, il convient de précéder l'application des méthodes de M. Bouguer par quelques réflexions générales sur le choc des fluides contre les corps solides » [Duhamel 1752, p. 353].

19. Voir [Gille 1964, p. 478] et [Ferreiro 2007, p. 286].

indique qu'« un Ingénieur-constructeur en chef, deux ou trois Ingénieurs-constructeurs ordinaires, quatre ou six sous-Ingénieurs-constructeurs & quelques élèves » [*Ibid.*] seront établis dans chacun des trois ports militaires de Brest, Rochefort et Toulon. Pour être admis comme élève, il faut un minimum de seize ans, posséder des « principes d'arithmétique et de dessin » [*Ibid.*, p. 4], avoir suivi les ouvrages du port pendant au moins deux ans et passer avec succès un examen oral devant l'Ingénieur-constructeur en chef et tous les Ingénieurs-constructeurs ordinaires. Après deux autres années consacrées à suivre les ouvrages du port, l'élève est envoyé à l'école de Paris pour y étudier « l'Arithmétique, la Géométrie, les Mécaniques, l'Hydraulique, l'Algèbre & l'application de l'Algèbre à la Géométrie » [*Ibid.*, p. 5]. Lorsqu'il est jugé d'un bon niveau par le directeur de l'école (Duhamel du Monceau), l'élève passe un examen devant un examinateur nommé par le roi, et devient, en cas de succès, sous-Ingénieur-constructeur dès qu'un poste se libère. Le poste d'examineur est confié à Bézout, dont on étend ainsi les fonctions et dont le cours (sans le traité de navigation) servira aussi aux élèves ingénieurs-constructeurs [AN-Marine, C/7/29]. Comme pour les Gardes de la Marine, il est par ailleurs aussi envisagé de permettre aux meilleurs d'approfondir les matières étudiées : « Le directeur veillera [...] à ce que leurs études soient portées plus loin que les parties exigées ci-dessus, lorsqu'il reconnoitra dans les Élèves des dispositions plus étendues » [Ordonnance 1765, p. 5].

Le niveau scientifique ne cessera, de fait, de s'élever au cours des décennies suivantes. Si, dans le domaine de l'architecture navale, le *Traité du navire* de Bouguer et les *Éléments* de Duhamel du Monceau demeurent incontournables, d'autres seront, d'après L. Ferreiro [2007, p. 288], progressivement ajoutés au curriculum des élèves, notamment la traduction française commentée par Vial du Clairbois (1781) de l'*Architectura navalis mercatoria* du constructeur suédois Frédéric-Henri Chapman, la traduction, publiée par Pierre Levêque en 1773, de l'*Examen maritimo* (1771) du constructeur espagnol Jorge Juan y Santacilia ainsi que la *Théorie complete de la construction et de la manœuvre des vaisseaux, mise à la portée de ceux qui s'appliquent à la Navigation* d'Euler [1776]²⁰. L'utilisation de ces ouvrages conjuguant théorie et pratique témoigne de l'intégration progressive des dernières recherches en architecture navale et de l'application des mathématiques à ce domaine dans la formation des élèves²¹. Auteur d'un

20. Sur ces différents ouvrages, voir [Ferreiro 2007, chap. 5].

21. Duval-Leroy, professeur de mathématiques dans les écoles de Brest et du Havre (il est nommé à ce poste par Bézout : voir [Alfonsi à paraître]), est un exemple d'enseignant possédant un haut niveau en mathématiques (maîtrise du calcul différentiel et intégral des fonctions de plusieurs variables), ainsi qu'en témoignent ses articles dans les tomes II et III (1786-1787) de l'*Encyclopédie méthodique de Marine* [Guilbaud 2012, p. 392-397].

Traité élémentaire de la construction des Vaisseaux à l'usage des élèves de la Marine, composé & publié, d'après les ordres de Monseigneur le Maréchal De Castries, Ministre & Secrétaire d'État du Département de la Marine (1787), l'ingénieur-constructeur Vial du Clairbois insistera fortement, dans l'*Encyclopédie méthodique de Marine*, sur l'importance d'une double compétence du directeur de l'école en mathématiques et dans le domaine de la pratique, au point de recommander explicitement le choix d'un homme mieux formé que ne le fut Duhamel du Monceau²² :

« la perte de cet académicien célèbre, mais dont les études s'étoient portées plus sur la physique & l'histoire naturelle que sur les mathématiques : cette perte laisse la liberté d'un bon choix. Il y est question d'avoir des ingénieurs-constructeurs ou de n'en avoir pas. [...] il faut, dans le directeur, des connoissances très-approfondies en théorie ; d'un très-grand détail pour ce qui concerne la pratique » (*Encyclopédie Méthodique. Marine*, t. II, 1786, p. 139).

Restée vacante depuis la mort de Duhamel en 1782, la place d'inspecteur général des constructions et de directeur de l'école sera confiée deux ans plus tard à Borda (scientifique, marin et constructeur réputé²³), sur proposition de Blouin²⁴, premier commis du ministre de la Marine qui, dans sa requête au Roi, insiste sur la nécessité de nommer à ce poste « un Académicien profond en théorie, versé en même temps dans la pratique de la construction »²⁵.

La réforme de Choiseul de 1765 et l'action de ses successeurs semblent donc, ici aussi, avoir conduit à l'élévation sensible du niveau en mathématiques, en même temps qu'à la pénétration progressive de la recherche en architecture navale dans la formation des ingénieurs-constructeurs.

2. Les changements dans l'Artillerie et le Génie

Depuis 1756, l'instruction dans les écoles du Génie, de l'Artillerie et dans les régiments de ce dernier corps suivait, nous l'avons vu, le cours de Camus. Ce cours comprenait un volume d'arithmétique (1749), un de géométrie (1750) et deux de mécanique statique (1751). Camus devait aussi, par ordre du ministre d'Argenson, écrire un volume d'hydraulique, ce qu'il ne fit pas²⁶, et, d'après ses écrits, il comptait rédiger un volume

22. Quoique le second volume de l'*Encyclopédie méthodique de Marine* ne soit publié qu'en 1786, Vial du Clairbois rédige ces lignes – tirées de l'article *ÉCOLE du génie de la marine* – avant la nomination de Borda à ce poste le 24 octobre 1784.

23. Voir [Mascart 1919].

24. Sur le rôle clé de Jean-Baptiste-Antoine Blouin au ministère de la Marine depuis la fin de la guerre de Sept Ans, voir [Alfonsi à paraître].

25. Cité dans [Mascart 1919, p. 481].

26. Voir [Taton 1964, p. 575].

d'algèbre suivi d'éléments d'analyse infinitésimale qui ne vit jamais le jour non plus. Son cours, incomplet et assez rébarbatif dans son approche des différentes notions²⁷, ne connut que trois éditions complètes (quatre éditions pour les deux premières parties). Il ne sera plus réédité après 1769.

L'ÉCOLE D'ARTILLERIE ET LES ÉCOLES DES RÉGIMENTS DE CE CORPS

Rapidement, et à partir de 1759 surtout, les critiques contre le cours de Camus se font de plus en plus vives dans l'Artillerie. On lui reproche de ne pas traiter l'algèbre, la dynamique et l'hydraulique, et de s'étendre sur des thèmes d'architecture inutiles aux artilleurs. On le critique aussi pour son écriture jugée compliquée et rébarbative. Le mémoire d'un officier nommé Gibert²⁸, daté du 5 novembre 1761, est particulièrement précis et caustique :

« Il suffira de dire que l'élève qui possède le mieux les théorèmes de ces quatre volumes, n'a pas la moindre idée d'une équation algébrique, n'a pas la moindre notion de la parabole, ne se doute pas seulement que les corps projetés la décrivent, bien loin de pouvoir déterminer le point où tombera une bombe pointée à 45 ou à 15 degrés, chassée par la même charge ; qu'en un mot il ne sait point calculer une pile de boulets. [...] nous n'avons pas l'injustice de croire que ceux qui passent à la sous lieutenantance attendent tranquillement que M^r le Camus ait rempli sa tâche, pour se procurer les connoissances qu'il leur a refusées jusqu'à présent : nous sommes persuadés qu'ils les ont puisées ailleurs » [SHAT, 2W123].

Les plaintes s'accumulant, surtout après la publication des premiers tomes du cours de Bézout, le ministre de la guerre, Choiseul, adresse en novembre 1765 une circulaire à tous les commandants des régiments d'artillerie, dans lesquels les élèves sortis de La Fère (ou de Bapaume à partir de 1765), continuaient l'étude du cours de Camus. Il n'envisage pas encore de changer l'enseignement de l'école mais celui donné dans les régiments. Sa circulaire a pour but de demander l'avis des commandants : « on m'a représenté bien des fois, qu'il seroit nécessaire de joindre au cours du Sieur Camus, des élémens d'algèbre avec leur application à la géométrie, [...] vous voudrez bien me dire ce que vous croirez qu'on devra comprendre dans ces élémens » [SHAT, 2W123]. Il ajoute une phrase montrant qu'il a conscience de ce que pourrait entraîner sa réforme, et qui est prémonitoire des polémiques que l'on retrouvera plus tard à l'École polytechnique²⁹ :

27. Voir [Alfonsi 2011, p. 44-46 et 194-195].

28. Ce mémoire est le troisième envoyé par Gibert au « Principal commis de la Guerre pour le Génie et l'Artillerie » (c'est-à-dire le chef du cabinet ministériel). Ce qui marque bien le mécontentement de l'officier et l'oreille attentive du commis qui semble, d'après la lettre, avoir été demandeur.

29. Voir [Belhoste *et al.* 1994, p. 24-28 ; Gillispie 1994].

« Il est essentiel de les borner à ce qui est absolument nécessaire à un officier d'artillerie, tout le surplus doit en être rejeté avec d'autant plus de soin, que les mathématiques étant bien attrayantes pour ceux qui en ont passé les premières difficultés, il faut éviter que des officiers [...] ne prennent trop de goût pour cette science et ne fassent leur occupation principale de ce qui doit seulement leur servir de principe et de règle » [*Ibid.*].

Gribeauval, de Mouy et le chevalier de Bron, qui répondent par un mémoire envoyé au ministre en mai 1766, conseillent d'adopter, en l'aménageant pour l'Artillerie, le cours de Bézout pour la Marine :

« On vient d'exposer la nécessité de donner aux régimens un cours qui contienne ce qui leur est nécessaire ; il y a longtemps qu'on l'avoit senti et en conséquence on avoit projeté d'en faire un exprès pour l'artillerie, on avoit même désigné à différens professeurs les parties sur lesquelles ils devoient travailler ; *ce projet n'a pas été suivi pendant la guerre [celle de Sept Ans] et ces mêmes professeurs qui ont vu depuis paroître le cours de M. Bézout, y ont trouvé toutes les parties élémentaires traitées avec toute la netteté et l'ordre qu'on peut désirer.* Tous ceux qui ont vu ce cours en portent le même jugement. » [SHAT, 2W123]

Le duc de Choiseul, qui apprécie fort l'action de Bézout à la Marine, accepte ces propositions et des réunions sont organisées entre celui-ci et les professeurs de l'Artillerie. Ces enseignants estimés et reconnus, Du Puget, Brackenhoffer et Lombard, tout en étant favorables au cours de Bézout, ne veulent pourtant pas des parties trop théoriques car « la plupart des officiers ne peuvent s'astreindre à suivre attentivement dans les matières abstraites, ce qu'ils appellent de longs discours. [...] quel dégoût pour peu que le cours leur paroisse trop compliqué ! » [SHAT, 2W123]. Suite à la démission de Camus pour cause de maladie en février 1768, le 20 avril suivant, Bézout est nommé examinateur de l'école d'artillerie de Bapaume et chargé d'écrire un cours pour ce corps. Les deux premiers volumes, consacrés à l'arithmétique, la géométrie et la trigonométrie, ainsi qu'à l'algèbre, paraissent le 10 janvier 1770, suivis, début janvier 1772, des deux volumes de mécanique [Bézout 1770-1772].

Ce nouveau cours de Bézout n'est en fait qu'une version simplifiée et aménagée pour l'Artillerie de son *Cours à l'usage des gardes du Pavillon et de la Marine*. On y retrouve la même structure, la même clarté et des applications nombreuses et bien traitées, mais le niveau est plus faible, surtout en algèbre. En revanche, Bézout a produit un vrai travail de recherche pour le dernier volume consacré aux applications de la mécanique – la balistique pour l'artillerie – et c'est là qu'il affirme son originalité. Le lien enseignement-recherche existe donc toujours, mais il s'applique cette fois-ci aux mathématiques mixtes. Ceci montre peut-être encore plus la force de ce lien chez Bézout, l'enseignement pour l'artillerie l'entraînant ici bien loin de ses thèmes habituels de recherche, les équations algébriques.

En septembre et octobre 1771, pour améliorer la théorie de la résistance des fluides qui, loin d'être maîtrisée à cette époque, fait l'objet d'un vaste mouvement de recherches théoriques et expérimentales³⁰, Bézout demande l'autorisation d'accéder à d'anciens résultats de tirs et de faire procéder à de nouvelles expériences. Il écrit le 18 septembre :

« Parmi les objets qui peuvent être compris dans le traité de Mécanique qui doit faire partie du Cours de Mathématiques à l'usage du corps Roïal de l'Artillerie, la théorie de la résistance que l'air oppose aux projectiles m'a paru mériter d'autant plus d'être traitée, que dans les grandes charges elle altère considérablement les portées. *Je suis venu à bout de surmonter les principales difficultés qui ont empêché jusqu'à présent que la théorie ne donnât des lumières satisfaisantes sur cet objet* ; et la comparaison que donnent mes résultats avec quelques épreuves faites à La Fère en 1740³¹ est aussi satisfaisante que je pouvais le désirer. *Ce premier succès m'a fait naître le désir de perfectionner cette même théorie, et d'ajouter ce travail, en forme d'appendice, à la fin du volume actuellement sous presse.* » [SHAT, 2W283]

Bézout demande alors la possibilité de vérifier davantage ses résultats : « Je désirerais en même tems, pouvoir y joindre une comparaison avec l'expérience. C'est dans cette vue, Monseigneur, que j'ai l'honneur de vous demander votre agrément pour pouvoir, sous les yeux de telle personne que vous ordonneriez, extraire des procès-verbaux d'épreuves

30. La principale théorie de la résistance des fluides disponible repose sur la loi établie par Newton dans ses *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1^{re} éd., 1687 ; 2^e éd., 1713 ; 3^e éd., 1726). Cette loi (selon laquelle la résistance exercée par un fluide sur un corps est proportionnelle à l'élément de surface exposé ainsi qu'au carré de la vitesse, à la densité et au carré du sinus de l'angle d'incidence du fluide) fait cependant très vite l'objet de doutes en raison, notamment, des écarts significatifs entre les solutions qu'elle implique et les résultats expérimentaux disponibles. Ces doutes seront confirmés par diverses expériences, dont celles que Benjamin Robins rapporte dans ses *New Principles of Gunnery* [1742], et qui le conduisent notamment à remettre en cause la théorie de Newton pour les projectiles à grande vitesse – l'ouvrage de Robins fait l'objet, à la demande de Frédéric II, d'une version allemande et commentée par Euler en 1745, elle-même traduite en français et publiée par Lombard en 1783. Faute de formule alternative, la plupart des mathématiciens persistent néanmoins à utiliser la loi newtonienne dans leurs calculs : tel est le cas d'Euler et de Bouguer dans leurs traités d'architecture navale [Calero 2008], d'Euler à nouveau dans la première tentative d'intégration approchée qu'il donne des équations de la balistique [1755], ou de Bézout dans son cours pour l'artillerie (voir *infra*). De nombreux traités en lien avec les différents domaines d'application du problème de la résistance des fluides (artillerie, architecture navale et navigation, hydraulique) – tels que ceux, cités *supra*, de Chapman, Jorge Juan y Cantacilia ou Vial du Clairbois pour l'architecture navale – la discutent au cours des décennies suivantes, tandis que les expériences réalisées par Borda et Bossut dans le courant des années 1760 et 1770 confirment sa mise en défaut, notamment dans le cas d'un angle d'incidence non nul. Voir [Darrigol 2005], [Ferreiro 2007], [Calero 2008] et [Guilbaud 2012].

31. Il s'agit alors d'une école régimentaire de l'Artillerie.

déposés dans vos bureaux, celles de ces épreuves qui pourront convenir à mon objet. » [*Ibid.*]. Mais Bézout n'est pas satisfait des résultats de ces expériences et écrit une autre lettre, le 7 octobre 1771 :

« J'ose prendre la liberté, Monseigneur, de vous supplier de vouloir bien ordonner, dans l'une des Écoles de l'Artillerie, des épreuves d'une pièce de 24, chargée à la plus forte charge qui soit d'usage, et faites sous les angles des 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 43, 45, 50, 55, 60, 65, 70 et 75 degrés; et des épreuves des bombes du plus grand calibre et à la plus forte charge de poudre, faites sous les mêmes angles, ou du moins de 10 en 10 degrés jusqu'à 75 degrés inclusivement à compter de 5, et en y comprenant 45 et 43 degrés. Quelque soin qu'on apporte à ces épreuves, il est difficile qu'elles s'accordent parfaitement : et par cette raison, il est à désirer que chaque épreuve soit répétée au moins quatre fois, afin que le résultat moïen, participe le moins qu'il sera possible des erreurs inévitables dans la pratique » [SHAT, 2W283].

Son souci du nombre d'expériences et de la répétition de celles-ci pour obtenir une moyenne, est celui d'un expérimentateur averti.

Les rapporteurs à l'Académie des sciences sur le cours de Bézout pour l'Artillerie (d'Alembert, Duséjour et Vandermonde) notent sur cette partie :

« nous avons singulièrement remarqué une méthode par laquelle l'auteur détermine la courbe décrite par les projectiles dans les milieux résistans ; et la comparaison de la théorie analytique avec des portées de bombes et de boulets lancés sous différens angles. Cet objet important nous a paru traité du côté de l'analyse, avec toute la netteté, toute la clarté, et toute la précision qui caractérisent les ouvrages de M. Bezout. Quant à l'expérience, nous avons cru remarquer entre la théorie et la pratique un accord aussi satisfaisant qu'on pouvoit le désirer. » [RMA 1771, f. 247]

Ce commentaire montre bien qu'une partie entière de ce volume aurait pu faire l'objet d'un mémoire de recherche. Bézout y obtient un système de deux équations différentielles non linéaires « dont l'intégration déterminera le mouvement & la courbe » [1770-1772, t. IV, p. 156] décrits par le projectile. Adoptant l'hypothèse, qu'il estime la « plus conforme à la nature » [*Ibid.*], d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, il parvient, au terme de plusieurs approximations, à une équation « très approchée » [*Ibid.*, p. 174] de la courbe. Comme annoncé le 18 septembre 1771, il insère en outre un appendice d'une trentaine de pages traitant « plus particulièrement du mouvement des projectiles dans un milieu résistant » [*Ibid.*, p. 439-467] et dans lequel il précise avec honnêteté les limites de son travail³² :

32. Sans citer cependant les expériences de Borda sur la résistance de l'air et des fluides, rapportées dans les deux mémoires que ce dernier présente à l'Académie en 1763 et 1767, ou encore celles dont Bossut rend compte dans son *Traité élémentaire d'hydrodynamique* [1771], présenté à l'Académie dès 1767. Borda est d'ailleurs aussi l'auteur d'une tentative d'intégration approchée des équations de la balistique soumise à l'Aca-

« [...] il ne faut pas dissimuler que cette théorie n'est pas aussi conforme à l'expérience qu'il seroit à désirer. L'expérience confirme assez bien le principe que les résistances sont proportionnelles au carré de la vitesse, mais elle s'accorde peu avec celui qui établit que les résistances sont proportionnelles au carré du sinus d'incidence » [*Ibid.*, p. 442].

Comme on le voit, le niveau mathématique de l'école d'Artillerie et des écoles régimentaires est nettement relevé par ce nouveau cours de Bézout, aussi bien sur le plan des mathématiques pures que des mathématiques appliquées (notamment en balistique), dans lesquelles l'algèbre et le calcul différentiel et intégral font leur apparition. Comme à la Marine, la recherche pénètre le cours et les écoles.

L'ÉCOLE DU GÉNIE

Dans le Génie, lui aussi sous la tutelle de Camus – à la fois pour le concours d'entrée à l'École de Mézières, les cours qui y sont dispensés pendant deux ans, et les examens –, on ne trouve pas, contrairement à ce que nous venons de voir pour l'Artillerie, l'expression d'un mécontentement contre son manuel. Nous pouvons avancer trois raisons pour tenter d'expliquer cette absence.

La première tient au nombre et au niveau des élèves : sans compter les classes de préparation aux deux concours d'entrée du Génie et de l'Artillerie, dans lesquelles la jeunesse des aspirants et la perspective du concours d'entrée régi par Camus éteignaient les velléités de critiques, le cours de Camus concernait à l'Artillerie les trois années d'école suivies des écoles régimentaires, soit environ 640 jeunes gens ; pour le Génie, seules deux années d'école étaient concernées, soit seulement une centaine d'élèves environ.

La deuxième raison est l'existence à l'Artillerie de ces écoles régimentaires qui n'avaient pas d'équivalent dans le Génie : on a vu que la contestation à l'Artillerie était justement venue des régiments et de leurs officiers qui n'avaient pas à craindre de représailles de Camus – dont la fonction d'examineur s'arrêtait à la fin des trois années d'école.

La troisième raison est incarnée par Bossut, jeune professeur de mathématiques à Mézières depuis 1752 grâce à la recommandation de Camus. Invité à Paris par Fontenelle après des études à Lyon achevées en 1750, Bossut y est présenté à Clairaut et à d'Alembert – dont il devient le protégé³³

démie en 1769 [Borda 1772], l'année même de la publication par Bézout du 4^e tome de son cours. Outre celles d'Euler [1755], ce sujet a également fait l'objet de recherches de Lambert en 1767. Voir [Tournès 2013].

33. Né en 1730, Bossut a donc le même âge que Bézout. On remarque des similitudes très nettes entre le parcours des deux hommes : Bézout, lui aussi maître ès arts à vingt ans en 1750, est venu à Paris où il est rapidement devenu un disciple de d'Alembert qui l'a fait travaillé avec lui sur des problèmes de dynamique. Voir [Alfonsi 2011, chap. 1 et 2].

– puis admis comme correspondant (de d'Alembert) à l'Académie des sciences en 1753. De 1753 à 1768, année de son élection comme membre de l'Académie des sciences, il publie une douzaine de mémoires dont de nombreux se voient primés, tant à l'Académie de Paris (1761, 1762, 1765) qu'à celles de Lyon (1760) et Toulouse (1762, 1765, 1768)³⁴. Bossut n'est donc pas seulement un très bon enseignant, comme il y en avait déjà dans les autres écoles militaires (Brackenhoﬀer, D'Arbigny, Blondeau, Duval-Leroy, Lombard, etc.). C'est aussi un jeune savant reconnu par ses pairs. Il est donc très plausible que, sans vexer Camus, Bossut ait pallié jusqu'en 1768 les déficiences des manuels de ce dernier par le contenu de ses propres cours, ainsi qu'en témoigne la publication en 1763 de son *Traité élémentaire de mécanique et de dynamique, appliqué principalement aux mouvements des machines*³⁵. Dans ce volume de 286 pages, ouvertement dédié à l'instruction des élèves de Mézières³⁶, le savant aborde la dynamique, partie que Camus n'a pas traitée, nous l'avons vu. Le traité, présenté comme complétant le cours de l'examineur³⁷, a d'ailleurs été publié avec l'accord de ce dernier, puisque Camus a fait partie, avec d'Alembert et Bézout, des académiciens chargés d'en faire un rapport et que ce rapport du 12 juin 1762 est élogieux et recommande l'impression. Cependant ce traité « élémentaire » de Bossut reste volontairement à ce niveau. Il n'y aborde pas le calcul infinitésimal et, par conséquent, tout ce qui touche à la mécanique des fluides :

« Comme on ne peut pas approfondir la théorie des mouvements curvilignes & variés suivant des lois quelconques, & celle des mouvements retardés par la résistance des milieux, avec la seule Géométrie élémentaire, j'ai mieux aimé n'en faire aucune mention, que d'en donner des notions superficielles et incomplètes. Les lecteurs versés dans l'Analyse infinitésimale pourront

34. Voir la « Notice des principaux ouvrages de Charles Bossut » [Anonyme 1809].

35. Dans le discours préliminaire du cours d'hydrodynamique qu'il publie en 1771 pour les élèves de Mézières (voir *infra*), Bossut, désormais examinateur du Génie, précise d'ailleurs : « La place que j'occupois alors à l'École du Génie m'imposoit le devoir d'enseigner aux jeunes Ingénieurs la mécanique des Fluides, qui est essentielle à leur état. Je leur dictois quelques essais qui n'étoient pas destinés à devenir publics. » [Bossut 1771, vol. 1, p. xvij].

36. Le livre est dédié à Choiseul et la dédicace débute ainsi : « L'ouvrage que j'ai l'honneur de vous présenter, a été composé pour l'instruction des élèves d'un corps également distingué par les talens et par la bravoure » [Bossut 1763].

37. « Lorsque les différentes forces appliquées à un corps, ou à un système de corps, se font mutuellement équilibre, la partie de la Mécanique qui traite de leurs rapports s'appelle Mécanique statique. [...] Les principes de cette science sont expliqués avec clarté dans plusieurs ouvrages, surtout dans le cours de Monsieur Camus de l'Académie royale des sciences. Mais lorsque de l'application des forces résultent des mouvemens, ces mouvemens sont l'objet de la Mécanique proprement dite ; c'est de cette partie de la Mécanique que je me propose de traiter ici. » [Bossut 1763, p. 12]

consulter sur ces différens objets les deux premiers livres des Principes mathématiques de Newton, la Méchanique de M. Euler, la Dynamique de M. d'Alembert » [Bossut 1763, p. 20].

De même, les équations algébriques qu'il utilise ne dépassent pas le degré deux [*Ibid.*, p. xvj]. S'il vient combler certaines lacunes du cours de Camus, cet unique volume ne peut donc se comparer au cours que Bézout publiera un an plus tard.

Après la démission de Camus, les qualités scientifiques et pédagogiques de Bossut conduiront cependant à sa nomination par Choiseul en février 1768 comme examinateur du Génie – poste pour lequel Bézout avait également été pressenti, et qu'il avait finalement obtenu à l'Artillerie³⁸. Le ministre a su reconnaître en lui les capacités qu'il recherche, depuis la défaite de 1763, dans les examinateurs et rédacteurs de cours : un investissement dynamique pour l'école allié à des qualités pédagogiques incontestables et à un très haut niveau scientifique, entretenu par une activité reconnue de recherche. S'il ne désire pas nécessairement que cette recherche pénètre l'enseignement, afin d'éviter que les officiers ne prennent trop de goût pour les sciences (cf. *supra*), Choiseul est en revanche prêt à la financer. C'est ce qu'il fera en 1766 en procurant 5 000 livres à Bossut pour ses expériences en hydrodynamique ainsi que 2 000 autres livres pour étudier l'arrimage des vaisseaux.

Nommé examinateur, Bossut abandonne sa place de professeur de mathématiques à Mézières au profit de celui qui était jusque-là son répétiteur, Gaspard Monge, à peine âgé de 22 ans. Ce dernier avait été engagé en 1765 comme dessinateur à l'école du Génie et, remarqué par Bossut, il était devenu répétiteur de mathématiques en 1766. Mis en relation par ce dernier avec d'Alembert et Condorcet, Monge présente de nombreux mémoires à l'Académie des sciences à partir de 1770. Il est nommé correspondant de Bossut le 8 avril 1772. Dès le 25 juin 1770, après la mort de l'abbé Nollet, il obtient la chaire de physique expérimentale à Mézières, en plus de celle de mathématiques : à 24 ans la responsabilité de tout l'enseignement scientifique de l'école du Génie est ainsi entre ses mains [Taton 1964, p. 592]. C'est donc là encore un jeune voire très jeune « savant » qui va former les ingénieurs du Roi, et rapidement introduire dans la formation des élèves les techniques de la future géométrie descrip-

38. Commandant de l'école du Génie, Ramsault de Raulcourt envoie deux mémoires à Choiseul le 21 mars 1768. Il souligne les inconvénients de donner un seul examinateur à ces deux corps d'armée et demande que l'on dissocie les deux fonctions. Pour les examens du Génie, il propose Bossut, alors professeur de mathématiques à Mézières, qui serait, s'il était choisi, déchargé de cette fonction (« Il est inutile d'avoir un professeur aussi savant que l'abbé Bossut, un bon répétiteur suffira. » [SHAT, Xe159]). La décision est prise le 20 avril 1768. La fonction de Camus est scindée en deux : Bossut est nommé examinateur du Génie et Bézout examinateur de l'Artillerie.

tive³⁹. À l'exception du calcul infinitésimal, de la statique et de la dynamique, pour lesquels il semble que ce soit le premier volume de mécanique du cours de Bézout qui ait été enseigné⁴⁰, Monge suivra sur les autres points les cinq volumes du cours publié par Bossut, nouvel examinateur du Génie : le *Traité élémentaire d'hydrodynamique* en 2 volumes [1771], suivis de traités élémentaires d'arithmétique [1772], d'algèbre [1773] et de géométrie [1774].

Les trois derniers volumes de ce cours n'ont rien d'original et leur niveau est effectivement « élémentaire » : Bossut reprend pour l'arithmétique et la géométrie le cours de Camus, présenté de la même façon sous forme d'une accumulation de définitions, lemmes, théorèmes, corollaires, scholies. Pour l'algèbre, que Camus n'avait pas traité, le contenu du cours reste aussi classique qu'éloigné de la recherche même s'il emprunte la méthode du Bézoutien, sans d'ailleurs citer son auteur⁴¹.

En revanche, le traité d'hydrodynamique de Bossut, qui marque à la fois l'aboutissement de ses propres recherches et d'une longue expérience d'enseignement de la mécanique des fluides à Mézières, s'inscrit clairement, quant à lui, dans la voie ouverte par Bézout dans ses cours de mécanique. Rédigé à l'usage des élèves de Mézières, il contient notamment les résultats de l'importante série d'expériences financées par Choiseul. Dans une lettre du 21 décembre 1766, ce dernier lui accorde d'ailleurs la permission d'aller présenter son ouvrage à ses confrères académiciens, témoignant ainsi à nouveau de son soutien à la recherche⁴² :

« Le traité d'hydraulique que vous avez composé, Monsieur, pour l'instruction des élèves du Corps du génie étant achevé selon ce que M. de Raulcourt [directeur] vient de me marquer, vous pouvez vous rendre à Paris et même y rester six semaines comme vous lui avez communiqué le désir dans la vue de communiquer cet ouvrage à Mrs de l'Académie Royale des Sciences et de conférer avec eux sur les découvertes qu'il contient. » [SHAT 1V01/30-2]

Ces nouveaux résultats portent sur l'écoulement des fluides dans des vases et des conduites, la détermination des coefficients de contraction des

39. Voir [Belhoste 1990] et [Sakarovitch 1998].

40. Dans son ouvrage d'hydrodynamique Bossut utilise en effet le calcul différentiel et intégral, bien qu'il n'ait rien écrit sur ce sujet pour les élèves du Génie. Dans la mesure où seul le cours de Bézout contenait l'application du calcul infinitésimal à la statique et la dynamique, et où ces deux domaines ne sont pas traités dans le cours que Bossut fait paraître entre 1771 à 1774, il est plus que probable que le premier volume de mécanique de Bézout ait été utilisé sur ces sujets à Mézières.

41. Alors que dans sa préface, retraçant brièvement l'histoire de l'algèbre, il rend à d'Alembert, Euler et d'autres contemporains l'hommage que méritent leurs résultats, le nom de Bézout n'apparaît pas.

42. Nous remercions Marie Jacob de nous avoir communiqué la transcription de ce document.

veines d'écoulement (élément clé pour le calcul de débits par des ajutages), l'évaluation de l'action de l'eau sur les roues hydrauliques et les ailes des moulins, ou encore le problème de la résistance des fluides, sur lequel Bossut met en défaut certains principes de la loi newtonienne. Si le traité contient par ailleurs des avancées théoriques, comme « la détermination générale de l'effet des roues à ailes ; problème épineux, qui n'avoit encore été résolu que dans un cas très-particulier » [Bossut 1771, vol. 1, p. xxxvj], il repose aussi sur une comparaison systématique entre théorie et expériences. Dans leur rapport du 4 février 1767, d'Alembert et Nollet, commissaires désignés par l'Académie, soulignent ces nouveautés, en même temps que la qualité de sa méthode d'exposition, à la fois adaptée aux débutants et aux lecteurs plus avertis en hydrodynamique :

« Cet ouvrage nous paroît devoir être utile, non seulement aux commençants, par la méthode et la clarté avec laquelle les élémens de la théorie y sont exposés, mais encore à ceux même qui sont le plus versés dans l'hydrodynamique, par le grand nombre d'expériences en grand, que Mr l'abbé Bossut a faites ; expériences pour la plupart nouvelles, exécutées avec beaucoup de précision et d'intelligence, et comparées avec exactitude aux résultats que donne la théorie. » [AAS, pochette de séance du 4 février 1772, f. 7v-8r]

D'un point de vue pédagogique, Bossut y adopte en effet l'innovation introduite par Bézout qui permet une lecture à plusieurs niveaux grâce à une distinction claire entre, d'une part, les résultats élémentaires et, d'autre part, les approfondissements nécessitant une certaine maîtrise théorique : « comme plusieurs questions m'ont paru mériter d'être approfondies par la théorie, je remplis cet objet dans des notes que l'ordre & la clarté m'ont obligé de renvoyer à la fin des Chapitres auxquels elles répondent » [Bossut 1771, p. xxxv-xxxvj]. Ces notes contiennent l'exposé des derniers résultats théoriques, ce qui inclut par exemple la présentation de la méthode d'obtention des équations aux dérivées partielles de l'écoulement d'un fluide obtenues par d'Alembert en 1752, et le renvoi aux mémoires d'Euler de 1755 qui les généralisent [*Ibid.*, p. 315-326]. Le niveau mathématique y est donc particulièrement élevé, contrairement au corps des chapitres, dans lesquels Bossut évite tout recours au calcul différentiel et intégral.

Réédité en 1775, le livre sera refondu dans le *Traité théorique et expérimental d'hydrodynamique*, dont les deux volumes paraissent en 1786 et 1787. Cette version remaniée inclut en particulier le résultat de nouvelles expériences sur la résistance des fluides, notamment celles qu'il réalise grâce au financement obtenu du contrôleur général Turgot⁴³.

43. Ces expériences, motivées par l'affaire du canal de Picardie, sont réalisées par Bossut à l'été 1775 sur le bassin de l'École militaire, avec la collaboration de plusieurs de ses enseignants, dont Legendre et Vandermonde. Voir [Guilbaud 2008] et [Szulman 2011].

À partir de 1768, le Génie est donc lui aussi, comme la Marine et l'Artillerie, pourvu d'un examinateur mathématicien et académicien qui, contrairement à Camus, poursuit une activité féconde de recherche, financée par l'État à l'initiative de Choiseul – qui en a bien compris l'intérêt après la défaite de 1763 – et de ses successeurs. Par ailleurs, l'enseignement des mathématiques et des sciences en général à Mézières est enrichi par la personnalité de Monge, qui ne craint pas d'introduire du neuf dans ses cours (les méthodes de sa future géométrie descriptive) tout en continuant à soumettre de nouvelles recherches mathématiques à l'Académie.

Conclusions

Au terme de cette étude, les effets de la guerre de Sept Ans tant sur les modalités que sur le niveau de formation des futurs officiers et ingénieurs des trois corps militaires (Artillerie, Génie et Marine) paraissent évidents.

Nous soulignerons en premier lieu l'instauration définitive du principe méritocratique de l'examen et du concours qui remplace celui de la protection ou de l'ancienneté dans les écoles militaires. C'est le cas dans l'Artillerie et le Génie, à la fois pour l'entrée, l'avancement et l'obtention du grade final. Dans la Marine, l'examen d'entrée, qui n'est toujours pas exigé à l'issue des réformes succédant à la guerre de Sept Ans, le sera cependant à partir de 1771 et, surtout, de 1774⁴⁴.

Nous notons aussi une uniformisation rapide du contenu de l'enseignement des mathématiques, non seulement dans chaque corps, mais aussi, de façon plus générale, dans toutes les écoles militaires. Le cours de Bézout imposé aux futurs commandants de vaisseaux comme aux élèves ingénieurs-constructeurs de la Marine est rapidement étendu à l'école d'Artillerie et aux écoles régimentaires. Si, au Génie, le cours est celui de Bossut, les disciplines mathématiques enseignées sont néanmoins les mêmes, à quelques différences près de contenu : arithmétique, géométrie, algèbre, calcul différentiel et intégral, mécanique statique, dynamique et mécanique des fluides.

Les mathématiques prennent, ce faisant, une importance sans précédent dans la formation des futurs officiers et ingénieurs des trois corps. On assiste, dans le même temps, à une augmentation sensible de leur niveau qui peut, dans certains domaines, atteindre celui des ouvrages les plus pointus, ou, dans d'autres, intégrer les derniers développements des propres recherches de leur rédacteurs, comme c'est le cas en algèbre et en

44. De façon plus générale, la logique de scolarisation initiée dans la Marine par Choiseul sera renforcée à l'occasion de la brève expérience de l'École du Havre entre 1773 et 1775, puis de la réforme conduite par le ministre de Castries en 1786. Voir [Julia 1989].

balistique dans celui de Bézout, ou en hydrodynamique dans celui de Bossut.

Une nouvelle conception du cours de mathématiques fait aussi son apparition : la présentation classique sous forme d'une accumulation de résultats laisse la place à un cours qui, tout en assurant les bases exigées, offre une ouverture sur des mathématiques vivantes, en train de se construire ou d'évoluer. Dans chaque corps, un approfondissement est prévu pour les meilleurs élèves, favorisé, dans le cours de Bézout, par la distinction entre la partie « d'obligation » imposée à tous, et une partie en petits caractères s'adressant aux élèves les plus doués, les plus curieux ou les plus motivés ; nous retrouvons le même principe d'exposition dans le cours d'hydrodynamique de Bossut.

Les examinateurs et rédacteurs de cours sont à présent des savants, académiciens vivant à Paris, loin des écoles qu'ils examinent et des milieux militaires provinciaux. Dépendant directement du ministre, ils sont à l'écart des pressions éventuelles, de façon à garantir l'impartialité de leur travail d'examineur. Ce sont en outre deux mathématiciens reconnus et actifs, une caractéristique qui contribue pour beaucoup aux évolutions que nous venons de mentionner. L'enseignement et la recherche sont ainsi réunis pour la première fois, non seulement dans les mêmes personnes – les examinateurs – mais aussi dans les manuels de formation des officiers et ingénieurs, où ils interfèrent l'un avec l'autre. Ce nouveau lien entre enseignement et recherche se manifeste également, nous l'avons vu, par l'introduction des derniers traités d'architecture navale dans le curriculum des élèves de l'école d'ingénieurs constructeurs, ainsi que par la nomination d'un autre scientifique, Borda, pour succéder à un Duhamel du Monceau dont les *Éléments de l'architecture navale*, première pierre, avec le *Traité du navire* de Bouguer, de la formation de l'école, paraissent dépassés au milieu des années 1780.

Nous voyons aussi poindre, dans cette étude, un réseau de scientifiques occupant des postes d'examineur, de rédacteurs de cours, d'enseignants ou de directeurs dans les écoles militaires : parmi eux Bézout et Bossut, mais aussi Monge, Borda, Vial du Clairbois, Duval-Leroy, Lombard, et bien d'autres. Plusieurs appartiennent à l'Académie des sciences. La plupart sont membres de l'Académie de Marine [Donnaud du Plan 1882]. Certains sont ingénieurs. Différents milieux et cercles académiques semblent ainsi s'entrecroiser selon un processus qui reste certes à approfondir, mais dont tout laisse à penser qu'il pourrait avoir contribué à la fortification de ce lien entre enseignement et recherche.

Ministre de la Marine et de la Guerre au moment de la défaite de 1763, Choiseul aura joué un rôle politique de premier plan dans l'impulsion donnée à la formation dans les écoles militaires. Convaincu par la nécessité d'y encourager les progrès techniques, il n'hésitera pas non plus à financer

les recherches effectuées ou supervisées par les deux examinateurs dans leurs écoles. Globalement suivi par ses successeurs, ce mouvement illustre de nouveau l'influence de la défaite de 1763 sur le développement d'une recherche scientifique publique en France dans les décennies suivantes⁴⁵.

Il convient dès lors de se demander si l'issue tragique de la guerre de Sept Ans ne constituerait pas une rupture importante, anticipant et préparant sur certains aspects celle induite trois décennies plus tard par la création de l'École polytechnique. L'importance des mathématiques et leur haut niveau dans les écoles militaires se perpétuent en effet au-delà de la Révolution, à la fois grâce à Polytechnique et ses écoles d'application, pour la plupart directement héritées de l'Ancien Régime : écoles du Génie, de l'Artillerie, des ingénieurs de Vaisseaux (ex-école des ingénieurs constructeurs de la Marine), sans oublier les écoles des Mines et des Ponts et Chaussées dans le domaine civil⁴⁶. Le principe méritocratique perdurera de même avec l'existence, dans ces écoles, du concours d'entrée qui force l'émulation, et du classement de sortie, important pour obtenir les meilleures places. Le mouvement d'uniformisation de l'enseignement des mathématiques initié dans la seconde moitié de la décennie 1760 sera quant à lui étendu à la France entière dans les programmes nationaux des classes préparant à l'admission dans ces formations.

Le choix comme examinateurs de mathématiciens reconnus et actifs se verra également perpétué. En 1784, Monge succède à Bézout au poste d'examineur des écoles de la Marine, tandis que Laplace hérite de ses fonctions dans l'artillerie et l'architecture navale. Laplace et Bossut deviennent en 1795 les premiers examinateurs des candidats polytechniciens à l'admission dans les écoles d'application : le premier pour l'Artillerie et l'École des ingénieurs de Vaisseaux, le second pour le Génie, reprennent ainsi les postes qu'ils occupaient avant la Révolution – avec des fonctions étendues, entre autres, à l'École des géographes, les écoles des Mines et des Ponts et Chaussées. L'émergence d'un nouveau statut social des mathématiciens, à la fois enseignants et chercheurs, semble lui aussi s'inscrire pour partie dans la continuité de l'impulsion donnée par Choiseul suite à la défaite de 1763.

Que dire enfin de la contestation du préalable de noblesse ? Si la guerre de Sept Ans a pu conduire à un réel assouplissement dans le Génie et l'Artillerie, tel ne fut cependant pas le cas dans la Marine en 1764. La situation évoluera néanmoins dans ce corps avec la création par Choiseul de l'École du Havre en août 1773 où la qualité de noble ne sera plus exigée, et bien que cette école ferme dès le mois de mars 1775, le recrutement

45. Voir [Bret 2002].

46. L'École navale, nommée à ses débuts école d'application de la Marine, viendra plus tard, en 1830, prendre la succession des écoles de Gardes de la Marine.

demeurera assez laxiste sur ce point jusqu'en 1780, année de l'arrivée des marquis de Castries et de Ségur, qui durcissent de nouveau les conditions, aux ministères de la Marine et de la Guerre⁴⁷. Cette situation perdurera jusqu'à la Révolution, qui vient changer l'ordre établi en abolissant les privilèges, une abolition dont les contestations et les volontés réformatrices de Choiseul et de ses successeurs à la fin de la guerre de Sept Ans constituent sans doute des prémices.

BIBLIOGRAPHIE

Abréviations : Archives de l'Académie des sciences (Paris) : AAS / Archives nationales, Paris : AN / *RMAS* : Registres (manuscripts) de l'Académie des sciences / Service historique de l'Armée de terre (Vincennes) : SHAT / Service historique de la Marine à Vincennes : SHMV (Académie de Marine : SHMV-AM) / Service historique de la Marine à Brest : SHMB / Service historique de la Marine à Toulon : SHMT / Columbia University, collection David Eugène Smith : CU-Smith.

[Alfonsi 2010] Liliane Alfonsi, « Un successeur de Bouguer : Étienne Bézout (1730-1783), commissaire et expert pour la marine », *Revue d'histoire des sciences*, 63 (2010), p. 161-187.

[Alfonsi 2011] L. Alfonsi, *Étienne Bézout (1730-1783), mathématicien des Lumières*, Paris : L'Harmattan, 2011.

[Alfonsi à paraître] L. Alfonsi, « La mise en place et la brève existence de l'École royale de Marine du Havre (1773-1775) : acteurs et enjeux », *Annales historiques de la Révolution française*, à paraître.

[Anonyme 1809] « Notice des principaux ouvrages de Charles Bossut », dans Bossut, *Essai sur l'histoire générale des mathématiques, nouvelle édition augmentée et continuée jusqu'en 1808*, Paris, 1809, p. 419-426.

[Belhoste 1990] Bruno Belhoste, « Du dessin d'ingénieur à la géométrie descriptive. L'enseignement de Chastillon à l'École royale du génie de Mézières », *In Extensio* (juin 1990), p. 103-135.

[Belhoste et al. 1994] Bruno Belhoste, Amy Dahan Dalmedico, Antoine Picon (dir.), *La formation polytechnicienne 1794-1994*, Paris : Dunod, 1994.

[Bézout 1764-1769] Étienne Bézout, *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du Pavillon et de la Marine*, 6 tomes, Paris (t. I, 1764 ; t. II, 1765 ; t. III, 1766 ; t. IV et t. V, 1767 ; t. VI, 1769).

[Bézout 1767b] É. Bézout, « Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens qu'on doit employer pour trouver ces Équations », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1764 (1767), p. 288-338.

[Bézout 1768] É. Bézout, « Sur la résolution générale des équations de tous les degrés », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1765 (1768), p. 533-552.

[Bézout 1770-1772] É. Bézout, *Cours de mathématiques à l'usage du Corps royal d'Artillerie*, 4 tomes, Paris (t. I et II, 1770 ; t. III et IV, 1772).

47. Voir [Alfonsi 2011, p. 317-323].

- [Borda 1772] Jean-Charles Borda, « Sur la courbe décrite par les boulets et les bombes, en ayant égard à la résistance de l'air », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1769 (1772), p. 247-271.
- [Bossut 1763] Charles Bossut, *Traité élémentaire de mécanique et de dynamique, appliqué principalement aux mouvemens des machines*, Charleville, 1763.
- [Bossut 1771] C. Bossut, *Traité élémentaire d'Hydrodynamique : ouvrage dans lequel la théorie et l'expérience s'éclairent ou se suppléent mutuellement ; avec des Notes sur plusieurs endroits qui ont paru mériter d'être approfondis*, 2 vol., Paris, 1771 (2^e éd., 1775).
- [Bossut 1772] C. Bossut, *Traité élémentaire d'Arithmétique*, Paris, 1772.
- [Bossut 1773] C. Bossut, *Traité élémentaire d'Algèbre*, Paris, 1773.
- [Bossut 1774] C. Bossut, *Traité élémentaire de Géométrie et de la manière d'appliquer l'Algèbre à la Géométrie*, Paris, 1774.
- [Bossut 1786-1787] C. Bossut, *Traité théorique et expérimental d'hydrodynamique*, 2 tomes, Paris (t. I, 1786 ; t. II, 1787).
- [Bouguer 1746] Pierre Bouguer, *Traité du navire, de sa construction et de ses mouvemens*, Paris, 1746.
- [Bret 2002] Patrice Bret, *L'État, l'armée, la science : L'invention de la recherche publique en France (1763-1830)*, Rennes : Presses Universitaires de Rennes, 2002.
- [Calero 2008] Julian Simon Calero, *The Genesis of Fluid Mechanics 1640-1780*, Dordrecht : Springer, 2008.
- [Camus 1749-1751] Charles-Étienne-Louis Camus, *Cours de mathématiques*, 4 tomes, Paris (t. I, 1749 ; t. II, 1750 ; t. III-IV, 1751).
- [Carré 1984] Adrien Carré, « L'hygiène navale, préoccupation essentielle de l'Académie de Marine », *Actes du colloque de Brest du 17 au 20 septembre 1984*, Brest, 1985.
- [Darrigol 2005] Olivier Darrigol, *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford : Oxford University Press, 2005.
- [Donneaud du Plan 1882] Alfred Donneaud du Plan, *L'Académie royale de Marine (1752-1793)*, Brest, 1882.
- [Duhamel 1749] Henri-Louis Duhamel du Monceau, « Rapport de Duhamel du Monceau sur la petite école de marine qu'il dirige à Paris », AN, Fonds Marine, G/89/3, f. 118.
- [Duhamel 1752] H.-L. Duhamel du Monceau, *Éléments de l'architecture navale, ou Traité pratique de la construction des vaisseaux*, Paris, 1752.
- [Euler 1749] Leonhard Euler, *Scientia navalis, seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus*, 2 vol., Pétersbourg, 1749.
- [Euler 1755] L. Euler, « Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jettes dans l'air ou dans un autre fluide quelconque », *Histoire de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1753 (1755), p. 312-352.
- [Euler 1776] L. Euler, *Théorie complete de la construction et de la manœuvre des vaisseaux, mise à la portée de ceux qui s'appliquent à la Navigation. Nouvelle Edition corrigée & augmentée*, Paris, 1776 (1^{re} éd., 1773).
- [Ferreiro 2007] Larrie D. Ferreiro, *Ships and Science. The Birth of Naval Architecture in the Scientific Revolution 1600-1800*, Cambridge (Mass.) & London : MIT Press, 2007.
- [Gille 1964] Paul Gille, « Les écoles de constructeurs de la Marine », dans [Taton (dir.) 1964, p. 477-479].
- [Gillispie 1994] Charles C. Gillispie, « Un enseignement hégémonique : les mathématiques », dans [Belhoste et al. 1994], p. 31-43.
- [Guilbaud 2008] Alexandre Guilbaud, « La République des hydrodynamiciens de 1738 jusqu'à la fin du 18^e siècle », *Dix-Huitième Siècle*, 40 (2008), p. 153-171.

- [Guilbaud 2012] A. Guilbaud, « Le problème de la résistance des fluides dans l'*Encyclopédie* et l'*Encyclopédie méthodique de Mathématiques* », dans S. Féry (dir.), *Aventures de l'analyse de Fermat à Borel : Mélanges en l'honneur de Christian Gilain*, Nancy : Presses universitaires de Nancy, 2012, p. 367-417.
- [Hahn 1964a] Roger Hahn, « L'enseignement scientifique aux écoles militaires et d'artillerie », dans [Taton (dir.) 1964, p. 513-545].
- [Hahn 1964b] R. Hahn, « L'enseignement scientifique des gardes de la Marine au XVIII^e siècle », dans [Taton (dir.) 1964, p. 547-558].
- [Julia 1989] Dominique Julia, « La formation des officiers de marine dans la seconde moitié du XVIII^e siècle : des gardes de la marine aux écoles d'Alès et de Vannes », *Vannes aux débuts de la Révolution*, Les Amis de Vannes, 1989, p. 57-124.
- [Julia 1995] D. Julia, « Le modèle méritocratique entre Ancien Régime et Révolution », dans B. Belhoste et al. (dir.), *La France des X : deux siècles d'histoire*, Paris : Economica, 1995, p. 33-50.
- [Mascart 1919] Jean Mascart, *La Vie et les travaux du Chevalier Jean-Charles de Borda (1733-1799). Épisodes de la vie scientifique au XVIII^e siècle*, Lyon : Annales de l'Université de Lyon, 1919.
- [Montucla 1799-1802] Jean-Étienne Montucla, *Histoire des mathématiques* (2^e éd. complétée et achevée par Lalande), 4 tomes, Paris.
- [Nardin 1982] Pierre Nardin, *Gribeauval, lieutenant général des armées du roi (1715-1789)*, Paris : FEDN, 1982.
- [Ordonnance 1762] « Ordonnance du Roi, concernant le Corps du Génie, du 4 décembre 1762 », dans *Recueil des nouvelles ordonnances militaires*, Metz, 1767.
- [Ordonnance 1765] « Ordonnance du Roi, concernant les Ingénieurs-constructeurs de la Marine », dans *Ordonnance du Roi, concernant la Marine, du 25 mars 1765*, Paris, 1765.
- [Robins 1742] Benjamin Robins, *New Principles of Gunnery*, London, 1742 ; traduits en allemand et commentés par Leonhard Euler, Berlin, 1745 ; traduits de l'allemand en français par Lombard, Dijon, 1783.
- [Sakarovitch 1998] Joël Sakarovitch, *Épures d'architecture : De la coupe des pierres à la géométrie descriptive XVI^e-XIX^e siècles*, Basel : Birkhäuser, 1998.
- [Szulman 2011] Éric Szulman, *La navigation intérieure de Colbert à la Révolution : genèse d'une catégorie d'action publique et émergence de la notion de réseau*, thèse de doctorat, Université Paris 1, 2011.
- [Taton 1964] René Taton, « L'École royale du Génie de Mézières », dans [Taton (dir.) 1964, p. 559-615].
- [Taton (dir.) 1964/1986] R. Taton (dir.), *Enseignement et diffusion des sciences en France au XVIII^e siècle*, Paris, 1964 ; rééd., Paris : Hermann, 1986.
- [Tournès 2013] Dominique Tournès, « Ballistics during 18th and 19th centuries : What kind of mathematics ? », *Oberwolfach Reports*, vol. 10, n° 1 (2013), p. 684-687.
- [Vergé-Franceschi 1999] Michel Vergé-Franceschi, *Marine et éducation sous l'Ancien Régime*, 2^e éd., Paris : CNRS Éditions, 1999.

Les mathématiques dans les écoles centrales (1795-1802) : un chaînon entre l'Ancien Régime et le XIX^e siècle

Caroline EHRHARDT et Renaud D'ENFERT

La création en 1795 des écoles centrales, en remplacement des collèges de l'Ancien Régime, sanctionne plusieurs décennies de débats sur les réformes à apporter au système d'enseignement français, marqués notamment par une critique de la suprématie des études latines et un désir d'« encyclopédisme ». Prévu à raison d'une par département, les écoles centrales proposent un enseignement qui rompt radicalement avec celui des anciens collèges, dont elles occupent bien souvent les locaux. Organisé en trois sections successives comprenant chacune trois cours (ou éventuellement quatre) pouvant être suivis librement, leur plan d'études accorde en effet une place importante aux sciences, généralisant ainsi un enseignement qui n'était jusqu'alors dispensé que dans les collèges les plus importants. Tandis que le cours de sciences naturelles fait partie de la première section (à partir de 12 ans), celui de mathématiques est compris dans la deuxième (à partir de 14 ans), tout comme le cours de physique et chimie expérimentales. Dans la mesure où un professeur spécialisé est nommé pour chacun des cours prévus, la création des écoles centrales correspond par ailleurs à la constitution d'un premier « corps » de professeurs pour les mathématiques.

Bien que l'enseignement des mathématiques se soit fortement développé dans la seconde moitié du XVIII^e siècle, notamment dans les écoles militaires et certains collèges [Belhoste 1993 ; Taton 1964/1986], l'établissement des écoles centrales constitue un événement marquant de l'histoire de la discipline. En effet, malgré leur caractère éphémère – la création des lycées en 1802 met fin à leur existence –, le fait que les mathématiques fassent de plein droit partie des études secondaires n'a ensuite plus été remis en cause, en dépit d'une diminution de la place accordée aux sciences et des difficultés occasionnées par leur cohabitation avec un enseignement qui redevient progressivement « classique » dans les premières décennies du XIX^e siècle.

Dès lors, marquant la transition entre l'Ancien Régime et le XIX^e siècle, les écoles centrales constituent un objet d'étude privilégié pour saisir les effets des ruptures révolutionnaires en matière d'enseignement secondaire

des mathématiques, mais aussi pour poser la question des continuités que peuvent masquer ces ruptures. En prenant pour point de départ les trajectoires des professeurs des écoles centrales, reconstituées principalement à partir de leurs réponses à l'enquête lancée en l'an VII par le ministre de l'Intérieur François de Neufchâteau, on cherchera ainsi à comprendre et analyser les évolutions qui se font jour en termes de personnel enseignant, de contenus et de pratiques d'enseignement¹. Il s'agit aussi de faire surgir un monde de praticiens des mathématiques qui n'a jusqu'ici guère attiré l'attention, d'autant que le cours de mathématiques des écoles centrales n'avait pas encore fait à ce jour l'objet d'une étude systématique, malgré l'existence d'une historiographie abondante sur les écoles centrales². Si, comme on le verra, les professeurs de mathématiques des écoles centrales se situent pour l'essentiel en dehors du milieu de la science parisienne et de l'Institut national, milieu dont le rôle au moment de la Révolution est bien connu [N. & J. Dhombres 1989 ; Gillispie 2004], ils n'en constituent pas moins la cheville ouvrière de la légitimation des mathématiques dans le système d'enseignement qui se met alors en place.

I. Les professeurs des écoles centrales : un corps de transition ?

Si le plan d'études des écoles centrales, mais aussi la place qu'y occupent les mathématiques, marquent une nette rupture avec le système des anciens collèges, le personnel enseignant témoigne au contraire, de par son passé professionnel, d'une certaine continuité avec l'Ancien Régime. Une

1. L'enquête lancée par le ministre François de Neufchâteau par la circulaire du 20 floréal an VII (9 mai 1799) visait à recueillir des informations concernant à la fois le fonctionnement des écoles centrales, les enseignants et les enseignements dispensés. Elle comprend un questionnaire adressé à l'ensemble des professeurs d'une même école centrale et un autre auquel ils devaient répondre individuellement [François de Neufchâteau 1799]. Les réponses de 79 professeurs de mathématiques sont conservées aux Archives nationales (Paris) essentiellement sous les cotes F/17/1343/A et F/17/1343/B, ainsi que sous la cote F/17/1344/15 pour deux écoles centrales (Finistère et Gard). Elles permettent de connaître le parcours professionnel des enseignants avant qu'ils ne prennent leurs fonctions dans les écoles centrales. Par ailleurs, les deux premiers cartons contiennent également des réponses de certains enseignants à d'autres circulaires de François de Neufchâteau, tels que des rapports, des ouvrages ou des cahiers qui donnent notamment des informations sur les pratiques de classe de ces professeurs. Cet article se fonde sur une exploitation exhaustive des deux principaux cartons et, sauf mention contraire, les informations données et les citations en sont extraites. Les réponses apportées par les professeurs n'étant pas toujours complètes, la taille de l'échantillon peut faire l'objet de petites variations.

2. La seule étude dédiée aux mathématiques [Lamandé 1988-1989] est centrée sur l'école centrale de Nantes, mais aborde toutefois des questions plus générales. Toutes les autres disciplines ont fait l'objet d'une étude : [Désirat & Hordé 1981, 1984 ; Compère 1989 ; Duris 1996 ; Balpe 1999 ; d'Enfert 2000].

fraction significative s'inscrit néanmoins dans la dynamique scientifique de la Révolution.

1. Des enseignants expérimentés

L'exploitation des réponses à l'enquête de l'an VII réalisée par Marie-Madeleine Compère montre en effet que la plupart des professeurs de mathématiques des écoles centrales enseignaient déjà avant 1791, date des premiers bouleversements du système scolaire : quatre professeurs sur cinq, au moins, sont dans ce cas [Compère 1981, p. 43]. Parmi ces derniers, bon nombre ont enseigné dans les collèges de l'Ancien Régime, parfois depuis fort longtemps. C'est le cas par exemple de Jean-Paul Carrère (Gers), qui fut professeur de mathématiques au collège d'Auch de 1772 à 1792 après avoir été répétiteur de logique et de physique pendant quatre ans. De même, Louis-François-Antoine Arbogast (Bas-Rhin) a été professeur au collège de Colmar à partir de 1783, avant d'obtenir en 1789 la chaire de mathématiques de l'école d'artillerie de Strasbourg – il devient professeur de physique au collège national de la ville en 1791³. Pour autant, s'ils ont une bonne expérience de l'enseignement, tous ces anciens professeurs de collège n'apparaissent pas (ou ne se présentent pas) tous comme des spécialistes de l'enseignement des mathématiques, au sens où on l'entend aujourd'hui. Une fraction non négligeable d'entre eux – presque un quart – déclare avoir été professeur de philosophie. Ils ont donc enseigné dans les classes de philosophie, qui constituaient le terme du cursus des anciens collèges et dont la deuxième année, dénommée classe de physique, était traditionnellement consacrée à l'enseignement de la physique et des mathématiques, ces dernières y occupant près de la moitié du temps scolaire à la veille de la Révolution [Belhoste 1993, p. 143 ; 1995, p. 22-25]. Certains professeurs présentent en outre un profil essentiellement littéraire, comme Jean-Baptiste Vassant : avant d'être nommé à l'école centrale du département des Deux-Nèthes (Anvers), celui-ci a été professeur d'humanités au collège de Tulle, avant d'enseigner la grammaire générale, l'histoire, la géographie, le français et le latin à Paris, puis la rhétorique au collège de Sedan⁴.

3. Notons qu'Arbogast est aussi député à l'Assemblée législative de 1791 et à la Convention, membre (influent) du Comité d'instruction publique et auteur d'un *Rapport et projet de décret sur la composition des livres élémentaires destinés à l'instruction publique : présentés à la Convention nationale au nom du Comité d'instruction publique*, Paris : Imprimerie nationale, 1792. C'est sur un rapport d'Arbogast que la Convention décrète le 1^{er} août 1793 l'établissement du système décimal des poids et mesures. Sur ce mathématicien, voir [Friedelmeyer 1994].

4. Ce dernier affirme néanmoins avoir enseigné les mathématiques à son frère pendant un an.

Les anciens collèges ne constituent cependant pas l'unique vivier du recrutement des professeurs de mathématiques des écoles centrales. Les écoles d'artillerie, les écoles de la Marine, les écoles militaires – dont celles issues de la transformation en 1776 de collèges provinciaux –, où l'enseignement des mathématiques a connu un développement significatif au XVIII^e siècle, fournissent également leur contingent de professeurs, au nombre d'une dizaine. Dans la capitale, Jean-Baptiste Labey et Sylvestre-François Lacroix, nommés respectivement à l'école centrale du Panthéon et à celle des Quatre-Nations, ont en commun d'avoir été professeurs de mathématiques à l'École royale militaire de Paris⁵. En province, Henri-Sébastien Dupuy de Bordes (Isère) et Jean-François Lesueur (Charente-Inférieure) ont auparavant enseigné les mathématiques aux écoles d'artillerie de Grenoble et de Valence pour le premier, et aux écoles de la Marine de Rochefort et de Bayonne pour le second⁶.

De même, certains professeurs tirent leur expérience pédagogique de leurs enseignements dans le cadre de cours publics de mathématiques, comme Mathurin Thébault (Ille-et-Vilaine) qui détenait la chaire de mathématiques créée par les États de Bretagne, à moins qu'ils n'aient exercé dans des institutions étrangères. Deux professeurs sont dans ce dernier cas : Jean-Pierre Vairin (Ardenne) fut pendant plus de douze ans « professeur de mathématiques, d'architecture civile, militaire et hydraulique à l'école militaire et à l'académie des beaux-arts de Saint-Petersbourg » ; Nicolas-Rémi Paulin (Tarn), un ancien élève de l'école royale gratuite de dessin puis de l'école royale des Ponts et Chaussées, a occupé entre 1778 et 1780 une chaire de mathématiques et de fortification dans une école militaire établie à Avila en Espagne, avant de rejoindre celle de Sorèze⁷.

En fait, plus des trois quarts des professeurs déjà expérimentés ont auparavant exercé dans des institutions publiques d'enseignement, ce qui n'exclut pas des situations de cumul avec des enseignements donnés dans un cadre ou à titre privé. Mais il faut également compter avec ceux qui déclarent avoir été seulement « instituteur particulier de mathématiques », comme Jean Baret (Loire-Inférieure) ou Gratien Olléac (Haute-Garonne). La nature de leur activité enseignante reste bien souvent à préciser. Vivaient-ils de leçons particulières ou furent-ils, comme le suggère Marie-Madeleine Compère [1981, p. 58], « de simples maîtres de pension » qui

5. Contrairement à celle de Labey, la réponse de Lacroix à l'enquête de l'an VII est manquante.

6. À Bordeaux, Jacques-François Lescan (ou Le Scan) enseigne à la fois à l'école centrale de la Gironde et à l'école de navigation de la Marine. À Toulon, Pierre-Henri Suzanne, professeur à l'école centrale du Var, présente un cas analogue à partir de 1800. En revanche, les réponses ne fournissent que très peu d'informations sur les éventuelles fonctions d'examineur que les professeurs ont pu remplir.

7. Sur Paulin, voir également [Birembaut 1964/1986, p. 458-460].

assuraient « la répétition des cours à quelques collégiens et en hébergeaient comme pensionnaires » ? Notons enfin que l'expérience professionnelle de certains professeurs, qu'ils aient déjà exercé dans des collèges, dans d'autres types d'institutions ou à titre privé, ne se réduit pas nécessairement à l'enseignement. Si Jean-Antoine Nicolas (Bouches-du-Rhône) a bien donné des leçons publiques de mathématiques à Marseille dans la première moitié de la décennie 1780, celui-ci est ensuite devenu « employé dans le corps du Génie de Provence comme adjoint et sous-ingénieur dans la partie hydraulique »⁸.

Il reste qu'une proportion significative de professeurs d'école centrale (environ un sur sept) a été recrutée sans aucune expérience d'enseignement préalable. Jean-Baptiste Biot (Orne), Louis Puissant (Lot-et-Garonne), mais aussi Jean-Antoine Poitevin-Dubousquet (Hérault) ou encore Pierre-Yacinthe-Gabriel Guyot (Lozère), sont dans ce cas. On peut penser que ce sont leurs connaissances mathématiques qui ont alors surtout prévalu : Biot est un ancien élève de l'École polytechnique (où il a aussi été « aspirant-instructeur »), Puissant est ingénieur-géographe et Poitevin-Dubousquet a servi comme officier dans le corps du Génie. Quant à Guyot, c'est un ancien élève de l'École normale de l'an III. De fait, les nouvelles institutions d'enseignement issues de la Révolution constituent, elles aussi, un incontestable vivier de recrutement. Si, avec Biot mais aussi plus tard Paul Binet et Francœur⁹, la contribution de l'École polytechnique paraît plutôt limitée, celle de l'École normale de l'an III, qui devait fournir une formation accélérée à des élèves venus de toute la France et « déjà instruits dans les sciences utiles »¹⁰, semble plus importante. M.-M. Compère a ainsi dénombré, parmi les professeurs de mathématiques, pas moins de douze anciens élèves de cette institution éphémère, auxquels s'ajoutent deux directeurs des conférences de mathématiques : Jean-Pierre Vairin, déjà cité, et Pierre Tédénat (Aveyron) [Compère 1981, p. 51]¹¹. L'ancrage

8. Sauf mention contraire, les citations qui suivent sont extraites des réponses des professeurs à l'enquête de l'an VII (voir note 1).

9. Francœur est nommé à l'école centrale de la rue Antoine en 1802, donc postérieurement à l'enquête de l'an VII. Le premier titulaire de la chaire de mathématiques de cette école, ouverte en l'an VI seulement, est Louis Costaz. Celui-ci est rapidement remplacé par Duport en raison de sa participation à l'expédition d'Égypte. Selon *l'Annuaire de l'instruction publique pour l'an XII* [1804, p. 156], Duport et Francœur se partageaient l'enseignement.

10. Décret du 30 octobre 1794, cité dans [Julia 1981, p. 158].

11. Dans les réponses à l'enquête de l'an VII, seulement cinq professeurs déclarent avoir suivi les cours de l'École normale de l'an III : Birot (Aude), Daguin (Orne), Guyot (Lozère), Ozanne (Eureux), Taillandier (Corrèze). En revanche, certains professeurs, comme Benaben (Maine-et-Loire), n'en font pas mention alors qu'ils y avaient été élèves. De même, tandis que Vairin déclare avoir été « l'un des dix directeurs des conférences de mathématiques de l'École normale de Paris », Tédénat reste muet sur cette fonction : voir sa biographie dans [Condetta 2006, p. 350-351].

du corps professoral dans l'Ancien Régime se trouve donc en partie tempéré par le fait qu'une partie de celui-ci a reçu un enseignement « révolutionnaire », prodigué de surcroît par les grands savants du moment.

La continuité avec l'Ancien Régime ressort également lorsqu'on examine l'âge et l'origine géographique des professeurs. Au moment de l'enquête (1799), la moitié d'entre eux a plus de 40 ans, les trois quarts plus de 33 ans, pour une moyenne d'âge de 41 ans¹². Dans sa très grande majorité, le corps professoral est donc composé d'hommes mûrs, qui ont *a priori* reçu leur éducation mathématique avant la Révolution et dont l'âge est en accord avec l'expérience enseignante annoncée. Et si le plus jeune des professeurs recensés, qui n'est autre que Biot, n'est alors âgé que de 25 ans – il avait à peine 23 ans au moment de son recrutement –, certains de ses collègues ont déjà atteint un âge avancé : un quart des professeurs a plus de 50 ans, Mathurin Thébault, 71 ans, faisant ici figure de doyen.

L'enquête de l'an VII révèle également l'ancrage local de la très grande majorité des professeurs. Selon M.-M. Compère, plus de deux professeurs de mathématiques sur trois étaient déjà implantés localement au moment de leur nomination, soit dans la ville d'établissement de l'école centrale, soit dans le département correspondant, la proportion montant à quatre sur cinq si l'on inclut les départements limitrophes [Compère 1981, p. 51]. Quelques professeurs sont bien venus de Paris exercer en province, mais ils pouvaient avoir déjà une attache locale, comme Pierre Tédénat, originaire de Rodez et qui obtient la chaire de mathématiques à l'école centrale de l'Aveyron après avoir enseigné une vingtaine d'années dans la capitale [F/17/1341/A]. Il semble bien, par ailleurs, que les bouleversements du système éducatif au début de la décennie 1790 aient permis à certains professeurs de consolider leur ancrage local, leur facilitant ainsi l'attribution ultérieure de la chaire de mathématiques de l'école centrale.

2. Des savants aussi ?

Les professeurs de mathématiques des écoles centrales sont donc issus, dans leur grande majorité, du monde de l'enseignement. Alors que l'on a pu dire que la Révolution correspond à la « mainmise des scientifiques sur l'éducation » [N. & J. Dhombres 1989, p. 553-640], on peut dès lors se demander dans quelle mesure ces professeurs appartiennent aussi au monde de la science académique et s'ils témoignent d'une activité de production scientifique. Les réponses à l'enquête de l'an VII, complétées par d'autres sources, permettent de mettre en lumière un ancrage savant plus large que ce que restitue généralement l'historiographie des mathématiques, encore trop souvent focalisée sur les seules « célébrités », et de

12. Statistique réalisée à partir d'un effectif de 72 professeurs.

prendre la mesure des effets de la période révolutionnaire à cet égard. Elles rendent compte notamment de l'implication de ces enseignants aussi bien dans les structures académiques ou éditoriales d'Ancien Régime que dans celles issues de la Révolution.

L'appartenance à des instances de sociabilité savante, et notamment à l'Académie royale des sciences et/ou à la Première Classe de l'Institut national des sciences et des arts qui lui succède en 1795, peut constituer un premier indicateur. À l'époque de la mise en place des écoles centrales, quatre professeurs sont membres de l'Institut, en qualité d'associés : Louis Arbogast, Nicolas Lallemand et Pierre Têdenat pour la section de mathématiques, Jean-Auguste Dangos (Hautes-Pyrénées) pour la section d'astronomie. Ils seront bientôt rejoints par Lacroix en 1799 (résidant, section de mathématiques), Biot en 1800 (associé de la section de mathématiques, puis résidant dans la section de géométrie à partir de 1803) et Louis Genty (Loiret), élu correspondant de la section de géométrie en 1804¹³. Toutefois, plusieurs d'entre eux avaient déjà appartenu à l'Académie royale des sciences, comme membres correspondants : Dangos à partir de 1780, Genty à partir de 1784, Lacroix à partir de 1789, Arbogast à partir de 1792¹⁴. Le cas des professeurs des écoles centrales est donc similaire à celui de l'ensemble des membres du nouvel Institut de France : si l'institution est neuve, la rupture ne se trouve pas dans les hommes qui la composent puisque, dans les faits, y sont élus la plupart des membres de l'ancienne Académie des sciences.

La sociabilité savante des professeurs de mathématiques des écoles centrales ne se limite toutefois pas à l'Institut, pas plus qu'à la capitale où Lacroix et Biot ont été admis à la Société philomathique en 1792 et 1796 respectivement. Louis Genty, qui est aussi l'un des six lauréats du premier concours de l'agrégation en 1766, se distingue notamment par sa présence, sous l'Ancien Régime, dans de nombreuses académies provinciales : à la veille de la Révolution, il est également membre correspondant de l'Académie des sciences de Toulouse, secrétaire perpétuel de la Société d'agriculture d'Orléans [Genty 1788] et a reçu des prix des académies de Besançon, Bordeaux et Toulouse sur des sujets aussi divers que l'influence de Fermat sur son siècle, celle du luxe sur la prospérité des grands états et la réduction de la mendicité. Certains professeurs prennent aussi part à la vague de création de sociétés savantes départementales impulsée sous le Directoire par le ministre de l'Intérieur Letourneux¹⁵, comme

13. D'autres seront élus plus tardivement à l'Académie des sciences, comme Puissant (1828) et Francœur (1842).

14. Dangos, Genty et Lacroix étaient respectivement les correspondants de Messier, Laplace et Condorcet.

15. Circulaire du 3 floréal an VI (22 avril 1798), voir [Chaline 1998, p. 44, n. 36].

Louis Puissant, membre résidant de la Société libre d'agriculture du département du Lot-et-Garonne formée en 1798 [Lauzun 1900, p. 58], ou encore Pierre-Henri Suzanne (Var) qui figure parmi les tout premiers membres de la Société libre d'émulation du département du Var qui voit le jour en 1801¹⁶. Au-delà de ces exemples ponctuels, il conviendrait de recenser et d'évaluer précisément l'implication des professeurs de mathématiques des écoles centrales dans ce mouvement, en faisant appel à d'autres sources que les réponses à l'enquête de l'an VII, peu disertes à cet égard¹⁷.

La production d'écrits scientifiques constitue un deuxième indicateur de l'ancrage savant des professeurs. Un sur trois est l'auteur d'une ou plusieurs publications scientifiques (ou techniques)¹⁸, et la proportion s'élève légèrement si l'on prend aussi en compte les écrits philosophiques ou politiques. Mémoires et articles de dictionnaires ou de journaux savants d'une part, traités et manuels d'autre part composent la production mathématique recensée. Émerge ainsi un milieu d'auteurs bien plus large que celui des savants se situant sur le front avancé des mathématiques et/ou reconnus par l'histoire. À côté de scientifiques de premier plan, comme Arbogast ou Lacroix, figurent en effet des auteurs moins connus comme Jantet (Jura), auteur d'un *Traité élémentaire de mécanique* (1785), Tamarelle Lagrave (Dordogne), qui signe l'article SINUS de l'*Encyclopédie méthodique* de Mathématiques¹⁹, ou Dupuy de Bordes (Isère), traducteur d'un traité de mathématiques de l'ingénieur et mathématicien anglais Benjamin Robins (1771), auteur d'*Éléments de géométrie pratique* (1774) et contributeur à l'*Encyclopédie d'Yverdon* avec une quarantaine d'articles ayant principalement trait à la fortification²⁰.

Il semble bien, par ailleurs, que le nouveau contexte scolaire et l'instauration du système unifié de poids et mesures aient aussi contribué à mobiliser une partie des professeurs. Si certains, comme Lacroix mais aussi

16. *Mémoires publiés par la Société libre d'émulation du département du Var*, Draguignan : Fabre, an X, p. 8. À sa création, cette société comprend trois professeurs de mathématiques (dont Suzanne) pour un total de 15 membres.

17. On peut regretter que *L'Annuaire de la France savante XVII^e-XX^e* (<http://cths.fr/an/selec.php>), mis en ligne par le Comité des travaux historiques et scientifiques (CTHS), ne précise pas systématiquement les dates d'entrée dans les sociétés savantes des individus recensés.

18. Proportion estimée sur un effectif de 89 professeurs.

19. *Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, t. III, 1789, p. 37-53.

20. *Traité de Mathématiques de Monsieur Benjamin Robins contenant ses nouveaux principes d'Artillerie [...]*, Grenoble, 1771 ; *Traité de géométrie pratique*, Grenoble, 1774 (2 vol.) ; SINUS, *Encyclopédie ou Dictionnaire universel raisonné des connoissances humaines. Mis en ordre par M. De Felice*, Yverdon, 1770-1780. Sur cette encyclopédie, voir [Doig & Donato 1991, en particulier p. 136].

Tédenat (Aveyron)²¹ ou Olléac (Haute-Garonne)²², font paraître le cours de mathématiques qu'ils dispensent à l'école centrale, d'autres publient des manuels élémentaires : Bobillier (Haute-Saône) est l'auteur, en l'an VII, d'un *Traité élémentaire d'arithmétique et de calcul décimal*, « utile à tous les fonctionnaires publics, arpenteurs, négociants, etc. et spécialement destiné à l'usage des instituteurs et élèves des écoles primaires »²³, de même que Simonin (Côtes-du-Nord), qui faisait paraître l'année précédente un *Traité d'arithmétique selon les mesures nouvelles*²⁴. La publication d'instructions relatives au nouveau système métrique ou de tables de conversion, impulsée par le gouvernement et les administrations départementales, mobilise plusieurs professeurs, comme Nicolas Clerc, auteur d'une *Instruction sur les mesures républicaines et les mesures anciennes du département de l'Ain comparées entre elles*²⁵, ou encore François-Joseph Français (Haut-Rhin), qui publie des *Tables de réduction des anciennes mesures en nouvelles et des nouvelles en anciennes, calculées pour le département du Haut-Rhin*²⁶. On notera que ce dernier type de production n'est pas sans lien avec l'activité d'enseignement des professeurs, si l'on en croit Vairin (Ardennes) qui indique consacrer sa leçon du nonidi « à familiariser les jeunes gens au calcul décimal appliqué au nouveau système de poids et mesures, dont l'utilité commence généralement à être sentie ».

La production scientifique des professeurs ne se limite toutefois pas aux écrits imprimés. Non seulement les mémoires soumis à telle ou telle académie ne font pas nécessairement l'objet d'une publication en bonne et due forme, mais plusieurs professeurs indiquent, dans leur réponse à l'enquête de l'an VII, avoir composé des ouvrages qu'ils n'ont pu faire paraître faute de moyens. Certains professeurs ont par ailleurs fait parvenir au ministre de l'Intérieur leurs cours manuscrits, dont certains, non publiés mais conservés aux Archives nationales, comme ceux de Demeusy (Doubs), Paulin (Tarn) ou Thomassin (Ourthe), forment de véritables ouvrages de mathématiques.

21. P. Tédenat, *Leçons élémentaires de mathématiques*, Paris : Duprat, 2 vol., an VII-an X.

22. G. Olléac, *Cours élémentaire de mathématiques pures et appliquées*, Toulouse : Benichet an VIII (un exemplaire conservé dans F/17/1343/B).

23. Vesoul : Poirson, s.d. (un exemplaire conservé dans F/17/1343/B).

24. Paris : Barbou, an VI.

25. Bourg : Dufour & Jossierand, an VIII.

26. Strasbourg : Levrault frères, an X. Arbogast, Laurent, Puissant, Vairin ont également publié des ouvrages de ce type.

II. Des pratiques enseignantes entre tradition et modernité

1. Des cours parmi les plus fréquentés

De tous les cours des écoles centrales, le cours de mathématiques est le plus fréquenté après celui de dessin [Mérot 1987 ; Palmer 1980]. Selon Catherine Mérot [1987, p. 414], la majorité des écoles rassemble pour cet enseignement entre 30 et 60 élèves. L'examen des réponses des professeurs au questionnaire de l'an VII permet d'affiner ce bilan, malgré l'imprécision de certaines d'entre elles²⁷. En l'an VII, les cours reçoivent en moyenne 48 élèves. Les moins fréquentés, avec moins de 20 élèves, représentent à peine une école sur dix. En revanche, la moitié des cours comptent plus de 40 élèves, et quelques-uns (environ un sur dix) avoisinent la centaine. Si l'on ne s'étonnera pas de trouver 121 élèves dans la classe de Jean-Baptiste Labey à l'école centrale du Panthéon à Paris, les 132 élèves qu'avait Dupuy, qui fut le professeur de Stendhal à Grenoble, ou encore les 95 jeunes gens auxquels enseignait Marcoz, à Chambéry, attestent que le cours de mathématiques a su trouver son public. Un autre indice de ce succès est la hausse de la fréquentation entre l'an V et l'an VII, que l'on peut constater dans la plupart des départements, ou encore la présence parfois, aux côtés des élèves, de « pères de famille » (Mayenne), « d'amateurs en tout genre » (Calvados) ou de « militaires non inscrits » (Ille-et-Vilaine).

Ces quelques chiffres ne donnent toutefois qu'une image très imparfaite de la réalité du terrain : les abandons en cours d'année étaient nombreux et l'assiduité parfois toute relative. Ainsi, Olléac (Haute-Garonne) précise que le nombre de ses élèves « se réduit tous les ans à peu près au tiers vers la moitié de l'année » tandis que Quesnot (Calvados) annonce pour l'an V « 36 élèves qui n'ont pas cessé d'assister à ses leçons, plus 20 environ allant et venant ». Ces aléas de fréquentation étaient pour partie liés aux événements révolutionnaires. Le cours de mathématiques s'adressait à des élèves de plus de 14 ans, mais beaucoup d'entre eux ayant 17, 18 voire plus de 20 ans, la conscription réduisait *de facto* les effectifs. Suzanne (Var) explique que son effectif a diminué de moitié en l'an VII, ses élèves ayant été « embarqués » ; Benaben (Maine-et-Loire) déplore la même année que « les gardes et les colonnes mobiles » aient réduit le nombre de ses élèves de moitié. On peut aussi, peut-être, voir dans la nouveauté de cet enseignement – et dans la faible légitimité qui en résulte – une seconde raison de cet état de fait. C'est en tout cas l'analyse que fait Vairin (Ardenne), dont les élèves passent une partie du cours « à remplir les lacunes occasionnées par les absences [...] : car les parents des jeunes gens, qui dans leur temps n'ont pas appris à connaître les sciences exactes, ne savent pas que les proposi-

27. On a pris en compte 75 réponses. Sur la fréquentation, voir aussi [Julia 1983].

tions qu'on y traite forment entre elles une chaîne continue qu'on ne peut interrompre qu'à son propre désavantage, en perdant tout le fruit d'une instruction, si intéressante à la société » [Vairin, « Rapport concernant le cours de mathématiques... », an VII, F/17/1343/A].

Néanmoins, l'absentéisme des élèves semble avoir également une cause plus structurelle, liée à la nature du cours lui-même. En effet, les réponses des professeurs font fréquemment état de l'absence presque totale de connaissances mathématiques chez certains élèves, qui se présentent « souvent sans même savoir faire une addition » (Vienne), voire en sachant « à peine former les caractères numériques » (Cher). De tels élèves, comme le précise par exemple Arbogast dans sa réponse, n'apprennent « que l'arithmétique », autrement dit les premiers éléments du calcul. Face à un enseignement qui, en dépit des initiatives pédagogiques prises par de nombreux enseignants, reste bien souvent d'un niveau supérieur à celui des écoles primaires, et dans un système où les élèves peuvent librement choisir les cours auxquels ils souhaitent assister, on comprend ainsi pourquoi Olléac a pu qualifier d'« ordinaire » le fait qu'une partie des élèves abandonne l'étude des mathématiques en cours d'année.

2. Un enseignement à la croisée de l'Ancien Régime et de la Révolution

Les textes officiels concernant les écoles centrales n'imposent aux professeurs aucune contrainte en termes de durée, d'organisation ou de contenu des cours. Dans les faits, les services des professeurs varient dans des proportions allant de 1 à 8, entre les quelques-uns qui, avec un cours un jour sur deux (et deux jours chômés), ne donnent que 4 leçons par décade, et Demiez (Mont Terrible), qui offre 32 leçons par décade. Entre ces deux extrêmes, plus de la moitié des professeurs a choisi d'effectuer une leçon par jour, le plus souvent de 2 heures, et ceci 8 jours par décade, se calquant ainsi, probablement, sur les modes d'organisation en usage sous l'Ancien Régime [Compère 1989, p. 148].

De la même manière, si les écoles centrales se veulent le lieu d'un enseignement nouveau, elles ne constituent pas une rupture radicale avec le passé. Les remises en question existent, comme celle d'Olléac qui affirme qu'il faut « réformer le mode, l'objet, et le but de l'enseignement » et à qui aucun des cours publiés existants ne convient, car tous selon lui usent de la « méthode synthétique [qui est] de tous les fléaux de l'instruction, sans contredit, le plus grand »²⁸. Mais elles sont finalement marginales. Au contraire, c'est à une tradition déjà éprouvée, et liée à la spécificité de la

28. Olléac, *op. cit.* n. 22, p. v-vi.

discipline, que les professeurs font référence pour décrire leur enseignement. Ainsi, l'usage de manuels qui existaient déjà sous l'Ancien Régime pour l'enseignement des mathématiques [Alfonsi 2011, chap. IV] trouve les faveurs de la très grande majorité des professeurs. Dumas (Creuse) explique par exemple « qu'il était reconnu depuis longtemps que pour étudier avec fruit cette partie, il n'était guère possible de se passer de livres élémentaires, que la dictée des cahiers n'était plus en usage, parce que les fautes qui, dans cette matière, sont si faciles à commettre sur les figures, les signes, les lettres, les chiffres, etc. pouvaient dérouter les élèves ; parce que d'ailleurs, cette dictée entraînait la perte d'un temps précieux »²⁹.

Les professeurs justifient le recours aux livres publiés sous l'Ancien Régime de trois façons. D'abord, par la nature même de la science mathématique : contrairement à la morale et à l'histoire qui « ont éprouvé quelques changements par une suite nécessaire de la Révolution », ou encore à la chimie et l'histoire naturelle qui « ont presque changé de face par les belles découvertes de plusieurs hommes de génie [...], il n'est rien arrivé de tel aux mathématiques élémentaires [dont] les principes sont et demeurent incontestables » (Frémont, Vienne). Ensuite, par la confiance que l'on place dans des manuels qui ont fait leurs preuves. Les propos de Benaben, à Angers, qui explique qu'« ayant trouvé [...] des ouvrages tout faits et qui jouissent depuis longtemps d'une réputation justement méritée, [il avait] cru pouvoir en disposer [...] et en faire la base de [ses] leçons », résumant ainsi l'opinion générale des professeurs qui, s'ils n'hésitent pas à critiquer ces manuels et s'ils ne les suivent que rarement à la lettre, ne voient toutefois pas l'intérêt de reprendre le travail à zéro. S'ajoute enfin, parfois, un argument pragmatique : c'est, par exemple, parce qu'il « était entre les mains des élèves quand il a obtenu sa chaire », et que « du reste il est aussi clair et aussi méthodique qu'un autre », qu'Alaux, dans le Cher, opte pour le manuel de Bossut.

En conséquence, on ne s'étonnera guère de voir réapparaître dans les classes des écoles centrales tous les « grands noms » de l'enseignement des mathématiques d'avant la Révolution. Parmi les 79 professeurs dont les réponses au questionnaire de l'an VII sont conservées, 57 disent se servir du cours de Bézout (que ce soit celui à l'usage de la Marine ou de l'Artillerie), celui-ci étant d'ailleurs l'unique cours utilisé par 27 d'entre eux. Les seuls autres livres qui constituent une source exclusive sont ceux de Bossut et de Lacaille, dans 4 et 3 écoles respectivement. Le premier est en outre indiqué comme l'un des manuels utilisés par 16 professeurs, le second par 6 professeurs. Au total, 50 enseignants (63 %) ne se servent que d'ouvrages publiés sous l'Ancien Régime. Sont mentionnés, en particulier, aux côtés

29. Dumas, « Réponse à la circulaire du 10 fructidor an V » [F/17/1343/A].

des noms cités ci-dessus, des auteurs comme Clairaut (15 occurrences) et Mauduit (3 occurrences). Inversement, un peu plus de 10 % des professeurs annoncent ne faire usage que de livres que l'on peut qualifier de « nouveaux ». Les ouvrages didactiques qui deviendront les références du début du XIX^e siècle, mais qui ne sont encore que très récents, commencent donc à s'imposer aux côtés des « grands maîtres », pour reprendre l'expression du professeur de l'école centrale de l'Ain : la *Géométrie* de Legendre est utilisée dans 12 écoles, les livres de Lacroix dans 10, la *Statique* de Monge, dont l'étude est nécessaire pour l'entrée à l'École polytechnique, dans 13³⁰.

Le choix des manuels, s'il manifeste l'existence d'une tradition dans l'enseignement des mathématiques, a pour conséquence une très grande homogénéité des matières enseignées. Canonisé par Bézout, Bossut et Lacaille, le quatuor « arithmétique/géométrie/algèbre/applications de l'algèbre à la géométrie » constitue la structure commune des cours complets de mathématiques : structure que la parution en l'an VIII du cours de Lacroix « à l'usage de l'école centrale des Quatre-Nations » ne remettra d'ailleurs pas en cause et qui constituera, quelques années plus tard, le socle des programmes de mathématiques des lycées napoléoniens, puis des collèges royaux à la Restauration. Dans les écoles centrales, la grande majorité des professeurs conserve cet ordre canonique, et seuls quelques-uns enseignent l'algèbre juste après l'arithmétique. À cette base, enseignée de manière plus ou moins développée selon les écoles, s'ajoutent parfois des enseignements de statique (14 écoles), de mécanique (9 écoles), ou encore de calcul différentiel (7 écoles), destinés à des élèves plus avancés dans l'étude des mathématiques, et plus rarement de géométrie descriptive (2 écoles).

3. Des pratiques pédagogiques éprouvées

Si les professeurs de mathématiques des écoles centrales s'accordent sur ce qui doit constituer la base des études de mathématiques, et s'ils puisent leur inspiration dans les mêmes sources, les descriptions qu'ils donnent de leurs pratiques d'enseignement montrent cependant qu'ils ne se contentent que rarement de suivre linéairement les ouvrages qu'ils utilisent.

En effet, la majorité d'entre eux ne suit pas un seul auteur, mais plusieurs. Spitz (Meurthe) se sert ainsi de « l'arithmétique de Bézout, la géométrie de Legendre, la trigonométrie de Lacroix, l'algèbre de Clairaut complétée par les notes de Lacroix et la mécanique de Bossut » ; Birot

30. Ces résultats permettent ainsi de compléter les conclusions de [Dhombres & Julia 1993].

(Aude) suit Bézout pour l'arithmétique et la géométrie, mais puise des « développements » dans les « cours de Bossut, Mauduit, Legendre, l'Algèbre d'Euler et la dernière édition de celle de Clairaut ». Les professeurs semblent parfaitement au courant des manuels existants, les ont consultés et se sont forgés leur propre opinion à leur sujet. Remarquons en outre que, même si cela ne concerne qu'une dizaine d'écoles, certains professeurs utilisent pour leur cours des traités relevant des mathématiques « savantes », et par ailleurs récentes, telles les leçons de Lagrange et de Laplace à l'École normale de l'an III (Billy, Seine-et-Marne), la théorie des fonctions analytiques de Lagrange (Jantet, Jura ; Dastin, Aisne), voire les *Mémoires* de l'Académie des sciences (Vassant, Deux-Nèthes). Les explications de Louis Hahn (Lys) attestent que cette pratique manifeste non seulement une culture mathématique certaine, mais aussi une expérience pédagogique suffisante pour effectuer les adaptations nécessaires pour les élèves :

« les productions de nos grands génies dans la carrière mathématique sont si multipliées depuis un demi-siècle qu'on croirait toute matière épuisée [...]. Méditer ces hommes, tant pour remplir avec honneur la place que j'occupe, que pour faciliter les progrès de mes élèves, voilà la première tâche que je me suis imposée. » [Hahn, réponse à la circulaire du 20 fructidor an V, F/17/1343/B]

De manière plus générale, l'usage d'un manuel de mathématiques ne consiste que très rarement à le suivre exactement de bout en bout. Chacun sélectionne, selon ce qu'il estime être des points faibles ou forts, ou encore en fonction des besoins des élèves, les livres ou les parties de livre à utiliser, ainsi que les compléments à y faire le cas échéant. Par exemple, Hahn explique qu'il « a entremêlé les éléments de géométrie de telle sorte que les principes d'algèbre fraîchement expliqués [aident] à faire comprendre ceux de géométrie » ; Quesnot (Calvados) précise qu'il « suit scrupuleusement Legendre », mais qu'en ce qui concerne l'arithmétique de Bézout, il « se permet beaucoup de changements et d'additions » ; Delamare (Somme) se sert uniquement du cours de Bézout, mais « s'en écarte [...] lorsqu'il trouve l'occasion de puiser dans des ouvrages plus récents des méthodes plus expéditives et plus heureuses, ou des démonstrations plus concluantes ». Nombreux sont ceux, nous l'avons vu, qui n'en sont pas à leur première expérience d'enseignement, et c'est précisément ce savoir-faire pédagogique qui, même s'il n'est pas formalisé, leur fournit ici une ligne de conduite que résume bien Alaux (Cher) : « La longue expérience et la longue habitude de l'enseignement sont pour [le professeur] des guides sûrs qui ne sauraient l'égarer ».

C'est encore l'expérience enseignante qui se manifeste s'agissant de l'organisation des leçons en présence des élèves. En premier lieu, nombreux sont les professeurs qui, loin de se contenter d'un exposé théorique, accordent une place importante aux applications. Ces dernières jouent alors un

double rôle : d'un côté, elles facilitent l'apprentissage, comme à Angers, où Benaben fait « des applications fréquentes de [ses] théorèmes à la solution d'une foule de problèmes relatifs aux arts et aux sciences » afin de « faire disparaître la sécheresse inséparable des vérités des traités », ou dans la Creuse, où Dumas a « soin de fixer les idées par des applications fréquentes puisées dans la mécanique, la dioptrique, la gnomonique et l'astronomie ». D'un autre côté, les applications favorisent la motivation des élèves en permettant de leur « faire sentir [...] l'utilité des mathématiques » (Desponts, Aube). Si l'on peut imaginer que ces détails, exposés dans des réponses au ministre, font pour partie écho à une circulaire du 17 vendémiaire an VII dans laquelle celui-ci demandait précisément de ne pas s'en tenir à la théorie [François de Neufchâteau 1798], ils n'en rendent pas moins compte d'une véritable réflexion quant aux manières d'enseigner qui n'est sans doute pas le fruit des circonstances, mais plutôt celui de la pratique professionnelle.

En second lieu, les leçons de mathématiques des écoles centrales ne relèvent pas systématiquement du cours magistral, puisqu'une partie de la leçon est parfois consacrée à la mise en pratique par les élèves. Celle-ci peut prendre la forme, comme dans le Tarn, d'une nouvelle démonstration des propositions vues en cours, effectuée au tableau par quelques élèves, ou, plus rarement, de « travaux pratiques », comme dans les Ardennes où Vairin a « fait dessiner en grand toutes les figures du cours de géométrie » qui, « collées sur carton », sont ensuite « pendues au mur de la salle ». Il s'agit aussi, de façon plus classique, de séances d'exercices. Ainsi, en Charente-Inférieure, Lesueur consacre la dernière des leçons de chaque décade « à l'examen du cahier des élèves, à leur proposer des questions et à répéter les endroits difficiles » ; dans le Morbihan, Denis Marat organise des séances où « on se rassemble pour faire un petit exercice dans lequel les élèves se font des questions les uns les autres sur les leçons des jours précédents et antérieurs » ; Vairin s'est quant à lui procuré des tablettes d'ardoise afin que les élèves puissent « corriger les opérations sans avoir besoin de les recommencer sur le papier ». Notons également que la pratique de l'enseignement mutuel, si elle reste marginale, n'en est pas moins introduite dans certaines écoles. Dans le Tarn, les Ardennes, la Seine-et-Marne et la Meurthe, les élèves les plus avancés « répètent » ou « instruisent » leurs camarades.

4. Des finalités nouvelles ?

Cet accent mis sur la pratique et sur l'entraînement des élèves répond de près aux différentes finalités de l'enseignement des mathématiques dans les écoles centrales. De manière pragmatique, un premier enjeu pour les élèves, mais aussi pour les enseignants, est sans doute constitué par les

exercices publics, qui se déroulent à la fin de chaque année scolaire et au cours desquels les élèves sont interrogés publiquement sur ce qu'ils ont appris. Si l'obtention de prix est source d'émulation pour les élèves, leur réussite collective forge aussi la réputation du professeur et assure donc sans doute la fréquentation de son cours. De ce point de vue, et même si cette question n'est pas directement évoquée dans les témoignages, il est clair qu'il y a un intérêt immédiat à ce que les élèves soient exercés au tableau et sachent résoudre des exercices. Néanmoins, l'enseignement des mathématiques a deux autres finalités, quant à elles clairement exprimées par les professeurs.

L'une est utilitaire : il s'agit d'apprendre aux élèves les notions mathématiques dont ils auront besoin dans leur vie professionnelle future. Ainsi, en Mayenne, Pierre Noël n'enseigne que le calcul numérique et les éléments d'algèbre, car « dans une ville de commerce un grand nombre de jeunes gens ne veulent apprendre que ce qui concerne le calcul numérique ». À Maastricht, le professeur affirme qu'« aucun élève ne sortira de l'école sans savoir mesurer le champ, et appliquer la géométrie aux usages ordinaires de la vie » [F/17/1344/22]. Dans la Lys, Hahn précise que, « considérant les localités et le génie du peuple de ce département », il a expliqué « toutes les règles qui ont rapport au commerce telles que celles de société, d'intérêt etc. », avant d'ajouter que « quelques-uns de [ses] élèves sont dès ce moment propres à entrer dans des maisons de négociants ».

L'autre finalité concerne l'admission à l'École polytechnique. Si l'on en croit les sources, l'enjeu est d'importance : non seulement, alors qu'aucune question de la circulaire de l'an VII ne les y invite, les professeurs insistent souvent sur les résultats qu'ils ont obtenus en précisant le nombre d'élèves reçus, mais le rapport remis au ministre en l'an VIII à l'issue du traitement de l'enquête souligne aussi l'influence du concours de l'École polytechnique sur l'intérêt des élèves pour les études mathématiques. La préparation aux concours est ainsi perçue par Olléac comme « le but de l'enseignement des mathématiques », tandis que Bedel (Vosges) va même jusqu'à affirmer qu'il a « toujours cru que [sa] tâche se bornait à mettre [ses] élèves en état de se présenter aux examens de l'école polytechnique ». Si l'École polytechnique est alors une institution neuve, ce souci des concours constitue, en revanche, un élément de continuité avec l'enseignement des mathématiques tel qu'il a pu se développer sous l'Ancien Régime : les professeurs des écoles centrales se réapproprient la tradition préparatoire qui s'était développée dans les collèges depuis le milieu du XVIII^e siècle [Belhoste 1995, p. 26].

Cette double finalité se retrouve dans la manière dont les enseignants organisent leur service d'enseignement, pour laquelle on constate une assez grande homogénéité de pratiques. Dans leur majorité, les professeurs indiquent étaler leur cours sur deux ans, certains poussant jusqu'à trois ans. La norme consiste alors à séparer les élèves en plusieurs groupes : l'un est

constitué des « commençants », dont beaucoup ne poursuivront pas l'étude des mathématiques plus loin que cette première année, si l'on en croit les différences entre les effectifs parfois mentionnées ; l'autre groupe réunit des élèves plus avancés, qui sont ceux que l'on prépare au concours. Par exemple, le programme des cours de mathématiques de l'école centrale de l'Aveyron explique aux familles que la première classe est consacrée « aux principes élémentaires », que le professeur s'attache à « rendre familier [...] par des applications nombreuses aux objets les plus simples et les plus utiles », tandis que la seconde classe est destinée aux élèves qui « voudront se présenter à l'École polytechnique » [F/17/1344/9]. En permettant de faire cohabiter des élèves qui n'ont pas le même niveau et qui ne fréquentent pas le cours de mathématiques pour les mêmes raisons, ce système a l'avantage de satisfaire à deux finalités de l'enseignement peu compatibles *a priori* et donc, sans doute, de rassurer les familles sur la pertinence d'un enseignement qui, rappelons-le, ne faisait pas partie des cursus traditionnels de la génération précédente.

III. Après les écoles centrales

La loi générale sur l'instruction publique du 11 floréal an X (1^{er} mai 1802) entraîne la suppression des écoles centrales. Elles sont, pour un certain nombre d'entre elles du moins, remplacées par des lycées, financés par l'État. En quelques années, c'est l'ensemble du système d'enseignement qui est réorganisé : les inspecteurs généraux sont institués en 1802, l'Université impériale, avec son « corps enseignant », est fondée en 1806, les académies, la fonction de recteur, les facultés de sciences et de lettres, le baccalauréat, la licence, ou encore l'École normale sont créés en 1808 [Chervel 1993, p. 34 ; Prost 1968, p. 23-25]. Dans ce contexte de renouvellement, mais aussi de volonté de renouer avec l'organisation scolaire de l'Ancien Régime, que deviennent les professeurs de mathématiques des écoles centrales ?

1. Des écoles centrales aux lycées impériaux

L'organisation des lycées procède d'une autre logique que celle qui prévalait dans les écoles centrales. D'une part, on passe d'un système égalitaire – toutes les écoles avaient le même statut – à un système hiérarchisé. L'arrêté du 7 novembre 1803 répartit en effet établissements et professeurs en plusieurs classes, la rémunération de chaque enseignant dépendant désormais à la fois de son grade et de son lieu d'exercice³¹.

31. Texte reproduit dans [Duvergier 1836, p. 270-271].

L'inégalité des établissements conduira à terme à un fonctionnement en réseau, où les lycées parisiens (qui constituent une classe particulière) attirent les professeurs les plus réputés et les plus expérimentés [Chervel 1993, p. 45]. D'autre part, alors que les écoles centrales avaient une forte autonomie (recrutement des enseignants par un jury local, absence de programme et de règlement uniforme), les lycées sont placés sous la tutelle de l'État centralisé [Savoie 2004] : c'est à l'échelon central que se décident à présent les affectations³², les avancements de carrière, ainsi que les plans d'études et le programme des cours. Notons enfin qu'en matière d'organisation pédagogique et de vie scolaire, les lycées renouent avec l'Ancien Régime, en restaurant le regroupement des élèves par classes de niveaux progressifs plutôt que par cours, en organisant des internats, ou encore en faisant surveiller les élèves et encadrer leurs études par des personnels spécifiques (les maîtres d'études).

Pourtant, malgré ces différences structurelles, on constate une certaine continuité avec l'ancien système révolutionnaire. Ainsi, les locaux des nouveaux établissements, dans une très large majorité, ne sont autres que ceux dans lesquels étaient déjà installées les écoles centrales. De plus, si certains des cours que l'on donnait dans les écoles centrales ont été supprimés, le nouveau gouvernement met au crédit des écoles centrales le fait d'avoir « fait connaître plus généralement le prix des sciences exactes et des sciences d'observation », dont il résulte que ces dernières sont « beaucoup plus étudiées qu'elles ne l'étaient il y a quinze ans » [Fourcroy 1802, p. 295]. De fait, les premiers programmes des lycées font des mathématiques l'une des deux disciplines majeures (avec le latin)³³ et prévoient la nomination de quatre professeurs, dont un professeur de mathématiques transcendantes, chargé d'un enseignement d'un niveau plus élevé que celui qui était en général dispensé dans les écoles centrales³⁴. La création des lycées confirme la constitution, initiée avec les écoles centrales, d'un corps de professeurs de mathématiques, et marque son renforcement.

Si les contenus des cours sont désormais fixés nationalement, les nouveaux programmes de mathématiques ne marquent pas pour autant une rupture avec les enseignements dispensés dans les écoles centrales. Au

32. Le recrutement par concours ne commencera qu'en 1821, avec le rétablissement de l'agrégation.

33. Les mathématiques perdront progressivement ce statut jusqu'à la Restauration : en les repoussant à la fin de la scolarité, les programmes rompent l'équilibre de départ au profit du latin.

34. Arrêté du 10 décembre 1802, reproduit dans [Savoie 2000, p. 97-98]. Il faut cependant noter que le règlement du 19 septembre 1809 [Belhoste 1995, p. 83-86] ne prévoit plus que deux ou trois professeurs de mathématiques selon les établissements, tout en hiérarchisant les chaires : mathématiques transcendantes, mathématiques spéciales, mathématiques élémentaires.

contraire, ils entérinent et officialisent les pratiques que décrivaient déjà les professeurs dans leurs réponses au questionnaire de l'an VII. On y retrouve ainsi le triptyque « arithmétique/géométrie/algèbre », complété par des matières déjà présentes dans certaines écoles centrales : applications de l'algèbre à la géométrie, astronomie et mécanique en 1803 [Belhoste 1995, p. 78-80], arpentage et statique en 1809 [*Ibid.*, p. 85-86]. De même, les plans d'études font la part belle aux enseignements nés dans les écoles centrales, en préconisant l'usage des livres de Lacroix, Biot, Francœur, Puissant. Et, après avoir expérimenté un quasi-monopole du cours complet de Lacroix, les programmes reviennent en 1809 à des recommandations que l'on dirait calquées sur les usages des professeurs des écoles centrales : Bézout, Bossut et Marie rejoignent Lacroix pour l'arithmétique et l'algèbre, Legendre fait son entrée pour la géométrie, de même que Monge pour la statique. Les textes officiels concernant les lycées s'appuient donc sur des pratiques enseignantes héritées des écoles centrales, qui les avaient elles-mêmes, nous l'avons vu, pour partie héritées de l'Ancien Régime.

2. Un vivier de professeurs pour les lycées et les facultés des sciences

Les instructions fournies aux inspecteurs généraux et aux membres de l'Institut national³⁵ chargés d'organiser les lycées nous donnent quelques éléments sur la façon dont s'est effectuée la transition avec les écoles centrales. À la suite d'une visite sur place, les inspecteurs devaient fournir au Premier Consul les noms de deux candidats par poste à pourvoir, la nomination définitive demeurant le privilège de Bonaparte. Parmi les candidats suggérés par Fourcroy, conseiller d'État chargé de l'Instruction publique, figuraient les professeurs des écoles centrales, mais aussi les hommes connus « par leurs ouvrages et par leurs noms », ainsi que les personnels des « administrations, où les circonstances ont forcé plusieurs anciens professeurs à chercher des ressources et des moyens d'existence qui leurs manquaient » [Fourcroy 1802, p. 301]. L'État se réservait donc à la fois la possibilité de renouer avec la tradition, en prenant à son service d'autres enseignants ayant exercé sous l'Ancien Régime, ou de renouveler ses personnels, en nommant de nouveaux professeurs sur la base de leur réputation. En tout cas, le fait d'être déjà en poste ne faisait pas des professeurs des écoles centrales des enseignants désignés d'office pour les lycées. Au contraire, il s'agissait pour les inspecteurs de « comparer entre eux » tous les candidats, en fonction de l'étendue de leurs connais-

35. Pour la désignation des premiers professeurs des lycées, la loi du 11 floréal an X adjoint trois membres de l'Institut national aux inspecteurs généraux des études créés par cette même loi.

sances, de leurs « méthodes précieuses pour l'enseignement », mais aussi de leur « qualités morales » et de leur « goût pour leur état » [Fourcroy 1802, p. 301-302]³⁶. On comprend mieux, dès lors, les manifestations de zèle de certains d'entre eux qui, à Nîmes et à Nancy, décident collectivement de poursuivre leurs enseignements afin d'assurer une continuité alors que l'école centrale ferme ses portes et qu'ils n'ont aucune garantie d'être rémunérés [F/17/1344/15 ; F/17/1344/22].

En pratique, toutefois, les inspecteurs généraux ont privilégié une certaine continuité³⁷. Au lycée de Besançon, ouvert en 1803, on constate ainsi que six des huit enseignants, dont trois de mathématiques, avaient exercé dans les écoles du Doubs, du Jura ou des Ardennes ; à Nancy, la plupart des professeurs du lycée sont issus de l'école centrale de la Meurthe [Choffat 2004]. Dans le cas particulier des mathématiques, près d'une trentaine de professeurs d'écoles centrales se voient attribuer une chaire de mathématiques dans un lycée, le plus souvent dans celui correspondant à la zone géographique de l'ancienne école centrale où ils exerçaient. C'est le cas de Gergonne (Gard), qui obtient la chaire de mathématiques transcendantes du lycée de Nîmes, ou encore de Bedel, qui passe de l'école centrale des Vosges au lycée de Strasbourg. De manière générale, on constate que quand le lycée s'est établi sur le lieu même de l'école centrale, les professeurs ont le plus souvent conservé leur chaire de mathématiques, à moins qu'ils n'aient été appelés à d'autres fonctions plus haut placées dans la hiérarchie, que ce soit comme proviseur, inspecteur d'académie ou même recteur, à l'instar de Paulin et Tédénat, placés respectivement en 1809 à la tête des académies de Cahors et de Nîmes [Condet 2006, p. 309-310 et 350-351].

En revanche, les professeurs des écoles centrales nommés ensuite dans un lycée n'obtiennent pas nécessairement la chaire de mathématiques transcendantes, la plus prestigieuse et, on l'a vu, la mieux rémunérée. La moitié d'entre eux, seulement, y a accès. À Douai, on préfère confier cette chaire au jeune Armand Maizières, venu de l'école centrale du Pas-de-Calais, plutôt qu'à Ducroc, déjà en poste dans le département mais qui n'obtient qu'une simple chaire de mathématiques. La mise en place des lycées se situe d'ailleurs, sur ce point également, entre l'héritage de l'Ancien Régime et le XIX^e siècle naissant puisqu'il est fait appel aussi bien à des personnels des anciens collèges qu'aux nouvelles élites mathématiciennes

36. Un mode régulier de recrutement ne sera instauré qu'en 1808, dans les textes, et, en pratique, en 1821 [Chervel 1993, p. 46].

37. Pour déterminer le devenir professionnel des professeurs, on s'est principalement appuyé sur les éditions successives de *l'Almanach national [impérial] de la France* (Paris : Testu) pour la période 1800-1814, ainsi que sur *l'Almanach de l'université impériale* (Paris : Brunot-Labbe) pour les années 1812 et 1813.

issues de l'École polytechnique³⁸. À Bourges, par exemple, l'ancien émigré devenu secrétaire – et protégé – de Talleyrand, Charles Fercoc, qui avait été professeur de physique au collège de Saint-Pol-de-Léon avant la Révolution, est nommé sur la chaire de mathématiques transcendantes, tandis que Longuet, venu de l'école centrale voisine de l'Indre, n'obtient que celle de mathématiques. Le lycée de Strasbourg connaît une situation analogue avec la nomination de Le Priol, également émigré, et qui avait été professeur au collège de Vannes. À l'inverse, c'est un jeune polytechnicien, Jean-Jacques Bret qui est nommé sur la chaire de mathématiques transcendantes du lycée de Grenoble, tout comme l'est son condisciple Olry Terquem au lycée de Mayence.

Un débouché supplémentaire s'ouvre avec les facultés des sciences instituées en 1808, et ce d'autant qu'elles sont étroitement liées à l'enseignement secondaire. Créées « auprès de chaque lycée chef-lieu d'une académie », celles-ci doivent comprendre deux professeurs de mathématiques, de telle sorte que « le premier professeur de mathématiques du lycée en fera nécessairement partie » [décret du 17 mars 1808, art. 13]³⁹ : les professeurs de mathématiques transcendantes des lycées leur sont donc tout naturellement – et prioritairement – rattachés, ceci afin de dispenser un enseignement formant « la suite et le complément des études du lycée ». Aussi quelques professeurs d'école centrale rejoignent-ils *de facto* l'enseignement supérieur qui s'organise alors. Francœur, qui a conservé sa chaire lors de la création du lycée Charlemagne, devient ainsi professeur d'algèbre supérieure à la faculté des sciences de Paris où il retrouve Biot et Lacroix qui, s'ils ne continuent pas en lycée, sont nommés respectivement à la chaire d'astronomie physique et de calcul différentiel et intégral. En province, Demeusy à Besançon, Gergonne à Nîmes, Bedel à Strasbourg, Roux et Clerc à Lyon obtiennent aussi une chaire de mathématiques dans une faculté des sciences. Certains parmi eux, comme Clerc ou Gergonne, l'occuperont parallèlement à leur enseignement au lycée (puis au collège royal) pendant de nombreuses années, contrairement à Francœur qui perd son poste au lycée Charlemagne en 1814.

3. D'autres débouchés dans l'enseignement

Pour autant, seule une fraction, il est vrai conséquente (environ un sur trois), des professeurs de mathématiques des écoles centrales se retrouve dans les lycées et/ou dans leurs dépendances que sont les facultés des sciences. Les lycées qui s'ouvrent à partir de 1802 sont nettement moins

38. Sur les élites polytechniciennes et leur formation, voir [Belhoste 2003].

39. Le statut du 18 octobre 1808 prévoit la création de 32 académies [Condet 2008, p. 51].

nombreux que les écoles centrales qu'ils remplacent – en 1806, seulement 29 établissements sont en activité [Fourcroy 1806] – mais ils comptent *a priori* plus de professeurs de mathématiques que ces dernières, puisque leur nombre peut monter jusqu'à quatre [Belhoste 1995, p. 78]. Le recrutement y a été élargi bien au-delà du seul vivier des professeurs des écoles centrales. Sur les quatre professeurs de mathématiques du lycée de Grenoble, par exemple, aucun n'est issu d'une école centrale, à l'instar de Bret, déjà cité, mais aussi d'André-Laurent Chabert qui, selon Stendhal qui l'avait eu comme répétiteur particulier, « montrait les mathématiques en chambre » du temps de l'école centrale [Stendhal 1890, p. 250].

Dans ses instructions sur l'organisation des lycées, Fourcroy indique : « Ce qui ne trouvera pas de place dans ceux-ci, sera reversé dans les écoles spéciales ou pourra, non moins utilement encore, servir aux écoles secondaires » [Fourcroy 1802, p. 296]. De fait, d'autres types d'établissements permettent aux professeurs des écoles centrales de poursuivre leur carrière d'enseignant, dans des proportions qu'il est toutefois difficile d'évaluer. Dans les villes dépourvues de lycée, ceux-ci trouvent notamment à s'employer à l'école secondaire communale (puis collège communal), catégorie d'établissement de degré inférieur également instituée en 1802, qui se substitue alors à l'école centrale et comprend une à trois chaires de mathématiques. À Auch, Chartres, Le Mans, Lille, Troyes, et quelques autres villes, les professeurs conservent ainsi leur chaire de mathématiques, parfois en cumulant avec la direction de l'établissement. À Auch, notamment, la continuité avec l'Ancien Régime est manifeste puisque Carrère (Gers), qui enseignait déjà dans l'ancien collège, détient la chaire de mathématiques spéciales jusqu'en 1813 au moins.

Les écoles militaires, dont on a vu qu'elles avaient en leur temps fourni aux écoles centrales plusieurs professeurs, constituent une autre voie possible. C'est ainsi qu'Alexandre-Louis Billy (Seine-et-Marne) et Louis Puissant sont nommés à l'École spéciale militaire créée par la loi du 1^{er} mai 1802 et installée à Fontainebleau puis à Saint-Cyr – le second rejoindra l'école des géographes en 1809⁴⁰. Quelques professeurs trouvent – ou retrouvent – un poste dans une école d'artillerie ou une école de navigation de la Marine. François-Joseph Français (Haut-Rhin), après un bref passage au lycée de Mayence, enseigne à partir de 1804 à l'école d'artillerie de La Fère, tandis que Dupuy, le professeur de Stendhal à Grenoble, retourne à l'école d'artillerie de cette ville et Jean-François Lesueur (Charente-Inférieure) à l'école de navigation de Rochefort. Notons, pour finir, que plusieurs anciens professeurs des écoles centrales – Binet, Biot, Francœur, Labey, Lacroix – ont

40. Avec deux autres professeurs de l'École spéciale militaire, Billy et Puissant tireront de leur enseignement un *Cours de mathématiques à l'usage des écoles militaires*, Paris : Magimel, Anselin & Pochard, 1813.

rejoint l'École polytechnique comme professeur, répétiteur, ou encore examinateur.

Conclusion

Si les modifications engendrées par la Révolution française sur la communauté scientifique et sur l'enseignement des sciences sont bien connues, cet article, nous l'espérons, complète le tableau en se plaçant non pas dans le cadre des mathématiques savantes – et parisiennes –, mais dans celui des mathématiques enseignées, qui forgent une culture commune sur l'ensemble du territoire. Située à une autre échelle que celle des grandes écoles, l'étude des trajectoires et des pratiques des professeurs de mathématiques des écoles centrales aura permis de comprendre la façon dont se sont exercées ces mutations.

Comme l'a souligné Dominique Julia, en s'adressant à un public plus diversifié que celui des collèges de l'Ancien Régime, les écoles centrales ont constitué un « laboratoire pédagogique exceptionnel » [Julia 1982, p. 156]. De fait, les professeurs de mathématiques, dont la plupart exerçaient déjà avant la Révolution, ont dû repenser leurs pratiques d'enseignement et les finalités de leur discipline. Mais c'est aussi par leur intermédiaire que des pratiques et des ouvrages éprouvés, déjà en usage sous l'Ancien Régime, ont été institutionnalisés. Ces professeurs, en traversant pour bon nombre d'entre eux la période révolutionnaire, ont transmis aux premiers lycées et aux collèges communaux du XIX^e siècle leurs savoir-faire et leurs habitudes de travail.

L'épisode des écoles centrales a aussi été le moment de la mise en place par l'État d'un corps d'enseignants de mathématiques pour le secondaire, avec un statut, une hiérarchie, une définition des tâches, des modes définis de recrutement, une spécialisation accrue, etc. La légitimation des mathématiques comme discipline d'enseignement secondaire, dont les professeurs des écoles centrales ont été les chevilles ouvrières, a notamment favorisé la formation d'une communauté mathématique aux contours élargis, qu'atteste le succès des *Annales de mathématiques pures et appliquées* lancées par Gergonne quelques années plus tard.

Le cadre ainsi fixé pour l'enseignement des mathématiques perdurera pendant tout le début du XIX^e siècle, alors que ces mêmes professeurs, partis en retraite et remplacés dans les lycées par de jeunes générations d'agrégés et de normaliens, auront cessé d'exercer.

BIBLIOGRAPHIE

Sources primaires manuscrites

Archives nationales, série F/17 : Instruction Publique.

- F/17/1341/A et F/17/1341/B. Écoles centrales. Enquête du 20 floréal an VII.
- F/17/1343/A et F/17/1343/B. Écoles centrales. Enquête du 20 floréal an VII. Réponses des professeurs de mathématiques.
- F/17/1344/8 à F/17/1344/31. Écoles centrales : organisation, enseignement, personnel (dossiers classés par département).

Sources primaires imprimées⁴¹

- [*Annuaire de l'instruction publique* 1804] *Annuaire de l'instruction publique pour l'an XII, ou Recueil complet des lois, arrêtés, décisions concernant l'établissement et le régime des lycées, des écoles primaires, secondaires et des écoles spéciales*, Paris : Courcier, 1804.
- [Belhoste 1995] Bruno Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français : Textes officiels*, t. 1, 1789-1914, Paris : INRP/Economica, 1995.
- [Duvergier 1836] Jean-Baptiste Duvergier, *Collection complète des décrets, ordonnances, réglemens, avis du conseil d'État [...] depuis 1788 par ordre chronologique*, t. 14, Paris : Guyot & Scribe, 1836.
- [Fourcroy 1802] Antoine-François Fourcroy, « Instruction du conseiller d'État chargé de la direction et de la surveillance de l'Instruction publique, aux inspecteurs généraux des études, et aux commissaires de l'Institut, chargés de l'organisation des lycées », dans *Recueil des lois et réglemens concernant l'instruction publique...*, Première série, t. 2, Paris : Bruno Labbe, 1814, p. 289-304.
- [Fourcroy 1806] A.-F. Fourcroy, « Rapport fait à sa Majesté par le conseiller d'État, directeur général de l'instruction publique. Annexe à l'Exposé de la situation de l'Empire », *Archives parlementaires, deuxième série*, 1806, p. 77-86. En ligne sur : http://www.inrp.fr/she/lycees_fourcroy_rapport.htm.
- [François de Neufchâteau 1798] Nicolas François de Neufchâteau, « Lettre circulaire aux professeurs et bibliothécaires des écoles centrales, 17 vendémiaire an VII », dans *Recueil des lettres, circulaires, instructions, programmes [...] émanés du C.^{en} François de Neufchâteau pendant ses deux exercices du Ministère de l'intérieur*, t. I, Paris : Imprimerie de la République, an VII, p. 207-225.
- [François de Neufchâteau 1799] N. François de Neufchâteau, « Circulaire aux professeurs et bibliothécaires des écoles centrales, 20 floréal an VII », dans *Recueil des lettres, circulaires, instructions, programmes [...] émanés du C.^{en} François de Neufchâteau pendant ses deux exercices du Ministère de l'intérieur*, t. II, Paris : Imprimerie de la République, an VIII, p. 199-200.
- [Genty 1788] Louis Genty, *L'influence de la découverte de l'Amérique sur le bonheur du genre humain*, Paris : Nyon l'aîné & fils, 1788.
- [Stendhal 1890] Stendhal, *Vie de Henri Brulard*, Paris : Gallimard, 1973 (édition présentée et annotée par Béatrice Didier). Éd. originale, 1890.

41. Les références des publications des professeurs de mathématiques des écoles centrales indiquées dans les notes ne sont pas reprises ici.

Bibliographie secondaire

- [Alfonsi 2011] Liliane Alfonsi, *Étienne Bézout (1730-1783), mathématicien des Lumières*, Paris : L'Harmattan, 2011.
- [Balpe 1999] Claudette Balpe, « Constitution d'un enseignement expérimental : la physique et chimie dans les écoles centrales », *Revue d'histoire des sciences*, 52/2 (1999), p. 241-283.
- [Belhoste 1993] Bruno Belhoste, « L'enseignement des mathématiques dans les collèges oratoriens au XVIII^e siècle », dans J. Ehrard (dir.), *Le collège de Riom et l'enseignement oratorien en France au XVIII^e siècle*, Paris : CNRS Éditions & Oxford : Voltaire Foundation, 1993, p. 141-160.
- [Belhoste 2003] B. Belhoste, *La Formation d'une technocratie. L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris : Belin, 2003.
- [Birembaut 1964/1986] Arthur Birembaut, « Les écoles gratuites de dessin », dans [Taton 1964/1986, p. 441-476].
- [Chaline 1998] Jean-Pierre Chaline, *Sociabilité et érudition, les sociétés savantes en France XIX^e-XX^e siècles*, Paris : Éditions du CTHS, 1998.
- [Chervel 1993] André Chervel, *Histoire de l'agrégation*, Paris : Kimé, 1993.
- [Choffat 2004] Thierry Choffat, « L'application de la loi du 11 floréal : la création et le fonctionnement de quelques lycées impériaux », dans J.-O. Boudon (dir.), *Napoléon et les lycées. Enseignement et société en Europe au début du XIX^e siècle*, Paris : Nouveau Monde éditions, 2004, p. 57-90.
- [Compère 1981] Marie-Madeleine Compère, « Les professeurs de la République. Rupture et continuité dans le personnel enseignant des écoles centrales », *Annales historiques de la Révolution française*, 243 (1981), p. 39-60.
- [Compère 1989] M.-M. Compère, « La question des disciplines scolaires dans les écoles centrales. Le cas des langues anciennes », *Histoire de l'éducation*, 42 (1989), p. 139-181.
- [Condette 2006] Jean-François Condette, *Les recteurs d'académie en France de 1808 à 1940. Tome 2. Dictionnaire biographique*, Lyon : INRP, 2006.
- [Condette 2008] J.-F. Condette, *Les recteurs d'académie en France de 1808 à 1940. Tome 3. Le recteur, l'école, la nation*, Lyon : INRP, 2008.
- [Désirat & Hordé 1981] Claude Désirat et Tristan Hordé, « La Fabrique aux élites. Théories et pratiques de la grammaire générale dans les écoles centrales », *Annales historiques de la Révolution française*, 243 (1981), p. 61-88.
- [Désirat & Hordé 1984] C. Désirat et T. Hordé, « Les Belles-lettres aux écoles centrales (an IV-an VII). Les silences de l'institution », *Revue française de pédagogie*, 66 (1984), p. 29-38.
- [N. & J. Dhombres 1989] Nicole Dhombres et Jean Dhombres, *Naissance d'un nouveau pouvoir : sciences et savants en France (1793-1824)*, Paris : Payot, 1989.
- [Dhombres & Julia 1993] Jean Dhombres et Dominique Julia, « Les repères d'une culture mathématique vers 1800 : le témoignage de deux listes de livres », *Rivista di Storia della Scienza*, série II, vol. 1, n° 1 (1993), p. 1-83.
- [Doig & Donato 1991] Kathleen Hardesty Doig et Clorinda Donato, « Notices sur les auteurs des quarante-huit volumes de "discours" de l'*Encyclopédie d'Yverdon* », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 11 (1991), p. 133-141.
- [Duris 1996] Pascal Duris, « L'enseignement de l'histoire naturelle dans les écoles centrales (1795-1802) », *Revue d'histoire des sciences*, 49/1 (1996), p. 23-52.

- [d'Enfert 2000] Renaud d'Enfert, « L'enseignement du dessin dans les écoles centrales (1795-1802) », *Paedagogica Historica*, 36/2 (2000), p. 601-629.
- [Friedelmeyer 1994] Jean-Pierre Friedelmeyer, *Le calcul des dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'analyse à la fin du XVIII^e siècle*, thèse de doctorat, Université de Nantes, 1994.
- [Gillispie 2004] Charles C. Gillispie, *Science and Polity in France. The Revolutionary and Napoleonic Years*, Princeton : Princeton University Press, 2004.
- [Julia 1981] Dominique Julia, *Les Trois couleurs du tableau noir : la Révolution*, Paris : Belin, 1981.
- [Julia 1982] D. Julia, « La fréquentation des écoles centrales : quelques hypothèses », *Sciences et techniques en perspective*, 2 (1982-1983), p. 141-159.
- [Lamandé 1988-1989] Pierre Lamandé, « La mutation de l'enseignement scientifique en France (1750-1810) et le rôle des écoles centrales. L'exemple de Nantes », *Sciences et techniques en perspective*, 15 (1988-1989).
- [Lauzun 1900] Philippe Lauzun, *La Société académique d'Agen (1776-1900)*, Paris : Picard, 1900.
- [Mérot 1987] Catherine Mérot, « La fréquentation des écoles centrales. Un aspect de l'enseignement secondaire pendant la Révolution française », *Bibliothèque de l'École des Chartes*, 145/2 (1987), p. 407-426.
- [Palmer 1980] Robert R. Palmer, « The central schools of the first French republic : a statistical survey », *Historical reflexions/Réflexions historiques*, 7/2-3 (1980), p. 223-247.
- [Prost 1968] Antoine Prost, *Histoire de l'enseignement en France, 1800-1967*, Paris : Armand Colin, 1968.
- [Savoie 2000] Philippe Savoie, *Les enseignants du secondaire, XIX^e-XX^e siècles. Le corps, le métier, les carrières. Textes officiels. Tome 1 : 1802-1914*, Paris : INRP / Economica, 2000.
- [Savoie 2004] P. Savoie, « Construire un système d'instruction publique : de la création des lycées au monopole renforcé (1802-1804) », dans J.-O. Boudon (dir.), *Napoléon et les lycées. Enseignement et société en Europe au début du XIX^e siècle*, Paris : Nouveau Monde éditions, 2004, p. 39-56.
- [Taton 1964/1986] René Taton (dir.), *Enseignement et diffusion des sciences en France au XVIII^e siècle*, 1964 ; rééd. Paris : Hermann, 1986.

Une révolution peut en cacher d'autres : le paysage morcelé des mathématiques dans l'espace germanophone et ses reconfigurations (1750-1850)

Thomas MOREL et Maarten BULLYNCK

L'historiographie classique présente le développement des mathématiques dans les États allemands de 1750 à 1850 comme une rupture nette entre le XVIII^e siècle et le XIX^e siècle. Ce récit se concentre surtout sur les universités réformées au XIX^e siècle, et plus particulièrement sur les plus prestigieuses d'entre elles, celles de Göttingen, Berlin et Königsberg. Envisagées sous ce seul point de vue, les années 1820 annoncent le renouveau des mathématiques en Prusse. D'abord avec la consécration de Carl Friedrich Gauss comme fleuron des mathématiques allemandes par sa seconde nomination à l'Académie des sciences de Berlin en 1824¹. Ensuite avec la fondation du *Journal für die reine und angewandte Mathematik* en 1826 par August Leopold Crelle, suivie des nominations de Carl Gustav Jacobi à l'université de Königsberg (1827/1829) et de Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet à Berlin (1828/1831). En quelques années, on assiste alors à l'arrivée d'une nouvelle génération de mathématiciens – principalement dans les universités du Nord de l'Allemagne –, et à l'établissement d'un programme de recherche en mathématiques pures. L'université de Berlin devient alors un centre d'importance mondiale, pour reprendre l'expression de K.-R. Biermann [1973].

Cette double focalisation, sur l'enseignement universitaire d'une part et sur les mathématiques pures d'autre part, conduit à une historiographie radicalement discontinuiste. Elle est par exemple exprimée dans un ouvrage de référence paru en 1990 de la manière suivante : « avant les réformes universitaires du début du XIX^e siècle, les mathématiques universitaires étaient complètement insignifiantes ; pratiquement tous les professeurs de cette époque sont aujourd'hui oubliés. En fait, cela est également valable pour les premières décennies du XIX^e siècle »². La réforme univer-

1. Gauss avait déjà été nommé membre en 1810 sous condition d'accepter un poste de professeur à l'université de Berlin. Il avait alors utilisé cette offre pour renégocier son contrat à Göttingen.

2. Texte original : « vor den Universitätsreformen zu Beginn des 19. Jahrhunderts war die Mathematik an den Universitäten ganz unbedeutend ; praktisch alle Professoren

sitaire, commencée en 1810 avec la fondation de l'université de Berlin et poursuivie par August Leopold Crelle et Alexander von Humboldt, est ainsi présentée sinon comme l'unique, du moins comme le principal facteur ayant permis l'essor de la discipline. Cette réforme semble dès lors être moins un choix politique contingent qu'une condition véritablement nécessaire au progrès des mathématiques allemandes.

Les premières contestations de cette histoire discontinuiste s'articulent à partir de 1980 avec l'avènement des approches sociologiques et institutionnelles en histoire des mathématiques³. Il semble plutôt que de nombreuses évolutions asynchrones dans l'espace germanophone, dès le milieu du XVIII^e siècle et plus encore après la guerre de Sept Ans, aient rendu possible cet essor des mathématiques. Ces processus, souvent très localisés et parfois interrompus par d'autres évolutions concurrentes, s'intègrent au patchwork géopolitique des États allemands. Des études à la fois globales et détaillées sont nécessaires pour reconstituer la dynamique de l'évolution après 1800. Notre article abordera cette question sous deux angles, en étudiant d'abord les institutions scientifiques et techniques puis la production littéraire mathématique.

L'histoire des mathématiciens et des mathématiques allemandes doit prendre en compte le contexte géographique et institutionnel complexe de l'espace germanophone. Le morcellement politique des États allemands, habituellement résumé par l'expression *Kleinstaaterei*⁴, commence après la guerre de Trente Ans (1618-1648) et dure jusqu'à l'unification de l'Allemagne sous l'égide de la Prusse dans la seconde moitié du XIX^e siècle. Ce morcellement se retrouve à tous les niveaux institutionnels de chacun des dizaines d'États : au niveau de l'organisation administrative, économique ou encore éducative. La proximité géographique ne se double pas toujours d'une proximité politique entre les États : les duchés saxons de Weimar et Gotha ont par exemple une proximité géographique et politique avec la Saxe, tandis que les villes de Bonn ou Duisbourg à l'Ouest sont politiquement liées avec la Prusse. De même, les régions de Brunswick et du Hanovre sont associées par leur affiliation politique avec l'Angleterre et partagent avec Hambourg une orientation géographique et économique commune sur la mer Baltique et la mer du Nord et ses grandes nations commerciales (la Suède, l'Angleterre et les Pays-Bas). Ce paysage morcelé fait que l'historien peut difficilement tenter, à partir d'un seul État, même important, des généralisations sur la position des mathématiques dans l'ensemble de

aus jener Zeit sind heute vergessen. Tatsächlich gilt dies auch noch für die ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts» [Scharlau 1990, introduction]. Sauf indication contraire, toutes les traductions sont de notre fait.

3. Voir [Jahnke & Otte 1981 ; Mehrtens *et al.* 1981].

4. Sur le terme de *Kleinstaaterei*, voir [Schnettger 2008].

l'espace germanophone. L'analyse au cas par cas d'institutions et d'établissements de recherche et d'enseignement des mathématiques nous permettra néanmoins de dégager quelques tendances principales.

L'étude de la production littéraire est un second outil pour appréhender l'évolution des mathématiques allemandes au cours de cette période. La communication littéraire représente en particulier un facteur important d'unification de cette situation fragmentée autour de 1800. La croissance exponentielle du marché du livre et des journaux, combinée avec l'alphabétisation croissante dans le dernier tiers du XVIII^e siècle, va permettre l'établissement d'un espace commun de communication littéraire en langue vernaculaire, l'allemand, au lieu du latin ou du français. Bien que la distribution d'un livre ou d'un périodique dépende de nombreux facteurs contextuels, les grandes foires du livre à Leipzig et Francfort-sur-le-Main, ainsi que les journaux de recension, font connaître un échantillon substantiel de la production littéraire à un large public de lecteurs. Les mathématiques en profitent et l'on voit ainsi s'établir un style unifié de manuel mathématique, des discussions publiques sur certains concepts (l'introduction des nombres négatifs, les fondements de l'analyse, le postulat des parallèles, etc.), ainsi que la création des premiers journaux spécialisés.

I. Les mathématiques dans les institutions techniques et scientifiques

Si l'université occupe à l'époque en Allemagne une position bien plus importante qu'en France ou au Royaume-Uni, elle est loin d'être l'unique institution où les mathématiques sont pratiquées et enseignées. Il nous semble donc intéressant, pour mettre en perspective les évolutions qui ont lieu dans le second quart du XIX^e siècle, de faire porter l'analyse sur l'ensemble plus vaste des institutions dans lesquelles des mathématiciens sont actifs. Vue sous cet angle, ce qui semble être un renouveau dans les années 1830, la révolution visible, est précédée de nombreuses évolutions institutionnelles qui la rendent possible.

Les sciences mathématiques deviennent d'une part un bien commun, dont les éléments doivent être enseignés au plus grand nombre. D'autre part, elles se constituent en discipline à part entière, avec la création de filières à l'université et une place croissante dans les institutions techniques supérieures. Ces évolutions ont lieu dans l'ensemble de l'espace germanophone, bien que dans un ordre et à un rythme différents selon les États⁵.

5. Dans ce mouvement général, il n'y a pas lieu de différencier des modèles prussien, bavarois ou autrichien, qui concernent plutôt les modalités et le rythme des réformes. Voir [R. Müller 1991].

Nous entendons ici fournir des éléments et indications visant à replacer l'essor des mathématiques universitaires prussiennes du second quart du XIX^e siècle dans un mouvement continu entamé dès la fin de la guerre de Sept Ans.

Dans la seconde partie du XVIII^e siècle, la position institutionnelle des mathématiques dans l'espace germanophone évolue considérablement. Deux événements politiques ont une influence particulière : la guerre de Sept Ans (1756-1763), dont l'influence est particulièrement notable dans les États du Nord, et la suppression de la compagnie de Jésus en 1773, qui s'occupait jusqu'alors de l'enseignement scientifique dans le Sud catholique⁶. Les dégâts matériels importants d'une part, et la perte d'un nombre significatif d'enseignants après la dissolution des Jésuites d'autre part, ont plusieurs conséquences. Ils conduisent d'abord à une implication croissante des gouvernements dans la formation des techniciens, marchands et enseignants. Les sciences mathématiques, au sens large du terme, cessent en outre d'être considérées comme une science érudite ou propédeutique et sont envisagées comme un outil concret pour participer au redressement des États. Les manifestations les plus visibles de ce mouvement sont les créations et réformes d'institutions dans lesquelles mathématiques et mathématiciens occupent une place croissante.

1. L'avènement de l'arithmétique élémentaire dans les écoles primaires

L'histoire de la réforme des écoles primaires (*Volksschulen*) est particulièrement complexe. Outre la fragmentation de l'espace allemand, l'éducation élémentaire à l'intérieur même des États ne présente pas une image homogène. Dans les villages, ce sont les pasteurs qui enseignent tandis que dans les villes l'organisation de l'enseignement revient à la ville ou à l'État. Ces situations sont de plus pauvrement documentées et les ordonnances et programmes qui concernent l'enseignement élémentaire reflètent plus souvent une situation souhaitée que la réalité scolaire⁷. La scolarité est ainsi en théorie obligatoire dans plusieurs États allemands depuis le XVII^e ou le début du XVIII^e siècle (Saxe 1580, Gotha 1642, Prusse 1717), mais, dans la pratique, il n'y a pas le moindre contrôle. Dans la seconde moitié du XVIII^e siècle, une nouvelle vague de décrets renouvelle ou institue cette scolarité obligatoire et tente de mettre en place des

6. Sur la place des mathématiciens jésuites dans les pays du sud de l'Allemagne et les conséquences de leur expulsion, voir [R. Müller 1991].

7. Sur la notion de « réalité scolaire » (*Schulwirklichkeit*), en particulier en Prusse, voir [Neugebauer 1985].

systèmes de contrôle et des plans de cours plus détaillés (Brunswick 1753, Prusse 1763, Bavière 1771, Saxe 1773, Anhalt-Dessau 1787). Ce n'est que le début d'une lente évolution, qui se poursuivra au début du siècle suivant et pendant plusieurs décennies, au cours desquelles les États précisent les décrets et mettent en place des formations pour enseignants.

Dans les ordonnances de la fin du XVIII^e siècle, il est souvent stipulé que l'arithmétique élémentaire devient obligatoire et ne peut plus être enseignée seulement dans des cours privés payants. Parallèlement à cette lente inclusion de l'arithmétique dans l'alphabétisation, de nouvelles approches pédagogiques sont mises en place. Pour des raisons d'économie des ressources, des moyens d'enseignement simples sont développés, comme les tables, les ardoises et surtout l'arithmétique mentale, qui permettent d'enseigner l'arithmétique sans livre ou même sans papier ni encre. La pédagogie sépare l'arithmétique élémentaire de son contexte immédiatement pratique (contrairement aux nombreux livres de calcul marchand, forestier, etc.) et introduit une distinction entre le livre de l'instituteur et le livre de l'élève⁸.

2. Hiérarchisation de l'enseignement et réformes des mathématiques secondaires

Au milieu du XVIII^e siècle, il n'existe pas de séparation nette entre les diverses institutions d'enseignement. Outre les universités, on trouve plusieurs types d'écoles, mais également des académies militaires et des *Gymnasien* académiques ; la tendance est plutôt à un émiettement des types d'institutions [Schubring 1983]. L'enseignement scolaire peut être réalisé dans des écoles en latin (*Lateinschulen*) dispensant une formation classique, parfois aussi appelées *Gymnasien*. D'autres institutions, notamment les écoles princières (*Fürstenschulen*) ou le *Lyceum* proposent une formation plus élevée qui remplace parfois le début du cursus universitaire dispensé dans la faculté de philosophie. Plusieurs États disposent d'un réseau d'écoles secondaires qui accueillent les futures élites, comme les *Fürstenschulen* de Grimma, Meissen et Schulpforta en Saxe, les collèges Catherineum et Martineum à Brunswick (où Gauss a étudié), le *Berlinisch-Köllnisches Gymnasium zum Grauen Kloster*, le *Friedrich-Werdersches Gymnasium* à Berlin, ou le *Gymnasium* royal de Potsdam (où Jacobi a été élève). Certains collèges jésuites, les *akademische Gymnasien*, sont des établissements hybrides très fréquentés en Allemagne du Sud et en Autriche, où un enseignement secondaire est complété par un

8. Avant 1770, les manuels pouvaient être utilisés pour l'enseignement et pour l'étude autodidacte. Pour plus de détails, voir [Bullynck 2008].

cursus pluriannuel en philosophie⁹. Ces établissements disparaissent ou sont brusquement déclassés lors de la suppression des Jésuites en 1773, sauf, ironie de l'histoire, dans certains États non catholiques – en Russie et en Prusse, des écoles comme le *Jesuitengymnasium* de Cologne, où Lejeune-Dirichlet a été élève, se maintiennent.

Le niveau des mathématiques enseignées dans ces établissements est très variable, non seulement selon les États mais aussi d'un établissement à l'autre, y compris lorsque ceux-ci sont situés dans une même ville. Il dépend avant tout du statut et de la personnalité de l'enseignant. Dans les écoles d'élite citées plus haut, l'enseignement mathématique est souvent de bonne qualité, assuré par un enseignant spécialisé. Si son niveau demeure cependant assez faible dans la plupart des établissements, c'est en raison du statut de la discipline : les matières principales sont le latin, le grec et la religion. Des cours de calcul sont parfois complétés par de l'arithmétique et de la géométrie élémentaire, délivrés soit par les enseignants de latin, soit par des maîtres extérieurs à l'établissement¹⁰.

Dans le dernier quart du siècle, des réformes cherchent, d'une part, à unifier l'organisation et les programmes d'enseignement au niveau des États et, d'autre part, à introduire un minimum de connaissances mathématiques dans les écoles où elles sont totalement absentes. En 1788, la Prusse est le premier État allemand à introduire un examen (appelé *Abitur*, ou parfois *Reifeprüfung*) conditionnant le passage d'une école secondaire à l'université¹¹. Cette disposition est progressivement adoptée dans le reste de l'espace germanophone et cet examen intègre généralement des connaissances mathématiques.

Les règlements ne sont pas toujours respectés et la réalité des cours est souvent bien différente des lois en vigueur. Néanmoins, le statut des sciences mathématiques et naturelles évolue au cours de la première moitié du XIX^e siècle. L'école secondaire cesse de s'orienter uniquement vers le latin et un double rôle est alors dévolu aux mathématiques : elles doivent

9. Ce qui, à cette époque, inclut également les mathématiques. Ces établissements existent aussi dans les États du Nord (en partie) catholiques comme à Hambourg, à Cologne ou Aix-la-Chapelle. Dans cette dernière ville, le *Gymnasium Marianum* est parfois fréquenté par près de 1000 étudiants, effectif supérieur à celui de bien des universités [Scharlau 1990, p. 7-10].

10. Sur le statut des maîtres et enseignants de mathématiques, voir par exemple [Morel 2013a, p. 43-44]. Sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires au XVIII^e siècle, voir [Schubring 1983 ; Paulsen 1885]. Des établissements isolés vont beaucoup plus loin, sous l'influence des mouvements pédagogiques réformateurs (par exemple le *Philanthropin* de Dessau), ou pour satisfaire des besoins locaux en connaissances mathématiques, comme dans les villes minières (sur la réforme du programme d'enseignement du *Gymnasium* de Clausthal, voir [Friedrich 1775, p. 3-4 et 14-37]).

11. [Schubring 1983, chap. 4]. Sur l'organisation et le contenu des enseignements de mathématiques en Prusse, voir aussi [Jahnke 1990, 1993].

participer à la formation de l'esprit des élèves, c'est leur rôle propédeutique ; leur contenu devient par ailleurs nécessaire pour appréhender les sciences naturelles ou pour continuer l'étude des sciences exactes à l'université¹². De fait, dans les premières décennies du XIX^e siècle, les écoles secondaires font une part de plus en plus large aux mathématiques qui occupent vers 1850 entre trois et cinq heures hebdomadaires par classe dans la plupart des établissements.

Une seconde évolution majeure, liée à la précédente, est la professionnalisation de l'enseignement secondaire des mathématiques. Les réformes successives nécessitent de former et de sélectionner un nombre croissant de maîtres de mathématiques¹³. Dans la plupart des États, ces tâches sont confiées aux universités. Ce phénomène bouleverse la place des mathématiques dans la faculté de philosophie et contribue à justifier l'introduction de cursus cohérents et coordonnés ; il devient alors possible de suivre une formation spécialisée en mathématiques¹⁴.

3. Transformations des systèmes universitaires dans l'espace germanophone

Parmi la quarantaine d'universités que comptent les États allemands dans la seconde partie du XVIII^e siècle, seule une poignée sont de grands établissements correctement financés, tandis que la plupart peinent à réunir plus de quelques centaines d'étudiants¹⁵. Le statut même d'université est loin d'être stable. Ainsi à Bamberg, une *Academia Bambergensis* existant depuis 1647 devient une université en 1773 avant d'être rétrogradée en 1803 au rang de simple *Lyceum*. Au tournant du XIX^e siècle, plusieurs universités disparaissent même complètement dans un mouvement de concentration accentué, mais non initié, par les conquêtes napoléoniennes.

Il existe en outre des établissements intermédiaires, qui peuvent être fréquentés avant (ou parfois à la place) d'une université. Le plus célèbre est le *Collegium Carolinum* de Brunswick, fondé en 1734, dans lequel Gauss a étudié. Sans posséder le statut d'université, il est richement doté et les

12. On trouve un bon résumé des débats autour du rôle des mathématiques dans les écoles secondaires sous la plume de M. W. Drobisch, professeur à l'université de Leipzig, dans [Drobisch 1832].

13. Il est cependant important de noter que l'introduction d'un examen d'entrée à l'université et d'une formation pour les enseignants de mathématiques ne vont pas nécessairement de pair, comme le montre le cas saxon. Voir [Morel 2013a].

14. Ce lien est explicitement fait pour la Bavière par [Toepell 1996].

15. Voir [Eulenburg 1904, en particulier p. 162-163]. Entre 1750 et 1850, l'université de Fulda voit son nombre d'étudiants osciller entre 69 et 358, celle de Duisbourg entre 40 et 196, celle de Rostock entre 71 et 339, et celle de Greifswald entre 129 et 374.

professeurs de mathématiques y sont compétents. On y enseigne les mathématiques supérieures d'après Christian Wolff dès les années 1740, ce qui n'est que rarement le cas dans les universités à cette époque¹⁶.

Bien avant la réforme prussienne des universités, les États allemands avaient déjà connu une première vague de réformes au début du XVIII^e siècle avec la fondation des universités de Halle (1694) et de Göttingen (1734). Ces universités innovent en modernisant les contenus du curriculum universitaire, y compris l'enseignement des mathématiques [C. H. Müller 1904]. Les *Éléments* de mathématiques en allemand de C. Wolff (*Die Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*), initialement publiés en 1710 pour son enseignement à l'université de Halle, marquent toute une génération d'étudiants. Leur contenu et leur style subsistent jusqu'à la fin du XVIII^e siècle dans les manuels de Segner, Kästner, Karsten, ainsi que dans de nombreuses autres introductions aux mathématiques utilisées dans des écoles secondaires et supérieures¹⁷.

La seule attribution officielle d'une université est le pouvoir de délivrer un diplôme ; il ne faut donc pas penser anachroniquement l'université comme un lieu de recherche [Schubring 1991]. Il est communément accepté à l'époque que le rôle d'une université se restreint à l'enseignement. Les professeurs doivent « instruire, principalement par un enseignement oral, d'autres gens jeunes et habiles, pour leur rendre claires et précises les vérités savantes », et il est explicitement précisé que ces enseignements universitaires « s'arrêtent à ce qui concerne les éléments [*Anfangs-Gründe*] de ces sciences »¹⁸. Les chaires de mathématiques dans les universités ne sont d'ailleurs pas forcément attribuées à des personnes publiant des manuels ou de nouveaux résultats en mathématiques. Cette discipline étant rattachée à la faculté de philosophie, un professeur peut enseigner les mathématiques et les langues anciennes, ou bien encore la physique, les sciences naturelles ou camérales [Morel 2013b, p. 75-78]. À l'inverse, de nombreux professeurs de mathématiques comme Kästner ou Ebert sont également philosophes, écrivains ou poètes, dans la tradition allemande d'érudition universelle (*Gelehrsamkeit*).

Le contenu des cours est très variable, mais le plus souvent consacré aux mathématiques élémentaires. Leur niveau est souvent proche de celui

16. Voir les programmes d'enseignement (*Vorlesungsverzeichnisse*), disponibles sur le site des archives de l'Université Technique de Brunswick : <http://www.biblio.tu-bs.de/universitaetsarchiv/bestaende/vorlesungsverzeichnisse.html>.

17. Sur les *Anfangsgründe* de Kästner, voir [Kröger 2013].

18. Texte original : « vornehmlich durch den mündlichen Unterricht, andere iunge und geschickte Leute zu unterweisen, und ihnen die gelehrten Wahrheiten deutlich und klar zu machen » / « was die Anfangs-Gründe derer Wissenschaften betrifft, stehen bleiben » [Zimmermann 1746, p. 14]. Voir également [Michaelis 1768-1769, vol. 1, p. 92 et vol. 2, p. 130].

des écoles secondaires, car ces enseignements ont en vérité le même but : fournir une connaissance érudite et encyclopédique de la nature aux étudiants des facultés de médecine, de droit et de théologie¹⁹. En 1781, Kästner écrit dans la préface d'un de ses manuels de mathématiques élémentaires qu'il n'entend pas « effrayer l'amateur de mathématiques avec des enseignements, des calculs et des démonstrations difficiles, car cela n'appartient selon [lui] pas aux *Éléments*, pas même pour celui qui veut devenir mathématicien. » [Kästner 1758, Introduction]²⁰. Si le nombre de cours de mathématiques proposés chaque semestre est considérable²¹, il s'agit surtout de cours encyclopédiques de mathématiques élémentaires qui font partie du « tronc commun » propédeutique. Les cours de mathématiques dites supérieures, consacrés par exemple au calcul différentiel et intégral, à l'algèbre ou à la mécanique supérieure, sont bien moins nombreux. Ils sont le plus souvent enseignés dans des cours privés pour un public restreint, dans la mesure où il n'existe pas de cursus mathématique et où peu d'étudiants choisissent de n'étudier que ces disciplines.

Une exception notable est l'éphémère école d'analyse combinatoire qui réunit plusieurs professeurs et étudiants autour de Carl Friedrich Hindenburg dans les années 1790²². La personnalité de Hindenburg, son programme de recherche sur les mathématiques combinatoires comme approche unifiante pour l'ensemble des mathématiques et son investissement dans l'enseignement mathématique à Leipzig sont des facteurs cruciaux dans la naissance de cette communauté mathématique éphémère²³. Un autre facteur est le bouleversement de l'ordre politique et institutionnel dans les États allemands après les guerres révolutionnaires (1791-1793) et l'esprit de renouveau issu de la Révolution française qui, transformé en une forme allemande propre, attire la nouvelle génération. La philosophie idéaliste de Fichte en est peut-être l'expression la plus aboutie, mais cet esprit profite aussi à la nouvelle mathématique de Hindenburg²⁴. Une série de

19. Des manuels sont d'ailleurs utilisés à la fois dans les écoles secondaires et les universités. C'est par exemple le cas de l'*Abrégé des Éléments de mathématiques* de C. Wolff [1713], ou encore des *Éléments de mathématiques à l'usage des écoles et des universités* de G. G. Schmidt [1797].

20. Texte original : « dem Liebhaber der Mathematik mit schweren Lehren, Beweisen und Rechnungen [...] abschrecken sollte, da dieses meiner Einsicht nach nicht einmahl für den Anfänger gehört, der Mathematiker werden will. »

21. Voir par exemple [Tütken 2005] pour Göttingen et [Morel 2013b, Annexe K] pour Leipzig.

22. Comme en témoigne par exemple les travaux de ses étudiants, publiés dans les journaux qu'il édite, voir *infra*.

23. Sur le programme de l'école combinatoire, voir [Noble 2011], et sur le rôle de Hindenburg à Leipzig, [Morel 2013b, chap. 1].

24. Sur le lien entre la philosophie allemande de l'époque et l'école d'analyse combinatoire, voir [Séguin 2005, p. 72-75].

querelles de priorités et la place éminente de Hindenburg dans le milieu universitaire en tant qu'éditeur de revues rendent l'analyse combinatoire célèbre dans l'ensemble des États allemands. Des étudiants des duchés saxons viennent apprendre sous sa direction à Leipzig et des jeunes gens intéressés par les mathématiques, comme Gauss à l'université de Göttingen²⁵, suivent avec attention la parution des volumes du journal qu'il édite, l'*Archiv für die reine und angewandte Mathematik*. On trouve aussi des professeurs de mathématiques à Berlin, Helmstedt, Tübingen ou Dessau, ainsi que dans la périphérie de l'espace germanophone (par exemple Christian Kramp à Cologne ou Henrich Bürmann à Mannheim) qui s'inscrivent au moins partiellement dans son programme.

Dans les premières décennies du XIX^e siècle, il existe un véritable programme de recherche en analyse combinatoire. Dans certaines universités, un étudiant désirant devenir docteur en mathématiques sera même obligé de travailler dans ce domaine²⁶. Si, à plus long terme, le programme de recherche de Hindenburg sera finalement abandonné par ses étudiants, l'idée de fonder les mathématiques sur une combinatoire de signes et de développer « organiquement » aussi bien les concepts que les calculs exerce cependant une profonde influence sur l'écriture de nouveaux manuels de mathématiques au début du siècle.

Au cours de la première moitié du XIX^e siècle, le statut des mathématiques universitaires est bouleversé. Les réformes de l'enseignement secondaire rendent progressivement inutile l'apprentissage des éléments à l'université, ce qui aboutit dans un premier temps à une forte diminution du nombre de cours. En parallèle, le statut des sciences exactes est réévalué et les premières filières proprement mathématiques apparaissent en Prusse dans les années 1820 et 1830, tout comme le premier séminaire de recherche, fondé en 1834 à l'université de Königsberg. Les mathématiques universitaires cessent d'être une propédeutique et deviennent un but en soi, ainsi qu'un outil indispensable dans l'étude des sciences naturelles²⁷. Les universités vont progressivement se spécialiser dans l'enseignement des mathématiques théoriques et la formation des enseignants du secondaire. Ce phénomène est encouragé par l'apparition de nouvelles institutions développant des approches spécifiques à certains domaines des sciences mathématiques.

25. Comme le montre sa correspondance avec Eberhard von Zimmermann et Farkas Bolyai pendant les années 1795-1800.

26. Voir l'exemple de E. Kulp (futur professeur de G. Cantor) à l'université de Heidelberg dans [Schubring 2007].

27. Voir [Schubring 1983, p. 44-46]. Le phénomène touche dans un premier temps la Prusse, et l'évolution est plus progressive dans les États du sud de l'Allemagne. En Bavière par exemple, les mathématiques universitaires conservent souvent un caractère propédeutique jusque vers le milieu du XIX^e siècle : voir [Toepell 1996].

4. Création d'académies techniques et application des mathématiques à l'industrie

Du point de vue de l'institutionnalisation des mathématiques, le phénomène le plus important de la fin du XVIII^e siècle est probablement la création d'académies, et surtout d'académies techniques. Au milieu du XVIII^e siècle, plusieurs États allemands créent des académies des sciences²⁸. Celles de Berlin ou de Pétersbourg réunissent des mathématiciens d'envergure européenne qui se consacrent principalement à l'établissement de nouveaux résultats, comme Euler ou Lagrange. Les autres académies sont souvent constituées principalement par des professeurs des universités associées, comme à Göttingen, Leipzig ou Erlangen, ou par des conseillers et fonctionnaires de l'État en question. Les académies ne sont pas de purs instituts de recherche et sont orientées vers des buts techniques et/ou économiques. Même à Berlin ou à Pétersbourg, une large partie de la recherche est consacrée aux sciences appliquées les plus immédiatement utiles pour l'État, comme la balistique, l'organisation de loteries et de caisses de veuves, ou encore la cartographie (voir le grand projet d'une carte de la Russie²⁹). Dans d'autres académies, les sciences camérales, forestières ou minières font également partie des activités et des publications.

Après la guerre de Sept Ans, plusieurs nouveaux types d'académies sont créés. On citera tout d'abord les académies militaires (*Militärakademie*), où l'enseignement des mathématiques doit permettre la formation d'officiers modernes³⁰. Dans le Wurtemberg par exemple, la *Hohe Karlschule* est fondée à Stuttgart en 1770, école prestigieuse où F. Schiller, G. Cuvier et J. F. Pfaff ont étudié. En Prusse, on emploie à Berlin dès 1768 des membres de l'Académie des sciences comme J. K. Schulze et J. Castillon pour l'enseignement des mathématiques aux officiers. Après plusieurs années, une véritable *Artillerie-Akademie* est créée (1791) avec des enseignants propres, ainsi qu'une *Ingenieur-Akademie* (1788) sur le modèle de Stuttgart. Compte tenu de la nature de ces écoles, les mathématiques et la géométrie appliquées sont bien représentées dans les programmes d'ensei-

28. Berlin en 1740 (après une première création en 1700), Göttingen en 1751, Erfurt en 1754, Munich en 1759 ou le Palatinat en 1763. On peut également citer comme faisant partie de l'espace germanophone la Société physico-médicale de Bâle (créée en 1751) et l'Académie des sciences de Pétersbourg, fondée en 1724, dans laquelle la plupart des académiciens viennent de la Suisse ou des États allemands. Pour les actes édités par ces académies, nous renvoyons à <http://www.izwtalt.uni-wuppertal.de/AkademischeZeitschriften.html>.

29. Voir [Calinger 1996, p. 146-147].

30. Sur l'histoire de ces établissements, voir [Poten 1889-1897, t. 4, p. 85-99] pour Berlin et [*Ibid.*, t. 5, p. 315-318] pour Stuttgart.

gnement. Toutes ces écoles seront réformées après les guerres napoléoniennes ; celles d'artillerie et d'ingénieurs de Berlin, où Lejeune-Dirichlet a enseigné, seront par exemple unifiées.

Les difficultés financières et les mouvements de réformes des États allemands poussent par ailleurs les souverains à soutenir des institutions certes moins prestigieuses, mais dans lesquelles les connaissances scientifiques et techniques ont une influence plus directe sur la vie économique. Des académies des mines sont ainsi créées à Freiberg (Saxe) en 1765, à Schemnitz (Autriche-Hongrie) et Berlin en 1770, ainsi qu'à Clausthal (Hanovre) en 1775. Dans le même temps, plusieurs académies forestières voient le jour. L'enseignement des mathématiques dans ces institutions est encore trop peu connu³¹, et loin d'être homogène, mais il faut d'ores et déjà souligner la place importante que cette discipline y occupe. Ces institutions vont faciliter l'acquisition de connaissances mathématiques à l'usage des exploitations minières et forestières, mais également le développement de disciplines particulières comme l'arithmétique forestière ou la géométrie souterraine.

Une nouvelle génération de mathématiciens actifs dans ces établissements possède à la fois des connaissances théoriques et des compétences pratiques. Tel est le cas de professeurs des académies des mines comme J. F. Lempe et F. G. von Busse à Freiberg, J. Schitko à Schemnitz, ou d'enseignants des académies forestières, comme J. H. Cotta et M. R. Preßler à Tharandt. Ces académies forment également différents types d'ingénieurs, des géomètres souterrains ou des constructeurs de machines.

Il existe plusieurs différences majeures entre les mathématiques universitaires et celles développées dans les académies des mines. Le statut de la discipline est d'abord fondamentalement différent et notablement plus élevé dans les académies. Il s'agit dès la fin du XVIII^e siècle d'une matière fondamentale dans les établissements techniques, voire même, selon le directeur de l'Académie de Freiberg, A. G. Werner, de « la plus importante de nos chaires académiques »³². Les étudiants doivent ensuite acquérir une maîtrise efficace de la discipline, et non simplement une connaissance encyclopédique comme c'est souvent le cas dans les universités. Ils suivent ainsi un cursus défini dans lequel les connaissances sont présentées de manière progressive et coordonnées par des professeurs spécialisés³³. À

31. Voir [Morel 2013b, p. 141-190] sur l'Académie des mines de Freiberg, [Morovics 2010] sur celle de Schemnitz, et [Klein 2010] sur celle de Berlin.

32. Universitätsarchiv Freiberg – OBA 62, p. 116r, rapport de 1801 au Conseil supérieur des mines (*Oberbergamt*).

33. En cela, ces établissements diffèrent donc à la fois de l'enseignement mutuel dispensé à l'École des Ponts et Chaussées et de l'enseignement de l'École du Génie de Mézières, où théorie et pratique sont séparées. Voir [Chatzis 2010, p. 46-50].

Freiberg, des inspections régulières sont mises en place pour s'assurer que les nombreux cours de mathématiques sont articulés entre eux ainsi qu'avec les programmes des écoles secondaires. L'utilité des connaissances et leur mise en pratique sont fréquemment vérifiées, à la fois par le biais d'examens, mais aussi grâce aux multiples rôles endossés par les professeurs de mathématiques. Ceux-ci sont non seulement enseignants, mais collaborent aussi étroitement avec les ingénieurs, et dirigent souvent eux-mêmes certaines opérations techniques.

Dans le second quart du XIX^e siècle, une nouvelle catégorie d'établissements techniques voit le jour : les écoles techniques supérieures, bientôt rebaptisées écoles polytechniques³⁴. La plupart des grands États allemands, à l'exception notable de la Prusse, créent des écoles supérieures pour encourager l'industrialisation naissante³⁵. Dès la création de ces académies et écoles techniques, les mathématiques supérieures sont enseignées à un petit nombre d'étudiants. Cet enseignement permettra l'apparition, au XIX^e siècle, d'une mécanique rationnelle. Les mathématiciens présents dans ces institutions participent en effet activement à l'élaboration et à la diffusion de nouvelles connaissances, notamment par la publication de périodiques ou de manuels spécialisés en mathématiques pratiques³⁶.

Dans la mesure où ces institutions s'appuient largement sur une formation solide en mathématiques, leur succès contribue à la fois à une revalorisation de la discipline et à une diffusion de ce nouveau modèle d'enseignement. Leur succès dans l'application des mathématiques à des domaines variés de la vie civile a plusieurs conséquences notables. D'une part, le nombre de chaires de mathématiques augmente, tout comme le nombre d'étudiants possédant une formation solide dans ces sciences. D'autre part, les succès techniques et leur renommée croissante contribuent à rehausser le prestige de la discipline, et participent ainsi indirectement à l'essor des mathématiques allemandes dans le second quart du XIX^e siècle. Des villes importantes comme Berlin, Dresde, Hanovre ou Chemnitz, en plein essor économique, qui ne possédaient pas d'université, vont se doter d'instituts techniques supérieurs. À Berlin, une académie des mines et plusieurs académies militaires avaient été fondées dans la seconde moitié du XVIII^e siècle ; en 1799, une académie de construction y est aussi

34. Il s'agit des écoles de Karlsruhe (1825), Nuremberg (1826), Munich (1827), Dresde (1828), Cassel (1830), Hanovre (1831), Stuttgart (1832), Augsbourg (1833), Darmstadt et Brunswick (1835). Sur l'Institut de formation technique de Dresde, voir [Morel 2014b].

35. Sur l'échec de la tentative de création d'une école polytechnique à Berlin, voir [Schubring 1981].

36. Voir par exemple le *Zeitschrift für Physik und Mathematik* publié par A. Baumgartner et A. von Ettingshausen de 1826 à 1832, et le *Zeitschrift für Mathematik und Physik* publié par O. Schlömilch et B. Witzschel à partir de 1856.

créée, et placée sous la direction de Johann Albert Eytelwein³⁷. Ces institutions et ces mathématiciens, ainsi que les membres de l'Académie des sciences, formeront la base des disciplines scientifiques de l'Université de Berlin lors de sa création en 1810.

II. L'évolution des mathématiques au prisme de la production littéraire

1. L'évolution des ouvrages de mathématiques de 1765 à 1826

L'explosion de la production littéraire dans les États allemands débute autour de 1770. En 1770 le catalogue de la foire du livre (*Buchmesse*) de Leipzig compte 1144 livres, production qui double en 1800 (2569 livres) puis double à nouveau en 1826 (5168 livres) [Rarisch 1976, p. 13-19 et 99-101]. Cette augmentation exponentielle s'explique par la croissance de l'alphabétisation à partir de cette époque ainsi que par l'établissement de réseaux de distribution pour les livres, la création de sociétés littéraires (*Lesegesellschaften*) et l'existence de journaux de recension qui contribuent à former un public de lecteurs. Dans ces conditions, les champs et hiérarchies discursives se restructurent. En particulier, l'allemand devient la langue de prédilection et remplace progressivement le latin, tandis qu'un public intéressé d'amateurs se constitue à côté de celui des connaisseurs.

Les mathématiques prennent part à ce processus. Si 25 livres de mathématiques ou de sciences de la nature (*Naturwissenschaften*) paraissent en 1740, ce nombre triple presque en 1770 (à 71) et une nouvelle fois en 1800 (à 183) avant de se stabiliser ensuite³⁸. Pendant la période suivante, de 1800 à 1825, c'est la répartition des genres de livres mathématiques à l'intérieur de cette production globale qui change profondément. Le tableau présenté (Figure 1) contient les résultats d'une recherche systématique sur la littérature mathématique dans les quatre journaux de recension les plus importants pour la période 1765-1826³⁹. Cette table nous informe sur des

37. Sur les mathématiques berlinoises avant la création de l'université de Berlin, voir [Knobloch 1998].

38. [Rarisch 1976]. En 1826 on compte 253 publications ce qui, rapporté à la production totale, représente le même pourcentage qu'en 1800. Notre propre recension, donnée dans le tableau de la Figure 1, conduit au même résultat. Autour de 1770, une dizaine de livres paraissent chaque année en mathématiques, un nombre qui triple vers 1800. Entre 1800 et 1825, ce nombre connaît ensuite de fortes fluctuations mais sa moyenne reste stable à une trentaine environ.

39. Il s'agit des *Göttingische Gelehrte Anzeigen* (GGA, 1765-1784), *Allgemeine deutsche Bibliothek* (ADB, 1765-1782), *Allgemeine Literatur-Zeitung* (ALZ, 1785-1826) et *Jenaische Allgemeine Literatur-Zeitung* (JALZ, 1803-1826). Les statistiques ont

changements plus globaux en mathématiques, dans la mesure où les livres recensés viennent de toutes les régions germanophones, y compris l'Autriche-Hongrie et la Suisse.

Six genres de publications mathématiques ont été différenciées dans ces statistiques. Il faut tout d'abord distinguer l'arithmétique élémentaire et les mathématiques pures. Les manuels d'arithmétique sont essentiellement écrits pour les écoles primaires et secondaires, ou ce sont des manuels et tables de calcul pour commerçants (*Rechenbücher*). Au sein des mathématiques pures, il existe une division des sciences mathématiques en introductions générales aux mathématiques et en livres plus spécialisés sur une partie des mathématiques supérieures (par exemple algèbre, calcul différentiel et intégral, analyse combinatoire, trigonométrie, coniques, analyse indéterminée). À côté de ces trois premières catégories, on distingue aussi les mathématiques pratiques de la géométrie pratique. Le terme de « mathématiques pratiques » est ici utilisé pour englober les sciences appliquées à des problèmes concrets, ce qui recouvre les applications des mathématiques dans l'artillerie, la fortification, l'architecture, les sciences camérales, les sciences forestières, les assurances, le droit, etc. La géométrie pratique, souvent associée à une application dans un domaine spécifique (les forêts, le droit, les mines), consiste principalement en différentes sortes d'arpentage (*Feldvermessung*). La catégorie restante rassemble les livres sur l'histoire, la philosophie ou la bibliographie des mathématiques, ainsi que les éditions de textes mathématiques classiques⁴⁰.

été établies en utilisant les moteurs de recherche du projet *Index deutschsprachiger Zeitschriften des 18. Jahrhunderts* de l'Académie des sciences de Göttingen (<http://adw.sub.uni-goettingen.de/idrz/pages/Main.jsf>) et du projet *Universal Multimedia Electronic Library* (UrMEL) de la Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek Jena (ThULB) (<http://zs.thulb.uni-jena.de/>). Il est à noter que les statistiques obtenues contiennent beaucoup de fluctuations dues au nombre peu élevé de livres qui paraissent en mathématiques. Ces fluctuations se laissent parfois expliquer par une guerre (par exemple avec la France révolutionnaire pour les années 1792-1794 ou la fin des guerres napoléoniennes en 1812-1814), parfois par les problèmes que connaissent les éditeurs des journaux de recension (l'ADB et les GGA dans les années 1780 ou l'ALZ à partir de 1803 quand le JALZ est fondé comme concurrent). Il n'y a dans certains cas aucune explication simple : par exemple, l'ALZ et le JALZ recensent beaucoup plus de livres que les GGA ou l'ADB.

40. Il s'agit ici d'une classification rétrospectivement établie dans le but de mettre en évidence certaines évolutions de la production littéraire. Il existe aux XVIII^e et XIX^e siècles de nombreuses classifications des sciences mathématiques, souvent touffues et parfois très différentes les unes des autres. Les principales sont décrites dans [Kühn 1988, annexe 6, p. 24-29].

Figure 1 : Tableau de la littérature mathématique établi au moyen des journaux de recension. Nous avons utilisé les journaux ADB et GGA pour la période 1765-1785, ALZ et JALZ pour la période 1785-1826. Les résultats sont présentés sous la forme ADB|GGA et ALZ|JALZ.

	Rechen- buch	Intro Maths	Maths Sup.	Maths Prat.	Géom. Prat.	Hist. & Phil.	Total
1765/66	0 1	1 3	0 1	2 2	1 0	1 0	5 7
1767/68	0 0	8 5	1 0	2 1	2 2	4 2	17 10
1769/70	0 0	3 4	2 5	3 5	0 2	3 0	11 16
1771/72	0 0	5 2	1 1	2 2	0 4	2 1	10 10
1773/74	3 1	3 5	0 1	0 2	4 1	2 0	12 10
1775/76	3 1	7 3	1 1	0 0	2 0	1 0	14 5
1777/78	5 1	8 5	4 4	0 2	2 2	2 2	21 16
1779/80	3 1	7 2	2 3	1 0	3 2	1 2	17 10
1781/82	1 1	5 7	2 3	3 2	0 1	0 2	11 16
1783/84	3	1	1	1	3	1	10
1785/86	11	9	2	7	5	3	37
1787/88	16	4	5	5	1	5	36
1789/90	17	8	6	10	10	1	52
1791/92	24	11	4	4	2	1	46
1793/94	11	5	10	2	4	0	32
1795/96	16	12	5	2	11	2	48
1797/98	12	8	2	1	5	3	31
1799/00	14	11	5	1	7	2	40
1801/02	19	6	2	2	4	1	34
1803/04	15 6	11 7	3 3	9 1	2 3	2 3	42 23
1805/06	12 11	2 5	2 4	1 1	0 6	0 0	17 27
1807/08	11 11	3 8	2 6	2 1	2 3	1 2	21 31
1809/10	9 16	2 2	5 3	3 1	0 5	0 1	19 28
1811/12	8 8	1 5	2 6	2 0	2 3	0 1	15 23
1813/14	4 10	0 3	0 2	0 0	2 2	0 3	6 20
1815/16	3 17	3 9	2 8	1 2	1 4	1 4	11 44
1817/18	1 11	3 16	0 12	1 0	2 12	1 5	8 56

	Rechen- buch	Intro Maths	Maths Sup.	Maths Prat.	Géom. Prat.	Hist. & Phil.	Total
1819/20	2 14	1 11	4 6	1 1	6 12	1 3	14 47
1821/22	4 8	5 12	2 13	0 0	4 3	1 5	16 41
1823/24	5 7	4 6	3 5	0 0	8 1	1 4	21 23
1825/26	5 7	4 13	6 7	3 0	3 2	5 4	26 33

Plusieurs observations sur l'évolution globale des mathématiques dans les États allemands peuvent être tirées de ce tableau.

Nous constatons en premier lieu que le genre du *Rechenbuch*, ou manuel d'arithmétique élémentaire, qui représente toujours au moins un quart et jusqu'à la moitié de la production littéraire mathématique totale, pèse quantitativement le plus dans les statistiques. Cette prépondérance du *Rechenbuch* ne commence toutefois qu'à partir de 1773, au moment où plusieurs États entreprennent de réformer les systèmes scolaires. Bien que ces réformes soient lentes à se réaliser et que de nouvelles ordonnances soient promulguées au début du XIX^e siècle, la publication de ces manuels reflète le fait que l'arithmétique élémentaire devient une partie importante de la scolarité obligatoire.

Deux genres de livres de mathématiques sont quantitativement plutôt stables au cours de la période considérée : les introductions générales aux mathématiques ou à la géométrie, et les géométries pratiques. La présence de cette dernière catégorie peut surprendre, mais les géométries pratiques sont alors très populaires dans les écoles militaires, les nouveaux établissements intermédiaires et les académies techniques. Les introductions générales sont généralement écrites par des professeurs d'université ou par des enseignants des écoles supérieures ou secondaires. Elles sont utilisées comme supports pour leurs enseignements ou contiennent des exemples, commentaires et autres additions aux manuels utilisés. Étant donné que le public mathématique n'est pas très étendu, les étudiants constituent un lectorat captif qui garantit le succès d'un livre, et contribuent ainsi à la solde (souvent faible) du professeur. Les introductions aux mathématiques du milieu du XVIII^e siècle comprennent l'arithmétique, la géométrie, la trigonométrie et souvent des éléments de mathématiques appliquées (perspective, mécanique et optique) ; on y trouve parfois aussi des introductions aux mathématiques supérieures comme l'algèbre ou l'analyse. Ces livres puisent leurs matériaux dans deux sources principales : le livre de Wolff, *Anfangs-Gründe aller mathematischen Wissenschaften* (1710 ; version abrégée en 1713), pour la structure et les démonstrations, et celui de C. von Clausberg, *Demonstrativische Rechenkunst* (1732), pour les exemples et les règles pratiques. Vers la fin du XVIII^e siècle, on observe une plus grande

variété dans les manuels en terme de structuration formelle, à la fois sous l'influence de l'analyse combinatoire et des philosophies kantienne et idéaliste. On assiste ainsi à une focalisation – souvent indiquée par l'utilisation du mot « pure » (*reine*) dans le titre – sur l'arithmétique et/ou la géométrie sans leurs applications, accompagnée de l'inclusion plus fréquente des éléments d'algèbre.

Le tableau met enfin en évidence le déclin de la publication des livres de mathématiques pratiques à partir de 1792/1793 et la lente croissance des livres de mathématiques supérieures au début du XIX^e siècle. Ces deux tendances ne sont pas directement en relation, mais représentent ensemble le double visage des réformes de l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires vers le milieu du XIX^e siècle. Avec les réformes des écoles primaires, les programmes des écoles secondaires peuvent lentement s'émanciper des cours élémentaires et inclure des cours de mathématiques plus avancés comme l'algèbre et l'analyse⁴¹. Due à une reconfiguration des contenus des cours de mathématiques dans le secondaire, cette corrélation transparaît aussi dans l'évolution à peu près parallèle du nombre d'introductions générales aux mathématiques et du nombre de livres de mathématiques supérieures. Dans ce dernier cas, une croissance en deux temps semble également se dessiner (à partir de 1795, puis de 1815). Cette observation se laisse préciser si l'on regarde les traductions en allemand de livres étrangers, principalement français. Une première vague a lieu autour de 1800 et concerne les textes classiques d'Euler sur l'analyse et l'algèbre (1788-1790 et 1796), de Laplace sur le système du monde et sur la mécanique céleste (1797, 1800-1802), ou encore la mécanique de Lagrange (1797) et le livre sur le calcul infinitésimal de Carnot (1800). Les traductions de manuels de mathématiques supérieures n'apparaissent qu'une vingtaine d'années plus tard, lorsque le besoin s'en fait sentir dans l'enseignement secondaire et supérieur. L'*Algèbre* de Lacroix est traduite en 1811, sa *Trigonométrie* en 1822, les manuels de Bézout en 1820 et les *Éléments de géométrie* de Legendre en 1822. Les traducteurs sont en général des professeurs d'universités ou des enseignants d'écoles militaires.

Dans le même temps, les mathématiques sont inscrites dans les programmes de réforme et les curriculums comme une science fondamentale et générale. Dans les ouvrages destinés à servir de manuels dans l'enseignement secondaire ou supérieur, les mathématiques sont donc d'abord enseignées comme un ensemble, comme une théorie en tant que telle, même si des applications sont envisagées à la suite. Dans les livres de mathématiques pratiques au contraire, on trouve d'abord un enseignement

41. Voir [Morel 2013b, chap. 4] pour la Saxe et [Schubring 1983] pour la Prusse.

de fragments de mathématiques (souvent élémentaires) immédiatement utilisables dans des domaines comme le droit, le caméralisme, les forêts, etc. Cette configuration particulière caractéristique des mathématiques pratiques semble disparaître vers 1810. En revanche, on voit apparaître dans les années 1830 des livres dédiés à l'étude *a priori* d'un sujet d'après des principes mathématiques plus avancés (par exemple l'hydraulique ou la théorie des machines, selon des principes analytiques ou algébriques) qui répondent aux besoins des nouvelles écoles techniques⁴².

L'analyse du tableau montre donc que la grande majorité des publications mathématiques de l'époque 1770-1826 est à situer dans un contexte d'enseignement. Bien que l'innovation mathématique ne soit pas directement présente dans ce genre de livres, on y trouve fréquemment des discussions sur l'ordre d'exposition, les démonstrations ou les concepts fondamentaux des mathématiques. Ces réflexions témoignent déjà d'un esprit de rigueur que l'historiographie classique réserve plutôt au XIX^e siècle⁴³. De plus, les applications à de nouveaux domaines (caisses de veuves, droit, géométrie souterraine) que l'on trouve dans les livres de mathématiques pratiques sont souvent innovantes. Elles font partie de l'esprit de quantification typique des dernières décennies du XVIII^e siècle et qui se poursuit sous de nouvelles formes au cours du XIX^e [Frängsmyr *et al.* 1990]. Ces domaines d'application ne restent pas stables, tandis que le cadre épistémologique et mathématique dans lequel les problèmes sont définis et résolus change certes lentement mais profondément⁴⁴.

2. Les premiers journaux de mathématiques dans l'espace germanophone

L'un des premiers journaux spécialisés en mathématiques pures et appliquées apparaît à la fin du XVIII^e siècle à Leipzig. Cet événement historique est également à placer dans le contexte d'un champ discursif en évolution dans les États allemands⁴⁵. Au milieu du XVIII^e siècle, le public savant avait comme principale voie d'accès au monde littéraire la forme périodique particulière que sont les journaux savants (*gelehrte Zeitungen*). Le plus souvent publiés de façon hebdomadaire, parfois même

42. Sur les nouvelles écoles techniques supérieures, voir *supra*. Cette évolution n'est pas visible dans notre analyse quantitative, qui s'arrête en 1826.

43. Voir également le livre récent de G. Schubring [2005], qui soutient lui aussi l'idée d'une continuité entre le XVIII^e et le XIX^e siècle pour les discussions sur les nombres négatifs et les fondements de l'analyse. Les discussions sur le postulat des parallèles en sont un exemple supplémentaire.

44. Les statistiques en sont un exemple particulièrement intéressant [Daston 1988].

45. Pour un traitement plus détaillé, voir [Bullynck 2013].

trihebdomadaire, ces journaux donnaient des nouvelles du monde littéraire, en particulier des recensions des nouveaux ouvrages publiés. L'un des premiers correspond aux *Leipziger gelehrte Zeitungen* (1715-1784) et l'un des plus influents aux *Göttingische Anzeigen von gelehrten Sachen* (1753-1801). Vers 1760, ces périodiques, édités par des savants d'une académie ou d'une université, entrent en compétition avec des journaux de recension édités par des entrepreneurs commerciaux, comme la *Allgemeine deutsche Bibliothek* de F. Nicolai (1765-1796) ou la *Allgemeine Literatur-Zeitung* de F. J. Bertuch (1785-1803). Ceux-ci y publient exclusivement des comptes rendus des nouvelles parutions, livrés par un nombre substantiel de collaborateurs libres et payés à la pièce. Ces journaux de recension sont pour le grand public le moyen par excellence de s'informer sur le monde des livres et de se former une opinion.

On constate un net déclin du nombre de *gelehrte Zeitungen* et des journaux de recension à partir de 1780-1790. Comme le montre la Figure 2 (p. 206), ce déclin est en corrélation directe avec une autre évolution, l'avènement de journaux généralistes et spécialisés⁴⁶. Ces derniers se distinguent des journaux savants du XVIII^e siècle par l'utilisation de l'allemand au lieu du français ou du latin, et par leur spécialisation. Ils s'adressent en effet soit à un public généraliste, soit à un domaine spécifique, tandis que tous les journaux savants visaient l'ensemble des savants, mais pas le grand public. Entre 1780 et 1800, une véritable frénésie éditoriale se répand dans les États allemands, aussi bien à l'attention d'un public général (comme le *Teutsche Merkur*) qu'à celle d'une multitude de publics spécifiques. À l'apogée de ce mouvement, autour de 1790, on compte pas moins d'une centaine de journaux différents, la plupart ne publiant pas plus de deux ou trois volumes avant de disparaître. Les guerres qui suivent la Révolution française mettent fin à cette croissance spectaculaire, qui ne reprendra qu'à partir des années 1820.

Comme l'écrivent les *Göttingische Gelehrte Anzeigen* en 1786, « chaque science a aujourd'hui son journal, parfois même plusieurs », mais il manque encore un journal propre aux sciences mathématiques⁴⁷. Hindenburg, de l'université de Leipzig, crée ce journal en éditant successivement le *Leipziger Magazin zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie* (1781-1785), le *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik* (1786-1789) et, finalement, l'*Archiv für reine und angewandte*

46. Le graphique représenté sur la Figure 2 a été établi à partir des données de l'*Index deutschsprachiger Rezensionszeitschriften des 18. Jahrhunderts* (<http://adw.sub.uni-goettingen.de/idrz/pages/Main.jsf>) et du projet *Zeitschriften der Aufklärung* (<http://www.ub.uni-bielefeld.de/diglib/aufklaerung/>).

47. « Da fast jeder Theil der Gelehrsamkeit jetzo sein eignes Magazin hat, und manche mehrere, so hatte bisher nur der kriegische Theil der Mathematik dergleichen [...] dieser Mangel wird [nun] ersetzt. » (GGA, 67. Stück, 29 April 1786, p. 668).

Mathematik (1795-1800). Le contenu de ces journaux se spécialise au fil du temps. Si les applications pratiques des mathématiques remplissent l'essentiel des premiers volumes, le dernier journal est principalement consacré aux mathématiques pures. Cette évolution dans le contenu des journaux de Hindenburg reflète en partie la situation des mathématiques à l'université de Leipzig. Le premier *Magazin* est édité avec ses collègues C. B. Funk (professeur en sciences naturelles) et N. G. Leske (professeur en économie et sciences camérales), alors que Hindenburg n'est que professeur extraordinaire. Le contenu mathématique se renforce dans le second *Magazin*, ce qui est essentiellement dû à la contribution de Jean III Bernoulli, qui publie des articles tirés des archives de J. H. Lambert. L'orientation générale reste cependant héritière d'une mathématique pratique. Ce n'est qu'avec l'*Archiv* que la génération d'étudiants formée par Hindenburg, devenu professeur ordinaire en 1786, apporte la masse critique nécessaire pour faire basculer le contenu de la publication vers les mathématiques pures. Les mathématiques combinatoires développées et promues par Hindenburg depuis 1779 et enseignées quasi régulièrement à l'université de Leipzig depuis 1789 y figurent de manière prééminente, mais pas exclusive [Morel 2013b, p. 70-83 et annexe K].

La parution des journaux de Hindenburg s'inscrit pleinement dans le succès des journaux spécialisés entre 1780 et 1800. Cette période voit aussi la parution de plusieurs autres journaux dédiés aux mathématiques, mais ayant une durée de vie encore plus courte : d'abord le *Arithmetisches Magazin* de G. F. Petersen (1785 et 1787), puis le *Arithmetisches Vademecum* de C. C. Illing (1793), deux journaux plus pédagogiques qu'appliqués ou de recherche, visant un public qui cherche à s'exercer en arithmétique marchande [Morel 2014a]. Le *Mathematisches Magazin* édité par H. W. Kraushaar (1802-1803) se rapproche plus, en revanche, du *Leipziger Magazin* de Hindenburg, avec des contributions sur les mathématiques plutôt élémentaires et leurs applications pratiques. Trois volumes d'un autre journal dédié aux mathématiques pratiques et aux instruments sont publiés en 1805-1806 par H. C. W. Breithaupt. Ce *Magazin für das Neueste aus der Mathematik* s'adresse explicitement aux ingénieurs, architectes et militaires. L'entreprise d'un journal spécialisé en mathématiques est délicate autour de 1800, les différents publics de spécialistes étant encore trop restreints et les revenus financiers trop faibles pour durer. Ce n'est que dans les années 1820 qu'un journal de mathématiques, celui de Crelle (1826), réapparaît et parvient à perdurer⁴⁸.

48. Sur la genèse et les premières années du *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, voir [Eccarius 1976].

Conclusion

Au tournant du XIX^e siècle, le paysage des mathématiques allemandes connaît en quelques décennies de multiples recompositions. Le statut de la discipline, ses contenus et son enseignement se transforment radicalement. Ces évolutions ne sont cependant pas soudaines et coordonnées, mais semblent au contraire résulter de multiples réformes de l'organisation des institutions techniques et scientifiques d'une part, et des vecteurs de diffusion d'autre part. Ces processus sont graduels, souvent disparates et s'influencent mutuellement. On assiste à une professionnalisation de l'enseignement et à la structuration progressive de systèmes d'éducation hiérarchisés, avec des écoles primaires distinctes de l'enseignement secondaire et une orientation des universités vers les mathématiques pures. Un second phénomène de différenciation a lieu avec la création d'académies militaires et techniques ; des communautés mathématiques qui servent des objectifs spécifiques se mettent en place. Leur essor et leur spécialisation croissante entre la fin de la guerre de Sept Ans et le milieu du XIX^e siècle permettent la formation d'ingénieurs et de mathématiciens qui jouent un rôle important dans l'essor technique et industriel allemand.

À ces évolutions institutionnelles correspondent des modifications profondes de la production éditoriale en mathématiques. Dans ce domaine, le mouvement général est également celui d'une différenciation progressive des formes de communications. À partir de 1773, l'institutionnalisation croissante de l'enseignement se reflète dans la proportion importante d'ouvrages de mathématiques élémentaires. On observe en parallèle un déclin relatif des ouvrages de mathématiques pratiques au profit des mathématiques supérieures. De multiples tentatives éditoriales se heurtent jusque dans les années 1820 à l'absence d'une communauté susceptible de soutenir un journal exclusivement consacré aux mathématiques.

Ces évolutions concomitantes permettent de mettre en perspective ce qui semble être une rupture dans les mathématiques allemandes au cours des années 1820. Si les mathématiques universitaires prussiennes se transforment alors rapidement sous l'impulsion de Crelle et de A. von Humboldt, il ne s'agit pas d'un phénomène isolé ou imprévisible. L'essor des mathématiques universitaires s'inscrit dans un processus de longue durée qui commence dès le milieu du XVIII^e siècle. En ce sens, il est la conséquence la plus visible de transformations profondes qui touchent à la fois la structure et l'organisation de la discipline.

BIBLIOGRAPHIE

- [Biermann 1973] Kurt-Reinhard Biermann, *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810-1920, Stationen auf dem Wege eines mathematischen Zentrums von Weltgeltung*, Berlin : Akademie Verlag, 1973.
- [Bullynck 2008] Maarten Bullynck, « The Transmission of Numeracy : Integrating Reckoning in Protestant North-German Elementary Education (1770-1810) », *Paedagogica Historica*, 44/5 (2008), p. 1-23.
- [Bullynck 2013] M. Bullynck, « Stages towards a German mathematical Journal (1750-1800) », *Archives internationales d'histoire des sciences*, 63 (2013), p. 237-251.
- [Calinger 1996] Ronald Calinger (1996), « Leonhard Euler : The First St. Petersburg Years (1727-1741) », *Historia Mathematica*, 23/2 (1996), p. 121-166.
- [Chatzis 2010] Konstantinos Chatzis, « Theory and Practice in the Education of French Engineers from the Middle of the 18th Century to the Present », *Archives internationales d'histoire des sciences*, 60 (2010), p. 43-78.
- [Daston 1988] Lorraine Daston, « Fitting Numbers to the World : The Case of Probability Theory », dans W. Aspray et P. Kitcher (éd.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minneapolis : University of Minnesota Press, 1988, p. 221-237.
- [Drobisch 1832] Moritz Wilhelm Drobisch, *Philologie und Mathematik, als Gegenstände des Gymnasialunterrichts betrachtet, mit besonderer Beziehung auf Sachsens Gelehrtschulen*, Leipzig : Cnobloch, 1832.
- [Eccarius 1976] Wolfgang Eccarius, « August Leopold Crelle als Herausgeber des Crelleschen Journals », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 286-287 (1976), p. 5-25.
- [Eulenburg 1904] Franz Eulenburg, *Die Frequenz der deutschen Universitäten von ihrer Gründung bis zur Gegenwart*, Berlin : Akademie Verlag, 1994 (1^{re} éd., 1904).
- [Frängsmyr et al. 1990] Tore Frängsmyr, John L. Heilbron et Robin E. Rider (éd.), *The quantifying spirit in the 18th century*, Berkeley : University of California Press, 1990.
- [Friedrich 1775] Johann Christoph Friedrich, *Neue Schul-Einrichtung oder Plan zur gemeinnützigen Einrichtung gröyer und kleiner Schulen*, Wendebord : Clausthal, 1775.
- [Jahnke 1990] Hans Niels Jahnke, *Mathematik und Bildung in der Humboldtschen Reform*, Göttingen : Vandenhoeck und Ruprecht, 1990.
- [Jahnke 1993] H. N. Jahnke, « Algebraic Analysis in Germany, 1780-1840 : Some Mathematical and Philosophical Issues », *Historia Mathematica*, 20/3 (1993), p. 265-284.
- [Jahnke & Otte 1981] Hans Niels Jahnke et Michael Otte (éd.), *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*, Dordrecht : Reidel, 1981.
- [Kästner 1758] Abraham Gotthelf Kästner, *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Perspectiv. Der mathematischen Anfangsgründen ersten Theils erste Abtheilung*, Göttingen : Vandenhoeck, 1758.
- [Klein 2010] Ursula Klein, « Ein Bergrat, zwei Minister und sechs Lehrende, Versuche der Gründung einer Bergakademie in Berlin um 1770 », *NTM Zeitschrift für Geschichte der Wissenschaften, Technik und Medizin*, 18/4 (2010), p. 437-468.
- [Knobloch 1998] Eberhard Knobloch, « Mathematik an der Technischen Hochschule – Technischen Universität 1799-1988 », dans H. Begehr (éd.), *Mathematik in Berlin - Geschichte und Dokumentation*, vol. 1, Aachen : Shaker, 1998, p. 521-596.

- [Kröger 2013] Désirée Kröger, « Die “Mathematischen Anfangsgründe” von Abraham Gotthelf Kästner », dans M. Rathgeb et al. (éd.), *Mathematik im Prozess : Philosophische, historische und didaktische Perspektiven*, Wiesbaden : Springer, 2013, p. 137-150.
- [Kühn 1988] Heidi Kühn, *Die Mathematik im deutschen Hochschulwesen des 18. Jahrhunderts (unter besonderer Berücksichtigung der Verhältnisse an der Leipziger Universität)*, thèse de doctorat, Université de Leipzig, 1988.
- [Mehrtens et al. 1981] Herbert Mehrtens, Henk Bos et Ivo Schneider (éd.), *Social History of Nineteenth-Century Mathematics*, Birkhäuser, 1981.
- [Michaelis 1768-1769] Johann David Michaelis, *Raisonnement über die protestantischen Universitäten in Deutschland*, 2 vol., Frankfurt & Leipzig, 1768-1769.
- [Morel 2013a] Thomas Morel, « An Institutional History of Classical Mathematics Teaching in Saxony (1773-1848) », *International Journal for the History of Mathematics Education*, 8/1 (2013), p. 41-72.
- [Morel 2013b] T. Morel, *Mathématiques et politique scientifique en Saxe (1765-1851). Institutions, acteurs et enseignements*, thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 2013.
- [Morel 2014a] T. Morel, « Arithmetical Periodicals in late Eighteenth-Century Germany : “Mathematics for the Use and the Pleasure of Civic Life” », *Archives internationales d'histoire des sciences*, 64 (2014), n° 172-173, p. 397-427.
- [Morel 2014b] T. Morel, « L'Institut de formation technique de Dresde, genèse d'une école polytechnique dans l'espace germanophone », *Cahiers de Récits* (revue d'histoire des techniques de l'université de technologie Belfort-Montbéliard), 10 (2014), p. 17-32.
- [Morovics 2010] Miroslav Tibor Morovics, « Mathematics in the Austrian-Hungarian Empire », *Proceedings of a Symposium held in Budapest on August 1, 2009 during the XXIIIrd ICHST*, chap. « The mathematics and its professors at the Mining and Forestry Academy in Schemnitz (Banská tiavnica) », p. 93-102, Prague : Matfyzpress, 2010.
- [C. H. Müller 1904] Conrad H. Müller, « Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert », *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, 18 (1904), p. 51-143.
- [R. Müller 1991] Rainer Müller, « Der “bayerische Sonderweg” in der deutschen Hochschulentwicklung 1773-1848/49 », dans [Schubring 1991, p. 255-267].
- [Neugebauer 1985] Wolfgang Neugebauer, *Absolutistischer Staat Und Schulwirklichkeit in Brandenburg-Preussen*, Berlin : De Gruyter, 1985.
- [Noble 2011] Eduardo Noble, *L'analyse combinatoire allemande : un projet de fondation des mathématiques à la fin du XVIII^e siècle*, thèse de doctorat, Université Diderot-Paris 7, 2011.
- [Paulsen 1885] Friedrich Paulsen, *Geschichte des Gelehrten Unterrichts auf den deutsche Schulen und Universitäten*, Leipzig : Veit, 1885.
- [Poten 1889-1897] Bernhard von Poten, *Geschichte des Militär-Erziehungs- und Bildungswesens in den Landen deutscher zunge*, vol. 1 (1889), vol. 2 (1891), vol. 3 (1893), vol. 4 (1896), vol. 5 (1897), dans K. Kehrbach (éd.), *Monumenta Germaniae Paedagogica*, vol. 10, 11, 15, 17, 18, Berlin : Hoffmann.
- [Rarisch 1976] Isolde Rarisch, « Industrialisierung und Literatur – Buchproduktion, Verlagswesen und Buchhandel in Deutschland im 19. Jahrhundert in ihrem statistischen Zusammenhang », *Historische und Pädagogische Studien*, 6, Berlin : Colloquium Verlag, 1976.

- [Scharlau 1990] Winfried Scharlau (éd.), *Mathematische Institute in Deutschland 1800-1945*, Braunschweig & Wiesbaden: Vieweg, 1990.
- [Schmidt 1797] Georg Gottlieb Schmidt, *Anfangsgründe der Mathematik: Zum Gebrauch auf Schulen und Universitäten*, Frankfurt am Main: Varrentrapp & Wender, 1797.
- [Schnettger 2008] Matthias Schnettger, « Kleinstaaten in der Frühen Neuzeit: Konturen eines Forschungsfeldes », *Historische Zeitschrift*, 286/3 (2008), p. 605-640.
- [Schubring 1981] Gert Schubring, « Mathematics and Teacher Training: Plans for a Polytechnic in Berlin », *Historical Studies in the Physical Sciences*, 12/1 (1981), p. 161-194.
- [Schubring 1983] G. Schubring, *Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19. Jahrhunderts: Studien und Materialien zum Prozess der Professionalisierung in Preussen (1810-1870)*, Weinheim: Deutscher Studien Verlag, 1991 (1^{re} éd., 1983).
- [Schubring 1991] G. Schubring (éd.), *Einsamkeit und Freiheit neu besichtigt. Universitätsreformen und Disziplinenbildung in Preussen als Modell für Wissenschaftspolitik im Europa des 19. Jahrhunderts (Proceedings of the symposium of the XVIIIth international congress of history of science at Hamburg-Munich 1-9 August 1989)*, Stuttgart: Steiner, 1991.
- [Schubring 2005] G. Schubring, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*, Springer, 2005.
- [Schubring 2007] G. Schubring, « Documents on the Mathematical Education of Edmund Kùlp (1800-1862), the Mathematics Teacher of Georg Cantor », *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 39/1-2 (2007), p. 107-118.
- [Séguin 2005] Philippe Séguin, « La recherche d'un fondement absolu des mathématiques par l'École combinatoire de C. F. Hindenburg (1741-1808) », *Philosophia Scientiae*, 5 (2005), p. 61-79.
- [Toepell 1996] Michael Toepell, « Mathematiker und Mathematik an der Universität München: 500 Jahre Lehre und Forschung », *Algorithmus – Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften*, vol. 19, Munich: Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, 1996.
- [Tütken 2005] Johannes Tütken, *Privatdozenten im Schatten der Georgia Augusta*, Göttingen: Universitätsverlag Göttingen, 2005.
- [Wolff 1713] Christian Wolff, *Auszug aus den Anfangs-Gründen aller mathematischen Wissenschaften zu bequemerem Gebrauche der Anfänger: auf Begehren verfertigt*, Halle: Renner, 1713.
- [Zimmermann 1746] Carl Friedrich Zimmermann, *Ober-sächsische Berg-Academie, in welcher die Bergwercks-Wissenschaften nach ihren Grund-Wahrheiten untersucht, und nach ihrem Zusammenhange entworfen werden*, Dresde & Leipzig: Hegel, 1746.

ANNEXE

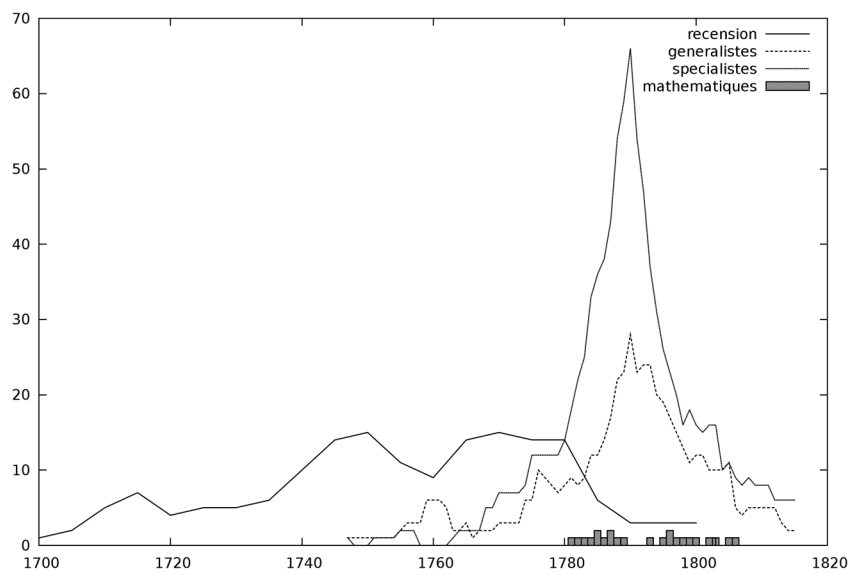


Figure 2 : Évolution du nombre total de journaux de recension, de journaux généralistes et de journaux spécialisés par an, avec indication des périodes de parution.

L'édition mathématique en France 1750-1850 : héritages et reconfigurations¹

Norbert VERDIER

Composer et vendre des mathématiques renvoient aux métiers d'imprimeur et de libraire recoupant des réalités socioprofessionnelles extrêmement variées sur les cent ans qui séparent le milieu du XVIII^e siècle de celui du XIX^e. Ces métiers sont codifiés par des réglementations évoluant au cours de cette période.

Au XVIII^e siècle, un ouvrage, avant de pouvoir être publié, doit recevoir l'approbation d'un censeur qui délivre ou non une autorisation. Près de deux cents censeurs travaillent, regroupés en plusieurs domaines de compétences, dont les mathématiques. Le rôle de la censure royale est bien connu grâce à différents travaux [Cerf 1967 ; Hanley 2005 ; Birn 2007] mais une étude globale des parcours et des pratiques effectives des censeurs de mathématiques reste à conduire. Pour les sciences, nous savons néanmoins que l'Académie des sciences de Paris a joué un rôle croissant [Hahn 1993, p. 82-87], en offrant non seulement d'indéniables opportunités de publication à ses membres, mais aussi en s'ouvrant, dans une certaine mesure, vers l'extérieur. Ainsi, à partir de 1750, les savants non académiciens peuvent faire paraître leurs travaux dans les *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Sçavans, & lus dans ses Assemblées*, comme le précise Grandjean de Fouchy dans la préface du premier tome : « Il n'est cependant pas possible que tous ceux qui ont eu en partage le génie des Sciences, puissent être appelés à ces assemblées : plusieurs personnes, fixées par différentes raisons, dans des endroits éloignés des grandes villes, se font un plaisir de cultiver les Sciences & les Lettres, & de contribuer, par des observations & des recherches utiles, à leur avancement. » (*Ibid.*, t. I, 1750, p. ij)

La Révolution apporte ensuite un changement important en instaurant la liberté du commerce des livres dans l'article 11 de la Déclaration des droits de l'Homme et du Citoyen : « La libre communication des pensées et des opinions est un des droits les plus précieux de l'Homme : tout Citoyen peut donc parler, écrire, imprimer librement, sauf à répondre de l'abus de

1. Nous remercions Olivier Courcelle, Pierre Crépel, Christian Gilain, Alexandre Guibaud et Irène Passeron pour leurs conseils dans l'élaboration de ce texte.

cette liberté dans les cas déterminés par la Loi. » Devant l'explosion du nombre de libraires, qui double à Paris entre 1780 et 1800, une réglementation finit néanmoins par être mise en place : les brevets sont instaurés par Napoléon par un décret du 5 février 1810 et progressivement mis en application à partir de 1811, pour contrôler les professions de libraires-imprimeurs et de libraires-éditeurs considérées comme à risque [Laharie 2003]. Imprimeurs et libraires doivent à présent justifier, lors d'une enquête de police, de leur moralité et de leur attachement à la patrie et au souverain. Jusqu'à la monarchie de Juillet, le terme « éditeur » n'est guère employé seul mais est parfois accolé ou associé à celui de « libraire » ou d'« imprimeur ». À l'instar de tous les historiens du livre, nous emploierons, dans la suite, l'un ou l'autre de ces termes pour désigner tout acteur éditorial impliqué dans le processus d'édition du livre. Les activités d'édition (mise en livre et mise en circulation) peuvent être réalisées dans la même structure ou dans des entreprises distinctes tout au long de notre période.

Les sources principales des historiens du livre pour tracer les contours de la librairie française au XVIII^e siècle sont essentiellement l'*Almanach de la librairie* – annuaire professionnel publié à partir de 1777 –, ou le *Catalogue chronologique des libraires et des libraires-imprimeurs* d'Auguste-Martin Lottin [1789]. Pour le XIX^e siècle, la source indispensable est la *Bibliographie de l'empire français* ou *Journal général de l'imprimerie et de la librairie*. Éditée à partir de 1811 chez Pillet à la suite de la réglementation mise en place par Napoléon, la *Bibliographie de l'empire français* – qui deviendra plus tard la *Bibliographie de la France* – est composée d'une liste classée thématiquement des ouvrages parus avec des données matérielles (nom de l'imprimeur, format et tirage, au moins partiellement, pour les années 1811-1815). Elle constitue un moyen de communication entre les milieux de l'édition et ceux de la librairie en même temps qu'un véritable outil pour l'histoire de l'imprimé. Une autre source de renseignements réside dans le contenu des dossiers des brevetés de la librairie et de l'imprimerie ; elle permet de comprendre les imbrications (notamment familiales) au sein des entreprises du livre.

En terme de sources secondaires, nous nous sommes principalement appuyés sur des études relatives aux livres de sciences [Dhombres 1989 ; Juratic 2008] et d'autres focalisées sur des livres de mathématiques [Dhombres 1985 ; Lamandé 1993]. Les premières permettent de situer la production des sciences dans l'espace éditorial et les secondes constituent des études de cas essentiellement centrées sur des « grands » noms des mathématiques : Étienne Bézout, Adrien-Marie Legendre, Sylvestre-François Lacroix et Augustin-Louis Cauchy.

Nous chercherons dans cet article à aborder un sujet encore peu étudié : celui de l'évolution de l'édition mathématique entre 1750 et 1850. Ce sujet pose de prime abord la question de la définition du mot « mathématiques »

dans la mesure où tous les acteurs de l'édition n'en ont pas la même conception à une époque donnée, et où le terme ne recouvre pas le même sens ou statut sur l'ensemble de la période considérée suivant que l'auteur est savant, académicien, professeur, ingénieur ou appartient au monde des livres. Ici, nous nous sommes référés aux classifications proposées par les gens de l'édition dans les différentes sources bibliographiques mentionnées ci-dessus : nous appellerons donc « livre mathématique » tout livre référencé sous l'appellation « mathématiques » dans ces sources. Après avoir succinctement situé le livre de sciences dans l'espace éditorial, nous nous consacrerons plus spécifiquement au livre mathématique et à ses éditeurs, dont nous tenterons de préciser l'histoire, les spécificités et de cerner certaines dynamiques d'évolution sur le temps long de la période 1750-1850. Cette approche nous donnera l'occasion de nous interroger en filigrane sur la dualité encyclopédisme/spécialisation souvent associée au tournant entre le XVIII^e et le XIX^e siècle, sur le problème de l'édition des mathématiques à Paris, en province, et de leurs interactions, ainsi que sur la question des relations entre les imprimeurs et les structures académiques et d'enseignement.

I. Le livre de sciences au XVIII^e siècle

Au XVIII^e siècle, avec le développement de l'alphabétisation et de la production de l'imprimé, des milliers de lecteurs accèdent aux textes. Entre le début et la fin du siècle, la production triple pour atteindre plus d'un millier de titres par an. Les goûts évoluent et se transforment : la part des livres religieux et juridiques décline progressivement tandis que celle des belles-lettres, de l'histoire et des sciences naturelles progresse. Les ouvrages philosophiques sont inégalement présents sur le territoire.

Dans *The Business of Enlightenment. A Publishing History of the Encyclopédie 1775-1800*, Robert Darnton [1979] met en évidence l'importante diffusion de l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert : des milliers de souscripteurs à Paris mais aussi dans toutes les grandes villes françaises et étrangères font de cette publication non seulement une aventure intellectuelle qui a suscité de nombreuses études mais aussi le véritable « best-seller » du siècle des Lumières [*Ibid.*, p. 246-325]. Elle a fait la richesse non pas de ses auteurs mais de ses libraires [Belhoste 2011, chap. 4]. C'est André-François Le Breton (1708-1779), descendant de la puissante famille du libraire Laurent d'Houry (1644-1725), qui se lance le premier dans l'édition de l'*Encyclopédie*. Détenteur unique en 1744 du privilège lui permettant d'imprimer l'ouvrage, il se lie éditorialement avec ses confrères et voisins Antoine-Claude Briasson (1700-1775), Michel-Antoine David (c. 1707-1769) et Laurent Durand (1712-1763). En 1772, quand paraissent les derniers volumes de planches, Durand et David sont morts depuis déjà

quelques années et Le Breton vend ses parts à Briasson qui devient ainsi le seul propriétaire de l'*Encyclopédie*. Nouveau venu dans la librairie parisienne, Charles-Joseph Panckoucke (1736-1798) se lance quelques années plus tard dans l'édition d'une œuvre toute aussi colossale : l'*Encyclopédie méthodique*, publiée entre 1782 et 1832, constituée de dictionnaires spécialisés afin de faciliter l'accès aux différentes matières jusqu'alors mélangées dans l'*Encyclopédie*² – comme dans ses principales reprises.

Au cours de la seconde moitié du XVIII^e siècle, Paris s'impose comme une des capitales du livre en Europe. Si le livre circule grâce à des libraires ou des colporteurs, il se diffuse aussi et surtout grâce à des structures qui jouissent, comme l'Académie des sciences, d'un privilège d'édition et exercent ainsi leur tutelle sur la librairie scientifique parisienne. D'ailleurs, beaucoup de libraires parisiens sont implantés à proximité de ces instances académiques, et certains libraires sont au centre de puissants réseaux de sociabilité scientifique. Nous pensons par exemple à Charles-Antoine Jombert (1712-1784), détenteur de la charge de libraire du roi pour l'artillerie et le génie, qui tient un temps un salon où se rendent d'Alembert, Lalande (1732-1807) ou Montucla (1725-1799). Nous pensons à Briasson, dont la réputation parmi les savants tient pour beaucoup à ses relations privilégiées avec les académies de Berlin et de Pétersbourg. Nous pensons bien sûr aussi à Panckoucke qui invite dès 1769 dans son hôtel de Thou le monde de la République des lettres et des sciences, soit un réseau de plus d'une centaine d'auteurs (parmi lesquels Voltaire, Buffon, Condorcet, Marmontel), d'éditeurs et de traducteurs. En dehors de l'*Encyclopédie méthodique*, dont la publication finira par conduire au déclin financier de son entreprise à l'aube de la Révolution, Panckoucke fonde ce qu'il convient de considérer comme le premier empire journalistique, régnant sur l'édition des journaux et périodiques dans les dernières décennies de l'Ancien Régime [Tucoc-Chala 1977]. Sa production jouit aussi de sa proximité avec l'Académie des sciences et l'Académie des inscriptions et belles-lettres, dont il devient libraire à partir de 1764.

En 1791, la loi dite Le Chapelier signe la fin du régime des corporations et permet de passer d'une économie de monopole à une économie de marché [Leblanc 1997]. La communauté des libraires doit, non sans réticence, accepter le renouvellement partiel de ses membres en accueillant notamment des provinciaux venus à Paris [Juratic 1997]. La production en matière de sciences nécessite encore de nombreuses études, mais, grâce aux récents travaux de Sabine Juratic [2008], Patrice Bret et Jean-Luc Chappey [2012], sur la presse scientifique à la charnière du XVIII^e et du XIX^e siècle, nous connaissons relativement mieux les processus et évolutions à l'œuvre dans ce domaine.

2. Voir [Blanckaert & Porret 2006].

Des dynamiques et des marchés s'ouvrent *de facto* avec des entrepreneurs du livre et des lecteurs potentiellement de plus en plus nombreux. Un autre point crucial concerne le statut d'auteur. Depuis 1793, un manuscrit est la « propriété morale » de l'auteur et non plus de son libraire. Auparavant, ce dernier pouvait à sa guise modifier un texte sans en avertir son auteur. Cette modification du statut d'auteur complexifie le travail de l'édition qui englobe désormais tout un travail de relations (négociations, corrections, validations, etc.) avec l'auteur.

S. Juratic insiste en outre sur une spécificité des auteurs de livres de sciences. À la différence des autres écrivains, les auteurs de sciences s'impliqueraient souvent personnellement dans l'édition de leurs œuvres. L'historienne fonde son affirmation sur un recensement dans les imprimeries parisiennes des années 1769-1771 : sur une centaine de titres relevant des sciences et des arts, une quinzaine est imprimée pour le compte de leur auteur³. En tout état de cause, toute édition d'un livre de sciences au XVIII^e siècle, et au suivant, peut être le fruit d'un processus d'implication individuelle de l'auteur qu'il n'est possible de détecter qu'avec des éléments d'archives des maisons d'édition ou de correspondances privées. Un autre moyen de comprendre et de mesurer ce phénomène consisterait à étudier précisément tous les ouvrages de sciences disponibles « chez l'auteur ». Nous en avons repéré quelques-uns au temps des Lumières comme les *Nouvelles récréations physiques et mathématiques* (1772-1775) de Guillaume-Germain Guyot (1724-1800) imprimées chez Pierre-François Gueffier (?-1803 ?) mais disponibles chez son auteur, rue Monconseil. Que signifie réellement et comment se traduit pratiquement cette mise à disposition du livre chez son auteur ? Cette question n'a, à notre connaissance, pas été abordée significativement par l'historiographie. Pourtant elle concerne, estimons-nous, une cinquantaine de livres de sciences pour le dernier tiers du XVIII^e siècle et des centaines pour la première moitié du XIX^e siècle.

S. Juratic met enfin en avant une spécificité du livre de sciences relativement au problème général de la contrefaçon dans le commerce du livre. Dans une lettre adressée en 1754 à Samuel Formey, secrétaire de l'Académie de Berlin, Briasson refuse de prendre la responsabilité de la distribution en France d'un roman allemand car il craint la contrefaçon et précise : « C'est le sort de tout ouvrage facile à fabriquer et prompt au débit, et la raison pour laquelle je m'attache dans le commerce étranger

3. Tel serait le cas du *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine* de Bézout. Il est imprimé chez Louis-François Delatour (1727-1807) mais, pour diffuser son ouvrage, Bézout fait appel au libraire Jean-Baptiste-Guillaume Musier (173?-1810). Les exemplaires publiés ne font cependant aucune référence à l'investissement personnel de l'auteur et la source indiquée par S. Juratic ne précise pas s'il s'agit d'un investissement relationnel ou financier.

à des livres de sciences ; j'en débite beaucoup moins, mais je suis assuré d'être souvent seul » (cité dans [Fontius *et al.* 1996, p. 75]). Pour le libraire, le livre de sciences possède donc à la fois avantages (peu de contrefaçon et assurance d'une diffusion quasi exclusive et régulière) et inconvénients (fabrication techniquement difficile et tirage faible).

II. Libraires et mathématiques

Pour repérer les libraires de mathématiques, nous avons eu recours aux sources primaires mentionnées en introduction (journaux d'annonces bibliographiques et brevets des éditeurs pour le XIX^e siècle) et nous nous sommes intéressés aux productions de plusieurs figures marquantes des mathématiques : Bézout, Fourier, Francœur, Lacroix, Laplace, Legendre et Poncelet. Au-delà de cette entrée « par auteur choisi », nous avons plus généralement procédé à une recherche par titres dans les catalogues en ligne [BNF ; SUDOC ; IDREF] : grâce à des mots-clés associés aux mathématiques dans les diverses classifications en vigueur, nous avons ainsi établi une liste des ouvrages de mathématiques nous permettant d'identifier les éditeurs impliqués. Pour affiner l'étude, nous avons consulté de nombreux catalogues des bibliothèques du XIX^e siècle⁴, qui constituent des sources primaires précieuses pour suivre au plus près la circulation et la perception des mathématiques dans les villes.

Au niveau des sources secondaires, nous avons principalement eu recours aux différentes sources prosopographiques sur les gens du livre à Paris et dans quelques rares villes de province [IHMC]. Si aucune ne met l'accent sur les mathématiques, ces sources donnent néanmoins des informations précises sur certains acteurs, souvent à la marge, de l'édition mathématique. L'historiographie étant essentiellement pointée vers Paris, nous avons aussi cherché à utiliser les archives municipales ou départementales qui regorgent souvent de fonds locaux permettant de mieux saisir la circulation des livres. En relation avec de nombreux archivistes ou historiens, nous avons ainsi pu repérer des fonds locaux souvent méconnus et sous-exploités mais indispensables pour appréhender l'édition à l'échelle d'un territoire⁵.

4. Au XIX^e siècle, face au développement des publications, de nombreuses municipalités décident de faire effectuer des recensements (et une classification) des ouvrages disponibles dans la bibliothèque de leur ville.

5. Quelques exemples illustreront les potentialités de ces fonds. Le fonds Antoine d'Abbadie aux archives départementales des Pyrénées-Atlantiques (site de Bayonne) contient de nombreuses correspondances entre le savant et le milieu du livre parisien (achats d'ouvrages, abonnements à des journaux, achats d'instruments scientifiques). Le fonds Dutour de Salvert aux archives de l'Allier (Moulins) conserve une correspondance sur un demi-siècle entre le correspondant de l'Académie et les plus grands libraires des

En procédant suivant cette méthodologie, nous avons établi une liste des éditeurs produisant des livres de mathématiques (Illustration 1).

Illustration 1 : Noms des libraires et/ou libraires-imprimeurs impliqués dans la production mathématique en France entre 1750 et 1850.

Période où ils commencent à publier des livres de mathématiques	Noms des libraires, des libraires-imprimeurs ou des librairies et imprimeries (classés alphabétiquement)	Nombre
1750-1759	Pierre-Robert-Christophe Ballard, Antoine-Claude Briasson, Bure, Christmann, Louis-François Delatour, Jean-Charles Desaint, Girard, Grou, Imprimerie royale, Charles-Antoine Jombert, Lambert, Quillau, Saillant	13
1760-1769	Michel-Antoine David, Delalain, Despillay, Desprez, Laurent Durand, Grangé, Pierre-François Gueffier, Guérin, Knapen, Malassis, Mossy, Jean-Baptiste-Guillaume Musier, Charles Panckoucke, Prault, Jean-Jacques Robert, François Seguin	16
1770-1779	Amyot, Barbou, Esprit, Froullé, Grabit, Laurent d'Houry, Martel, Méricot, Michalet, Moutard, Valade	11
1780-1789	Henri Agasse, André, Belin, Bouchard, Couret de Villeneuve, François-Ambroise Didot, Godinet, Pierre-Michel Nyon, Plomteux, Philippe-Denis Pierres	10
1790-1799	J. A. Baudelot, Baudouin, Jean-Baptiste Bernard, Bleuet, Boutron, Charles-François Caille, Louis Courcier, Decker, Desclassant, J.-B.-M. Duprat, Jean-Michel Eberhart, Fuchs, Garnery, Grégoire, Imprimerie du cercle social, La librairie, Antoine-Louis-Guillaume-Catherine Laporte, Leclerc, François-Georges Levrault, Jean-Joseph Niel, Louis Ravier, Régent, Reynier, Richard, Ruelle	25

Lumières (Briasson, Jombert et Panckoucke, principalement) [Crépel & Erhard 2014, p. 41-56]. Grâce à Colette Le Lay et ses patientes recherches aux archives municipales de Nantes, nous avons pu mieux cerner la production de la maison Lamorée-Forest dans cette ville, de même que les activités d'un de ses auteurs de mathématiques: Étienne Midy. Enfin, dans le cadre du projet en cours « Maths in Metz », piloté par Olivier Bruneau, nous avons pu identifier des fonds (Archives municipales de la ville de Metz) permettant de mieux situer l'importance des libraires messins en termes de circulation des mathématiques. Ainsi, n'est-ce pas un hasard si, en 1815, deux Américains sont envoyés en France pour acheter des centaines d'ouvrages à Paris puis à Metz afin de constituer la bibliothèque de l'Académie militaire de West Point [Préveraud 2014, p. 40-50].

Période où ils commencent à publier des livres de mathématiques	Noms des libraires, des libraires-imprimeurs ou des librairies et imprimeries (classés alphabétiquement)	Nombre
1800-1809	Anselin, Appert, Ayné, Charles-Louis-Étienne Bachelier, Bastien, Bourel, Carez, François-Balthazar Chambeau, Charles, Clousier, Georges-Adrien Crapelet, Devaux, Devilly, Duminil, Fantin, Jean-Louis Gœury, Heitz, Jean-Baptiste Huzard, Janinet, Jean Klostermann, Mogie, Offray, Silbermann, Testu, Thiel, Tournel, Vigneulle, Volland	28
1810-1819	Henri-Louis Hovius, Denis-Simon Magimel, Patris, Pierret, Pochard, Rack, Rougeron, Jean-Georges Treuttel, Jean-Godefroy Würtz	9
1820-1829	Bontoux, Bossange, Marcel-Antoine Carillan (ou Carilian)-Gœury, Corby, Crochard, Dalmont, Delaunay, Grimblot, Guillaume, Guiraudet, Lamort, Mansut, Picard-Dubois, Renard, Rignoux, Rousseau, Villette-Jacquart	17
1830-1839	Baillière, Barbat, Bibliothèque scientifique, Chamerot, Chautard, Colas, Cosson, Danel, Darde, Delamare, Demonchy, Denain, Derivaux, Charles Dezobry, Douillier, Dupont, Louis Hachette, Lamorée-Forest, Librairie parisienne, Mame, Paulin, Paya, Perisse, Pesron, Poussielgue, Jules Renouard, Nicolas-Edme Roret, Senef, Sevalle, François Thibaud-Landriot, Pierre-Hubert Tourneux, Veuve Vincent-Marie, Vincenot, Warion, Werdet	35
1840-1850	Anner-André, Barlatier, Berger-Levrault, Bonnal, Charpentier, Chauvin, Chimot, Corréard, Dunod, Feissat, Gatineau, Gibrac, Grollier, Henry, Jougla, Langlois, Laurent, Lecesne, Charles-Emmanuel Magdeleine, Mathias, Perol, Prud'homme, Raybois	23

Sans prétendre à l'exhaustivité, cette liste d'un peu plus de 180 maisons repérées offre une cartographie de l'évolution du paysage éditorial impliqué dans la production mathématique au cours de la période 1750-1850. Elle permet de dégager de premières tendances.

Commençons par remarquer que l'édition du livre de mathématiques n'est pas un phénomène marginal, et ce dès la seconde moitié du XVIII^e siècle. Sur les quelque deux cents « imprimeurs du XVIII^e siècle depuis 1701 jusqu'en 1789 » recensés par Charles Crapelet [1840, p. 124-129],

presqu'un tiers a réalisé des livres de mathématiques et « sur la liste des trente-six imprimeurs exerçant à Paris en 1789 » [*Ibid.*, p. 129-130], cette proportion atteint les deux tiers.

Même si cette tendance reste à affiner, nous constatons en outre une augmentation significative du nombre de libraires impliqués à partir de la décennie 1790 et pendant toute la première moitié du XIX^e siècle : malgré un creux dans le courant des années 1810, les périodes 1790-1810 et 1830-1850 marquent ainsi l'entrée d'une centaine de librairies sur le marché de l'édition des mathématiques, soit entre vingt et trente par décennie, chiffres à comparer à la cinquantaine de libraires dénombrés pour l'ensemble de la période 1750-1789.

Retenons également la diversité du paysage éditorial associé à la production de mathématiques. De multiples structures apparaissent, souvent marginalement impliquées avec l'édition de quelques ouvrages de mathématiques, mais aussi parfois beaucoup plus massivement avec les mathématiques comme domaine principal, ou comme l'un des principaux domaines de leur activité. Ces dernières maisons d'édition, toutes parisiennes, assurent de fait la plus grande partie de la production : parmi elles, celles de Jombert, Didot, Courcier, Duprat, Bernard, Bachelier.

À côté de la production mathématique parisienne dominée par quelques libraires coexiste cependant aussi une production provinciale, fruit d'établissements qui ne sont pas versés dans les mathématiques mais qui peuvent, à l'occasion, en éditer ou en diffuser. Ces maisons ne sont pas rares : nous en avons trouvé dans toutes les villes où nous avons étudié de près la circulation des mathématiques par le biais des gens du livre (Avignon, Bordeaux, Brest, Clermont-Ferrand, Dijon, Limoges, Lyon, Marseille, Metz, Montpellier, Rennes, Saint-Malo, Strasbourg et Toulouse). Les ouvrages destinés à l'enseignement sont de loin les plus nombreux⁶, mais il peut aussi s'agir de tables mathématiques, de thèses ou de mémoires (parfois refusés dans les publications académiques parisiennes). Leurs auteurs font généralement état de profils très variés : citons les *Éléments de mathématiques, à l'usage des écoles de philosophie du collège royal de Toulouse* publiés par Roger Martin (1741-1811) chez Robert à Toulouse en 1781 (mais disponibles chez Laporte à Paris)⁷ ; les *Leçons élémentaires de mathématiques* de l'abbé Jean-Louis Aubert (1731-1814) parues chez Niel à Avignon en 1790 ; le *Traité d'arithmétique, offert comme un pré-*

6. Ce phénomène s'accroît au XIX^e siècle avec le développement de l'enseignement des mathématiques à différents niveaux et dans de multiples établissements (collèges, lycées et universités).

7. Notons que les planches de géométrie ont été gravées par Marguerite-Thérèse de Maugein (1736-1787?). Pour une mise en perspective des *Éléments* de Roger Martin, nous renvoyons à l'analyse de Gert Schubring [2005, p. 116-120].

servatif contre les routines aux personnes qui sont privées des leçons lumineuses que des professeurs donnent dans les écoles spéciales, dans les lycées, dans les collèges, etc. rédigé par un certain Bonnefin (« ex-trésorier des invalides de la marine, à Saint-Malo ») et publié par Henri-Louis Hovius (1756-1822), à Saint-Malo, en 1815 et, la même année, les *Nouvelles méthodes pour résoudre les Équations des degrés supérieurs* par l'abbé Dumas chez Thibaud à Riom. Citons aussi le cas de la maison Lamorée-Forest, implantée à Nantes et qui, bien que son catalogue soit essentiellement tourné vers cette ville, avec des dizaines de titres, publie aussi quelques livres de mathématiques comme les *Tables des quatre règles de l'arithmétique* [Forest 1836], les deux fascicules d'Étienne Midy [1835, 1836] ou les cours de mathématiques du professeur au collège royal de Nantes, Joseph-Louis-Adrien Amondieu [1835].

Comme le remarquait S. Juratic pour les sciences, nous observons également, sur quelques exemples bien renseignés, une grande diversité de parcours professionnels parmi les libraires repérés. Certains sont des « héritiers » d'entreprises implantées depuis longtemps dans le monde de l'édition et dont les fonds se revendent d'une génération à l'autre, souvent dans un cadre familial. D'autres sont de nouveaux venus et proviennent directement ou familialement d'autres professions que celles liées au livre (hommes de loi, professeurs, marchands, etc.) : tel est le cas de Charles Crapelet (1762-1809) qui, originaire de Levécourt (Haute-Marne) et fils d'un maître d'école, monte à Paris et entre en apprentissage chez Pierre-Robert-Christophe Ballard (1744?-1812) en 1774 avant de devenir prote (responsable d'imprimerie) chez Jean-Georges-Antoine Stoupe (1736?-1808) en 1780. Il s'établit à son compte vers 1793 et imprime, nous y reviendrons, de très nombreux ouvrages de mathématiques (de Bézout, Legendre, Delambre, Laplace, Lacroix, Carnot et Biot notamment).

Les ouvrages de Bézout ont été très étudiés pour leur importance sur le plan de la diffusion des mathématiques [Dhombres 1985 ; Lamandé 1987 ; Alfonsi 2011] ; en revanche, sur le plan éditorial, il nous semble que le rôle concret des différents libraires impliqués reste encore à éclairer. Nommé examinateur des écoles d'officiers de la marine en 1764, Bézout est sollicité pour rédiger un cours de mathématiques en cinq parties qu'il publie entre 1764 et 1769. Véritable succès éditorial, plébiscité et recommandé par les enseignants, son *Cours* a été vendu du vivant de l'auteur et tout au long du XIX^e siècle à des milliers d'exemplaires dans sa version française et dans ses multiples éditions étrangères. Uniquement en France, des dizaines d'éditions ont été produites par une quinzaine de libraires : Imprimerie royale, Pierres, Nyon, Louis, Richard & Caille, Ravier, Baudelot & Eberhart, Didot, Seguin, Courcier, Chambeau, Bachelier, Dezobry & Magdeleine. Elles offrent un témoignage précieux sur les usages du livre, les pratiques de lecture et de réception. Parmi les différentes versions disponibles, certaines

sont composées à partir de plusieurs éditions (et parfois de différents libraires) pour les besoins de divers types de lecteurs. D'autres, telles que celles publiées par Peyrard et Reynaud, en 1812, en sont des versions remaniées et commentées (Illustration 2).

5210. COURS DE MATHÉMATIQUES, à l'usage de la marine et de l'artillerie ; par Bezout. Troisième partie, contenant l'algèbre et l'application de l'algèbre à la géométrie, avec des notes explicatives, par A. A. L. Reynaud. Ouvrage adopté par l'Université impériale. In-8° de 34 feuilles et demie, tiré à 5000 exempl. Impr. de M^{me} V^e Courcier, à Paris. Prix. 5—0
A Paris, chez M^{me} V^e Courcier, quai des Augustins.

4574. COURS de Mathématiques, à l'usage de la marine et de l'artillerie, par Bezout ; quatrième édition, revue avec le plus grand soin ; suivie d'un commentaire par F. Peyrard, professeur de mathématiques au lycée Bonaparte ; et renfermant toutes les connaissances nécessaires pour l'admission à l'Ecole polytechnique : ARITHMÉTIQUE. In-8° de 16 feuilles, tiré à 750 exempl. Impr. d'Offray, à Avignon. Prix 1—50
Chez Offray, à Avignon.

Illustration 2: Deux versions commentées du cours de mathématiques de Bézout (*Bibliographie de l'empire français*, 2 (1812), p. 490 et 708-709). Les tirages indiqués (3 000 exemplaires pour l'édition Reynaud et 750 pour l'édition Peyrard) sont un indice de la forte diffusion du *Cours* de Bézout.

Les commentateurs du *Cours* de Bézout (Gérard, Guillard, Garnier, Peyrard, Reynaud) sont bien identifiés par l'historiographie [Alfonsi 2011] mais seuls ceux qui ont conservé le mot « Bézout » dans le titre de l'ouvrage ont retenu l'attention. Or plusieurs autres auteurs se sont largement inspirés du *Cours* pour en faire un ouvrage à part dont ils sont devenus les auteurs. C'est le cas du *Traité d'arithmétique* de Jean-Joseph Querret (1783-1839), chef d'institution à Saint-Malo, publié en 1823 chez Hovius [Querret 1823]. Querret explique dans son avertissement qu'en rédigeant cet ouvrage il ne souhaitait pas écrire un nouveau livre mais seulement mettre le *Cours d'arithmétique* de Bézout en « harmonie avec l'état » de l'arithmétique, ce domaine ayant à la fois bénéficié d'apports issus de l'enseignement (leçons de l'École normale et concours comme ceux de l'École polytechnique et de la Marine), de la presse mathématique (*Annales de Gergonne* dont Querret a été un collaborateur) et des différents traités de théorie des nombres (il cite les contributions de Legendre, Lacroix, Francoeur, Bourdon, Reynaud et Peyrard). Querret conclut : « il m'a fallu faire pour cela de si grands changemens et des additions si nombreuses, qu'il n'est resté que fort peu de choses de Bézout, en sorte qu'il ne m'a plus été permis de conserver son nom à l'ouvrage » [*Ibid.*, p. iij], mais explique néanmoins avoir mis entre crochets « tout ce qui lui appartient » [*Ibid.*].

La librairie de Hovius publie d'autres ouvrages de Querret ainsi qu'un *Traité de navigation* de Charles-Marie-Félix Fournier [1826] destiné, lui aussi, à remplacer le *Traité de navigation* de Bézout. Il ne faut cependant pas seulement appréhender la diffusion de Hovius à l'échelle de Saint-Malo dans la mesure où ces ouvrages étaient également, quoique dans une proportion que nous ignorons, diffusés à Paris chez Tourneux. Le destin éditorial des *Cours* de Bézout, déjà étudié par L. Alfonsi [2011, p. 330-339], promet donc probablement encore de nouvelles surprises.

III. Des libraires pour les mathématiques

Important libraire parisien, successeur de son père Claude Jombert, Charles-Antoine Jombert se revendique au cours de la période 1740-1760 comme l'un voire le plus important des diffuseurs des mathématiques de Paris. Imprimeur-libraire du Roi pour le génie et l'artillerie depuis 1738, C.-A. Jombert a effectivement joué un rôle important dans l'édition mathématique à partir de 1735-1736 et de sa publication des *Récréations mathématiques et physiques* d'Ozanam : des années 1730 jusque dans les années 1760, la librairie Jombert est l'une des plus fournies en mathématiques et en sciences [Bousquet-Bressolier 1997 ; Parent-Charon 2005]. L'imprimeur-libraire insiste d'ailleurs régulièrement sur la richesse de son fonds mathématique. Au physicien Étienne-François Dutour de Salvert (1711-1789), correspondant de l'Académie des sciences, il écrit par exemple en 1743 :

« je ne sçais par quelle fatalité parmy tant de livres de mathématique dont vous faites souvent emplette, il ne se trouve point quelquefois aussi quelqu'uns de ceux que j'ay imprimé, je passe pourtant pour être le mieux assorti en livres de ce genre qu'aucun autre Libraire de Paris. je crois vous avoir envoyé mon catalogue. S'il se trouvoit quelqu'occasion pour vous ou pour vos Amis, de prendre quelqu'uns de mes livres, cela me dédommageroit des petits soins et des peines que je prens avec plaisir et sans interest pour ces petits envois. » [Crépel & Ehrard 2014, p. 333]

Revendue en 1775 à son gendre Louis Cellot (auquel il avait cédé son imprimerie dès 1760) et à son fils Louis-Alexandre, la librairie Jombert conserve la charge de libraire du Roi pour le génie et l'artillerie, mais les deux héritiers se définissent aussi comme libraires « sur l'art militaire, le génie, l'artillerie, l'architecture, les mathématiques, le dessin, et autres sciences » dans leurs catalogues de vente. Beaux-frères de Louis-Alexandre Jombert, Pierre Didot dit l'aîné et Firmin Didot hériteront à leur tour de la librairie en 1789 : d'après le catalogue de cette année, le fonds réunit alors « tous les ouvrages sur l'art militaire, les mathématiques, et l'architecture » (Catalogue de libraire. Paris. Didot, Firmin. 1789).

Ce n'est cependant qu'à partir de la dernière décennie du XVIII^e et de la première décennie du XIX^e siècle que certains des principaux libraires

impliqués dans la production de livres mathématiques se revendiqueront explicitement, sur les pages de couverture de leurs ouvrages ou dans les entêtes de documents commerciaux (lettres et catalogues de vente), comme « libraire pour les mathématiques » ou « imprimeurs-libraires pour les mathématiques ». Marque explicite d'une volonté de spécialisation, l'appellation « libraire pour les mathématiques » apparaît par exemple en tête de l'*Essai sur la théorie des nombres* de Legendre, publié en l'an VI (1797) chez le libraire Duprat. D'autres libraires, tels que Bernard, Courcier et Didot, s'emparent également du qualificatif au cours de la même période et le mettent en exergue sur certains de leurs livres (Illustration 3). Néanmoins, tandis que Courcier et Duprat se restreignent aux mathématiques, Bernard et Didot y ajoutent les sciences, les arts, l'art militaire, l'architecture, le génie ou la marine, en fonction des ouvrages. À partir du début des années 1810, Bachelier, successeur de Courcier et possesseur du riche fonds mathématique de Duprat, conservera et, nous le verrons, accentuera cette marque de spécialisation de sa librairie dans le domaine des mathématiques⁸.

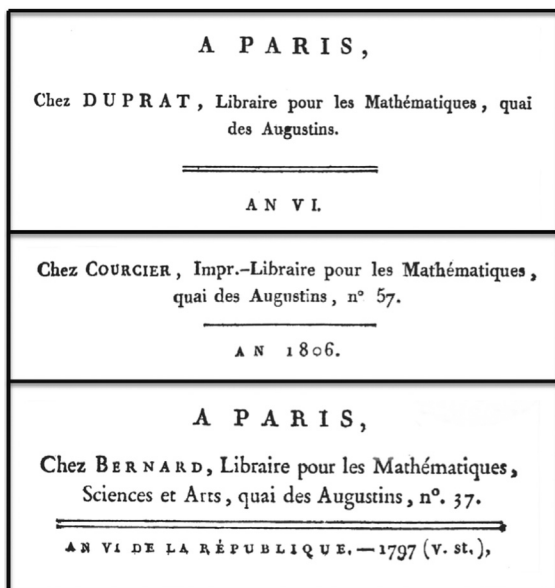


Illustration 3 : Libraires ou libraires-imprimeurs « pour les mathématiques ».

8. Notons que Jean-Louis Gœury publie en 1801 un ouvrage de stéréométrie [Vernon 1801] dans lequel il se présente comme libraire pour les mathématiques et l'architecture. C'est, à ce stade de nos recherches, la seule fois que Gœury utilise ce terme. Allié à Carillan, il se définira ensuite comme libraire de l'École des ponts et chaussées, institution dans lequel il joue un rôle prépondérant étudié par Nathalie Montel [2008].

Dans la décennie précédant la Révolution, les mathématiques sont surtout éditées à l'Imprimerie royale, chez Jombert, Musier, Pierres ou Desaint. Arrivent ensuite sur ce marché les libraires Didot (successeur de Jombert), Louis, Duprat (et son successeur Courcier) avant que des libraires directement affiliés à l'École polytechnique, comme Bernard ou Klostermann, ne fassent leur apparition dans la première décennie du XIX^e siècle. Dans le premier tiers du XIX^e siècle, de multiples reconfigurations éditoriales se mettent en place. Nous mettrons l'accent sur deux empires éditoriaux, ceux de Firmin Didot et Louis Hachette, puis nous nous intéresserons à celui de Bachelier, l'éditeur spécialisé en mathématiques. Avant cela, nous reviendrons sur un acteur de l'ombre, l'imprimeur Crapelet, qui apparaît en filigrane dans de nombreuses publications.

1. Crapelet : un imprimeur au service des libraires pour les mathématiques

Établi à son compte en 1793 après plusieurs années chez Stoupe au poste de prote, l'imprimeur-libraire Charles Crapelet et son fils Georges-Adrien Crapelet (1789-1842), qui lui succède en 1811, ont participé à l'impression de nombreux ouvrages de mathématiques à la fin du XVIII^e et dans la première moitié du XIX^e siècle pour le compte de multiples libraires. Ces interventions ne figurent pas toujours dans les bases de données [BNF ; SUDOC ; IDREF] et pour estimer quantitativement les contributions de Crapelet, il faudrait donc « décompter très soigneusement de qui il a été une sorte de prestataire de services » [Verdier 2009a, p. 113], ceci nécessitant de vérifier dans chacun des ouvrages de mathématiques si Crapelet était ou non l'imprimeur. Cependant, entre la mise en livre pour Duprat du premier tome du *Traité de mécanique céleste* de Laplace en l'an VII (1798-1799) et celle du *Traité élémentaire d'algèbre* de Joseph Bertrand pour Louis Hachette en 1851, ce sont des dizaines d'ouvrages qui sortent de « chez Crapelet » pour Bachelier, Bernard, Buisson, Courcier, Deterville, Didot, Duprat, Hachette, Lefèvre, Louis, Renouard, Roret, Treuttel et Würtz. Les Crapelet ont ainsi discrètement œuvré au cœur de l'édition des mathématiques au cours de cette période, ce qui leur vaudra des récompenses comme cette médaille d'argent pour la typographie attribuée au fils Crapelet en 1834 : « M. Crapelet, comme éditeur des sciences mathématiques, a parfaitement réussi [*sic*] dans ce genre spécial et difficile. Il réunit aujourd'hui des titres supérieurs encore à ceux qu'il présentait en 1827. Le jury pense qu'il mérite plus que jamais la médaille d'argent qu'il obtint à cette époque » [Dupin 1836, p. 421-422]. Derrière ce travail d'édition reconnu se cache cependant aussi le travail d'un autre homme, Théodore Bailleul, qui s'est d'abord consacré à la typographie des mathématiques chez Crapelet avant de rejoindre la maison Huzard-Bachelier et d'y réaliser toute sa carrière [Verdier 2013a].

2. Didot, un empire éditorial pour les sciences

Héritière de la librairie Jombert, la maison Didot, aux mains des frères Pierre et Firmin Didot depuis 1789, publie plusieurs dizaines de titres par an au cours de la dernière décennie du XVIII^e siècle. Au cours du demi-siècle suivant, ce chiffre atteint plusieurs centaines. Sur cette production massive, la publication moyenne d'ouvrages de mathématiques sur une année ne dépasse cependant pas la dizaine de titres⁹. Au-delà de cette faible production en terme de nombres de titres et de qualité des ouvrages mathématiques publiés (beaucoup sont dus à des auteurs peu connus), Didot joue malgré tout, avec ses tables de logarithmes, diffusées à très large échelle et constamment rééditées, un rôle considérable sur le plan éditorial en touchant de multiples publics.

Grâce à une note publiée en 1860 dans le *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques*¹⁰, nous connaissons assez précisément la genèse éditoriale de la première table de logarithmes de Lalande, publiée chez Didot en 1802 [Lalande 1802]. Juge honoraire au Tribunal de la Seine dans l'Yonne, Fournérat y explique avoir en sa possession la première version de ces tables, annotées de la main même de Lalande (Illustration 4). Nous y apprenons que Lalande se serait impliqué financièrement auprès de Didot en lui prêtant 150 francs en 1800. L'implication des auteurs de livres de sciences relevée par S. Juratic [2008] comme une pratique courante sous l'Ancien Régime paraît donc encore pratiquée à la charnière XVIII^e-XIX^e. La note de Fournérat révèle également des informations sur le tirage. En octobre 1801, un tirage de deux mille exemplaires est effectué. Lalande note que le 6 juin 1803, deux mille cinq cents exemplaires sont déjà vendus, ce qui constitue un chiffre de vente particulièrement important. Au cours du XIX^e siècle, les différentes éditions de ces tables représentent des dizaines de milliers d'exemplaires vendus. Elles font à elles seules de Didot l'un des plus importants producteurs de livres de mathématiques de son temps.

9. Presque tous les autres relèvent des sciences médicales, juridiques ou sont des œuvres littéraires. Beaucoup sont publiées sous l'égide de l'Académie des sciences de Paris dont Didot est un des éditeurs.

10. En 1855, Olry Terquem (1782-1862), cofondateur, en 1842, des *Nouvelles annales de mathématiques* ou *Journal des candidats aux Écoles polytechnique et normale*, décide d'ajouter un *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques* qui compte entre cent et deux cents pages. Relié annuellement à la suite des *Nouvelles annales*, avec une pagination séparée, il constitue sans doute le premier journal d'histoire des mathématiques.

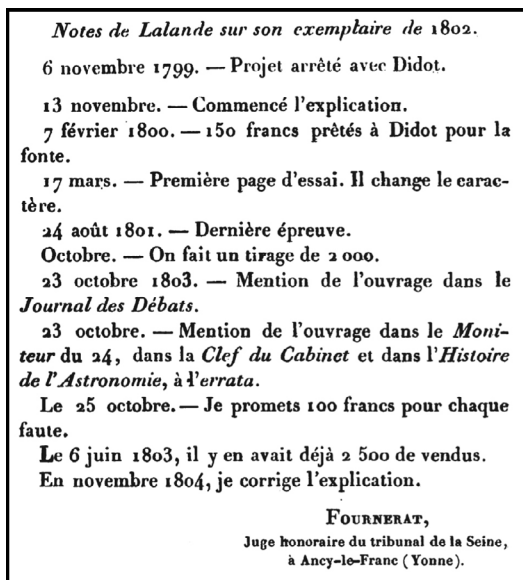


Illustration 4 : Sur les premières tables de logarithmes de Lalande, publiées par Didot en 1802 [*Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques*, t. VI, 1860, p. 84-85].

3. Louis Hachette : un nouvel empire pour l'enseignement

L'empire de Louis Hachette (1800-1864) vise essentiellement le marché du livre scolaire. Même si l'étude très fine que Jean-Yves Mollier [1999] lui consacre offre peu de prise aux mathématiques, ce dernier montre néanmoins comment Hachette est parvenu à atteindre la sphère politique et obtenir une sorte de monopole sur le marché de l'éducation¹¹. Il met de même en évidence la double stratégie de Hachette à l'égard des autres maisons d'édition, une double stratégie consistant à procéder à l'absorption de petits éditeurs (comme Eberhart) tout en encourageant, dans le même temps, l'éclosion d'autres maisons d'édition, ainsi que l'illustre le cas de la société Dezobry, Magdeleine et Cie. Mollier explique comment et pourquoi Louis Hachette aide deux libraires Charles-Emmanuel Magdeleine et Charles Dezobry (1798-1871) à fonder leur propre société d'édition en 1839 : « D'une certaine manière, la société Dezobry, Magdeleine et Cie, sise 3, rue des Maçons-Sorbonne, était [...] une filiale ou une dépendance

11. Bernard Bru et Thierry Martin ont très utilement complété nos informations sur la façon dont Hachette a su dynamiser ses réseaux centrés sur l'École normale pour éditer des ouvrages élémentaires de mathématiques [Cournot 2010, p. 84, 163-165, 478-479 et 583].

de la librairie de la rue Pierre-Sarrazin, du moins jusqu'au 16 mars 1840, date à laquelle la maison d'édition vola de ses propres ailes » [Mollier 1999, p. 226]. La maison ainsi créée publie plusieurs ouvrages de mathématiques plutôt élémentaires en s'appuyant parfois sur des partenaires provinciaux, comme le libraire strasbourgeois Derivaux, avec la collaboration duquel elle édite, à la fin des années dix-huit cent trente et tout au long des années quarante, plusieurs ouvrages du mathématicien strasbourgeois Pierre-Joseph-Étienne Finck (1797-1870). Hachette tisse ainsi un véritable mailage au plus près des lecteurs.

4. Bachelier : le libraire-imprimeur des mathématiques

Fils d'un tonnelier de l'Yonne, Charles-Louis-Étienne Bachelier (1776-1853) s'installe à Paris vers 1800. Il y entre au service du libraire Denis-Simon Magimel (1767-1831 ?) – qui se consacre presque exclusivement au domaine militaire en publiant une soixantaine d'ouvrages entre 1800 et 1820 –, et devient son protégé. Par son intermédiaire, il rencontre la fille de l'éditeur Louis Courcier. En l'épousant en 1804, il s'insère dans une longue tradition familiale tournée vers les mathématiques (Illustration 5). Louis Courcier est en effet le successeur du « libraire pour les mathématiques » Duprat. Entre 1803 et 1811, il publie deux cents titres dont la moitié environ relève directement des mathématiques : ce sont des ouvrages de Bézout, Carnot, Clairaut, Delambre, Du Bourguet, Euler, Francœur, J.-G. Garnier (cofondateur de la *Correspondance mathématique et physique*), Gauss, Monge, Lacroix, Lagrange, Laplace, Legendre, Monge, Poisson, A.-A.-L. Reynaud, Wronski, etc. Courcier édite aussi, à partir de 1804, la *Correspondance sur l'École polytechnique, à l'usage des élèves*, lancée par le mathématicien Jean-Nicolas-Pierre Hachette. Sa femme, la veuve Courcier, lui succèdera en 1811.

Bachelier accède aux responsabilités éditoriales en deux temps. Par un décret de 1812, il devient libraire au 55 quai des Augustins à Paris grâce à l'aide de Magimel. Vingt ans plus tard, il est breveté imprimeur en succession d'Auguste-Alfred Courcier (1809-?), son beau-frère. Sous la direction de la veuve Courcier, la maison Courcier s'est livrée, comme en témoigne l'examen de la *Bibliographie de France*, au rachat de plusieurs fonds concurrents : ceux des libraires Agasse, Berthoud, Klostermann, Thiriet et Lepautre [Arbour 2003, p. 152]. En 1832, Bachelier associe à sa librairie du quai des Augustins l'imprimerie de la rue du Jardinnet, fief de la maison Huzard¹².

12. La maison Huzard a été qualifiée de maison d'« édition agricole » par Marion Duviigneau [1991]. Celle-ci met en évidence la prospérité de cette maison et son rôle prépondérant dans la propagation des progrès agricoles sous la monarchie de Juillet par le biais des journaux d'agriculture pratique et d'économie rurale.

Courcier. Devenu libraire et imprimeur, Bachelier est désormais au centre de la vie éditoriale. Il développe et étend la stratégie de la maison familiale et assoit progressivement sa domination sur le marché du livre mathématique.

Brevet de libraire	Brevet d'imprimeur
01/10/1812 : Brevet accordé à Charles Bachelier	01/04/1811 : Brevet accordé à Louis Courcier
	30/07/1811 : Décès de Louis Courcier
	12/08/1811 : Succession accordée à la Veuve Courcier (née Lemaire Victoire Félicité)
	15/10/1816 : Brevet rénové
	14/03/1820 : Brevet à Démophile Huzard (gendre)
	29/10/1830 : Huzard démissionne ; son beau-frère Alfred Courcier lui succède
	30/05/1832 : Charles Bachelier succède à son beau-frère Alfred Courcier
14 mai 1853 : Brevets accordés à Louis-Alexandre-Joseph Mallet (son gendre) suite au décès de Charles Bachelier	

Illustration 5 : La maison Courcier-Huzard-Mallet-Bachelier.

Bachelier exerce une vingtaine d'années avant de décéder en 1853. Terquem lui rend hommage en 1854 dans ses *Nouvelles annales de mathématiques* [Terquem 1854]. Il souligne que jusqu'au début des années vingt, Bachelier est un « libraire ordinaire » diffusant les textes de Lagrange, Laplace, Monge, Lacroix, Delambre, Poisson et d'autres. En 1832, Bachelier, désormais imprimeur, s'investit alors massivement dans la mise en place de la presse scientifique et technique : outre l'ensemble de la presse mathématique (dont les *Nouvelles annales* à partir de 1848) [Verdier 2009b], il édite également les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, les *Annales de chimie et de physique* et le *Journal de l'École polytechnique*. Terquem résume ainsi sa carrière : « [Bachelier] trouva le repos et sans doute la palme du juste, vers la fin de 1852, léguant à ses enfants un nom respecté, une maison de haute réputation et un digne successeur » [Terquem 1854, p. 226] en la personne de son gendre Louis-Alexandre-Joseph Mallet.

Au milieu du *xix^e* siècle, Bachelier est à la fois reconnu par ses pairs (lors des différentes expositions universelles ou nationales) et par les savants comme l'« imprimeur-libraire pour les mathématiques », tel qu'il se définit lui-même depuis ses débuts. Cette reconnaissance dépasse d'ailleurs le cadre étroit des spécialistes pour s'élargir auprès d'un public plus

large. Le journal *La Presse*, lancé en 1836 et considéré comme le point d'entrée de la presse dans « l'ère médiatique » [Thérenty & Vaillant 2001], publie en 1849 un article laudatif sur Bachelier. Les deux auteurs, Marcellin Jobard (1792-1861) et l'abbé François Moigno (1804-1884), encensent les travaux de Bachelier, avis de géomètres (Catalan, Arago, Le Verrier, Serret) à l'appui. Catalan conclut ainsi son intervention : « À l'aspect de ces pages, remplies de formules si élégantes, malgré leur complication, et qui doivent apparaître aux typographes comme des prodiges, les géomètres disent : c'est seulement chez M. Bachelier que l'on sait imprimer les ouvrages mathématiques. » [Jobard & Moigno 1849]

Dans deux études récentes [Verdier 2013a,b], nous avons déjà eu l'occasion de souligner les efforts techniques de Bachelier pour améliorer la représentation matérielle des mathématiques (la typographie). Nous y mettions en évidence le rôle de l'ancien prote de Crapelet, Théodore Bailleur – devenu, après avoir gravi tous les échelons hiérarchiques de l'entreprise, directeur de l'imprimerie mathématique –, ainsi que la mise en place par Bachelier d'un réseau de librairies lui permettant non seulement de diffuser en France mais aussi sur le marché européen au sens large. Comme Panckoucke à partir des années 1760, Bachelier noue également des relations privilégiées avec l'Académie des sciences en se faisant appuyer par une politique de souscription publique.

L'activité de l'imprimeur-libraire Bachelier est également intéressante au regard de la question des rapports entre Paris et la province. De nombreux exemples montrent en effet qu'il existe des imbrications plus complexes qu'une première analyse pourrait le laisser penser. Citons l'exemple de l'*Essai sur la philosophie des sciences* d'André-Marie Ampère, certes édité à Paris chez Bachelier en 1834, mais imprimé chez François Thibaud-Landriot (1777-1843) à Clermont-Ferrand [Ampère 1834]. Le cas est particulièrement documenté dans la mesure où nous possédons une correspondance entre Ampère, son fils Jean-Jacques Ampère (1800-1864), l'imprimeur clermontois Thibaud-Landriot et le professeur, bibliothécaire et archiviste de la bibliothèque de Clermont Benoît Gonod (1792-1849)¹³ [AMPERE]. Les lettres montrent les liens tissés entre ces partenaires à des degrés divers. En l'état, le rôle de Bachelier semble s'être restreint à la diffusion de l'ouvrage. Sans que nous soyons toujours en mesure de préciser la nature des imbrications du travail des uns et des autres, des dizaines de livres – produits chez Bachelier mais pas exclusivement – sont le fruit de processus complexes de ce type.

13. Nous remercions Audrey Antonio, responsable aux Archives municipales de la ville de Clermont-Ferrand, pour ses recherches et la mise à disposition de documents concernant les activités clermontoises de ce bibliothécaire.

Premières conclusions et perspectives

Entre 1750 et 1850, nous avons pu repérer, en recoupant diverses sources, un peu plus de 180 maisons publiant des ouvrages de mathématiques. Il s'agit de structures d'édition très différentes les unes des autres : certaines sont des imprimeries, d'autres des librairies, de nombreuses associent les deux activités. Elles peuvent publier des auteurs d'envergures très diverses, allant du savant ayant toutes les reconnaissances académiques de son temps au modeste professeur dont la réputation ne dépasse pas l'échelle de sa ville voire de son établissement. Beaucoup, nous l'avons vu, ne font paraître que quelques titres, et peuvent être implantées dans de petites villes ou, au contraire, dans de très grosses localités comme Paris. Quelques librairies, exclusivement parisiennes quant à elles, dominent cependant nettement l'ensemble de la production : Jombert, Panckoucke, Didot, Duprat, Courcier, Hachette et Bachelier, pour ne citer que les plus renommées.

Si nous notons donc une forte hétérogénéité du paysage éditorial sur toute la période avec un centre à Paris et de multiples librairies périphériques en province, nous assistons néanmoins à une évolution sensible de la production d'un point de vue quantitatif entre les deux bornes 1750 et 1850. Dans son étude bibliométrique, Robert Estivals [1969] souligne un tournant vers 1770 où la production passe de 500 à 600 livres annuels à plus de 14 000. En mathématiques, il nous semble que la production prend plutôt son envol dans la dernière décennie du XVIII^e siècle. Le processus reste cependant à affiner, à la fois d'un point de vue quantitatif, et d'un point de vue qualitatif, en approfondissant les questions de la corrélation entre l'augmentation de la production et des facteurs tels que la mise en place d'une formation initiale à grande échelle (développement des écoles d'ingénieurs civils ou militaires) et l'émergence d'une presse spécialisée au cours de la période.

Plusieurs des grandes librairies repérées dans cette étude semblent par ailleurs s'inscrire dans des traditions familiale ou éditoriale anciennes : tel est le cas de la maison Jombert, qui deviendra la maison Didot en 1789, de la maison Duprat devenue Courcier avant de tomber entre les mains de Bachelier, qui rachète en outre d'autres maisons comme celle d'Henri Agasse, gendre et successeur de Panckoucke. Certaines peuvent néanmoins être le produit « d'hommes neufs », comme Crapelet, ou Louis Hachette, venu en librairie afin de profiter des opportunités commerciales offertes par le développement de l'Instruction nationale. Bachelier s'inscrit en quelque sorte dans ces deux dynamiques : « héritier » de plusieurs maisons d'édition, dont celles de Jombert et de Panckoucke, il est aussi un « nouvel » homme dans la mesure où il met en place des innovations techniques pour conquérir le marché de l'édition mathématique. À une échelle de granularité plus fine, nous percevons de nombreux mouvements de reconfiguration (rachats d'entités éditoriales) et d'imbrications de nature

familiale¹⁴ ou commerciale. Au milieu du XIX^e siècle, à côté de la librairie Bachelier dominant le marché des mathématiques avec la maison Didot, plusieurs maisons d'édition sont ainsi lancées en province. Des universités s'y ouvrent, avec de nouveaux lecteurs potentiels.

Concernant le phénomène de spécialisation de certains maisons d'édition dans le domaine des mathématiques, nous constatons que l'appellation « libraire pour les mathématiques » n'apparaît guère avant la dernière décennie du XVIII^e siècle. Le terme de mathématiques figure certes déjà fréquemment, à partir des années 1770, dans les appellations de plusieurs libraires parisiens, mais il est alors systématiquement associé à d'autres domaines (telles que les sciences de manière générale, mais aussi l'art militaire, ou l'architecture). Ce problème de spécialisation de l'édition renvoie à la question du passage, souvent associé au tournant XVIII^e-XIX^e, entre l'encyclopédisme du siècle des Lumières et les débuts de la spécialisation en mathématiques. Cette rupture à la charnière des deux siècles entre encyclopédisme et spécialisation paraît cependant devoir être nuancée. Cela a été fait pour la presse scientifique [Bret & Chappey 2012]. Pour l'édition des mathématiques, la nuance paraît tout aussi nécessaire. Des mouvements de spécialisation (Bachelier pour les mathématiques, Hachette pour le champ scolaire) en côtoient d'autres marquant clairement une volonté de rester généraliste (Didot), sans oublier les tentatives et tergiversations éditoriales des années 1790-1810 au cours desquelles plusieurs librairies s'essayaient aux mathématiques avant d'être rachetées ou d'infléchir leur politique pour diverses raisons (Gœury puis Carillan-Gœury, Duprat, Klostermann). Tous cherchent à des degrés divers à innover dans leur secteur d'activité.

Le monde éditorial s'est sans cesse adapté à l'arrivée sur le marché de nouvelles générations de lecteurs à même de lire des livres de mathématiques. Si nous disposons désormais d'éléments d'études sur des libraires dominants (Bachelier et Hachette) de la première moitié du XIX^e siècle, de nombreuses enquêtes restent cependant à conduire sur les autres grandes maisons d'édition de la seconde moitié du XVIII^e siècle (telle que la maison Jombert), et plus particulièrement, de la période charnière entre les deux siècles (Didot, Duprat, etc.). Comme le relève Jean-Yves Mollier [2006] dans son analyse bibliographique de l'histoire de l'édition, du livre et de la lecture, les apports des grandes maisons sont dans l'ensemble connues mais les recherches à propos de l'édition scientifique et, a fortiori, des mathématiques, n'en sont qu'à leurs « balbutiements » [*Ibid.*]

14. Dans son étude sur la papeterie auvergnate (la plus importante de France au temps des Lumières), Pierre-Claude Reynard a établi que près de 60 % des fabricants de papier épousèrent une fille de maître-papetier du Livradois [Reynard 2001, p. 238-240 et 340-343]. Une étude généalogique des familles de libraires serait nécessaire pour mieux comprendre ces enchaînements familiaux et éditoriaux.

D'autres pistes sont à approfondir pour éclairer les relations liant les acteurs agissant autour du monde des livres. Sur un plan technique, il serait intéressant d'étendre l'étude de la typographie au XVIII^e siècle afin d'y appréhender les évolutions de cet art si central en mathématiques. L'étude de la diffusion des ouvrages mathématiques à l'échelle des localités de province doit aussi être étendue à d'autres villes seulement croisées ici au détour d'une publication (Avignon, Clermont-Ferrand, Metz et Saint-Malo). Cette mise en valeur de l'édition en province pourrait également être développée en étudiant précisément les destins éditoriaux de grands cours comme ceux de Bézout mais aussi de Bourdon, Francoeur ou Lacroix. Ont-ils été adaptés à une échelle locale pour d'autres publics que ceux qu'ils visaient initialement ? Quelques ouvrages dérivés du cours de Bézout laissent à penser, nous l'avons vu, que ces célèbres cours ont pu générer des dynamiques éditoriales plus complexes, relayées par des enseignants et des libraires. L'étude des circulations des textes ne doit pas s'arrêter au seuil des maisons d'édition mais prendre en compte l'ensemble des acteurs impliqués. À l'image du clermontois Gonod, les bibliothécaires (dans une proportion encore largement ignorée) ont contribué à mettre à disposition et en relations ouvrages, auteurs et lecteurs.

BIBLIOGRAPHIE

Sources sitographiques

[AMPERE] : « Ampère et l'histoire de l'électricité » :

<http://www.ampere.cnrs.fr/correspondance/>

[BNF] Bibliothèque nationale de France : <http://catalogue.bnf.fr/jsp/>

[IDREF] Identifiants et référentiels : <http://www.idref.fr/>

[IHMC] Institut d'histoire moderne et contemporaine :

<http://www.ihmc.ens.fr/Imprimeurs-et-libraires-parisiens.html>

[SUDOC] Système universitaire de documentation : <http://www.sudoc.abes.fr/>

Sources primaires

[Amondieu 1835] Joseph-Louis-Adrien Amondieu, *Cours de mathématiques. Arithmétique*, Nantes : Forest, 1835.

[Ampère 1834] André-Marie Ampère, *Essai sur la philosophie des sciences ou Exposition analytique d'une classification naturelle de toutes les connaissances humaines*, Paris : Bachelier, 1834.

[Crapelet 1840] Charles Crapelet, *De la profession d'imprimeur, des maîtres imprimeurs, et de la nécessité actuelle de donner à l'imprimerie les réglemens promis par les lois*, Paris : Crapelet, 1840.

[Dupin 1836] Charles Dupin, *Rapport du jury central sur les produits de l'industrie française exposés en 1834*, tome troisième, deuxième partie du rapport, Paris : Imprimerie royale, 1836, p. 421-422.

- [Forest 1836]¹⁵ *Tables des quatre règles de l'arithmétique*, Nantes : Forest, 1836.
- [Fournier 1826] Charles-Marie-Félix Fournier, *Traité de navigation*, St-Malo : Hovius, 1826.
- [Jobard & Moigno 1849] Ambroise-Marcellin Jobard et François-Napoléon-Marie Moigno, « M. Bachelier », *La Presse*, 4879 (Dix novembre 1849).
- [Lalande 1802] Jérôme de Lalande, *Tables de logarithmes pour les nombres et les sinus, avec les explications et les usages principaux pour l'astronomie, la gnomonique, la géométrie, la navigation, la géographie, la physique, l'art mineur, l'architecture, l'arpentage, la statistique et les rentes*, Paris : Didot, 1802.
- [Lottin 1789] Auguste-Martin Lottin, *Catalogue chronologique des libraires et des libraires-imprimeurs de Paris, depuis 1470 [...] jusqu'à présent*, Paris : Jean-Roch Lottin, 1789.
- [Midy 1835] Étienne Midy, *De quelques propriétés des nombres et des fractions décimales périodiques*, Nantes : Forest et chez l'auteur, 1835.
- [Midy 1836] É. Midy, *Du théorème de M. Sturm et de ses applications numériques*, Nantes : Forest et chez l'auteur, 1836.
- [Querret 1823] Jean-Joseph Querret, *Traité d'arithmétique, suivi d'une exposition des principes fondamentaux de l'algèbre, avec leur application à l'arithmétique et au commerce*, St-Malo : Hovius, 1823.
- [Terquem 1854] Orly Terquem, « Bachelier (Charles-Louis-Étienne) », *Nouvelles annales de mathématiques*, I/13 (1854), p. 223-227.
- [Vernon 1801] Vernon, *Stéréométrie, ou nouvelle réduction des bois carrés, adaptée par la République française. Ouvrage très utile aux marchands de bois, charpentier, etc. dans lequel on a joint un traité sur le nouveau système métrique, et un autre sur le calcul décimal*, Paris : Gœury, 1801.

Sources secondaires

- [Alfonsi 2011] Liliane Alfonsi, *Étienne Bézout (1730-1783), mathématicien des Lumières*, Paris : L'Harmattan, 2011.
- [Arbour 2003] Roméo Arbour, *Dictionnaire des femmes libraires en France (1470-1870)*, Paris : École pratique des hautes études, 2003.
- [Belhoste 2011] Bruno Belhoste, *Paris savant. Parcours et rencontres au temps des Lumières*, Paris : Armand Colin, 2011.
- [Birn 2007] Raymond Birn, *La Censure royale des livres dans la France des Lumières*, Paris : Odile Jacob, 2007.
- [Blanckaert & Porret 2006] Claude Blanckaert et Michel Porret (dir.), *L'Encyclopédie méthodique (1782-1832). Des Lumières au positivisme*, Genève : Droz, 2006.
- [Bousquet-Bressolier 1997] Catherine Bousquet-Bressolier, « Charles-Antoine Jombert (1712-1784), un libraire entre sciences et arts », *Bulletin du Bibliophile*, 2 (1997), p. 299-332.
- [Bret & Chappey 2012] Patrice Bret et Jean-Luc Chappey, « Spécialisation vs encyclopédisme ? », *La Révolution française*, 2 (2012). Voir : <http://lrf.revues.org/515>.
- [Cerf 1967] Madeleine Cerf, « La Censure royale à la fin du XVIII^e siècle », *Communications*, 9 (1967), p. 2-27.

15. Pour ces tables, aucun nom d'auteur n'est attribué ; aussi, comme nom d'auteur, avons-nous porté le nom de l'imprimeur.

- [Cournot 2010] Antoine-Augustin Cournot, *Œuvres complètes*, t. XI, *Écrits de jeunesse et pièces diverses*, B. Bru et T. Martin (éd.), Paris : Vrin & Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté, 2010.
- [Crépel & Ehrard 2014] Pierre Crépel et Jean Ehrard (dir.), *Étienne-François Dutour de Salvert (1711-1789). Un physicien auvergnat du XVIII^e siècle*, Paris : L'Harmattan, 2014.
- [Darnton 1979] Robert Darnton, *The Business of Enlightenment. A Publishing History of the Encyclopédie 1775-1800*, Cambridge : Harvard University Press, 1979. Trad. fr., *L'Aventure de l'Encyclopédie : 1775-1800, un best-seller au siècle des Lumières*, Paris : Seuil, 1992.
- [Dhombres 1985] Jean Dhombres, « French Mathematical Textbooks from Bézout to Cauchy », *Historia Scientiarum*, 28 (1985), p. 91-137.
- [Dhombres 1989] J. Dhombres, « Books : Reshaping Sciences » dans R. Darnton et D. Roche (éd.), *The French Revolution in Print. The Press in France, 1775-1800*, Berkeley : University of California Press, 1989, p. 177-202.
- [Duvigneau 1991] Marion Duvigneau, *Les journaux d'agriculture pratique et d'économie rurale entre 1828 et 1848 : propagation des progrès agricoles dans la France des notables*, thèse pour l'obtention du diplôme d'archiviste-paléographe, 1991.
- [Estivals 1969] Robert Estivals, « La statistique bibliographique », *Bulletin des bibliothèques de France*, 12 (décembre 1969), p. 481-502.
- [Fontius et al, 1996] Martin Fontius, Rolf Geissler et Jens Hässler, *Correspondance passive de Formey. 1, Lettres adressées à Jean-Henri-Samuel Formey : 1739-1770, par Antoine-Claude Briasson et Nicolas-Charles-Joseph Trublet*, Paris : Champion & Genève : Slatkine, 1996.
- [Hahn 1993] Roger Hahn, *L'Anatomie d'une institution scientifique. L'Académie des sciences de Paris, 1666-1803*, Paris : Éditions des archives contemporaines, 1993. Éd. originale anglaise 1971.
- [Hanley 2005] William Hanley, *A biographical dictionary of French Censors 1742-1789*, Ferney-Voltaire : CIEDS, 2005.
- [Juratic 1997] Sabine Juratic, « Le commerce du livre à Paris à la veille de la Révolution », dans [Mollier 1997, p. 19-26].
- [Juratic 2008] S. Juratic, « Publier les sciences au 18^e siècle : la librairie parisienne et la diffusion des savoirs scientifiques », *Dix-huitième siècle*, 40 (2008), p. 301-313.
- [Laharie 2003] Patrick Laharie, *Liste générale des brevetés de l'Imprimerie de la Librairie. 1^{er} Empire et Restauration*, Paris : CHAN, 2003.
- [Lamandé 1987] Pierre Lamandé, « Les manuels de Bézout », *Rivista di storia della scienza*, 4 (1987), p. 339-375.
- [Lamandé 1993] P. Lamandé, « Trois traités français de géométrie à l'orée du XIX^e siècle : Legendre, Peyrard et Lacroix », *Physis*, 30 (1993), p. 243-302.
- [Leblanc 1997] Frédérique Leblanc, « 1791-1914, la métamorphose de la librairie », dans [Mollier 1997, p. 217-224].
- [Mollier 1997] Jean-Yves Mollier (dir.), *Le Commerce de la librairie en France au XIX^e siècle, 1789-1914*, IMEC Éditions & Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1997.
- [Mollier 1999] J.-Y. Mollier, *Louis Hachette*, Paris : Fayard, 1999.
- [Mollier 2006] J.-Y. Mollier, « L'histoire de l'édition, du livre et de la lecture en France de la fin du XVIII^e siècle au début du XIX^e siècle : approche bibliographique » [<http://www.chcsc.uvsq.fr/semin/BIBLIOGRAPHIEHis>].

- [Montel 2008] Nathalie Montel, *Une revue des savoirs d'État. De la genèse à la fabrique des Annales des ponts et chaussées au XIX^e siècle*, mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 2008.
- [Parent-Charon 2005] Annie Parent-Charon, « Quel public pour le livre maritime dans le Paris du XVIII^e siècle ? Le livre maritime chez Claude-Antoine Jombert », dans A. Charon, T. Claerr et F. Moureau (dir.), *Le Livre maritime au siècle des Lumières. Édition et diffusion des connaissances maritimes (1750-1850)*, Paris : Presses de l'Université Paris-Sorbonne, 2005, p. 85-98.
- [Préveraud 2014] Thomas Préveraud, *Circulations mathématiques franco-américaines : transferts, réceptions, incorporations et sédimentations (1815-1876)*, thèse de doctorat, Université de Nantes, 2014.
- [Reynard 2001] Pierre-Claude Reynard, *Histoires de papier. La papeterie auvergnate et ses historiens*, Clermont-Ferrand : Presses universitaires Blaise Pascal, 2001.
- [Schubring 2005] Gert Schubring, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*, Springer, 2005.
- [Thérenty & Vaillant 2001] Marie-Ève Thérenty et Alain Vaillant (dir.), *1836. L'an I de l'ère médiatique. Analyse littéraire et historique de La Presse de Girardin*, Paris : Nouveau monde éditions, 2001.
- [Tucoc-Chala 1977] Suzanne Tucoc-Chala, *Charles-Joseph Panckoucke et la librairie française de 1736 à 1798*, Pau : Marrimpouey Jeune & Paris : Touzot, 1977.
- [Verdier 2009a] Norbert Verdier, *Le Journal de Liouville et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIX^e siècle (1824-1885)*, thèse de doctorat, Université Paris-Sud 11, 2009.
- [Verdier 2009b] N. Verdier, « Les journaux de mathématiques dans la première moitié du XIX^e siècle en Europe », *Philosophia scientiae*, 13/2 (2009), p. 97-126.
- [Verdier 2013a] N. Verdier, « Théodore Bailleul (1797-1875) ou le prote devenu directeur de l'Imprimerie mathématique de (Mallet)-Bachelier (1812-1864) », *Histoire et civilisation du livre*, IX (2013), p. 251-269.
- [Verdier 2013b] N. Verdier, « Vendre et éditer des mathématiques avec la maison Bachelier (1812-1864) », *Revue d'histoire des mathématiques*, 19 (2013), p. 41-107.

CHAPITRE 2

Mathématiques, applications, interactions

Les sciences de l'observatoire : un tournant 1800 ?

David AUBIN

« Le premier jour du dix-neuvième siècle fut marqué par la découverte d'une neuvième planète. C'est un événement assez remarquable en astronomie pour que l'Institut en entretienne le public » [Lalande an X, p. 469].

Si l'on cherchait un moment de rupture dans l'histoire de l'astronomie, comment faire mieux que la découverte d'une nouvelle planète du système solaire ? Dans le rapport sur les progrès des sciences mathématiques qu'il adresse à l'empereur Napoléon en 1810, l'astronome Jean-Baptiste Delambre raconte :

« Un hasard extrêmement heureux, mais préparé par un travail immense, fit apercevoir à M. Piazzi, le 1^{er} janvier 1801, une étoile inconnue, que, d'après son habitude constante, il voulut observer plusieurs jours de suite pour en mieux constater la position. Il en fit deux autres observations ; mais la troisième étoit incomplète. Il reconnut un mouvement, et soupçonna une planète nouvelle. » [Delambre 1810, p. 191-192]

Il est d'autant plus facile d'y insister que cette découverte n'est en aucun cas le fruit du hasard, mais le produit d'un important investissement matériel et humain¹. Cette première observation de Cérès par l'astronome palermitain s'inscrit en effet dans l'investigation systématique de la région entre Mars et Jupiter entreprise par les savants allemands où, conformément à la loi de Titius-Bode², une planète aurait dû se trouver. Afin de pouvoir détecter des planètes de faible intensité lumineuse, des cartes de la bande du zodiaque sont établies avec plus de soin que jamais. En prenant part à ce projet, Giuseppe Piazzi lui-même témoigne de l'évolution des pratiques en astronomie et l'attention qu'il porte à ses instruments de travail – observatoire et lunettes, qu'il fait financer par son souverain [Chinnici *et al.* 2001] – illustre l'importance croissante accordée par les États modernes à ces infrastructures.

D'un point de vue mathématique, les circonstances de la découverte de Cérès renforcent l'impression de rupture. Malade, Piazzi ne peut suivre assez longtemps sa découverte qui se perd dans l'éclat du Soleil. Les

1. Voir [Foderà Serio *et al.* 2002 ; Kovács 2004 ; Zach 2004-2009].

2. Voir [Hoskin 1993].

éléments qu'il communique aux astronomes sont insuffisants et font craindre que sa découverte ne soit perdue à jamais. Mais Cérès est retrouvée par Franz Xaver von Zach le 31 décembre 1801, et trois autres planètes sont bientôt observées : Pallas par Heinrich Wilhelm Matthias Olbers le 28 mars 1802, Junon par Karl Ludwig Harding le 1^{er} septembre 1804 et Vesta, par le même Olbers, le 29 mars 1807. Surtout, par leurs calculs, Carl Friedrich Gauss et Jean-Charles Burckhardt « assurèrent la possession de la nouvelle conquête, qui ne pourra plus se perdre » [Delambre 1810, p. 192]. La méthode des moindres carrés, qui modifie la manière dont la mécanique céleste peut suivre le mouvement des astres, naît en partie de là [Forbes 1971; Sheynin 1973].

Mais la découverte de Cérès constitue-t-elle pour autant une rupture dans l'histoire de l'astronomie ? On serait fondé d'en douter. Le seul historien qui, à ma connaissance, fait de la découverte de ces petites planètes un moment charnière est l'astronome allemand Gustav Adolph Jahn [1844]. Et encore, ce choix lui est en partie dicté par les limites chronologiques qu'il se fixe. Au contraire, nombre d'historiens insistent plutôt sur la continuité entre les XVIII^e et XIX^e siècles. Ces deux siècles, écrit l'un d'eux, « furent témoins du développement et du triomphe de la nouvelle discipline amorcée par Newton, la *mécanique céleste* » [Roy 1982, p. 149]³. Un autre clôt la longue première partie de son *Histoire de l'astronomie* – intitulée « De l'aube de l'astronomie à l'aurore de l'astrophysique » – avec les travaux de mécanique céleste d'Urbain Le Verrier qui s'étalent jusqu'en 1877, année de sa mort [Verdet 1990].

Il n'en reste pas moins que le moment 1800 fixe l'attention des historiens de l'astronomie. Le changement de siècle offre bien sûr une division comode, parfois au prix de quelques contorsions. Pendant la première moitié du XIX^e siècle, écrit ainsi un historien, « observational Astronomy and theoretical Gravitational Astronomy made considerable progress, but there were few important or revolutionary discoveries » [Doig 1950, p. 130]. Mais, même les auteurs qui penchent pour la continuité soulignent l'importance de ce moment. Ainsi, Verdet [1990] insiste sur les deux « monstres sacrés » : Pierre-Simon Laplace et William Herschel. Actifs au tournant du siècle, ces deux astronomes laissent une marque profonde sur le siècle suivant. En s'appuyant sur leurs travaux, d'autres historiens situent donc vers 1800 l'une des discontinuités majeures dans l'histoire de l'astronomie. Dans un ouvrage influent, Anton Pannekoek [1961] divise par exemple son histoire en trois grandes périodes – (1) « Astronomy in the ancient world » ; (2) « Astronomy in revolution » ; (3) « Astronomy surveying the universe » – et fixe le dernier point de basculement au tournant des XVIII^e et XIX^e siècles :

3. Sauf mention contraire, la restitution des italiques est conforme à l'original.

« at the close of the eighteenth century astronomy could look back with pride on its achievements. With accuracy formerly unknown, it could observe the motion of the celestial bodies, and through the fundamental law of the universe which had now been discovered it could compute and predict them. It is true that this universe was the solar system only. But its limits began to be overstepped » [Pannekoek 1961, p. 307].

Très classique, la division de l'histoire de l'astronomie en trois périodes s'appuie sur une tradition mettant l'accent sur des continuités, mais surtout sur des moments de rupture. Cette structure narrative est, du point de vue que je défends ici, le fruit de la confrontation historiographique entre ce qui apparaît, pour la grande majorité des auteurs, comme deux grandes discontinuités dans l'histoire de l'astronomie.

La première de ces discontinuités est bien connue. Encadrée par la publication des œuvres majeures de Nicolas Copernic et d'Isaac Newton, entre 1543 et 1687, elle s'étire sur une période qui est présentée de manière consensuelle comme le moment clé qui détermine le caractère, les objets et les méthodes de l'astronomie moderne : c'est la « révolution astronomique », tout simplement⁴. À cette époque s'impose en Europe la nécessité de fonder de grands établissements permanents consacrés à l'étude du mouvement des astres : des observatoires nationaux sont établis à Greenwich et à Paris dès les années 1660. Ces institutions développent une grande expertise dans la confrontation numérique entre données tirées de l'observation et théories formulées à l'aide des mathématiques. Comme on le rappellera par la suite, l'astronomie newtonienne, basée sur des méthodes géométriques, est profondément transformée dans les années 1740 par l'introduction des méthodes de l'analyse mathématique dans les procédés de calcul des orbites planétaires. Dans les vingt dernières années du XVIII^e siècle, les travaux de Joseph-Louis Lagrange et ceux de Laplace fixent le cadre des études en mécanique céleste pour plusieurs décennies. À Paris ou à Greenwich, les astronomes influents au XIX^e siècle, comme Le Verrier et George Biddell Airy, poursuivent des travaux qui restent profondément ancrés dans cette tradition de la mécanique céleste au moins jusqu'au tournant du XX^e siècle, marqué par l'émergence de la dynamique qualitative d'Henri Poincaré, puis de la relativité générale d'Albert Einstein⁵.

Parallèlement à ce récit qui fait apparaître une grande continuité depuis Newton, les historiens de l'astronomie sont cependant contraints de faire place à des développements conduisant à un changement radical dans les principaux objets d'études et méthodes d'investigation des astronomes.

4. Voir la recension de *La Révolution astronomique* d'A. Koyré [1960] par P. Costabel [1962], qui discute le choix de cette expression comme titre de l'ouvrage.

5. Pour une histoire de l'astronomie mathématique sur la longue durée, voir [Linton 2004].

Graduel et multiforme, ce changement ne devient absolument évident qu'au cours du dernier tiers du XIX^e siècle. À ce moment, l'astronomie de position, qui s'occupait principalement de suivre le mouvement des astres du système solaire, fait place à ce qu'on appellera l'astrophysique qui s'intéresse à la constitution physique des planètes, du Soleil, mais aussi d'objets plus lointains. Très souvent, on prend les travaux d'analyse spectrale publiés par Robert Bunsen et Gustav Kirchhoff en 1859 comme marqueurs de l'entrée dans une nouvelle époque⁶. Mais, comme l'exemplifie Pannekoek, il y a des raisons valables de faire remonter cette seconde discontinuité au début du XIX^e siècle, voire avant.

En d'autres termes, l'évolution des champs d'étude et des méthodes dans les sciences de l'observatoire au cours du XIX^e siècle conduit à un réagencement profond du récit historique qu'on en fait. *L'Histoire de l'astronomie* de Ferdinand Hofer [1873] est symbolique des difficultés inhérentes à cette restructuration. À la narration centrée sur les acteurs de la révolution astronomique, succèdera typiquement un chapitre dédié aux méthodes d'observation avant 1800 environ, puis le récit devient plus « éclaté », organisé selon les grands objets d'études astronomiques : la Terre, la Lune, le Soleil, les planètes, les comètes, les étoiles, les nébuleuses, l'origine du système solaire, etc.⁷ Deux, voire trois chronologies s'y entrecroisent d'une manière tendue : les progrès de la mécanique céleste, d'une part, et le développement de nouvelles méthodes d'observation et l'élargissement des objets d'études (évidemment lié au moyens d'observations), d'autre part. D'autres chronologies plus ou moins compatibles s'y ajoutent lorsqu'on prête attention aux conditions sociales d'exercice des sciences de l'observatoire et aux multiples autres questions scientifiques, non strictement astronomiques, qui y sont étudiées⁸.

Dans ce qui suit, mon intention n'est donc pas tant d'établir les ruptures et continuités entre l'astronomie du XVIII^e et celle du XIX^e siècle – tâche immense – que de chercher à mieux comprendre ce que signifie d'un point de vue historiographique le fait d'insister sur les unes ou les autres. Tout l'intérêt de la question des ruptures et continuités vers 1800 réside préci-

6. Ceux-ci sont d'ailleurs presque immédiatement discutés dans des publications non spécialisées en soulignant qu'il s'agit d'une étape nouvelle dans l'histoire du décentrement de l'humain. Voir, par exemple, [Laugel 1862]. La question de l'émergence de l'astrophysique a donné lieu à une large littérature. Pour un bilan et de nouvelles perspectives à ce sujet, voir [Beaubois 2014].

7. Cette structure est très fréquente et se retrouve aussi, par exemple, dans les ouvrages de Bryant [1907], de Forbes [1909], de Pannekoek [1961], et, plus récemment, de Verdet [1990], qui décrit l'astronomie d'observation sur quatre siècles dans un chapitre intitulé « L'astronomie éclatée ».

8. Pour des études récentes sur les sciences de l'observatoire au XIX^e siècle, voir [Aubin *et al.* 2010].

sément dans un effet de loupe : à la même époque, les astronomes sont occupés à tirer les dernières conséquences des travaux de Newton, à commencer de défricher de nouvelles voies d'études du Cosmos et à repenser les sciences de l'observatoire en fonction de l'évolution de l'État moderne. Comme on le verra, l'intégration de ces dynamiques diverses en un récit unique pose problème, y compris aux astronomes qui en sont contemporains, et le réagencement de l'histoire de l'astronomie pendant cette période est encore en partie à compléter⁹. Par cette étude, je voudrais suggérer que si les fondements épistémologiques de l'astronomie au tournant des XVIII^e et XIX^e siècles évoluent peu, l'observatoire en tant qu'institution acquiert peu à peu un statut particulier et symbolique de la place croissante occupée par les sciences dans les domaines économique et politique.

I. « La révolution que nous demandons » : le paradigme newtonien et ses limites

Entre 1780 et 1810, on assiste à une recrudescence du nombre de titres consacrés à l'histoire de l'astronomie¹⁰. Quand ils s'occupent de l'histoire de leur discipline, les astronomes ont à leur disposition, tout comme nous, l'arsenal mental des ruptures et des continuités. Il est instructif de voir comment ils les mobilisent. C'est dans le troisième tome de son *Histoire de l'astronomie moderne*, paru en 1782, que Jean-Sylvain Bailly demande une « révolution » – mentionnée dans le titre ci-dessus – comme seul moyen selon lui de « rendre à l'Astronomie [s]es progrès rapides »¹¹. Mais qu'entend-il au juste par ce terme ?

Vingt ans avant la découverte de Cérès, c'est Herschel qui en avril 1781 décèle une nouvelle planète, Uranus. C'est une première depuis l'Antiquité. Les réactions face à cette découverte vont de la surprise à l'enthousiasme, mais nul n'identifie ici de rupture tranchée. En rendant compte de la

9. Les actuels projets britanniques et français respectivement consacrés à l'étude du Board of Longitude et du Bureau des longitudes revisitent de manière extrêmement intéressante l'histoire des sciences de l'observatoire des XVIII^e et XIX^e siècles en insistant justement sur les liens entre les aspects théoriques, instrumentaux et sociaux de l'histoire des sciences de l'observatoire. Au sujet du premier projet, plus avancé, voir les publications récentes [Higgitt 2014; Dunn & Higgitt 2014].

10. Outre la contribution de Bailly, on peut citer celles, en France, de Lalande (dans Montucla ou seul), Delambre, Laplace et Voiron, celles de Kästner, Fix et Schubert en Allemagne, etc., citées dans la bibliographie et brièvement discutées plus bas.

11. [Bailly 1779-1782, t. 3, p. 340]. La première édition de cet ouvrage, parue en deux tomes en 1779, ne couvre que la période qui s'arrête en 1730. Un troisième tome portant sur les progrès les plus récents est publié en 1782. La nouvelle édition de 1785 ne diffère pas, pour l'essentiel, de l'édition originale.

première observation d'Uranus, l'astronome Jérôme Lalande écrit que c'est « une des choses les plus singulières qu'on ait découvertes dans le Ciel, & l'on étoit bien loin de l'espérer » [1782, p. 526]. Pour les contemporains, cette découverte justifie d'abord l'utilité des catalogues d'étoiles qui absorbent alors l'énergie d'un grand nombre d'observateurs : « La découverte de cette nouvelle Planète, une des plus extraordinaires que l'on ait faites en Astronomie, prouve l'utilité qu'il y a de s'appliquer à faire un Catalogue exact des plus petites Etoiles »¹².

Vers 1780, l'astronomie apparaît, dans les discours sinon dans la pratique, plus que jamais newtonienne. La continuité avec l'auteur des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* est une valeur largement revendiquée. Newton est identifié comme le fondateur de l'astronomie moderne, son œuvre comme la dernière d'une série de ruptures profondes. Cette conception continuiste de l'histoire récente de l'astronomie imprègne les écrits des savants, tant dans les décennies qui précèdent la Révolution française que dans celles qui la suivent. La continuité avec le passé nous renvoie bien sûr au concept de « paradigme » introduit par T. S. Kuhn. La vision kuhnienne est renforcée par l'impression qu'ont certains astronomes d'être héritiers d'une « révolution » newtonienne. « Science normale », l'astronomie ne semble pas devoir être modifiée de sitôt dans ses fondements. Ainsi Lagrange a-t-il ce commentaire, qui pourrait tout aussi bien s'appliquer à la mécanique céleste :

« La Mécanique devint une Science nouvelle entre les mains de Newton, & ses *Principes Mathématiques* qui parurent pour la première fois en 1687, furent l'époque de cette révolution. » [Lagrange 1788, p. 159]

Voici qu'on retrouve ce mot, « révolution », qui est d'origine astronomique, comme on le sait bien. Appliqué au domaine politique, il a d'abord signifié « retour aux sources » avant d'acquérir, dès la fin du xvii^e siècle, son sens moderne de changement brutal et en profondeur du régime politique. En 1694, le *Dictionnaire de l'Académie française* donne cette définition au sens figuré : « Vicissitude, grand changement dans la fortune, dans les choses du monde. » L'expression est appliquée à l'histoire des sciences par divers auteurs dont Jean-Étienne Montucla [1758, t. 2, p. 83] et Lalande lui-même :

« A la mort d'Hévélius [en 1687], l'Europe étoit remplie de Sçavans : toutes les nations se disputoient la gloire de découvrir & de perfectionner ; l'Académie des Sciences de Paris, la Société Royale de Londres, eurent sur-tout la plus grande part à cette *révolution*. » (nous soulignons) [Lalande 1764, t. 1, p. 131]

12. *Journal des Sçavans* (février 1782), p. 121. À propos de la découverte d'Uranus, voir [Schaffer 1981]. Sur Lalande, voir [Boistel et al. 2010].

Ce sens du mot « révolution » apparaît aussi dans l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert, en général associé aux travaux de Newton ou de Descartes. Immanuel Kant introduit l'expression « révolution copernicienne ». Antoine Lavoisier l'applique à ses propres travaux¹³...

Dans son histoire de l'astronomie, Bailly développe aussi, sans la systématiser, une intéressante interprétation du rôle des « révolutions scientifiques ». Sous sa plume, le travail d'un Kepler, par exemple, revêt un caractère révolutionnaire : « En découvrant la forme elliptique des orbites planétaires, il fit une véritable révolution dans l'Astronomie » [Bailly 1779-1782, t. 3, p. 323]. Plus haut, Bailly note la coïncidence entre le bouleversement produit par la Réforme protestante et l'apparition de l'héliocentrisme : « à cette époque il se fit une grande révolution qui changea tout. Le génie de l'Europe se fit connoître & s'annonça dans Copernic. [...] cette première révolution devoit précéder toutes les autres » [*Ibid.*, p. 320, 321].

De toutes les révolutions scientifiques qui se succèdent, c'est celle amenée par Newton qui semble la plus importante aux yeux de Bailly et de ses contemporains. « Une nouvelle astronomie va naître avec Newton, c'est l'*astronomie physique* » [Bailly 1779-1782, t. 2, p. 469]¹⁴. Puis, nulle rupture, dans l'esprit de l'auteur, entre la parution des *Principes mathématiques* en 1687 et le présent. Des progrès, bien sûr, des améliorations apportées à la théorie, des faits mieux observés, des applications mieux établies, mais rien de fondamentalement différent ne modifie la science astronomique établie par Newton, qui devient acte de foi :

« L'histoire des opinions des hommes n'est souvent qu'une longue suite d'erreurs. [...] Le génie de Newton a débrouillé ce chaos, il a séparé la lumière des ténèbres : les vraies connoissances de son tems sont concentrées, ce qu'on dût croire alors est contenu dans son ouvrage ; & ce livre immortel renferme presque tout ce qui constitue la foi astronomique. » [*Ibid.*, p. 471]

C'est faire bien peu de cas des nombreux débats qui ont suivi la parution de ses œuvres. Certes, sous la plume de Bailly, la révolution newtonienne a ceci de particulier qu'elle est à la fois rupture et continuité :

13. Pour une histoire du concept de « révolution scientifique », voir [Cohen 1985 ; Bensaude-Vincent 1999]. En dehors du domaine scientifique, voir [Goulemot 1975].

14. (Nous soulignons.) Souvent mal compris, le terme d'astronomie physique était employé dans la seconde moitié du XVIII^e siècle pour désigner l'étude des variations dans l'orbite des corps célestes « dues à l'action réciproque des corps qui composent notre système planétaire » [Cousin 1787, p. 10-11]. L'usage du terme d'« astronomie physique » varie grandement selon les époques. Notons qu'il existe un ouvrage qui prend ce titre pour montrer la supériorité des principes cartésiens sur ceux énoncés par Newton [Gamaches 1740]. Dans la seconde moitié du XIX^e siècle, le terme est plutôt synonyme d'astrophysique [Le Gars 2007].

« Le livre des Principes mathématiques de la philosophie naturelle étoit destiné à faire une révolution dans l'astronomie, mais *cette révolution ne se fit pas tout-à-coup*. La lumière céleste n'est pas instantanée, les lumières de l'esprit, qui se distribuent avec inégalité, qui trouvent des obstacles, ont besoin d'un tems pour les vaincre & pour se répandre ». (nous soulignons) [*Ibid.*, p. 579]

Ainsi, selon Bailly, la révolution newtonienne n'est pas admise instantanément par tous et partout. Elle déploie toutes ses conséquences sur un temps relativement long, au moins jusqu'à la coupure de 1730 qu'il introduit entre les tomes 2 et 3 de son ouvrage. On est même fondé à penser que Bailly sous-entend que, pour s'accomplir, la révolution newtonienne avait besoin du profond changement qu'a connu l'astronomie dans les années 1730 et 1740 avec les travaux d'Euler, Clairaut et d'Alembert :

« trois Géomètres [...] qui ont succédé à Newton, ont pu, en suivant son esprit, voir mieux & plus loin que lui. [...] Newton, semblable à un conquérant qui subjugué un vaste empire n'a pu à lui seul en soumettre toutes les parties ; il a imposé les loix, & il a laissé à ses successeurs le soin & le mérite de les faire partout reconnoître. » [*Ibid.*, t. 3, p. 328]

La révolution scientifique newtonienne, selon Bailly, c'est donc tout à la fois la Révolution et l'Empire ! En termes kuhniens, ce n'est pas uniquement la rupture, mais toute la période suivante qui permet l'émergence d'une « science normale », même si cette période est relativement longue. Historiquement considérés comme un tournant dans le processus de construction et de mathématisation des grandeurs et principes de la mécanique rationnelle, les travaux d'Euler, Clairaut et d'Alembert transforment par le biais de l'analyse (et notamment celui du calcul différentiel et intégral, généralisé aux fonctions de plusieurs variables) la manière dont les astronomes mobilisent alors les principes établis par Newton¹⁵. Comme beaucoup de vulgarisateurs, Bailly simplifie le travail de ces mathématiciens. Dans le dernier tome de son ouvrage, il discute des progrès des mathématiques (ou, comme il écrit, de la géométrie) et de leur influence sur l'astronomie [*Ibid.*, t. 3, p. 135-212] :

« Les difficultés sont devenues plus grandes, la route plus obscure, le succès moins sensible & moins éclatant. Les recherches actuelles sont environnées d'une espèce d'obscurité née de leur profondeur ; elles sont semblables à ces opérations exécutées dans le sein de la terre pour l'exploitation des mines. [...] Mais si le Géomètre, comme le mineur, descend par une route souterraine dans le sein de la nature, l'Historien est le voyageur curieux, qui, sorti de la mine, & rendu à la lumière du jour, raconte ce qu'il a vu. » [*Ibid.*, t. 3, p. 2]

15. Voir, notamment, [Passeron 1994 ; Greenberg 1995 ; Chapront-Touzé 2002 ; Chapront-Touzé & Souchay 2006].

Sous couvert de conférer de la clarté aux recherches contemporaines, Bailly néglige les aspects les plus techniques des développements récents. De ce fait, le changement des méthodes de l'astronomie physique survenu après Newton peut sembler moins évident. Il ne fait cependant guère de doute que, dans les années 1780, le triomphe des méthodes analytiques imprègne largement les discours sur l'astronomie. Dans le « Discours préliminaire, lu à la séance publique du Collège royal le 11 novembre 1782 » figurant dans son *Introduction à l'étude de l'astronomie physique* [1787], Jacques Cousin affirme :

« L'analyse nous apprend à combiner nos notions particulières pour en former des idées abstraites qui embrassent les propriétés générales des corps ; à nous élever, de l'inspection des phénomènes, jusqu'à ces lois immuables auxquelles tout changement est soumis. Elle est l'unique méthode qui puisse nous diriger d'une manière certaine et assurée dans nos calculs et nos raisonnements. Elle est la vraie métaphysique des sciences » [*Ibid.*, p. xiii].

Très enthousiaste, Cousin ajoute dans le court résumé général concluant le traité : « Toutes les questions qu'on proposera sur le système du monde pourront être mises en équations ; ces équations pourront toujours être résolues par approximation » [*Ibid.*, p. 310]. À l'Académie des sciences, le 28 mars 1787, Bossut et Legendre présentent un rapport reproduit à la fin de cet ouvrage de Cousin où ils soulignent le cheminement des idées à ce propos :

« Newton a joui pendant long-temps de la gloire d'avoir parcouru seul une carrière immense, et ce n'est qu'environ cinquante ans après la première édition de ses *Principes* que les géomètres ont pensé à ajouter quelques choses aux découvertes de ce grand homme. [...] Si la France n'a pas posé les premiers fondements du système du Monde, elle peut se flatter du moins d'avoir contribué, plus que toute autre nation, à développer ce système dans toutes ses parties, et à constater sa vérité d'une manière invincible. [...] [L]a géométrie, peu cultivée maintenant dans le reste de l'Europe, semble avoir choisi son principal asyle dans cette capitale [Paris] » [*Ibid.*, p. 319, 323].

Revenons maintenant, à la lumière de ce qui précède, à l'appel à la révolution lancé par Bailly : « On ne peut rendre à l'Astronomie des progrès rapides que par une révolution dans ses moyens & dans ses méthodes » [1779-1782, t. 3, p. 340]. La conception des révolutions scientifiques évoquée plus haut – ruptures et continuités sur un temps long qui peuvent cacher d'autres ruptures plus « souterraines » – éclaire ses remarques. Les changements que Bailly appelle de ses vœux ne doivent nullement être en rupture radicale avec le passé. Il doit s'agir d'une évolution majeure refermant la période révolutionnaire entamée par Newton (tout comme Newton a fermé la période de la « révolution astronomique ») pour en entamer une nouvelle. Cette « révolution » sera l'accomplissement de mutations déjà

amorcées ou la mise au jour d'évolutions non perceptibles du fait de leur grande profondeur.

Bailly est parfaitement explicite sur le fait que la révolution qu'il demande pourra se faire dans deux domaines : les méthodes mathématiques et les moyens d'observation. Concernant les premières, il écrit : « La méthode complete du calcul intégral seroit une révolution dans la géométrie, semblable à celle de l'application de l'algebre & à celle de l'invention du calcul différentiel » [*Ibid.*, p. 328]. Mais, au risque de se contredire, il accorde une plus grande foi aux progrès de l'instrumentation : « le télescope peut lui seul opérer une révolution & un grand progrès dans nos connoissances. [...] Il peut résulter de cette perfection du télescope, un aggrandissement du système solaire, une confirmation des loix connues, peut-être de nouvelles loix & de nouveaux phénomènes » [*Ibid.*, p. 342].

Dans les décennies qui suivent, le développement de l'astronomie donne plus ou moins raison à Bailly, dans le sens où la synthèse laplacienne des méthodes analytiques en mécanique céleste et le progrès dans les techniques d'observation peuvent sembler fournir des points de départ aux progrès futurs de l'astronomie. Mais comme on le verra, si les récits construits à leur propos vont souvent insister sur le caractère fondateur, voire révolutionnaire, de ces développements, on peut aussi souligner leur ancrage dans la période précédente.

II. Le « triomphe de l'analyse » : continuité et rupture dans la mécanique céleste laplacienne

Comme on sait, la révolution à laquelle Bailly prendra une part prépondérante, entre autres en tant que maire de Paris, sera d'abord sociale et politique. Dans les années qui suivront l'exécution de Bailly, en 1793, Laplace produira une œuvre magistrale qui fait la synthèse de ce qu'on appelle encore l'astronomie physique. Au début de sa carrière, Laplace, comme Lagrange, prend place dans cette tradition. Ces mathématiciens s'attaquent aux problèmes non résolus par leurs prédécesseurs – l'accélération séculaire de la Lune et les grandes inégalités de Jupiter et Saturne – et les résolvent [Linton 2004, p. 309-311, 317-323 et 327-335].

Lorsqu'il annonce son intention de rédiger un grand traité résumant ces principaux résultats, Laplace emploie encore le terme d'astronomie physique. Mais, quand le traité paraît enfin, après les tourmentes révolutionnaires¹⁶, il introduit une nouvelle expression : la mécanique céleste. Pourquoi ce changement de terminologie ? Une lettre du Genevois

16. Voir son opinion à propos de la « diversion » que les affaires publiques constituent pour la science [Hahn 2004, p. 106-107]. Sur Laplace, voir aussi [Gillispie 1997].

Georges-Louis Le Sage du 31 mars 1797 montre que l'innovation ne passe pas inaperçue¹⁷. Malheureusement, Laplace n'explicite pas les motivations de son choix, ni dans sa réponse à Le Sage, ni ailleurs, à ma connaissance. Dans la préface du *Traité de mécanique céleste*, il définit l'expression en ces termes :

« Je me propose de présenter sous un même point de vue, ces théories éparses dans un grand nombre d'ouvrages, et dont l'ensemble embrassant tous les résultats de la gravitation universelle, sur l'équilibre et sur les mouvements des corps solides et fluides qui composent le système solaire et les systèmes semblables répandus dans l'immensité des cieux, forme la *Mécanique céleste*. » [Laplace an VII, t. 1, p. 1]

Tributaire des mathématiques analytiques du XVIII^e siècle, la mécanique céleste de Laplace est une synthèse de plus de soixante ans de recherches profondes, mais avec son nouveau nom, elle peut néanmoins passer comme le geste fondateur d'une nouvelle époque. Si, comme le signale C. M. Linton [2004, p. 351], Laplace (qui n'est pas toujours consciencieux dans la manière dont il cite le travail de ses prédécesseurs) peut laisser croire qu'il s'attribue une plus grande part que ce dont il est véritablement l'auteur dans le traité, il faut aussi rappeler que l'astronome rend à plusieurs reprises hommage aux géomètres qui l'ont influencé. Bien sûr, le cinquième tome, qui comporte un grand nombre de notes historiques extrêmement détaillées, n'est rédigé qu'en 1823-1824, mais la préface du tome 3, paru dès 1802, donnait déjà quelques éléments de cette nature. Dans l'*Exposition du système du monde* de 1796, Laplace souligne aussi la continuité dans laquelle il s'inscrit :

« Environ cinquante ans s'écoulèrent depuis la découverte de la pesanteur, sans que l'on y ajoutât rien de remarquable [...]. Mais ensuite, leurs successeurs ayant eu l'heureuse idée d'appliquer l'analyse [infinitésimale] aux mouvements célestes [...] ils sont parvenus à expliquer par la loi de la pesanteur, tous les phénomènes connus du système du monde, et à donner ainsi, aux théories et aux tables astronomiques, une précision inespérée. » [Laplace an IV, t. 2, p. 291-292]¹⁸

17. Le Sage écrit à Laplace : « Monsieur Maurice a mandé à son père que les belles conséquences ultérieures de la gravitation, dont vous alliez publier les profonds calculs porteraient le nom de *Mécanique Céleste*. J'ose vous conseiller, Monsieur, d'y substituer celui de *Dynamique Céleste* parce que le mot "mécanique" [...] a été presque toujours employé pour désigner des impulsions sans distance (comme le seraient celles de mes corpuscules) ; au lieu que le mot "dynamique" [...], a été expressément destiné à désigner les "forces" dont on s'abstient (du moins pour le moment) d'examiner la cause. » [Laplace 2013, t. I, p. 496-497]

18. Voir le texte légèrement différent de la troisième édition [Laplace 1808, p. 384]. Dans une lettre à Le Sage du 17 germinal an V (6 avril 1797), Laplace écrit à ce propos : « L'ouvrage intitulé *Exposition du Système du Monde* est le fruit de ma retraite à la

Guère enthousiasmé par la Révolution française, Laplace applique pourtant le terme aux travaux des mathématiciens dont il s'est inspiré : « c'est principalement aux géomètres français, et aux encouragemens donnés par l'académie des sciences, que sont dus les nombreux développemens de cette découverte, et la *révolution qu'elle a produite dans l'astronomie* » (nous soulignons) [*Ibid.*, p. 292-293]. Si la révolution à laquelle Laplace fait référence lui est donc antérieure, on peut aussi considérer, dans une perspective que n'aurait peut-être pas reniée Bailly, qu'il ne fait que terminer la révolution newtonienne.

Les savants comme Laplace ou Lagrange prennent-ils ombrage de l'attribution à Newton de tout ce qui a suivi ? On peut se poser la question à la lecture de la célèbre notice que Delambre consacre à Lagrange :

« quelque progrès qu'on y fasse, le premier inventeur conservera son rang ; aussi M. Lagrange, qui le citait souvent [Newton] comme le plus grand génie qui eût jamais existé, ajoutait-il aussitôt, *et le plus heureux ; on ne trouve qu'une fois un système du monde à établir* » [Delambre 1812, p. xx].

La suite, bien que plus rarement citée, me semble très significative :

« Il a fallu cent ans de travaux et de découvertes pour élever l'édifice dont Newton avait posé les fondemens, mais on lui tient compte de tout, et l'on suppose qu'il a parcouru en entier la carrière qu'il avait ouverte » [*Ibid.*].

« Newton français »¹⁹, Laplace semble donc refermer une époque. Des lecteurs de son œuvre considèrent aussi qu'il en ouvre une nouvelle. En 1810, le professeur de mathématiques du Prytanée (La Flèche) B. Voiron écrit une histoire de l'astronomie entre 1781 et 1810 censée faire suite à celle de Bailly. Dédié à Laplace, cet ouvrage célèbre le « triomphe de l'analyse »²⁰ :

« Depuis le commencement du dix-septième siècle jusqu'à ce jour, [l'astronomie] présente trois époques remarquables : La première s'est illustrée par le nom de Kepler, la seconde par celui de Newton, et la troisième par les brillantes découvertes des géomètres modernes et surtout par celles de MM. Lagrange et Laplace. Peut-être sommes-nous parvenus aux dernières approximations que l'on puisse obtenir dans les calculs des mouvemens célestes. » [Voiron 1810, p. 221-222]

campagne pendant la durée de ce malheureux gouvernement révolutionnaire qui a coûté tant de larmes aux vrais amis de la France et de l'humanité. L'impression des tristes événements qui se succédaient rapidement lorsque je travaillais à cet ouvrage, a dû nécessairement influencer sur mon travail, et c'est une des causes de son imperfection, que je me propose de corriger dans une nouvelle édition. » [Laplace 2013, t. I, p. 498]

19. D'abord appliquée à d'Alembert [Anonyme 1788, t. 1, p. 12], l'expression désigne avant tout Laplace dès le début du XIX^e siècle ; voir, par exemple, [Kesteloot 1809, p. 204].

20. [Voiron 1810, p. 164].

De toutes parts, on insiste sur la perfection à laquelle la théorie du système du monde est parvenue, « perfection telle, qu'il n'existe actuellement aucun phénomène astronomique dont on n'ait assigné la cause et les lois » [Biot an IX, p. 2]. La coïncidence avec le changement de siècle est soulignée : « La *Mécanique céleste* est, de l'aveu de tous les hommes instruits, un des plus beaux présents que le 18^e siècle ait fait aux sciences »²¹. Mais, si l'on souligne la continuité avec ce glorieux passé, on saisit plus difficilement les éléments nouveaux qui émergent d'un tel travail, qui a consisté à rassembler des découvertes « trop isolées entre elles, la chaîne qui les unit étoit trop difficile à saisir » [Biot an IX, p. 2]. Voiron qui veut établir « les titres de gloire de cette période intéressante [...] [qui] la rendront à jamais mémorable et l'assimileront dans les âges futurs aux siècles les plus brillants de l'Astronomie » souligne que, suite aux travaux de Laplace et de Lagrange, « la Physique céleste a pris depuis *trente ans un nouvel essor* » [Voiron 1810, p. 370-371 et p. 220].

Dans le rapport de 1810 déjà mentionné, Delambre dresse aussi la liste des évolutions marquantes des dernières années. Selon lui, celles-ci sont caractérisées par un renversement remarquable des rapports entre théorie et observation. Alors que depuis des siècles, les observations étaient plus précises que ce que les astronomes pouvaient calculer, suite aux travaux de Laplace, l'analyse « a pris l'avance [...] et n'a laissé aux siècles futurs que l'application de règles constantes, et faciles à mettre en pratique à mesure qu'on obtiendra les données nécessaires qui dépendent uniquement de l'observation » [Delambre 1810, p. 150].

Aux yeux de Delambre et de Voiron, le programme laplacien semble clair. Ce travail est d'ailleurs promptement entamé par Laplace lui-même qui sait gérer les efforts de ses collaborateurs, comme Delambre, Alexis Bouvard et Barnaba Oriani, pour le calcul de nouvelles tables : « Je pense », écrit-il à ce dernier dès 1790, « que cette science sublime [l'astronomie] doit maintenant recevoir toute sa perfection de l'application de la théorie aux observations. Le grand objet des géomètres et des astronomes doit être de fonder toutes les tables des mouvements célestes sur les seules lois de la pesanteur universelle. » [Laplace 2013, t. I, p. 315] À la suite de quoi Delambre peut bientôt écrire que « les tables ont acquis une précision à-la-fois plus grande et plus durable » [1810, p. 31]. Ce sont les premières qui peuvent prétendre être entièrement basées sur la loi de Newton, les astronomes ayant réussi « à bannir tout empirisme de leurs Tables » [Delambre 1812, p. xix]. Et c'est bien leur précision que l'on vante quand on loue celle de la *Mécanique céleste*.

21. [Kesteloot 1809, p. 203]. Voir aussi [Schubert 1804, p. 142].

Mais le travail de confrontation aux données ne fait que débiter. La rigueur de l'analyse exigera l'établissement d'une nouvelle discipline dans la compilation des observations. C'est au terme de ce processus qui implique un long effort de restauration des observatoires astronomiques, entre l'établissement du Bureau des longitudes en 1795 et la réorganisation des observatoires de Greenwich et de Paris jusqu'au milieu du XIX^e siècle, que le programme de Laplace peut apparaître comme le point de départ d'une nouvelle astronomie. Comme le résume Robert Grant dans son *History of Physical Astronomy* :

« The future history of Celestial Mechanics naturally admits of a division into two distinct periods. The first comprehends the researches of geometers from the time of Newton to the commencement of the nineteenth century. [...] The second period embraces the further development of the theory down to the present time. » [1852, p. iii]

Plus que le contexte anglais de la réception des œuvres de Laplace qui, en faisant prendre conscience de la nécessité d'introduire les méthodes analytiques, bouleverse la formation scientifique outre-Manche [Ackerberg-Hastings 2008], ce sont le passage du temps, la lente accumulation des données déjà entrevue au début du siècle et la réforme des pratiques d'observation qui – temporairement du moins – consacrent la mécanique céleste laplacienne comme un point de basculement dans l'étude des astres.

III. « This revolution in our conception of the universe » : la rupture herschelienne ?

Dans l'ouvrage de Voiron [1810], les « découvertes faites par l'observation » jouent un rôle au moins aussi grand que les avancées théoriques. Comme on l'a souligné, l'interprétation, qui situe dans l'évolution des pratiques d'observation l'une des grandes discontinuités de l'histoire de l'astronomie, est assez répandue. En insistant sur le contraste entre le monde mécanique de Newton et l'univers « biologique » de l'astronomie moderne, l'historien M. Hoskin écrit ainsi : « The man who did more than anyone to bring about *this revolution in our conception of the universe* was William Herschel » (nous soulignons) [2011a, p. ix].

Né en 1738, Herschel devient rapidement célèbre à la suite de sa découverte d'Uranus en 1781. Armé d'un nouveau réflecteur très puissant qu'il a lui-même conçu et construit, aidé des membres de sa famille, Herschel observe systématiquement le ciel et fixe son attention sur une grande variété d'objets : satellites, planètes, étoiles, nébuleuses, etc., qu'il classe et mesure avec précision. L'originalité de son approche et la puissance de ses moyens d'observation fixent bien entendu l'attention sur ses nombreuses décou-

vertes²². Pour beaucoup, la tentation est donc grande de considérer cette œuvre comme un point de rupture important dans l'histoire de l'astronomie : « Il s'ouvrit des routes nouvelles dans une science sublime ; il vit des astres jusque-là ignorés, et recula toutes les limites du spectacle des cieux » [Fourrier 1823, p. lxi] ; « La vie d'Herschel a eu le rare privilège de faire époque dans une branche étendue de l'astronomie » [Arago 1843, p. 8].

C'est un jugement qu'on retrouve fréquemment dans les écrits des historiens : « Herschel was the founder of sidereal astronomy ; he outlined principles which guided its future and accumulated data which were useful to his successors » [Doig 1950, p. 128]. Centré sur l'histoire de la cosmologie, l'historien J. Merleau-Ponty lui accorde aussi une grande importance : « La nouveauté de l'entreprise herschelienne réside [...] dans cet effort pour fonder directement les inductions cosmologiques sur la vision des apparences célestes » [Merleau-Ponty 1983, p. 100] ; il n'hésite pas à placer le geste de Herschel au niveau de celui de Copernic :

« Après l'éviction de la Terre, le Soleil n'avait occupé que très fugitivement la place que Copernic lui assigna, et lorsque William Herschel l'évinça à son tour en prouvant son mouvement relativement aux étoiles de son entourage, il n'avait plus grand-chose à perdre de sa gloire. » [*Ibid.*, p. 123]

Certains insistent sur la précision des grands télescopes que Herschel confectionne [Bennett 1976 ; Spaight 2004 ; Hoskin 2011b], d'autres sur le fait qu'il élargit le regard de l'astronome en s'intéressant aux objets extrasolaires [Chapman 1989 ; Hoskin 1989], d'autres enfin voient, dans sa méthode, le fondement d'une nouvelle approche des sciences astronomiques [Wilson 1974 ; Hoskin & Dewhirst 2006].

Si la révolution herschelienne présente donc un visage différent selon les auteurs, c'est qu'il apparaît comme « précurseur » de l'astronomie de la fin du XIX^e siècle. Mais, un regard contemporain soulignera souvent au contraire que les différentes directions de recherches esquissées par Laplace et par Herschel ne sont pas antagonistes. Dès la première édition de *l'Exposition*, Laplace donne un certain nombre de pistes « sur les progrès futurs de l'astronomie » [Laplace an iv, t. 2, p. 293 et suiv.]. Des questions de trois ordres attirent son attention : d'abord, l'origine du système solaire au sujet de laquelle il présente sa célèbre hypothèse cosmogonique ; ensuite, l'accroissement de la précision dans le calcul des trajectoires planétaires, qui offre l'espoir de découvrir de nouveaux corps célestes ; enfin, les objets hors du système solaire et le mouvement du Soleil dans la galaxie.

Dans une lettre de 1789 au savant suisse J. A. Deluc, résidant en Angleterre, Laplace cherche à mettre les talents d'observateurs de Herschel au service des problèmes de la mécanique céleste :

22. Voir [Sidgwick 1953 ; Millman 1980 ; Hoskin 2007, 2011a].

« Je désirerais bien qu'avec son grand télescope il suivit l'anneau de Saturne et qu'il déterminât de combien d'anneaux concentriques il est formé. J'ai fait sur ces objets quelques recherches de théorie qui me prouvent la nécessité de la division de l'anneau en plusieurs anneaux concentriques, mais c'est à l'observation seule d'en fixer leur nombre, et j'invite Monsieur Herschel à s'en occuper. » [Laplace 2013, t. I, p. 305]

Au lieu de considérer que Herschel préfigure l'astronomie sidérale du XIX^e siècle, l'historien S. Schaffer a, d'une manière également convaincante, su le resituer dans le discours et les pratiques de l'histoire naturelle du siècle des Lumières :

« Contemporaries of Herschel detected in his papers and catalogues of double stars and nebulae evidence of a dramatic break with their traditional conceptions of the practice of astronomy. I believe that this "break" has been misunderstood by historians. »²³ [Schaffer 1980, p. 211]

Si l'on peut dire que les méthodes de Herschel se rapprochent à bien des égards de l'histoire naturelle, on peut se demander jusqu'à quel point ses techniques instrumentales préfigurent celles du XIX^e siècle. Certes, les télescopes construits par Herschel possèdent un pouvoir résolvant hors du commun qui lui permet de percevoir des choses invisibles pour d'autres, mais sa pratique des observations a peu à voir avec celles qui prédominent à l'époque. D'un point de vue instrumental (des réflecteurs plutôt que des lunettes [King 1955]), organisationnel (une dynamique familiale plutôt que les pratiques plus officielles qu'on inaugure ailleurs) et conceptuel (la classification plutôt que la mesure quantitative), Herschel se démarque nettement des principaux observatoires nationaux.

Ancré dans la tradition naturaliste, mais aussi novateur, le travail de Herschel n'en frappe pas moins les esprits pour longtemps. Il offre une réelle alternative à tous ceux qui cherchent à développer une pratique astronomique moins centrée sur les mathématiques – qui deviennent prohibitives avec la mécanique céleste – et, chose importante pour les historiens, plus facile à raconter à des non spécialistes [Clerke 1893, p. viii]. Dans son influent *Kosmos* [1845], Humboldt associe ainsi l'étude des nébuleuses par Herschel et l'hypothèse de Laplace pour constituer une nouvelle histoire de l'univers qui s'adresse à un large public. Et même s'il ne sera pas facile pour ses contemporains et successeurs d'égaler sa maîtrise de la construction et de la manipulation des instruments, la pratique astronomique de Herschel va lentement essaimer.

Comme Laplace, Herschel lègue donc un véritable « programme » aux futurs astronomes. Mais pour mener à bien l'un comme l'autre de ces

23. Il est d'ailleurs significatif que Laplace lui-même réfère à Georges-Louis Buffon lorsqu'il échaafaude son hypothèse sur l'origine du système solaire.

programmes, les astronomes vont devoir réorganiser leur profession. Pour les contemporains, le travail systématique d'observation, comme la constitution de larges catalogues d'étoiles, figure parmi les éléments qui distinguent la pratique astronomique de la fin du XVIII^e siècle de toutes les époques qui l'ont précédé :

« Les amateurs des sciences durent voir avec plaisir qu'au milieu des convulsions qui agitaient la France, et des grands intérêts qui partageait l'esprit et l'attention de tous les citoyens, un travail long et pénible s'exécutait dans le silence des nuits, et préparait aux astronomes à venir un secours destiné à durer plus que les révolutions des empires. » [Lalande 1803, p. 693-694]

L'organisation de ce type de travail produit des changements dans la pratique de l'astronomie au tournant des XVIII^e et XIX^e siècles. C'est dans la foulée de ces efforts de coordination que se fixe une culture scientifique particulière bien assise dans un lieu de science spécifique. C'est ce que nous avons appelé les « sciences de l'observatoire »²⁴.

IV. « L'observatoire [...] le plus beau et le plus utile » : l'affirmation d'un lieu pour les sciences de la quantité

En cherchant bien, on finira par trouver un historien de l'astronomie qui identifie précisément cette année 1800 comme moment de rupture. Ce choix n'est cependant pas motivé par la découverte de Cérès, mais par un nouveau type de publication : « In the year 1800 », écrit Walter Bryant, « a new epoch began with the commencement of Zach's *Monatliche Correspondenz*, destined to make known regularly all that was being done in the astronomical world » [Bryant 1907, p. 73]. L'œuvre de Zach n'a sans doute pas le même éclat que celle de Laplace ou de Herschel, mais elle me semble aussi symptomatique de changements dans les sciences de l'observatoire au tournant des XVIII^e et XIX^e siècles. Rappelons que, baron du Saint-Empire, Franz Xaver von Zach est né en 1754 à Budapest. Sa formation se fait surtout par les livres et les voyages. En 1782 et 1784, il visite un grand nombre d'observatoires européens et reçoit un doctorat d'Oxford. En 1786, il est chargé par le duc de Gotha de faire bâtir un observatoire qui devient vite l'un des plus importants d'Europe²⁵ :

« L'observatoire de Gotha est le plus beau et le plus utile qu'il y ait en Allemagne ; M. le duc a dépensé plus de 200000 francs : aucun prince, dans ce siècle, n'a donné ni suivi cet exemple. » [Lalande 1803, p. 797]

24. Sur ce thème des sciences de l'observatoire, voir [Boistel 2005 ; Le Gars & Aubin 2009 ; Aubin 2009, à paraître].

25. Sur Zach, voir [Vargha 2005 ; Balazs *et al.* 2007 ; Brosche 2009].

Comme pour souligner le tournant du siècle, Zach fait paraître le premier numéro de la première revue spécialisée d'astronomie, le *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde*, en janvier 1800. Cette parution est le symbole de changements dans la communauté des astronomes. Les précédentes tentatives (par Micheal Adelbulner en 1733-1735 et Jean III Bernoulli en 1771) avaient échoué car « il y avait trop peu d'amateurs d'astronomie pour qu'une pareille entreprise pût durer longtemps » [*Ibid.*, p. 396]²⁶.

Le lancement de cette revue d'astronomie représente la prise de conscience d'une communauté qui partage normes et intérêts. Elle est concomitante avec d'autres évolutions majeures du point de vue de l'organisation des sciences de l'observatoire. Premiers congrès internationaux, premières sociétés savantes, nouvelles réflexions sur l'organisation des observatoires [Borheck 2005] : les indices sont nombreux qui témoignent d'une volonté de réorganiser les pratiques sociales de l'astronomie.

Sans bien reconnaître le rôle central des observatoires dans ce contexte, certains historiens des sciences ont voulu souligner le caractère nouveau des sciences qui émergent à ce moment en parlant d'une « seconde révolution scientifique ». Définie par Kuhn en 1961, cette révolution serait caractérisée par la mathématisation réussie des sciences baconiennes²⁷. D'autres ont parlé du « programme de Laplace » [Fox 1974] pour décrire cette tentative d'appliquer les recettes de la mécanique céleste à la physique et à la chimie²⁸. De cet ensemble d'études, se dégage une grande impression de rupture dans l'application des mathématiques aux sciences physiques et l'astronomie y joue le rôle de science modèle.

L'observatoire est en effet un lieu où une certaine culture de la précision numérique s'est forgée depuis longtemps. L'observatoire du XIX^e siècle a été bien étudié, mais les développements de ce lieu de science à la fin du XVIII^e restent moins connus [Hahn 1964/1986 ; Aubin à paraître]. Si cette supposée seconde révolution scientifique apparaît comme un moment de rupture, c'est en partie parce que l'observatoire devient un nœud fondamental autour duquel s'amplifie l'expertise technique des États modernes en termes de connaissance et de contrôle de l'espace et du temps : territoire, poids et mesures, horlogerie, météorologie, réseaux de communica-

26. En fait, Zach publie d'abord, à partir de 1798, des éphémérides qui ne se démarquent pas fondamentalement des publications périodiques plus anciennes, comme la *Connaissance des temps : Allgemeine geographische Ephemeriden verfasst von einer Gesellschaft Gelehrten*. Voir Lalande [1803, p. 644].

27. Voir [Kuhn 1977/1990]. Le concept est aussi mobilisé dans [Bellone 1980 ; Brush 1988]. Pour une étude de ce concept, voir [Cohen 1985, chap. 5].

28. Sur l'émergence de la physique mathématique laplacienne, voir aussi [Crosland 1967 ; Grattan-Guinness 1990].

tion²⁹... C'est parce que l'observatoire est une institution établie depuis longtemps, qui allie culture de la précision numérique et soutien de l'État, qu'il devient un tel pivot pour les sociétés en voie d'industrialisation.

En France, les bouleversements institutionnels liés à la Révolution renforcent cette impression de rupture. Ainsi R. Hahn y voit bien une rupture profonde vis-à-vis de la culture de l'observatoire au XVIII^e siècle, époque où « souvent une embrasure de fenêtre, ou une plateforme aménagée dans une tourelle suffisait aux observateurs » [1986, p. 653]. Pour l'historien :

« Avant la fondation du Bureau des Longitudes en 1795, la recherche astronomique n'était ni bien coordonnée, ni effectivement dirigée. Chacun travaillait au problème qui l'intéressait sans trop se soucier d'un plan général d'observation. La communication des résultats et leur publication posaient aussi de difficiles problèmes. » [Hahn 1986, p. 658]

Il conclut : la création du Bureau des longitudes, « organisme centralisateur[,] marque une étape décisive dans le développement de l'astronomie en France » [*Ibid.*]. Dans son étude consacrée à l'observatoire de Toulouse, J. Lamy [2007] souligne aussi la transformation du régime des savoirs qui, à des logiques individuelles et des stratégies personnelles, substitue une « science bureaucratisée ».

Dès le 15 juillet 1789, l'Observatoire de Paris est pris pour cible par la foule révolutionnaire³⁰. Le processus par lequel la science sera « sans-culottisée » touchera d'abord l'astronomie [Decremps an II, p. 22]. Le 31 août 1793, dans une session présidée par Robespierre, la Convention décide, suivant la suggestion de Joseph Lakanal du Comité d'instruction publique, de modifier les statuts de l'Observatoire : « Citoyens, il existe près de vous un établissement célèbre où l'on commande encore au nom des rois [...] Nous vous demandons d'imprimer à ce monument les formes républicaines, et de substituer aux caprices du pouvoir les lois éternelles de l'égalité »³¹. Les assistants de Cassini sont propulsés codirecteurs de l'Observatoire, ce qui conduit à la démission de l'ancien directeur.

Après la chute de Robespierre, la reconstruction de l'observatoire s'appuiera justement sur les programmes laplaciens et herschéliens. Cela souligne son ancrage dans des épistémologies et des pratiques dont on a vu qu'elles peuvent être pensées en continuité avec celles du siècle des Lumières, mais cela montre aussi que ces programmes ont servi d'assise

29. Comme on pourrait s'en douter au vu de ce qui précède, ces transformations dans la manière dont on mathématise les sciences vont de pair avec des changements dans la conception des processus d'observation [Aubin 2013a].

30. Voir [Devic 1851 ; Chapin 1990 ; Burstin 2005 ; Aubin 2013b].

31. *Réimpression de l'Ancien Moniteur*, t. 17, Paris, 1860, p. 542.

à la rénovation des institutions. Dans une lettre à Lakanal du 22 décembre 1794, Laplace détaille sa vision de l'utilité sociale de l'astronomie :

« Cette belle science mérite de fixer particulièrement l'attention des législateurs par la sublimité de ses découvertes, par leur importance dans la navigation et la géographie, et surtout par ses rapports essentiels avec le bonheur et la liberté de l'espèce humaine : les erreurs de l'astrologie, les vaines terreurs qui ont accompagné les éclipses, et l'apparition des comètes, assiègent encore, si je puis ainsi dire, l'entendement humain, et n'attendent, pour y rentrer, que le retour de l'ignorance : observez, d'ailleurs, que partout la superstition a placé son point d'appui dans un ciel imaginaire, pour agiter et pour asservir la terre, et que rien n'est plus propre à garantir les hommes de ses honteux et funestes effets, que la connaissance du vrai système du monde, et la considération de l'immensité de l'univers. » [Laplace 2013, t. I, p. 426-427]

Laplace propose d'attacher trois astronomes à l'Observatoire de Paris, de conserver celui de l'École militaire et d'entretenir cinq autres observatoires en province :

« Pour diriger ces observatoires, pour recueillir et publier les observations, en tirer le meilleur parti, et perfectionner les théories et les tables astronomiques, je propose de créer une commission d'astronomes, formée de trois géomètres et de quatre astronomes, attachés aux deux observatoires de Paris. » [*Ibid.*, p. 426]

Établi le 25 juin 1795, en partie suivant ces recommandations, le Bureau des longitudes aura donc pour rôle, en France, de coordonner les recherches astronomiques et de superviser ses applications [Feurtet 2005].

Dans les pays non unifiés, comme l'Allemagne, la même exigence produit des effets différents. Se développe une communauté solide mais distribuée qui invente de nouveaux moyens de collaboration (journaux, mais aussi congrès, sociétés et programmes communs de recherches). La rupture n'est sans doute pas nette, mais le caractère social de la pratique des sciences de l'observatoire commence à se modifier sous plusieurs aspects. La communauté s'élargit, ainsi qu'en témoigne l'insistance de Lalande sur l'utilité de la revue de Zach qui procure « à l'astronomie de nouveaux amateurs et de nouveaux coopérateurs », le dernier de ces « amateurs » étant « M. le docteur Gauss, à Brunswick, jeune homme qui annonce du talent et du zèle pour l'astronomie » [Lalande 1803, p. 813].

Dans une communauté élargie et dispersée, les correspondances et les revues ne suffisent pas. Deux congrès internationaux rassemblent les astronomes européens en 1798. Le premier a lieu lors de la visite de Lalande à l'observatoire de Gotha en juillet et août. En septembre suivant, le congrès du mètre à Paris regroupe plusieurs astronomes comme Borda, Laplace et Méchain aux côtés de délégués allemands, italiens, danois et espagnols [Crosland 1969]. Selon Lalande [1803, p. 798], ces « conférences ont servi

à augmenter l'émulation ». À la suite du congrès de Gotha, Zach fonde une association d'astronomes qui se coordonnent dans la recherche de la planète « manquante » entre Mars et Jupiter. Cette « police du ciel » [*Himmelspolizey*], selon l'expression contemporaine, se partage les recherches et jouera un rôle considérable dans la découverte des petites planètes.

Conclusion

Pendant toute l'année 1801, les astronomes européens sont en colère contre Piazzi. Ce dernier, on s'en rappelle, après avoir observé Cérès pendant trois semaines, tombe malade et en perd la trace dans l'éclat du Soleil. Laplace écrit à Zach que Piazzi ne doit pas « être excusé » d'avoir initialement caché sa découverte aux astronomes. L'astronome royal britannique Nevil Maskelyne attribue ce comportement à son désir de préserver tout l'honneur et les observations pour son propre compte. Herschel lui-même n'est directement averti par Piazzi que le 1^{er} septembre. Les astronomes allemands sont encore plus outrés. Johann Elert Bode, qui a eu la chance de recevoir une lettre de Piazzi dès le 24 janvier, écrit à Oriani³² :

« Seriously, my dear friend, I also consider Piazzi's behaviour most reprehensible. The first letter he wrote me [...] was so tangled and incomprehensible that it seemed to be dictated by a charlatan or a Cagliostro who wanted to communicate a piece of news without enabling the reader to verify it. »

Le ton de ces lettres, qui n'ont été que récemment publiées, est vif et les accusations de secret, de duplicité, de fraude et de charlatanerie qui y pleuvent sont les signes d'une transgression. La vivacité de ces échanges montre qu'en ne communiquant pas assez rapidement ses observations Piazzi a enfreint, sans vraiment s'en rendre compte, de nouvelles normes qui commencent à structurer la communauté des astronomes vers 1800. Les griefs sont nombreux : il aurait dû diffuser plus rapidement ses observations sans attendre de les réduire et d'une manière transparente, superviser le travail de ses assistants après qu'il soit tombé malade, etc.

Dans cet épisode, s'entrecroisent les trois grandes évolutions que nous avons soulignées ici. Encore imparfaite³³, la circulation des nouvelles méthodes mathématiques de la mécanique céleste dans toute l'Europe modifie les approches théoriques couramment employées pour le calcul

32. Pour cette lettre et les témoignages précédents, voir [Cunningham *et al.* 2011, p. 297-299].

33. Mal maîtrisées par Piazzi, les méthodes analytiques compliquent le calcul des éléments par ce dernier. Les innovations de Gauss, par ailleurs, qui calcule l'excentricité de Cérès, alors que Burckhardt ne fait que la supposer, ne sont pas tout de suite comprises, même par Zach. Ces questions sont discutées dans [Cunningham *et al.* 2011].

des trajectoires et des tables. L'observation fine, précise et coordonnée joue un rôle capital et la constitution des catalogues d'étoiles formera l'essentiel du programme de recherche de Bode pour les décennies à venir. La réorganisation des lieux d'observation et des réseaux de communication fournissent leur assise à ce programme – qui servira à établir l'existence de Neptune à la place calculée par Le Verrier en 1846 – et à d'autres similaires, comme l'étude du géomagnétisme terrestre dans la première moitié du XIX^e siècle.

Non, la découverte de Cérès ne marque pas de rupture dans l'histoire de l'astronomie. Mais elle témoigne des évolutions qui marquent le tournant des XVIII^e et XIX^e siècles. Avec les travaux de Laplace, les fondements épistémologiques du domaine ne sont pas bouleversés, mais un nouveau programme d'études se dessine. Ceux de Herschel annoncent des évolutions majeures tout au long du XIX^e siècle, mais restent souvent ancrés dans le siècle précédent et leur développement sera long et laborieux. Si l'on cherche à comprendre les mutations des sciences de l'observatoire à cette époque, il faut donc chercher ailleurs. Je suggère ici que les transformations de l'État et de la société auront un large impact sur le rôle et la place des observatoires dans les premières années du XIX^e siècle. Dans ce processus, les programmes laplacien et herschelien seront d'utiles ressources, mais les modes d'organisation dessinés par Zach ou les fondateurs du Bureau des longitudes en formeront la matrice.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ackerberg-Hastings 2008] Amy Ackerberg-Hastings, « John Playfair on British Decline in Mathematics », *BSHM Bulletin : Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 23/2 (2008), p. 81-95.
- [Anonyme 1788] *Les Illustres modernes, ou Tableau de la vie privée des principaux personnages des deux sexes, qui depuis la renaissance des lettres, ont acquis de la célébrité en Europe, tant en politique ou dans les armées que dans les arts, les sciences et la vie contemplative*, Paris : Leroy, 1788.
- [Arago 1843] François Arago, *Analyse de la vie et des travaux de Sir William Herschel*, Paris : Bachelier, 1843.
- [Aubin 2009] David Aubin, « Observatory Mathematics in the Nineteenth Century », dans E. Robson et J. Stedall (éd.), *Oxford Handbook for the History of Mathematics*, Oxford : Oxford University Press, 2009, p. 273-298.
- [Aubin 2013a] D. Aubin, « Observatory Mathematics in the Nineteenth Century : Mathematization and Observation » (joint work with Charlotte Bigg), *Oberwolfach Reports*, 10 (2013), p. 696-700.
- [Aubin 2013b] D. Aubin, « On the Cosmopolitics of Astronomy in Nineteenth-Century Paris », dans S. Neef, D. Boschung et H. Sussman (éd.), *Astroculture : Figurations of Cosmology in Media and Arts* (collection « Morphomata », 17), Paderborn : Wilhelm Fink, 2013, p. 61-84.

- [Aubin à paraître] D. Aubin, « L'observatoire : régimes de spatialité et délocalisation du savoir », dans H. O. Sibum et K. Raj (dir.), *Histoire des sciences modernes*, t. 2, Paris : Le Seuil, à paraître.
- [Aubin et al. 2010] David Aubin, Charlotte Bigg et H. Otto Sibum (éd.), *The Heavens on Earth: Observatories and Astronomy in Nineteenth-Century Science and Society*, Rayleigh : Duke University Press, 2010.
- [Bailly 1779-1782] Jean-Sylvain Bailly, *Histoire de l'astronomie moderne depuis la fondation de l'école d'Alexandrie, jusqu'à l'époque de M. DCC. LXXXII*, 3 vol., Paris : Debure, 1779-1782.
- [Balazs et al. 2007] Lajos G. Balazs, Peter Brosche, Hilmar W. Duerbeck et Endre Zsoldos (éd.), *The European Scientist : Symposium on the Era and Work of Franz Xaver von Zach (1754-1832)*, Frankfurt : Harri Deutsch, 2007.
- [Beaubois 2014] Francis Beaubois, *Le Soleil comme laboratoire des pratiques scientifiques*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2014.
- [Bellone 1980] Enrico Bellone, *A World on Paper: Studies on the Second Scientific Revolution*, trad. de l'italien par M. et R. Giacconi, Cambridge, Mass. : MIT Press, 1980.
- [Bennett 1976] Jim Bennett, « "On the Power of Penetrating into Space" : The Telescopes of William Herschel », *Journal for the History of Astronomy*, 7 (1976), p. 75-108.
- [Bensaude-Vincent 1999] Bernadette Bensaude-Vincent, « Révolution scientifique », dans D. Lecourt (dir.), *Dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences*, Paris : Presses universitaires de France, 1999, p. 840-841.
- [Biot an IX] Jean-Baptiste Biot, *Analyse du traité de mécanique céleste de P. S. Laplace*, Paris : Duprat, an IX (1800-1801).
- [Boistel 2005] Guy Boistel (dir.), *Observatoires et patrimoine astronomique français*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, 54, Paris : ENS éditions, 2005.
- [Boistel et al. 2010] Guy Boistel, Jérôme Lamy et Colette Le Lay (dir.), *Jérôme Lalande (1732-1807) : une trajectoire scientifique*, Rennes : Presses universitaires de Rennes, 2010.
- [Borheck 2005] Georg Heinrich Borheck, *Grundsätze über die Anlage neuer Sternwarten unter Beziehung auf die Sternwarte der Universität Göttingen*, Göttingen : Universitätsverlag, 2005.
- [Brosche 2009] Peter Brosche, *Der Astronom der Herzogin : Leben und Werk von Franz Xaver von Zach, 1754-1832*, 2^e éd., Frankfurt : Deutsch, 2009.
- [Brush 1988] Stephen G. Brush, *The History of Modern Science : A Guide to the Second Scientific Revolution, 1800-1950*, Ames : Iowa State University Press, 1988.
- [Bryant 1907] Walter W. Bryant, *History of Astronomy*, London : Methuen, 1907.
- [Burstin 2005] Haim Burstin, *L'Invention du sans-culotte : regards sur le Paris révolutionnaire*, Paris : Odile Jacob, 2005.
- [Chapin 1990] Seymour L. Chapin, « The Vicissitudes of a Scientific Institution : A Decade of Change at the Paris Observatory », *Journal for the History of Astronomy*, 21 (1990), p. 235-274.
- [Chapman 1989] Allan Chapman, « William Herschel and the Measurement of Space », *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, 30 (1989), p. 399-418.
- [Chapront-Touzé 2002] Michelle Chapront-Touzé (éd.), *Œuvres complètes de d'Alembert*, série I, vol. 6, *Premiers textes de mécanique céleste (1747-1749)*, Paris : CNRS Éditions, 2002.

- [Chapront-Touzé & Souchay 2006] Michelle Chapront-Touzé & Jean Souchay (éd.), *Œuvres complètes de d'Alembert*, série I, vol. 7, *Précession et nutation (1749-1752)*, Paris : CNRS Éditions, 2006.
- [Chinnici *et al.* 2001] Ileana Chinnici, Giorgia Foderà Serio et Paolo Brenni, « The Ramsden Circle at the Palermo Astronomical Observatory », *Bulletin of the Scientific Instrument Society*, 71 (2001), p. 2-10.
- [Clerke 1893] Agnes Mary Clerke, *A Popular History of Astronomy in the Nineteenth Century*, 3^e éd., London : Adams & Charles Black, 1893 (1^{re} éd., 1885).
- [Cohen 1985] I. Bernard Cohen, *Revolution in Science*, Cambridge, Mass. : Belknap Press of Harvard University Press, 1985.
- [Costabel 1962] Pierre Costabel, Recension de [Koyré 1960], *Revue de métaphysique et de morale*, 67 (1962), p. 376-383.
- [Cousin 1787] Jacques-Antoine-Joseph Cousin, *Introduction à l'étude de l'astronomie physique*, Paris : Didot l'aîné, 1787.
- [Crosland 1967] Maurice P. Crosland, *The Society of Arcueil : A View of French Science at the Time of Napoleon I*, Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1967.
- [Crosland 1969] M. P. Crosland, « The Congress on Definite Metric Standards, 1798-99 : the First International Scientific Conference », *ISIS*, 60 (1969), p. 226-231.
- [Cunningham *et al.* 2011] Clifford Cunningham, Brian Marsden et Wayne Orchiston, « Giuseppe Piazzi : The Controversial Discovery and Loss of Ceres in 1801 », *Journal for the History of Astronomy*, 42 (2011), p. 283-306.
- [Decremps an II] Henri Decremps, *La Science sans-culotisée, premier essai sur les moyens de faciliter l'étude de l'astronomie, tant aux amateurs et aux gens de lettres, qu'aux marins de la République française, et d'opérer une révolution dans l'enseignement*, Paris : chez l'auteur, an II.
- [Delambre 1810] Jean-Baptiste-Joseph Delambre, *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789, et sur leur état actuel*, Paris : Imprimerie impériale, 1810.
- [Delambre 1812] J.-B.-J. Delambre, « Notice sur la vie et les ouvrages de M. le Comte J.-L. Lagrange », *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut impérial de France* (1812) ; *Œuvres de Lagrange*, t. 1, Paris : Gauthier-Villars, 1867, p. ix-li.
- [Devic 1851] Jean-François-Schlister Devic, *Histoire de la vie et des travaux scientifiques et littéraires de J.-D. Cassini IV*, Clermont : Alexandre Daix, 1851.
- [Doig 1950] Peter Doig, *A Concise History of Astronomy*, London : Chapman & Hall, 1950.
- [Dunn & Higgitt 2014] Richard Dunn et Rebekah Higgitt, *Finding Longitude*, London : Collins, 2014.
- [Feurtet 2005] Jean-Marie Feurtet, *Le Bureau des longitudes (1795-1854) : de Lalande à Le Verrier*, thèse de doctorat, École des chartes, Paris, 2005.
- [Fix 1792] Christian Gotthelf Fix, *Geschichte der Astronomie von den ältesten bis auf gegenwärtige Zeiten*, 2 vol., Chemnitz : Hofmann & Fiedler, 1792.
- [Foderà Serio *et al.* 2002] Giorgia Foderà Serio, Alessandro Manara et Piero Sicolin, « Giuseppe Piazzi and the Discovery of Ceres », dans W. F. Bottke Jr., A. Cellino, P. Paolicchi et R. P. Binzel (éd.), *Asteroids III*, Tucson : University of Arizona Press, 2002, p. 17-24.
- [Forbes 1909] George Forbes, *History of Astronomy*, London : Watts & Co., 1909.
- [Forbes 1971] Eric G. Forbes, « Gauss and the Discovery of Ceres », *Journal for the History of Astronomy*, 2 (1971), p. 195-199.

- [Fourier 1823] Joseph Fourier, « Éloge historique de Sir William Herschel », *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, 6 (1823), p. lxi-lxxxii.
- [Fox 1974] Robert Fox, « The Rise and Fall of Laplacian Physics », *Historical Studies in the Physical Sciences*, 4 (1974), p. 89-136.
- [Gamaches 1740] Étienne-Simon de Gamaches, *Astronomie physique, ou principes généraux de la nature, appliqués au mécanisme astronomique et comparés aux principes de la philosophie de M. Newton*, Paris : Jombert, 1740.
- [Gillispie 1997] Charles Coulston Gillispie, *Pierre-Simon Laplace, 1749-1827 : A Life in Exact Science*, Princeton : Princeton University Press, 1997.
- [Goulemot 1975] Jean-Marie Goulemot, *Discours, révolutions et histoire*, Paris : 10/18, 1975.
- [Grant 1852] Robert Grant, *History of Physical Astronomy, from the Earliest Ages to the Middle of the Nineteenth Century...*, London : Robert Baldwin, 1852.
- [Grattan-Guinness 1990] Ivor Grattan-Guinness, *Convolutions in French mathematics, 1800-1840*, 3 vol., Basel : Birkhäuser, 1990.
- [Greenberg 1995] John L. Greenberg, *The Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut: The Rise of Mathematical Science in Eighteenth-Century Paris and the Fall of « Normal » Science*, Cambridge : Cambridge University Press, 1995.
- [Hahn 1964/1986] Roger Hahn, « Les observatoires en France au XVIII^e siècle », dans R. Taton (dir.), *Enseignement et diffusion des sciences en France au XVIII^e siècle*, 1964 ; rééd. Paris : Hermann, 1986, p. 653-658.
- [Hahn 2004] R. Hahn, *Le Système du monde. Pierre Simon Laplace : un itinéraire dans la science*, trad. fr. Patrick Hersant, Paris : Gallimard, 2004.
- [Higgitt 2014] Rebekah Higgitt (dir.), *Maskelyne : Astronomer Royal*, London : Hale, 2014.
- [Hoefler 1873] Ferdinand Hoefler, *Histoire de l'astronomie depuis ses origines jusqu'à nos jours*, Paris : Hachette, 1873.
- [Hoskin 1989] Michael A. Hoskin, « William Herschel and the Construction of the Heavens », *Proceedings of the American Philosophical Society*, 133 (1989), p. 427-433.
- [Hoskin 1993] M. A. Hoskin, « Bode's Law and the Discovery of Ceres », dans J. F. Linsky et S. Serio (dir.), *Physics of Solar and Stellar Coronae : G. S. Vaiana Memorial Symposium*, Dordrecht : Kluwer, 1993, p. 36-46.
- [Hoskin 2007] M. A. Hoskin, *The Herschels of Hanover*, Cambridge : Science History Publications, 2007.
- [Hoskin 2011a] M. A. Hoskin, *Discoverers of the Universe : William and Caroline Herschel*, Princeton : Princeton University Press, 2011.
- [Hoskin 2011b] M. A. Hoskin, « William Herschel and Herschelien Reflectors », *History of Science*, 49 (2011), p. 115-120.
- [Hoskin & Dewhirst 2006] Michael A. Hoskin et David W. Dewhirst, « William Herschel and the Prehistory of Stellar Spectroscopy », *Journal for the History of Astronomy*, 37 (2006), p. 393-403.
- [Humboldt 1845] Alexander von Humboldt, *Kosmos : Entwurf einer physischen Weltbeschreibung*, vol. 1, Stuttgart : Tübingen, 1845. Trad. fr. par H. Faye, *Cosmos, essai d'une description physique du monde*, Paris : Gide & J. Baudry, 1846.
- [Jahn 1844] Gustav Adolph Jahn, *Geschichte der Astronomie vom Anfange des neunzehnten Jahrhunderts bis zu Ende des Jahres 1842*, Leipzig : Hunger, 1844.
- [Kesteloot 1809] Jacob Lodewijk Kesteloot (dir.), *Discours sur les progrès des sciences, lettres et arts depuis MDCLXXXIX jusqu'à ce jour...*, Hollande : Immerzeel, 1809.
- [King 1955] Henry C. King, *The History of the Telescope*, High Wycombe : Griffin, 1955.

- [Kovács 2004] József Kovács, « The Discovery of the First Minor Planets », *Acta Historica Astronomiae*, 24 (2004), p. 70-82.
- [Koyré 1960] Alexandre Koyré, *La Révolution astronomique : Copernic, Kepler, Borelli*, Paris : Hermann, 1960.
- [Kuhn 1977/1990] Thomas S. Kuhn, *La Tension essentielle. Tradition et changement dans les sciences*, trad. fr., Paris : Flammarion, 1990 (1^{re} éd. angl., 1977).
- [Lagrange 1788] Joseph-Louis Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris : La Veuve Desaint, 1788.
- [Lalande 1764] Jérôme de Lalande, *Astronomie*, 2 vol., Paris : Desaint & Saillant, 1764.
- [Lalande 1782] J. de Lalande, « Mémoire sur la planète de Herschel », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1779 (1782), p. 526-544.
- [Lalande an X] J. de Lalande, « Mémoire sur la découverte de la nouvelle planète de Piazzi, lu à l'assemblée de l'Institut, le 15 germinal an 10 », *Journal de physique, de chimie et d'histoire naturelle*, 54 (an X), p. 469-474.
- [Lalande 1803] J. de Lalande, *Bibliographie astronomique, avec l'histoire de l'astronomie depuis 1781 jusqu'à 1802*, Paris : Imprimerie de la République, 1803.
- [Lamy 2007] Jérôme Lamy, *L'Observatoire de Toulouse aux XVIII^e et XIX^e siècles : archéologie d'un espace savant*, Rennes : Presses universitaires de Rennes, 2007.
- [Laplace an IV] Pierre-Simon Laplace, *Exposition du système du monde*, Paris : Imprimerie du Cercle-Social, 2 tomes, an IV (1795-1796).
- [Laplace an VII] P.-S. Laplace, *Traité de mécanique céleste*, t. 1-2, Paris : Duprat, an VII (1798-1799).
- [Laplace 1808] P.-S. Laplace, *Exposition du système du monde*, 3^e éd., Paris : Courcier, 1808.
- [Laplace 2013] *Correspondance de Pierre Simon Laplace (1749-1827)*, publiée et annotée par R. Hahn (éd.), 2 tomes, Turnhout : Brepols, 2013.
- [Laugel 1862] Auguste Laugel, « Le Soleil, d'après les découvertes récentes de MM. Kirchhoff et Bunsen », *Revue des deux mondes*, 37 (1862), p. 402-420.
- [Le Gars 2007] Stéphane Le Gars, *L'émergence de l'astronomie physique en France (1860-1914) : acteurs et pratiques*, thèse de doctorat, Université de Nantes, 2007.
- [Le Gars & Aubin 2009] Stéphane Le Gars et David Aubin, « The Elusive Placelessness of the Mont-Blanc Observatory (1893-1909) : The Social Underpinnings of High-Altitude Observation », *Science in Context*, 22/3 (2009), p. 509-531.
- [Linton 2004] Christopher M. Linton, *From Eudoxus to Einstein : A History of Mathematical Astronomy*, Cambridge : Cambridge University Press, 2004.
- [Merleau-Ponty 1983] Jacques Merleau-Ponty, *La Science de l'univers à l'âge du positivisme*, Paris : Vrin, 1983.
- [Millman 1980] Peter M. Millman, « The Herschel Dynasty, Part I : William Herschel », *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 74 (1980), p. 134-145.
- [Montucla 1758] Jean-Étienne Montucla, *Histoire des mathématiques dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours*, 2 vol., Paris : Jombert, 1758.
- [Pannekoek 1961] Anton Pannekoek, *A History of Astronomy*, New York : Dover, 1961.
- [Passeron 1994] Irène Passeron, *Clairaut et la figure de la Terre au XVIII^e siècle : cristallisation d'un nouveau style autour d'une pratique physico-mathématique*, thèse de doctorat, Université Paris VII, 1994.
- [Roy 1982] Jean-René Roy, *L'Astronomie et son histoire*, Québec : Presses de l'université du Québec & Paris : Masson, 1982.

- [Schaffer 1980] Simon Schaffer, « Herschel in Bedlam : Natural History and Stellar Astronomy », *The British Journal for the History of Science*, 13 (1980), p. 211-239.
- [Schaffer 1981] S. Schaffer, « Uranus and the Establishment of Herschel's Astronomy », *Journal for the History of Astronomy*, 12 (1981), p. 11-26.
- [Schubert 1804] Friedrich Theodore von Schubert, *Populäre Astronomie : Geschichte der Astronomie*, Saint-Pétersbourg : Académie des sciences, 1804.
- [Sheynin 1973] Oscar B. Sheynin, « Mathematical Treatment of Astronomical Observations », *Archive for History of Exact Sciences*, 11 (1973), p. 97-126.
- [Sidgwick 1953] John Benson Sidgwick, *William Herschel : Explorer of the Heavens*, London : Faber & Faber, 1953.
- [Spaight 2004] John Tracy Spaight, « For the Good of Astronomy : The Manufacture, Sale, and Distant use of William Herschel's Telescopes », *Journal for the History of Astronomy*, 35 (2004), p. 45-69.
- [Vargha 2005] Magda Vargha, *Franz Xaver von Zach : His Life and Times*, Budapest : Konkoly Observatory, 2005.
- [Verdet 1990] Jean-Pierre Verdet, *Une histoire de l'astronomie*, Paris : Seuil, 1990.
- [Voiron 1810] B. Voiron, *Histoire de l'astronomie depuis 1781 jusqu'à 1811 pour servir de suite à l'histoire de l'astronomie de Bailly*, Paris : Courcier, 1810.
- [Wilson 1974] David B. Wilson, « Herschel and Whewell's Version of Newtonianism », *Journal of the History of Ideas*, 35 (1974), p. 79-97.
- [Zach 2004-2009] *The Collected Correspondence of Baron Franz Xaver von Zach*, Clifford J. Cunningham (éd.), 6 vol., Kitchener, Ontario : Star Lab Press, 2004-2009.

L'« équation séculaire », témoin des évolutions des sciences mathématiques de 1750 à 1850

Frédéric BRECHENMACHER

Un critère de stabilité des petites oscillations des systèmes de corps offre un regard privilégié sur la période 1750-1850. Énoncé dans les années 1750, ce critère a en effet été contredit dans les années 1850, non sans avoir inspiré de très nombreux travaux dans l'intervalle. Plus encore, la réfutation de ce critère a souvent été commentée comme une rupture emblématique du rôle joué par la rigueur dans les évolutions des sciences mathématiques.

Chez Jean le Rond d'Alembert et Joseph-Louis Lagrange, la stabilité mécanique de petites oscillations a été caractérisée par la nature algébrique des racines d'une équation spécifique. Cette dernière était couramment désignée au XIX^e siècle sous le nom d'« équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes » en raison de son rôle dans l'étude de la stabilité du système solaire. Nous pouvons aujourd'hui l'identifier à l'équation caractéristique d'un système symétrique d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Mais cette perspective ne s'est imposée que dans les années 1930, lorsque l'algèbre linéaire s'est constituée comme une discipline structurante pour l'organisation des savoirs mathématiques et de leurs interfaces avec les sciences physiques.

L'un des enjeux de cet article est d'aborder un aspect important de l'histoire de l'algèbre linéaire sans recourir aux ruptures/continuités qui accompagnent l'usage de cadres théoriques rétrospectifs tels que les algèbres de matrices ou les espaces vectoriels. Avec l'équation séculaire, nous proposons au contraire de nous saisir d'une catégorie utilisée par les acteurs de la période 1750-1850 comme un témoin de certaines dynamiques des mathématiques antérieures à l'usage de structures algébriques. Pendant plus d'un siècle, cette équation particulière a favorisé la circulation de certains procédés entre différentes branches des sciences mathématiques, de la mécanique céleste à celle des fluides, de l'analyse à la géométrie en passant par l'arithmétique et l'algèbre. L'équation séculaire nous engage ainsi à interroger les catégories utilisées pour introduire de la continuité entre des textes – organisations des savoirs, réseaux intertextuels, journaux, etc. – comme entre les actions des individus – champs, institutions, nations, etc. Plus encore, cette équation nous permet de questionner les échelles spatiales et temporelles dans lesquelles certaines catégories se

présentent comme des éléments de continuités ou, au contraire, se rompent et se fragmentent.

La première partie de cet article analyse l'attribution d'un caractère spécifique à l'équation séculaire dans les années 1750. Nous y proposons une approche microhistorique attentive à des aspects qui pourraient apparaître de prime abord comme des détails techniques, comme les difficultés posées par l'occurrence de racines multiples. Dans la seconde partie, nous portons un regard critique sur des commentaires rétrospectifs qui, à partir de 1850, ont vu dans ces difficultés les marqueurs d'une rupture opposant une rigueur purement mathématique à des représentations erronées issues de la mécanique. La troisième partie de cet article aborde le temps long de la période 1750-1850. Nous montrons que des interactions portées par l'équation séculaire ont engendré une culture mathématique spécifique qui sous-tend des relations subtiles entre mathématiques pures et appliquées et dont la continuité sur le temps long et à l'échelle européenne est elle-même porteuse de dynamiques de fragmentations sur des temps plus courts et à des échelles plus réduites.

I. Des petites oscillations d'une corde à celles des planètes

1. Un problème mécanique et sa résolution analytique

Dans le mémoire « Solution de différens problèmes de calcul intégral » de 1766, Lagrange traite de questions d'analyse liées à des problèmes mécaniques. Il s'y appuie sur les travaux de plusieurs savants avec lesquels il est en correspondance, comme Leonhard Euler ou Daniel Bernoulli. Mais l'auteur qui marque le plus son approche est sans conteste d'Alembert. La correspondance épistolaire entre les deux savants est à cette époque en grande partie consacrée à des questions de cordes vibrantes. Le problème qui nous préoccupe ici en est un cas particulier : il s'agit de décrire, en fonction du temps t , les petites oscillations $\xi(t)$ d'une corde, fixée à l'une de ses extrémités, et lestée d'un certain nombre de corps.

Dans la première édition du *Traité de dynamique* [1743, art. 98-119], d'Alembert mathématisait les oscillations d'un fil chargé de deux ou trois corps sur le modèle des oscillations du pendule simple. Le traitement de ce problème, que Bernoulli jugeait trop complexe pour les méthodes de l'Analyse, participait à affirmer la portée du principe dit de d'Alembert pour unifier les lois de la dynamique [Firode 2001]. Ce principe permet d'obtenir des équations différentielles dont d'Alembert néglige, en raison de la faiblesse des oscillations, les termes non linéaires afin de les réduire à un système d'équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants qu'il écrit, pour deux corps, sous la forme [1743, p. 99]

$$\begin{cases} -ddx = (2x - y) \frac{2dt^2}{T^2} \\ -ddy = (2y - 2x) \frac{2dt^2}{T^2}, \end{cases}$$

où T est une constante homogène à un temps, et où x et y correspondent aux déplacements de chacun des deux corps par rapport à la verticale.

Pour le résoudre, d'Alembert propose une méthode qu'il perfectionne progressivement, au cours des années suivantes, à la fois dans des travaux de mathématiques pures et des recherches en astronomie, mécanique et hydrodynamique¹. Dans la seconde édition de son *Traité de dynamique* [1758, art. 118], il présente ainsi une solution obtenue en ramenant le système des équations du mouvement à deux équations différentielles indépendantes. D'Alembert introduit pour ce faire le coefficient indéterminé ν qui lui permet de combiner les deux équations différentielles de façon à obtenir une équation différentielle du même type. Ce coefficient est alors déterminé par une équation algébrique du second degré dont les solutions, $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\nu' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, donnent les variables indépendantes

recherchées, $u = x + \nu y$ et $u' = x + \nu' y$. Il réduit ainsi le système de départ à deux équations correspondant chacune aux oscillations d'un pendule simple

$$\begin{cases} -ddu = (2 - \sqrt{2})u \frac{2dt^2}{T^2} \\ -ddu' = (2 + \sqrt{2})u' \frac{2dt^2}{T^2}. \end{cases}$$

Les solutions cherchées x et y seront donc des combinaisons linéaires des fonctions $u = A \cos \frac{t\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{T}$ et $u' = B \cos \frac{t\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{T}$, avec A et B deux constantes dépendant des conditions initiales du problème.

Considérée d'un point de vue moderne, la démarche de d'Alembert consiste à considérer un système d'équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants de la forme

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi_1}{dt} = A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 \\ \frac{d^2\xi_2}{dt} = A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2, \end{cases}$$

1. Consulter à ce sujet [Gilain 2008].

et à rechercher des solutions particulières, ξ'_1 et ξ'_2 , obtenues à partir de ξ_1 et ξ_2 par un changement de variables linéaire, permettant ainsi de réduire le système à une situation de proportionnalité dont le coefficient, S , est posé comme inconnue :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \xi'_1}{dt} = S \xi'_1 \\ \frac{d^2 \xi'_2}{dt} = S \xi'_2. \end{cases}$$

Par recours à la méthode des coefficients indéterminés, la détermination de S mène à une équation algébrique de degré 2 que nous écririons aujourd'hui, dans les termes du calcul des déterminants,

$$(1) \quad \begin{vmatrix} A_{11} - S & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Chaque des deux racines α_1 et α_2 conduit à une équation $\frac{d^2 \xi_i}{dt} = \alpha_i \xi_i$ pouvant alors être résolue par plusieurs méthodes, dont celle que publiait Euler en 1743 et qui exploite l'analogie entre cette équation différentielle du *deuxième ordre* et l'équation algébrique du *deuxième degré*, en cherchant des solutions particulières de la forme $e^{x_i t}$ où l'on a donc

$$(2) \quad x_i^2 = \alpha_i.$$

Pour chacune des deux équations, les deux racines $\sqrt{\alpha_i}$ et $-\sqrt{\alpha_i}$ donnent ainsi les paramètres de la famille de solutions cherchées et, ce faisant, les solutions du problème, obtenues par des combinaisons linéaires de deux solutions particulières du type

$$\xi'_i(t) = \beta_i e^{\sqrt{\alpha_i} t} + \gamma_i e^{-\sqrt{\alpha_i} t},$$

avec β_i et γ_i constants.

Tandis que d'Alembert n'a traité que le cas des oscillations d'un fil chargé de deux ou de trois masses égales, Lagrange entend quant à lui donner une « méthode générale pour déterminer le mouvement d'un système quelconque de corps qui agissent les uns sur les autres, en supposant que ces corps ne fassent que des oscillations infiniment petites autour de leurs points d'équilibre » [1766, p. 227]. Vingt ans plus tard, ce problème occupe une place centrale dans l'architecture de la *Mécanique analytique* [Lagrange 1788, p. 241-262] : il en ouvre la partie d'applications qui succède à l'énoncé des « principes généraux ». La « simplicité » et la « généralité » que revendique Lagrange pour son traitement analytique du problème s'opposent aux difficultés et confusions longtemps suscitées par

l'étude des cordes vibrantes et viennent ainsi appuyer le rôle que le savant entend jouer dans l'histoire de la mécanique [*Ibid.*, p. 158-159].

Comme nous le verrons plus loin, ce double idéal de généralité et de simplicité va fortement marquer le traitement du problème des petites oscillations pendant plus d'un siècle. Il implique de considérer un système linéaire symétrique constitué d'un nombre n d'équations différentielles linéaires à coefficients A_{ij} constants²

$$\begin{cases} \frac{d^2 \xi_1}{dt} = A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + \dots + A_{1n}\xi_n \\ \frac{d^2 \xi_2}{dt} = A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + \dots + A_{2n}\xi_n \\ \dots \\ \frac{d^2 \xi_n}{dt} = A_{n1}\xi_1 + A_{n2}\xi_2 + \dots + A_{nn}\xi_n. \end{cases}$$

Comme chez d'Alembert, l'intégration du système est obtenue par Lagrange grâce à sa décomposition en équations indépendantes, dont les paramètres sont les racines de l'« équation en S », cette fois de degré n . Dans le cas où les n racines sont distinctes, on obtient ainsi n solutions indépendantes dont les combinaisons linéaires permettent d'exprimer toutes les solutions du problème.

Lagrange ne se limite cependant pas à étendre le procédé de mathématisation de d'Alembert. Sa généralisation s'accompagne aussi de l'élaboration d'une pratique polynomiale spécifique qui lui permet de s'affranchir de la méthode des coefficients indéterminés et de réduire la solution du problème mécanique à une « expression analytique » directement déduite de factorisations de l'équation en S . À défaut de pouvoir détailler ici sa méthode, contentons-nous de noter, dans le langage actuel du calcul matriciel³, que Lagrange s'appuie sur des procédés polynomiaux qui, pour ce que nous appellerions un système linéaire symétrique, permettent d'exprimer les coordonnées $(x_i^{\alpha_j})$ d'un vecteur propre associé à la valeur propre α_j à partir du déterminant caractéristique⁴ $\Delta(S)$, qui définit l'équation en⁵ S , et

2. À l'exception des notations des variables et des coefficients α_i , que nous avons modifiées, le système d'équations considéré par Lagrange [1766, p. 227-228] se présente sous une forme très similaire à celle que nous donnons ici.

3. Pour une présentation plus proche du mémoire original de Lagrange [1766, p. 227-233], voir [Brechenmacher 2007b].

4. C'est-à-dire le déterminant $|A - SI|$, avec A la matrice (A_{ij}) du système différentiel et I la matrice identité.

5. C'est-à-dire l'équation $\Delta(S) = 0$, dont les n racines correspondent aux valeurs propres α_j .

des sous-déterminants $\Delta_{1i}(S)$ obtenus par des développements par rapport à la 1^{re} ligne et la i^e colonne⁶

$$(3) \quad x_i^{\alpha_j} = \frac{\Delta_{1i}}{\frac{\Delta}{S - \alpha_j}} (\alpha_j).$$

2. Le critère de stabilité de Lagrange

Cette mathématisation des petites oscillations est loin de se limiter à la formalisation d'un problème concret. Au contraire, des interprétations mécaniques sont indissociables de la pratique algébrique de décomposition des système linéaires qui mathématise l'observation selon laquelle les oscillations mécaniques d'une corde lestée de n masses peuvent se décomposer en oscillations indépendantes de n cordes lestées d'une seule masse [d'Alembert 1758, p. 152-153]. Il s'agit ainsi de rechercher n oscillations propres α_i , correspondant chacune au battement d'un pendule simple, et dont des combinaisons donnent l'ensemble des solutions du système. En termes actuels, cette démarche consiste en la détermination de la base d'un espace vectoriel de dimension n par les vecteurs propres ξ_i associés aux valeurs propres α_i du système différentiel. Mais, dans les travaux de d'Alembert et Lagrange, interprétations algébriques et mécaniques ne sont pas séparées :

« Ainsi le mouvement des corps sera le même, dans ce cas, que s'ils étoient pesans, & qu'ils fussent suspendus chacun à un fil [...] ; d'où l'on voit que le système est susceptible d'autant de différens mouvemens isochrones que l'équation [en S] a de racines réelles négatives et inégales. » [Lagrange 1766, p. 241-242]

Cette articulation étroite de propriétés algébriques et mécaniques se manifeste notamment dans l'énoncé d'un critère de stabilité des oscillations en fonction de la nature algébrique des racines de l'équation en S : si toutes les racines sont réelles, négatives et distinctes, le système est stable ; si toutes les racines sont réelles, positives et distinctes, le système est instable ; enfin, en cas d'occurrence de racines multiples, « l'état d'équilibre aura seulement une *stabilité relative & conditionnelle* » [Ibid., p. 240].

Les deux premiers cas sont analogues à la situation du pendule simple. Si les racines sont négatives, les oscillations peuvent s'exprimer sous une forme trigonométrique, du type

$$\xi(t) = A \cos(\sqrt{-\alpha} t) + B \sin(\sqrt{-\alpha} t) ;$$

6. Cette expression s'identifie, à un facteur près, aux colonnes non nulles de la matrice des cofacteurs de $|A - SI|$.

elles restent bornées et se composent du battement d'oscillations périodiques. Au contraire, si les racines sont positives, les oscillations croissent exponentiellement en fonction du temps.

Dans le troisième cas, l'occurrence de racines multiples pose cependant deux types de difficultés : d'une part, la décomposition du système en n équations indépendantes semble nécessiter n oscillations propres distinctes ; d'autre part, l'expression analytique (3) peut prendre la forme $\frac{0}{0}$

si une racine multiple annule à la fois le déterminant $\Delta(S)$ et ses mineurs $\Delta_{1i}(S)$. Afin de surmonter cette difficulté, d'Alembert et Lagrange ont cherché à associer au cas des racines multiples une expression analytique spécifique. Ils ont pour cela pris modèle sur l'équation algébrique (2) associée au pendule. Dans le cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants de degré n , l'occurrence d'une racine d'ordre k fait « sortir le temps du sinus » avec une solution s'exprimant sous la forme $t^{k-1} \sin(\sqrt{-\alpha} t)$. Par analogie, Lagrange affirme que, dans le cas de l'équation en S , « il est évident que les termes de la valeur de $[\xi(t)]$ qui répondent aux racines égales contiendront toujours l'angle t , & de plus des exponentielles ordinaires, si ces racines sont positives, & des *sinus* & des *cosinus* si elles sont négatives » [1766, p. 236]. La justification de cette affirmation s'appuie sur un raisonnement consistant à introduire une variation infinitésimale afin de transformer une racine double en deux racines distinctes puis à passer à la limite⁷.

Le critère de stabilité prend ainsi appui sur un certain modèle d'interface entre physique et mathématique que d'Alembert et Lagrange transfèrent aux oscillations d'un système de corps par analogie avec le cas du pendule. Cette analogie favorise notamment des rapprochements entre l'équation (2) et l'équation en S . Ces équations sont de nos jours toutes deux dénommées « équations caractéristiques », suivant une terminologie introduite par des travaux d'Augustin-Louis Cauchy dont il sera question plus loin. Elles ne jouent pourtant pas le même rôle : l'une est associée à une équation différentielle d'ordre n , l'autre à un système de n équations. Or, contrairement au cas de l'équation (2), associée au pendule, la multiplicité des racines de l'équation en S n'a aucune conséquence sur la stabilité des oscillations. Celle-ci dépend uniquement de la possibilité de décomposer le système en équations indépendantes, opération que l'on désigne aujourd'hui comme une « diagonalisation ». Une telle diagonalisation est ici toujours possible en raison de la propriété de symétrie du système linéaire considéré ($A_{12} = A_{21}$, $A_{13} = A_{31}$, etc.), qui découle du caractère quadratique des

7. Un tel raisonnement peut être rendu mathématiquement rigoureux en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass sur l'ensemble des matrices orthogonales qui est fermé et borné dans $M_n(\mathbb{R})$.

principes de la mécanique. Contrairement aux affirmations de d'Alembert et Lagrange, chaque racine α engendre ainsi autant d'oscillations propres indépendantes que son ordre de multiplicité. Cette situation peut sembler contredire l'intuition physique ; elle participe des obstacles posés par la généralisation de la proportionnalité à la dimension n , c'est-à-dire à la notion de linéarité. Comme nous le détaillerons plus loin, les difficultés liées aux racines multiples ont joué un rôle important sur la période 1750-1850.

3. L'équation séculaire

Dans un mémoire publié dans le volume de l'Académie des sciences pour l'année 1774, Lagrange [1778] transfère aux petites oscillations des planètes – dites « inégalités séculaires » – le procédé de mathématisation appliqué aux petites oscillations d'une corde. Cette « méthode fort ingénieuse » impressionne fortement Pierre-Simon Laplace, qui l'adopte immédiatement [1775, p. 371]. Dans les années 1770-1780, les deux savants consacrent à cette question de nombreux mémoires qui ont nourri les deux grands traités de synthèse que sont la *Mécanique analytique* du premier et le *Traité de mécanique céleste* du second.

De fait, les inégalités séculaires ne portent pas les mêmes enjeux que les cordes vibrantes. Dans le second cas, les oscillations ont été supposées « toujours être extrêmement petites, par la nature du problème » ce qui implique, selon le critère de Lagrange, que les racines de l'équation en S soient réelles, négatives et inégales. La stabilité du système solaire ne peut quant à elle être présupposée mais nécessite une démonstration. Le transfert aux planètes de la mathématisation des cordes vibrantes a ainsi amené un nouvel enjeu : démontrer que les racines de l'équation en S sont toujours réelles et distinctes. Mais cet objectif s'est heurté à la grande généralité dans laquelle s'est placé Lagrange : pour un nombre n quelconque de corps, l'équation séculaire ne peut pas être écrite explicitement sous forme polynomiale et encore moins résolue par radicaux. Lagrange lui-même a observé que la généralité du problème condamne à abandonner l'espoir d'exprimer analytiquement les racines pour s'orienter vers un « artifice particulier » [Lagrange 1784, p. 265].

Un tel artifice a été découvert par Laplace en 1789. Il dérive de la propriété de symétrie des systèmes linéaires considérés qui, liée à la constance du moment cinétique, permet d'établir par un raisonnement de type mécanique que les racines de l'équation en S sont toujours réelles. Ce raisonnement joue un rôle important dans la démonstration par Laplace de la stabilité du système du monde⁸. Basé sur le critère de Lagrange, il en répercute cependant la conclusion erronée en cas d'occurrence de racines multiples.

8. Rappelons que Laplace et Lagrange négligent les termes qui dépendent du carré des masses des planètes. Cette approximation linéaire limite la durée de validité de leurs

Les implications de ces travaux quant au comportement à long terme du système solaire ont donné un retentissement considérable au modèle d'interface entre mécanique et algèbre associé à l'équation en S . Cette dernière a pour cette raison souvent été désignée au XIX^e siècle sous le nom d'« équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes », que nous abrègerons par « équation séculaire ».

II. Un mémoire de Weierstrass de 1858 : continuités et ruptures dans l'histoire de l'algèbre

Comme nous allons le voir dans cette section, la remise en cause du critère de stabilité de Lagrange dans les années 1850 a été présentée rétrospectivement comme une véritable rupture historique.

1. 1858 : une rupture ?

Cette rupture a souvent été attribuée à un mémoire publié par Weierstrass en 1858. Ce dernier prouve qu'un système linéaire symétrique peut toujours être décomposé en équations indépendantes. Ce résultat renforce la méthode de Lagrange en démontrant son caractère « homogène », c'est-à-dire sa validité indépendamment de la nature des racines de l'équation séculaire. Mais il prouve aussi le caractère erroné du critère de stabilité en cas d'occurrence de racines multiples :

« Je ne pensais pas initialement qu'une solution serait possible sans des discussions spécifiques aux nombreux cas différents qui peuvent se produire. Il me fallait espérer que la résolution du problème soit susceptible d'une méthode indifférente à la multiplicité. [...] »

Après avoir indiqué et énoncé la forme des intégrales, Lagrange a conclu que, comme les [oscillations] [...] restent toujours petites si elles le sont à l'origine, l'équation ne peut pas avoir de racines égales car les intégrales pourraient devenir arbitrairement grandes avec le temps. La même affirmation se trouve répétée chez Laplace lorsqu'il traite dans la Mécanique céleste des variations séculaires des planètes. Beaucoup d'autres auteurs, comme, par exemple, Poisson, mentionnent cette même conclusion. Mais cette conclusion n'est pas fondée [...] et [...] on peut énoncer le même résultat, que les racines de l'équation soient ou non toutes distinctes ; l'homogénéité de cette conclusion n'a pu être découverte dans le passé car on a toujours envisagé ce cas [des racines multiples] par des approches particulières. » (notre traduction) [Weierstrass 1858, p. 208 et 217-218].

prévisions ; la question de l'extension du calcul des variations séculaires à un temps indéterminé a par conséquent continué d'être très débattue au XIX^e siècle [Laskar 1992, p. 184-187].

À la suite du mathématicien Leopold Kronecker, de nombreux commentateurs ont opposé l'homogénéité du résultat de Weierstrass au manque de rigueur de travaux antérieurs qui, « durant tout un siècle », c'est-à-dire sur la période 1750-1850, auraient employé les expressions analytiques (3) sans égard pour leur domaine de validité [Kronecker 1874, p. 404]. Cette critique a eu d'importantes répercussions. Elle a notamment été reprise par l'historiographie des années 1960-1970, lorsque la rigueur a été considérée comme l'un des principaux facteurs de rupture dans les évolutions des mathématiques au XIX^e siècle. À la suite de Kronecker, Thomas Hawkins présente ainsi les travaux de Lagrange comme l'aboutissement d'une forme de « raisonnement générique » (*generic reasoning*) qui, depuis les débuts mêmes de l'écriture symbolique, aurait consisté à manipuler des expressions analytiques avec peu d'attention pour les difficultés qui peuvent apparaître en leur assignant des valeurs particulières [Hawkins 1977, p. 122-124]. Dans les années 1830-1850, de nouveaux idéaux de rigueur purement mathématiques, promus notamment par Cauchy et Weierstrass, auraient alors engendré une rupture avec une certaine forme de mathématisation basée sur l'usage d'expressions génériques. L'étude purement – ou rigoureusement – mathématique du domaine de définition des expressions analytiques viendrait corriger les représentations mécaniques qui avaient pu être prêtées à de telles expressions. À une continuité des mathématiques appliquées sur le temps long s'opposerait ainsi la rupture amenée par des travaux de mathématiques pures publiés sur un temps court.

Une telle dichotomie ne résiste pourtant pas à une analyse plus fine des problématiques posées par l'équation séculaire. Il faut tout d'abord remarquer que la critique de Kronecker est abusive. De fait, comme nous l'avons déjà évoqué, d'Alembert et Lagrange avaient tous deux bien identifié l'occurrence de racines multiples comme un cas singulier pour lequel une méthode spécifique devait se substituer à l'usage des expressions analytiques générales. À y regarder de plus près, la critique de Kronecker tient surtout à la valorisation d'un nouvel enjeu, celui de l'homogénéité des méthodes employées. Or, la manière par laquelle des acteurs définissent l'homogénéité de certaines branches des mathématiques implique souvent une certaine écriture de l'histoire. L'extrait du mémoire de Weierstrass cité plus haut témoigne bien de ce que la nouveauté du résultat qu'il donne ne se présente comme une rupture qu'en construisant une continuité entre les travaux de Lagrange, Laplace, Siméon-Denis Poisson et « beaucoup d'autres auteurs » au motif que les méthodes employées par ces derniers n'étaient pas « homogènes ». Lorsque Kronecker reprend à son tour cette dichotomie, c'est dans l'objectif d'affirmer l'importance d'une nouvelle organisation des savoirs, la théorie des formes bilinéaires [Brechenmacher 2007a]. La reprise de ce discours par l'historiographie des années 1970 vise quant à elle à identifier rétrospectivement une certaine branche des

sciences mathématiques en germe dans les travaux de Weierstrass, l'algèbre linéaire : « His work demonstrated the possibility of dealing by the methods of analysis with the non-generic case [...]. The rise of the theory of [spectral] matrices was directly related to the fall of the generic approach to algebraic analysis. » [Hawkins 1977, p. 156, 159]

Les ruptures et continuités qui se présentent ici tiennent davantage aux délimitations entre différentes branches des sciences mathématiques qu'à des processus historiques. Leur caractère rétrospectif participe d'ailleurs de la rupture prêtée au mémoire de Weierstrass : en raison de son caractère fondateur en algèbre linéaire, celui-ci a souvent été considéré comme isolé dans l'œuvre de son auteur, essentiellement consacrée à l'analyse. Ce mémoire ne trouverait de motivation que dans l'universalité des nouveaux idéaux de rigueur par lesquels Weierstrass se singulariserait de ses prédécesseurs. Le couple rupture/continuité renvoie ainsi à une certaine tension entre créativité individuelle et dimensions collectives dans les dynamiques des savoirs mathématiques.

2. Catégories d'analyse et dynamiques collectives des mathématiques

Nous avons vu que les ruptures et continuités associées à l'histoire de l'équation séculaire sont indissociables de la manière dont les sciences mathématiques sont fragmentées en branches, théories, disciplines, etc. L'accent mis sur la rigueur participe notamment de discours sur l'autonomisation de certaines formes d'organisations des savoirs – analyse, théorie des formes bilinéaires, algèbre linéaire – par rapport à la mécanique.

La critique que nous portons ici ne vise pas à prétendre que de telles ruptures sont fictives mais à questionner les échelles d'analyses auxquelles ces dernières s'avèrent pertinentes. Le principal problème que pose en effet une histoire comme celle que présente Kronecker est que cette dernière présuppose que les dynamiques des savoirs mathématiques ont lieu dans un espace et un temps, certes scandés par des ruptures, mais présentant un caractère homogène. Or les catégories qui structurent cette histoire sont loin d'avoir été universellement partagées par les contemporains de Kronecker [Brechenmacher 2007a]. Ce constat nous incite à porter une attention particulière à la multiplicité des espaces dans lesquels évoluent les mathématiques, à commencer par les différentes formes d'organisations des savoirs.

Considérons en premier lieu l'exemple de la mécanique céleste. Nous avons vu que cette branche des sciences mathématiques est celle par laquelle le critère de stabilité de Lagrange a acquis une grande notoriété. Mais c'est aussi dans ce cadre que la rupture avec ce critère a été la plus rapide, sans pour autant être définitive. De fait, dès 1808, Poisson a proposé

un nouveau critère de stabilité basé sur la prise en compte de termes non linéaires. Par contraste avec l'approximation linéaire de Lagrange, de nombreux travaux ont par la suite associé la stabilité à l'obtention de développements en séries strictement périodiques dont les premiers termes décroissent rapidement [Roque 2011]. Cette convergence des séries au sens des astronomes n'implique pourtant pas la convergence mathématique, comme l'a montré Henri Poincaré en revenant, dans les années 1880, à la « stabilité au sens de Lagrange » [Brechenmacher à paraître]. Dans le cas de la mécanique céleste, l'affirmation d'une certaine rigueur dans la manipulation des séries s'est ainsi ancrée dans une continuité avec les travaux de Lagrange.

Changeons à nouveau de cadre pour considérer cette fois la mécanique des figures d'équilibre. D'Alembert et Lagrange avaient eux-mêmes transféré leur discussion de la stabilité des petites oscillations à celle de corps solides ou fluides en rotation. Cette problématique a donné lieu à de très nombreux développements au XIX^e siècle, parmi lesquels les travaux de Carl Gustav Jacobi, Joseph Liouville, Bernhard Riemann ou Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet⁹. Dans ce contexte, comme dans celui de la mécanique céleste, le travail de Weierstrass n'a provoqué aucune rupture. En 1870 l'astronome Antoine Yvon-Villarceau interpellait encore à ce sujet ses collègues géomètres de l'Académie des sciences de Paris. Relevant une « incorrection » dans le critère de Lagrange, Villarceau n'y voyait cependant pas un manque de rigueur. Son intérêt se portait surtout sur l'interaction entre stabilité mécanique et nature algébrique des racines : dans le cas de la rotation d'un solide, la stabilité ne garantit pas l'inégalité des racines [Yvon-Villarceau 1870, p. 766]. Autrement dit, Yvon-Villarceau parvenait à une conclusion identique à celle énoncée auparavant par Weierstrass mais en s'appuyant sur des considérations strictement mécaniques.

Analyse, algèbre linéaire, mécanique céleste, figures d'équilibres, etc., ces catégories conditionnent, souvent implicitement, des échelles d'analyse et par-là différentes ruptures et continuités. Mais ce constat ne doit pas nous mener à affirmer l'existence, sur la période 1750-1850, d'espaces disciplinaires autonomes les uns des autres. Il nous faut plutôt questionner la pertinence de telles catégories disciplinaires pour saisir les dynamiques collectives d'évolutions des savoirs. De fait, la postérité des travaux de Lagrange sur l'équation séculaire ne se limite de toute évidence pas à la réception d'une méthode dans un cadre théorique donné. Comme tout grand traité, la *Mécanique analytique* a fait l'objet de lectures multiples et fragmentées, susceptibles d'instaurer des perceptions contradictoires de ce qui est rupture ou continuité.

9. Voir [Lützen 1984].

Nous proposons à présent de changer d'échelle d'analyse en portant notre attention aux dimensions collectives des lectures des travaux de Lagrange sur le temps long. Ce faisant, nous verrons que la lecture de Weierstrass elle-même présente bien des continuités, tant au sein de l'œuvre de ce dernier qu'avec certaines dynamiques collectives qui lui sont contemporaines.

III. L'équation séculaire comme culture mathématique

Si l'on trouve de très nombreuses références à l'équation séculaire tout au long du XIX^e siècle, ces références manifestent rarement des préoccupations en mécanique céleste. Citons-en quelques exemples. Cauchy [1829] intitule « Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes » un mémoire qui s'inscrit dans le contexte de la géométrie analytique des coniques et quadriques. Sylvester [1852] choisit quant à lui de publier ses travaux pionniers sur la théorie des matrices sous le titre « Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes ». Citons encore la formulation abrégée par laquelle Hermite désigne des travaux de Borchardt [1846] sur la représentation d'un nombre entier par une somme de quatre carrés : « mémoire sur l'équation à l'aide de laquelle, etc. » [1857, p. 271].

Bien qu'ils se placent dans des cadres théoriques très variés, ces travaux ne sont pas indépendants les uns des autres. Au contraire, ils se font le plus souvent explicitement référence et forment ainsi un réseau de textes qui présente une cohérence forte jusque dans les années 1850¹⁰.

1. Un réseau de textes

Afin de donner un aperçu de ce réseau, nous distinguerons en première approche trois grandes périodes par la ou les principales références autour desquelles les textes s'organisent.

Les travaux de Lagrange sur l'équation séculaire constituent le principal nœud du réseau jusque dans les années 1820. Durant cette première période, la plupart des textes sont publiés à Paris et abordent des thématiques de physique mathématique. La pratique de décomposition des systèmes linéaires par factorisation de l'équation séculaire s'y transfère à de nombreux problèmes : rotation d'un corps solide, mécanique des fluides, ellipsoïdes de pression de la théorie de l'élasticité, théorie de la lumière de Fresnel, travaux de Fourier sur la chaleur, etc.

10. La construction de ce réseau est détaillée dans [Brechenmacher 2007b], qui en propose également une représentation graphique simplifiée.

Dans les années 1830-1840, le mémoire [Cauchy 1829] s'affirme comme un second nœud au sein du réseau de références. Durant cette période, les thématiques mathématiques liées à l'équation séculaire se multiplient : théorème de Sturm sur le nombre de racines réelles d'une équation algébrique, axes principaux des coniques et quadriques en géométrie analytique, théorie des résidus en analyse complexe, théorie algébrique des formes quadratiques, théorie des matrices, etc. Les lieux de publications des textes s'étendent également aux grandes académies et universités européennes : Berlin, Göttingen, Cambridge, Londres, Saint-Petersbourg, etc.

Enfin, à partir des années 1850, la cohérence du réseau de l'équation séculaire se fragmente avec l'autonomisation progressive de trois groupes de textes. Deux de ces groupes présentent un ancrage institutionnel et géographique : la théorie des matrices se développe surtout à Cambridge à la suite de publications de Sylvester tandis que les travaux de Weierstrass dont il a été question plus haut sont au cœur du développement de la théorie des formes bilinéaires à Berlin. S'articulant autour de la théorie algébrique des formes quadratiques d'Hermite, un troisième groupe de textes conserve quant à lui une diversité de lieux de publications à l'échelle européenne.

Avant d'aller plus loin dans l'analyse de notre espace intertextuel, il nous faut tout d'abord en préciser le statut vis-à-vis de notre méthode d'enquête historique¹¹. Notre objectif n'est pas en effet de réifier le réseau de l'équation séculaire. Sa construction tient moins de celle d'un objet d'étude que d'une discipline d'organisation et d'exploitation des sources historiques [Brenchenmacher 2007b]. Porter une attention aux références intertextuelles donne notamment accès à des significations implicites aux textes étudiés. Le terme « équation séculaire », dont la signification change profondément entre la fin du XVIII^e siècle et le premier tiers du XIX^e siècle, en est un bon exemple. À partir des années 1820, cette expression ne fait plus référence à la mécanique céleste mais identifie implicitement une certaine pratique mathématique partagée. Cette évolution n'est pourtant jamais explicitée ; elle ne peut être saisie que par une attention aux liens qu'entretiennent entre eux les textes qui emploient ce terme. L'approche intertextuelle présente ainsi un potentiel heuristique : elle permet de découvrir certaines dynamiques collectives des mathématiques qui ne correspondent pas à des catégories usuelles comme les disciplines, théories, nations, institutions, etc.

Mais quelle est alors la nature de la dimension collective des références à l'équation séculaire ? Afin d'analyser plus avant la continuité sous-jacente à l'ensemble discret de textes de notre réseau, il nous faut à présent examiner son second nœud principal après la *Mécanique analytique* de Lagrange.

11. Pour une discussion plus générale sur cette question, voir [Goldstein 1999].

2. Cauchy et l'équation séculaire

Publié en 1829, le mémoire de Cauchy « Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes » s'insère dans un ensemble de travaux portant sur la classification des surfaces du deuxième degré et motivés par différents facteurs : enseignement de la géométrie analytique à l'École polytechnique, développement de la théorie de l'élasticité en lien avec les recherches de Fresnel sur la double réfraction de la lumière [Dahan Dalmedico 1992], ainsi que l'approche analytique des problèmes physiques développée par Sturm à la suite de Fourier.

Le rôle de Sturm s'avère décisif. Ce dernier s'est beaucoup intéressé à l'équation séculaire dans le contexte de ses recherches sur les équations différentielles linéaires. Sa réflexion s'est notamment portée sur la règle des signes de Descartes, qui donne une approximation du nombre de racines réelles d'une équation algébrique et qui avait été généralisée par Fourier quelques années auparavant aux équations transcendantes rencontrées dans des problèmes de mécanique céleste, cordes vibrantes, théorie de la chaleur, propagation des ondes, etc. Cette réflexion a donné lieu à l'énoncé du « théorème de Sturm » sur le nombre de racines réelles d'une équation algébrique [Sinaceur 1992]. En 1829, Sturm a tenté d'employer ce théorème pour démontrer que les racines de l'équation séculaire sont toujours réelles. Comme ses prédécesseurs, il s'est cependant heurté au cas d'occurrence d'une racine multiple, problème que Sturm [1829, p. 317] a tenté de surmonter en séparant les racines des différents polynômes intervenant dans l'expression analytique (3). Cette approche a été poursuivie peu après par Cauchy.

Malgré son intitulé, le mémoire de ce dernier ne propose aucune réflexion sur les attractions à n corps de la mécanique céleste. Sa référence à l'équation séculaire vise principalement à généraliser à une situation à n variables, légitime dans un cadre mécanique, des méthodes géométriques développées pour 2 ou 3 variables. Ce texte s'appuie pour cela sur l'analogie formelle qu'avait pointée Sturm entre l'équation séculaire et l'« équation caractéristique » employée par Cauchy pour déterminer les axes principaux des coniques et, plus généralement, des « fonctions homogènes du second degré » à coefficients réels (c'est-à-dire des formes quadratiques) [Hawkins 1975, p. 22]. L'expression analytique (3) donne en effet les coordonnées de la base orthonormée d'axes principaux dans laquelle la fonction homogène considérée,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + \dots \\ + A_{nn}x_n^2 + 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{13}x_1x_3 + \dots,$$

s'exprime comme une somme de carrés

$$(4) \quad f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \Delta_{n-1} y_1^2 + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_n^2,$$

dont les coefficients sont donnés par des quotients des mineurs principaux extraits du déterminant engendrant l'équation séculaire.

En revisitant sous un tel angle géométrique l'approche de Lagrange, Cauchy établit la première démonstration mathématique de la nature réelle des racines de l'équation séculaire. Mais comme le constate ce dernier, cette preuve n'est pas valable en cas d'occurrence de racines multiples, pour lequel les expressions (3) et (4) sont susceptibles de prendre la forme $\frac{0}{0}$. La localisation des racines des polynômes Δ_i tentée par Cauchy à la suite de Sturm ne permet pas de surmonter cette difficulté.

Face à ce problème, Cauchy ne s'est cependant pas contenté de critiquer la généralité abusive que certains mathématiciens prêtent aux expressions analytiques mais s'est détourné des méthodes algébriques en élaborant son calcul des résidus. Considérer l'inconnue S comme une variable dans le plan complexe permet en effet de reformuler le problème de la multiplicité des racines en terme d'étude des pôles de la fonction méromorphe (4). Grâce à cette approche, Cauchy publie dans [1839] une expression homogène des solutions ξ_i indépendamment de toute considération sur la multiplicité des racines α_i

$$\xi_i(t) = \sum_{j,k=1}^n \alpha_j \operatorname{Res}_{s=\alpha_k} \left[\frac{\Delta_{1i}(s)}{\Delta(s)} \right] e^{st},$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$. Nous avons observé que l'interprétation géométrique par Cauchy des procédures de Lagrange présente un lien fort avec des problématiques récentes de physique mathématique. Comme nous allons le voir à présent, cette ouverture thématique a non seulement inspiré de nombreux travaux académiques mais aussi suscité un intérêt important dans le champ de l'enseignement. Le mémoire de 1829 a ainsi participé à transformer la nature de la dynamique collective portée par l'équation séculaire. Tandis que celle-ci se limitait jusqu'alors à un espace de circulation de certaines procédures portant sur des systèmes différentiels provenant de problèmes mécaniques, le travail de Cauchy a contribué à agréger une culture mathématique spécifique, transversale à de nombreux cadres théoriques, et largement partagée à l'échelle européenne.

Loin du rôle de rupture que lui a souvent attribué l'historiographie, Cauchy apparaît ici comme un important facteur de continuité dans l'histoire de l'équation séculaire. Par ailleurs, si la rigueur dont fait preuve ce dernier manifeste l'autonomisation indéniable de certaines problématiques, comme l'analyse purement mathématique des domaines de définition des expressions analytiques, nous avons vu que cette rigueur n'est pas sans

présenter un lien subtil avec des enjeux de mathématiques appliquées développés par Sturm à la suite de Fourier.

3. Une culture mathématique commune

Revenons à présent au réseau de l'équation séculaire. Sur la période 1820-1850, et particulièrement à la suite des travaux de Cauchy, le réseau se présente comme un support d'interactions concrètes entre individus et groupes d'individus. Il génère ainsi ce que l'on peut considérer comme une culture mathématique spécifique, qui se caractérise par un système d'éléments interconnectés que nous allons à présent préciser¹².

Le premier de ces éléments consiste en l'emploi d'une forme de représentation spécifique, la représentation analytique. De fait, la possibilité d'exprimer les solutions de divers problèmes par des représentations analytiques explicites est l'un des grands enjeux du modèle de linéarisation porté par l'équation séculaire. Ce modèle concerne notamment la mathématisation de situations mécaniques sans pour autant s'y limiter ; il intervient également dans d'autres branches des sciences mathématiques comme la théorie des formes quadratiques ou la théorie des groupes finis [Brechenmacher 2011]. Certes, l'usage d'expressions polynomiales (et de leurs extensions aux sommes et produits infinis) était courant sur la période 1750-1850 et il est bien connu que leur portée a progressivement été remise en cause en lien avec les évolutions de la notion de fonction et l'émergence de la théorie des ensembles. Mais dans le cas de l'équation séculaire, ces représentations jouent un rôle spécifique : celles-ci s'avèrent en effet indissociables de procédures algébriques prenant modèle sur la factorisation des polynômes et par analogie avec lesquelles Lagrange avait décomposé les systèmes linéaires d'équations différentielles.

Notre réseau de textes ne se limite pas pour autant à un espace de circulation de certaines procédures polynomiales. Ces procédés s'accompagnent d'un idéal de généralité visant à traiter des situations à n variables et dont nous avons vu l'importance dans la légitimation du mémoire de Cauchy de 1829. Cette généralité fonde le caractère particulier de l'équation séculaire : cette dernière étant de degré n , elle ne peut être résolue par radicaux

12. La notion de culture est employée ici au sens de l'approche particulariste et interactionniste développée en sciences sociales. Il s'agit de considérer des cultures particulières, à la différence de l'approche universaliste de la Culture, souvent opposée à la Nature. Le lieu de chaque culture particulière n'est pas défini par des caractères *a priori* (géographiques, institutionnels, etc.) mais par un système d'interactions entre individus et groupes d'individus. Une culture est alors un ensemble de significations qui se communique à travers un jeu d'interactions dans un contexte donné. Voir [Brechenmacher à paraître].

mais la nature réelle de ses racines peut néanmoins être déduite de la symétrie des systèmes linéaires qui l'engendrent.

Tout au long du XIX^e siècle, la spécificité de l'équation séculaire a suscité des analogies et ainsi permis des transferts entre différentes branches des sciences mathématiques. Nous avons déjà évoqué comment Cauchy a réinterprété la représentation mécanique sous-jacente aux procédés de Lagrange en terme de changements de repères en géométrie analytique. Plus tard encore, ces mêmes procédés ont servi de modèle aux petites oscillations de la théorie de la lumière ; ils ont été intégrés aux calculs de résidus de l'analyse complexe, aux suites de Sturm d'une équation algébrique, aux classes d'équivalence des couples de formes quadratiques, etc. La culture de l'équation séculaire s'accompagne ainsi d'une forme spécifique d'organisation des savoirs qui valorise les liens entre certaines branches des sciences mathématiques via des situations de linéarité.

La forte valorisation des problèmes posés par les racines multiples est une autre valeur véhiculée par la culture de l'équation séculaire. La multiplicité des racines y porte des enjeux semblables aux racines imaginaires et participe au développement de l'analyse complexe. Comme nous l'avons vu, c'est en effet en réponse aux problèmes posés par les racines multiples que Cauchy a élaboré son calcul des résidus.

4. Continuités, ruptures et dynamiques des savoirs mathématiques

L'un des intérêts de la notion de culture intertextuelle pour analyser l'histoire de l'équation séculaire est que cette notion présente un caractère dynamique qui rend bien compte de certaines tensions entre l'individuel et le collectif. De fait, si une telle culture présente des éléments de continuité, comme les représentations, procédures, idéaux et valeurs listés précédemment, ceux-ci sont toujours concrètement incorporés par des individus, qui sont autant de facteurs de ruptures potentielles. Une telle culture intertextuelle participe ainsi de la diversité culturelle inhérente à chaque individu ; elle ne se présente jamais seule mais toujours en interaction avec d'autres dimensions collectives, ancrées dans des espaces disciplinaires, sociaux ou institutionnels. Nous proposons à présent d'examiner trois exemples de cette situation avec des travaux menés dans les années 1850 par Sylvester, Hermite et Weierstrass. Ces travaux sont liés les uns aux autres et partagent l'objectif de reformuler l'approche de Cauchy dans un cadre purement algébrique. Ils s'inscrivent ainsi tous dans la continuité de la culture de l'équation séculaire qu'ils mettent en interface avec différents contextes.

Comme premier exemple, considérons un cas d'acculturation à l'équation séculaire dans un espace institutionnel spécifique. Au début des années 1840, les premiers numéros du *Cambridge Mathematical Journal* pré-

sentent une proportion importante d'articles visant à inscrire les travaux de Cauchy de 1829 dans l'enseignement des mathématiques à Cambridge. Bien que la plupart de ces publications ne contiennent aucun résultat nouveau, ce processus d'acculturation donne lieu à une synthèse locale originale. Des innovations en émergent plusieurs années plus tard. La notion de « matrice » est ainsi introduite par Sylvester en 1850 comme un type de « forme » algébrique distinguée des déterminants qu'elle est susceptible d'engendrer – ses « mineurs » – comme par une filiation parentale. Cette distinction a pour objectif d'analyser le lien entre l'ordre de multiplicité d'une racine de l'équation séculaire et l'occurrence de facteurs communs entre les différents polynômes impliqués dans les expressions (3) et (4). Peu après avoir introduit cette terminologie, Sylvester rédige en français une synthèse de ses travaux dans une publication pour les *Nouvelles annales de mathématiques* intitulée « Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes » [1852]. Cet ancrage dans la culture de l'équation séculaire assure aux mineurs et aux matrices une circulation rapide sur le continent européen, notamment au sein de travaux d'Hermite sur les formes algébriques ou de Riemann sur les équations différentielles linéaires.

Mais les matrices de Sylvester portent aussi des enjeux d'algèbre symbolique spécifiques à l'institution universitaire de Cambridge [Durand-Richard 1996]. Or, contrairement à la distinction entre matrice et mineurs ancrée dans la culture de l'équation séculaire, la problématique des lois d'opérations sur les matrices n'a pas circulé sur le continent avant plusieurs décennies. Sylvester lui-même évite d'inclure dans ses publications continentales les considérations d'algèbre symbolique qu'il développe simultanément dans des journaux britanniques. Le contexte d'interface entre culture intertextuelle et espace institutionnel impose ainsi des règles, conventions et attentes aux individus. Le couple continuité/rupture prend là une signification particulière, couramment désignée sous le nom de « principe de coupure » : les individus sont capables de découper leur propre espace social en plusieurs composantes distinctes, parfois même autonomes, au sein desquelles ils agissent de manières différentes [Bastide 1971]. Pour cette raison, les processus d'acculturations, comme celui que nous venons d'examiner, peuvent induire des discontinuités dans les temps et espaces expérimentés par les individus.

Nous allons à présent considérer avec des travaux d'Hermite un exemple d'interaction entre différentes formes d'organisations collectives des savoirs. Ces travaux sont fortement liés à ceux de Sylvester. Ils portent sur la relation que sous-tend l'équation séculaire entre les formes quadratiques et le théorème de Sturm. Comme l'a montré Cauchy, les procédés de Lagrange permettent de réduire une forme quadratique en une somme de carrés. Hermite et Sylvester montrent que le nombre d'alternances de

signes positifs et négatifs dans l'expression (4) est un invariant (loi d'inertie) qui donne le nombre de racines de l'équation séculaire. Généralisée à une équation algébrique quelconque, cette approche permet d'obtenir une preuve purement algébrique du théorème de Sturm [Sinaceur 1991, p. 124-133]¹³.

Malgré leur proximité, les approches de Sylvester et Hermite diffèrent en leur détail. Ce dernier s'intéresse particulièrement à l'analogie entre la transformation en carrés d'une forme quadratique à coefficient réels et la réduction arithmétique des formes quadratiques à coefficients entiers. Il introduit ainsi une distinction entre la « théorie arithmétique des formes », héritée de Gauss, et la « théorie algébrique des formes », liée à l'équation séculaire – le qualificatif « algébrique » provenant du lien entre cette équation et le théorème de Sturm. Cette approche témoigne d'une interface entre la culture de l'équation séculaire et une dynamique collective spécifique à la période 1830-1850, le champ de recherche de l'« analyse algébrique arithmétique » [Goldstein & Schappacher 2007]. Ce champ est fortement marqué par la réception des travaux arithmétiques de Gauss sans pour autant s'identifier à une discipline ; les travaux qui s'y inscrivent entretiennent des liens multiples entre différentes branches des mathématiques *via* des équations particulières comme l'équation cyclotomique, l'équation modulaire ou l'équation séculaire.

La théorie algébrique des formes d'Hermite présente une synthèse originale entre ce champ de recherche et une certaine image de l'Analyse qui avait été intégrée dans la culture de l'équation séculaire par les travaux de Sturm et Cauchy. Cette originalité se manifeste dans la redéfinition de la notion de racine multiple : une racine est dite de multiplicité p si tous les mineurs d'ordre $p - 1$ du déterminant caractéristique Δ s'annulent. Cette définition permet non seulement de surmonter les problèmes posés par la multiplicité mais aussi, et surtout, d'analyser la variation du nombre de racines d'une équation en fonction de ses coefficients. On la trouve utilisée de la sorte par de nombreux épigones d'Hermite comme Gaston Darboux, en géométrie différentielle, Edmond Laguerre, pour les équations différentielles, ou encore Poincaré en mécanique céleste. Ces utilisations visent souvent à transférer la notion de racine multiple des équations algébriques aux équations différentielles ou transcendantes, mêlant par là l'idéal de généralité propre à l'équation séculaire à l'héritage d'une approche prônée par Fourier et Sturm, selon laquelle le dénombrement des racines donne lieu à une « notion générale » d'analyse en tant qu'il concerne les « équations en elles-mêmes », que celles-ci soient algébriques, transcendantes ou différentielles [Brehenmacher à paraître].

13. Sur la théorie des formes d'Hermite, voir [Goldstein 2007, p. 391-396].

À la lumière des deux exemples que nous avons donnés ci-dessus, le mémoire de Weierstrass de 1858 est bien loin de se présenter comme une œuvre isolée, porteuse d'une rupture dans un paysage encore dominé par l'usage d'expressions analytiques génériques. Comme Hermite et Sylvester, Weierstrass cherche à donner un caractère algébrique à l'approche de Cauchy. Il privilégie cependant un autre aspect que le théorème de Sturm en s'intéressant à la question de l'homogénéité des preuves données à la réalité des racines de l'équation séculaire. Cet intérêt ne témoigne pas seulement d'une préoccupation purement mathématique envers une plus grande rigueur ; il s'avère surtout motivé par un travail récent de Lejeune-Dirichlet en 1853 sur le critère de Lagrange appliqué aux figures d'équilibre. Dans ce contexte, Weierstrass revisite le calcul des résidus de Cauchy à la lumière des travaux sur les formes quadratiques dont il a été question plus haut. Il démontre ainsi que, dans le cas quadratique, l'expression (3), envisagée comme fonction du plan complexe, admet toujours des pôles simples : une racine s_i de multiplicité $\mu - 1$ des mineurs $\Delta_{1i}(S)$ est nécessairement une racine de multiplicité μ de l'équation séculaire $\Delta(S) = 0$. Autrement dit, les expressions analytiques de Lagrange sont toujours bien définies, quelle que soit la multiplicité des racines de l'équation séculaire.

L'approche de Weierstrass est à la base d'une acculturation spécifiquement berlinoise de la culture de l'équation séculaire sous la forme de l'autonomisation progressive d'un nouveau cadre théorique : la théorie des formes bilinéaires. Mais nous pouvons à présent inscrire cette évolution dans une dynamique plus générale, celle de la fragmentation de la culture de l'équation séculaire dans les années 1850 au profit de diverses cultures algébriques locales. Ces dernières s'identifient toutes à un cadre théorique centré sur un objet – formes quadratiques, matrices, formes bilinéaires – et s'articulent chacune autour d'un auteur différent – Hermite, Sylvester, Weierstrass. En suivant le point de vue de Kronecker, chacun de ces auteurs pourrait être présenté comme ayant provoqué une rupture dans l'histoire de l'algèbre. Le terme de « rupture » paraît cependant peu pertinent pour rendre compte de fragmentations multiples, locales et dont aucune n'a été perçue de manière homogène comme une coupure brutale.

Conclusion

Nous avons insisté dans cet article sur le fait que la mise en avant d'une rupture ou d'une continuité présente souvent un caractère relatif à certaines formes d'organisations collectives des savoirs. Il s'agit là d'un enjeu particulièrement important dans le cas de l'algèbre linéaire qui ne se constitue comme une discipline que bien après la période 1750-1850. Pour surmonter cette difficulté, nous avons eu recours à une étude inter-

textuelle qui nous a permis d'identifier un espace de circulation de procédés, représentations, idéaux, valeurs et formes d'organisations des savoirs. Trouvant son origine dans un certain modèle d'interface entre mécanique et algèbre, cet espace a engendré une culture mathématique spécifique sur la période 1820-1850.

La notion de culture intertextuelle nous a permis de saisir une dimension collective des mathématiques qui ne s'identifie pas à une discipline ou à un espace social bien qu'elle présente des interfaces constantes avec d'autres formes d'organisations collectives des textes et des acteurs. Cette culture permet notamment la coexistence de différentes manières de penser et d'agir à partir des textes qui la constituent. Pour cette raison, les éléments de continuité sur le temps long de la culture de l'équation séculaire constituent eux-mêmes des facteurs de fragmentations. Nous avons vu comment différentes acculturations entre l'équation séculaire et des institutions, journaux, ou champs de recherches, ont suscité des évolutions différentes sans pour autant provoquer de rupture brutale. Dans de nombreux manuels d'enseignement, les références à l'équation séculaire ont continué à jouer un rôle important jusqu'à l'émergence, durant la première moitié du xx^e siècle, d'une culture partagée, celle de l'algèbre linéaire. Rétrospectivement, la période 1850-1950 peut ainsi être considérée comme une période de mutation culturelle durant laquelle il est possible d'identifier différentes cultures algébriques locales qui, bien que distinctes, ne sont jamais complètement autonomes, et dont le principal lieu d'interaction reste bien souvent la persistance de références à l'équation séculaire [Brechenmacher 2010].

Sur la période 1750-1850, l'histoire de l'équation séculaire peut sembler présenter l'exemple emblématique d'une rupture entre de nouveaux idéaux de rigueur, purement mathématiques, et la continuité sur le temps long d'une certaine forme de mathématisation basée sur l'usage d'expressions analytiques. Une telle conception de la dynamique des savoirs mathématiques peut séduire par sa compatibilité avec certaines catégories souvent mobilisées par l'historiographie : autonomisation de disciplines purement mathématiques à partir de problématiques issues des mathématiques mixtes (algèbre linéaire), idéaux épistémiques (rigueur), singularité de certains individus (Weierstrass), écoles géographiquement situées (Berlin), tendances nationales (algèbre allemande), etc. Nous avons vu que cette perspective est néanmoins propre à une certaine culture algébrique locale qui se développe à une époque où de multiples autres lignes de fragmentations apparaissent au sein de la culture de l'équation séculaire. Chacune de ces lignes s'accompagne de légitimations distinctes de ce qui est important, nouveau, ou en rupture : rigueur dans la manipulation des expressions analytiques, universalité des lois de l'algèbre symbolique ou connections entre différents domaines *via* des équations particulières. Mais

tous ces aspects présentent aussi une certaine continuité avec la culture de l'équation séculaire, son idéal de généralité, sa valorisation des difficultés posées par les racines multiples ainsi que son interface avec des problématiques de mathématiques mixtes. Malgré l'autonomisation indéniable de théories mathématiques, dites « pures », cette interface reste bien présente sur toute la période 1750-1850 comme nous l'avons vu avec l'ancrage subtil des travaux de Cauchy et Weierstrass dans des problématiques de physique mathématique.

BIBLIOGRAPHIE

- [d'Alembert 1743/1758] Jean le Rond d'Alembert, *Traité de dynamique*, 1^{re} éd., Paris, 1743 ; 2^{de} éd., 1758.
- [Bastide 1971] Roger Bastide, *Anthropologie appliquée*, Paris : Payot, 1971.
- [Borchardt 1846] Carl Wilhelm Borchardt, « Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hülfe man die secularen Störungen der Planeten bestimmt », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 30 (1846), p. 38-45.
- [Brechenmacher 2007a] Frédéric Brechenmacher, « La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker », *Revue d'histoire des mathématiques*, 13 (2007), p. 187-257.
- [Brechenmacher 2007b] F. Brechenmacher, « L'identité algébrique d'une pratique portée par la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes (1766-1874) », *Sciences et techniques en perspective*, 2^e série, 1 (2007), p. 5-85.
- [Brechenmacher 2010] F. Brechenmacher, « Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques », *Revue de Synthèse*, 6^e série, 4 (2010), p. 569-603.
- [Brechenmacher 2011] F. Brechenmacher, « Self-portraits with Evariste Galois (and the shadow of Camille Jordan) », *Revue d'histoire des mathématiques*, 17/2 (2011), p. 271-369.
- [Brechenmacher à paraître] F. Brechenmacher, « The algebraic cast of Poincaré's *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* », à paraître.
- [Cauchy 1829] Augustin-Louis Cauchy, « Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes », *Exercices de mathématiques*, 4 (1829), p. 140-160 ; *Œuvres complètes*, 2^e série, t. 9, p. 174-195.
- [Cauchy 1839] A.-L. Cauchy, « Mémoire sur l'intégration des équations linéaires », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 8 (1839), p. 369-373 ; *Œuvres complètes*, 1^{re} série, t. 11, p. 202-211.
- [Dahan Dalmedico 1992] Amy Dahan Dalmedico, *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'École française*, Paris : Blanchard, 1992.
- [Durand-Richard 1996] Marie-José Durand-Richard, « L'École algébrique anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance », dans C. Goldstein, J. Gray et J. Ritter (dir.), *L'Europe mathématique. Histoires, Mythes, Identités*, Paris : Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1996, p. 445-477.
- [Firode 2001] Alain Firode, *La dynamique de D'Alembert*, Paris : Vrin, 2001.

- [Gilain 2008] Christian Gilain, « Mathématiques mixtes et mathématiques pures chez d'Alembert : le cas des systèmes différentiels linéaires », *Archives internationales d'histoire des sciences*, 58 (2008), p. 99-131.
- [Goldstein 1999] Catherine Goldstein, « Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914) », *Acta historiae rerum necnon technicarum*, 3 (1999), p. 187-214.
- [Goldstein 2007] C. Goldstein, « The Hermitian Form of Reading the Disquisitiones », dans C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer (éd.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Springer, 2007, p. 377-410.
- [Goldstein & Schappacher 2007] Catherine Goldstein et Norbert Schappacher, « Several Disciplines and a Book (1860-1901) », dans C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer (éd.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Springer, 2007, p. 67-106.
- [Hawkins 1975] Thomas Hawkins, « Cauchy and the Spectral Theory of Matrices », *Historia Mathematica*, 2 (1975), p. 1-29.
- [Hawkins 1977] T. Hawkins, « Weierstrass and the Theory of Matrices », *Archive for History of Exact Sciences*, 17 (1977), p. 119-163.
- [Hermite 1857] Charles Hermite, « Sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynômes homogènes du second degré », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 53 (1857), p. 271-274 ; *Œuvres*, 1, p. 429-433.
- [Kronecker 1874] Leopold Kronecker, « Über Schaaren von quadratischen Formen », *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, année 1874 (1875), p. 59-76 ; *Werke*, 1, p. 349-413.
- [Lagrange *Œuvres*] Joseph-Louis Lagrange, *Œuvres*, 14 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1867-1892.
- [Lagrange 1766] J.-L. Lagrange, « Solution de différens problèmes de calcul intégral », *Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société royale de Turin. Pour les années 1762-1765*, 3 (1766), p. 179-380 ; *Œuvres*, t. I, p. 471-668.
- [Lagrange 1778] J.-L. Lagrange, « Recherches sur les équations séculaires des mouvemens des nœuds, et des inclinaisons des orbites des Planètes », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1774 (1778), p. 97-174 ; *Œuvres*, t. VI, p. 635-709.
- [Lagrange 1784] J.-L. Lagrange, « Théorie des variations séculaires des élémens des Planetes. Seconde Partie », *Nouveaux mémoires de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1782 (1784), p. 169-292 ; *Œuvres*, t. V, p. 201-344.
- [Lagrange 1788] J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris, 1788 ; *Œuvres*, t. XI-XII.
- [Laplace 1775] Pierre-Simon Laplace, « Mémoire sur les Solutions particulières des Équations différentielles, & sur les inégalités séculaires des Planètes », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1772, Première partie (1775), p. 343-377 ; *Œuvres*, 8, p. 325-366.
- [Laskar 1992] Jacques Laskar, « La stabilité du système solaire », dans A. Dahan Dalmedico, J.-L. Chabert et K. Chemla (dir.), *Chaos et déterminisme*, Paris : Seuil, 1992, p. 170-212.
- [Lützen 1984] Jesper Lützen, « Joseph Liouville's work on the figures of equilibrium of a rotating mass of fluid », *Archive for History of Exact Sciences*, 30 (1984), p. 113-166.
- [Roque 2011] Tatiana Roque, « Stability of trajectories from Poincaré to Birkhoff : approaching a qualitative definition », *Archive for History of Exact Sciences*, 65/3 (2011), p. 295-342.
- [Sinaceur 1991] Hourya Sinaceur, *Corps et modèles*, Paris : Vrin, 1991.

- [Sinaceur 1992] H. Sinaceur, « Cauchy, Sturm et les racines des équations », *Revue d'histoire des sciences*, XLV/1 (1992), p. 51-67.
- [Sturm 1829] Charles Sturm, « Extrait d'un Mémoire sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires, présenté à l'Académie des Sciences, le 27 Juillet 1829, par M. Sturm », *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, 12 (1829), p. 313-322 ; *Collected Works*, Basel : Birkhäuser, 2009, p. 334-342.
- [Sylvester 1852] James Joseph Sylvester, « Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes », *Nouvelles annales de mathématiques*, 11 (1852), p. 434-440.
- [Weierstrass 1859] Karl Weierstrass, « Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem », *Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, année 1858 (1859), p. 207-220 ; *Werke*, 1, p. 233-246.
- [Yvon-Villarceau 1870] Antoine Yvon-Villarceau, « Note sur les conditions des petites oscillations d'un corps solide de figure quelconque et la théorie des équations différentielles linéaires », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 71 (1870), p. 762-766.

Le calcul des probabilités : jeux de hasard, théorie des erreurs et analyse mathématique

Bernard BRU

Le calcul des probabilités qui dans la première moitié du XVIII^e siècle est encore, pour l'essentiel, lié aux jeux de hasard, devient, entre les mains de Laplace la théorie analytique des probabilités, avant d'être oublié quelque peu et de renaître au XX^e siècle, tant dans le cadre de l'analyse pure que des nombreuses applications de la statistique mathématique.

Pour essayer de donner une idée précise du développement de ce calcul dans la période considérée par ce livre, de ses interactions avec l'analyse mathématique et la mécanique céleste, nous suivrons le fil de l'histoire d'un problème particulier et de ses diverses transformations. Il s'agit d'un problème de points au jeu de dés : on jette n dés à f faces et on demande combien il y a de chances d'obtenir une somme s . Ce problème remonte, au moins, au début du XVII^e siècle. Après les solutions combinatoires du début du XVIII^e siècle, nous examinons la première solution analytique, due à Moivre en 1730. Simpson établit en 1755 une variante continue de la formule des points dans un autre cadre, celui de la théorie probabiliste des erreurs d'observation. Dans cette lignée, les travaux de Lagrange (1776) et, surtout, de Laplace à partir de 1777, vont aboutir à une théorie analytique cohérente vers 1810.

Malgré l'apport de Poisson, la réception de la théorie de Laplace va se révéler difficile. Après une éclipse dans la deuxième moitié du XIX^e siècle, notre problème va cependant réapparaître au début du XX^e siècle, les solutions apportées par les analystes de la Belle Époque ayant bien des points communs avec celles de Moivre et Laplace, avec une exigence de rigueur plus affirmée.

I. Une question de dés

Les questions de dés sont fort anciennes. Nous commencerons notre histoire à Florence au début du XVII^e siècle, puisqu'il faut bien commencer quelque part. Les premiers éditeurs des œuvres de Galilée ont retrouvé dans ses papiers un manuscrit non daté sur le jeu de dés, qui contient la solution du problème suivant : on joue avec trois dés, quelle est la somme des points la plus « avantageuse » ? La réponse est 10 et 11, solutions qui ont

pour elles chacune 27 cas sur les 216 possibles, alors que les sommes 9 et 12 n'en ont que 25, et ainsi de moins en moins des autres. Galilée pose là un problème de points que nous allons essayer de suivre sur la longue durée.

Le texte de Galilée n'a été publié qu'en 1718¹ et n'a eu aucune influence directe sur la doctrine des hasards qui est alors bien loin devant. Il est d'ailleurs absolument négligeable dans l'œuvre monumentale de Galilée, mais il donne après coup la caution et la bénédiction de Galilée à la géométrie du hasard de Pascal, Fermat, Huygens.

Indépendamment de Galilée, Huygens a donné, en 1657, la même réponse au même problème² et un demi-siècle plus tard, en 1708, Montmort a traité lui aussi de la question des points pour 2, 3, 4, ..., 9 dés cubiques³, sans donner la formule générale, qu'il a cependant sans doute déjà. En tout cas, il en énonce une, pour un nombre quelconque de dés à un nombre quelconque de faces, dans une lettre à Jean I Bernoulli du 15 novembre 1710, publiée en 1713 dans la seconde édition de son *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, principalement à l'intention de Moivre qui prétendait l'avoir devancé dans un long mémoire sur la « mesure du sort » publié en 1712. C'est ce qu'on apprend aussi par une lettre de Montmort à Nicolas I Bernoulli où il se plaint de l'injustice du savant vitryat à son égard et revendique la formule générale des points comme lui appartenant de longue date⁴. En 1712, Moivre, en effet, a publié un premier mémoire de calcul des probabilités remarquable, où il énonce entre autres, on l'a dit, la formule générale du problème des points⁵. Celle-ci est assez compliquée, mais elle est exacte et coïncide avec celle de Montmort aux notations près. Toutefois,

1. [Galilée s.d.]. Le texte, écrit sans doute vers 1620, a d'abord été publié à Florence, en 1718, par G. Tartini et S. Franchi, au volume 3 de la seconde édition des œuvres de Galilée, p. 119-121, sous le titre « Considerazione di Galileo Galilei sopra il Giuoco de' dadi ». Ce problème figure fréquemment dans les ouvrages didactiques de calcul des probabilités sous le nom de « problème du grand-duc de Toscane ». On en trouve des traces, notamment dans un poème du XIII^e siècle intitulé *De Vetula* et dans le *Liber de ludo alae* de Cardan écrit vers 1560 et publié en 1663 [Hald 1990, chap. 4 ; Bellhouse 2005]. Les auteurs de langue anglaise, à la suite de Todhunter [1865], désignent sous le nom de « Problem of points » ce que les auteurs de langue française appellent problème des partis, depuis Pascal au moins. Le problème que nous examinons ici est très différent mais nous avons choisi de l'appeler « problème des points » en suivant Montmort [1708] et en raison de son importance.

2. [Huygens 1657, p. 76-78], où il traite le cas de deux et de trois dés, en précisant qu'il « suppose que le dé a la forme d'un *Cube* parfait ».

3. [Montmort 1708, problème 31, p. 141].

4. [Montmort 1713], lettre à Jean I Bernoulli, p. 307, et lettre à Nicolas I Bernoulli (neveu de Jean) du 5 septembre 1712, p. 364.

5. [Moivre 1712, p. 220-221]. La traduction anglaise figure dans [Moivre 1718, p. 17 ; 1738, p. 35-36 ; 1756, p. 39-40]. Si l'on dispose de n dés à f faces, la formule donnée par Moivre conduit à l'expression suivante de la probabilité d'obtenir une somme s (avec des notations un peu modernisées)

il n'en donne pas la démonstration, probablement confuse, qui, elle, sera publiée par Montmort, dans la seconde édition de son livre ⁶. Cette démonstration combinatoire est très belle, mais n'est guère lisible, et nous nous abstenons de la reproduire. C'est une application ingénieuse de la formule du crible, que l'on peut attribuer à Nicolas Bernoulli ou à Montmort ou à d'autres avant ou après eux, qui permet d'évaluer le nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles finis s'intersectant entre eux.

Donc, dans les années 1710, les savants savent résoudre le problème des points dans le cas de dés à un nombre quelconque de faces et en nombre quelconque, même si leurs démonstrations, directes et combinatoires, sont peu visibles. Voilà un point établi.

II. Moivre et la méthode analytique pour les probabilités

Ce qui nous importe principalement pour la suite de notre histoire, c'est que Moivre ne s'est pas satisfait de la démonstration combinatoire de la formule des points, mais en a proposé une autre, quelques années plus tard, fondée sur sa théorie de ce qu'on appelle, le plus souvent improprement, les fonctions génératrices, la première méthode « analytique » du calcul des chances, dont il nous faut dire un mot maintenant.

Il y a deux sources de la théorie des fonctions génératrices, toutes les deux viennent de Moivre, et sont donc amenées à se croiser et à se confondre, mais elles sont au départ bien distinctes. La première source, la plus connue, est la question des « suites récurrentes », ou des « séries récurrentes », qui deviendra sous la plume des géomètres de la seconde moitié du XVIII^e siècle, la théorie des « équations aux différences finies ». Pour donner une idée de la méthode de Moivre pour les équations de récurrence, prenons la plus simple d'entre elles, celle de Fibonacci. Il s'agit de déterminer les suites vérifiant $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Moivre associe à la suite inconnue la fonction (génératrice) $g(t) = \sum a_n t^n$. Il se trouve, en effet, que cette série multipliée par « l'échelle différentielle » ⁷ $1 - t - t^2$ de l'équation considérée se réduit à $a_0 + (a_1 - a_0)t$, de sorte que l'on a

$$\frac{(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{(n-1)!f^n} - n \frac{(s-f-1)\dots(s-f-n+1)}{(n-1)!f^n} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{(s-2f-1)\dots(s-2f-n+1)}{(n-1)!f^n} - \dots,$$

où l'on doit s'arrêter dès qu'un des facteurs s'annule ou devient négatif.

6. [Montmort 1713, proposition XVI, p. 46-50].

7. Notion définie par Moivre [1738, p. 194 ; 1756, p. 221].

$$g(t) = \frac{a_0 + (a_1 - a_0)t}{1 - t - t^2}.$$

Il suffit ensuite de décomposer la fraction en éléments simples pour écrire g comme somme de deux séries géométriques qui donnent les coefficients a_n . Cette méthode s'étend facilement à toutes les équations de récurrence dont l'échelle différentielle est à racines simples réelles, et même complexes, si on admet les solutions trigonométriques.

Nous n'insisterons pas sur cette première source moivrienne, qui vient des recherches de leur auteur sur le problème de la durée du jeu, qu'il serait trop long de rappeler ici⁸. Nous nous attarderons en revanche sur la seconde source de la méthode des fonctions génératrices de Moivre, qui, elle, est directement liée au problème des points que nous étudions ici et qui est l'une des clés principales de la *Théorie analytique des probabilités* de Laplace aussi bien que des travaux des mathématiciens probabilistes des années 1920-1930 et suivantes.

Revenons au problème des points. On jette n dés à f faces, on demande le nombre de chances d'obtenir la somme s . Moivre a donné la solution en 1712, sans démonstration, et on a vu que celle-ci est combinatoire, et ne se conclut que par induction, faute de notations adaptées. Elle ne saurait convenir à un esprit aussi mathématique que Moivre. Aussi le savant se propose-t-il de donner une démonstration en quelque sorte analytique. David Bellhouse a retrouvé à Cambridge un manuscrit de cette démonstration, qu'il date entre 1722 et 1727. Elle est publiée dans les *Miscellanea* de 1730 et reproduite dans les deux dernières éditions de la *Doctrin of Chances*⁹. Elle est extrêmement ingénieuse, mais difficile à interpréter.

Une chose est certaine, la nouvelle méthode de Moivre relève du calcul exponentiel et, à ce titre, fait partie intégrante de l'analyse et non plus de la seule combinatoire. Il s'agit de transformer une progression arithmétique, celle des faces du dé, $1, 2, \dots, f$, en une progression géométrique $r, r^2, \dots, r^f$, pour une raison r « ad libitum », de sorte que le nombre de cas cherché apparaisse quelque part. Pour rendre la chose plus palpable, Moivre imagine qu'il associe au dé à f faces dont on part, un gros dé qui possède r faces marquées $1, r^2$ faces marquées $2, \dots, r^f$ faces marquées f . Le nombre total de faces de ce gros dé est égal à la somme de la progression géométrique $r + r^2 + \dots + r^f$.

8. Sur les rapports entre calcul des probabilités et équations aux différences finies, voir, notamment, [Hald 1990, chap. 23 ; Borgato 2012].

9. [Moivre 1730, Lib. VII, Cap. VI, p. 196-197]. On trouve la traduction anglaise dans [Moivre 1738, p. 35-39] et [Moivre 1756, p. 41-43]. La démonstration est reprise par Simpson [1755] avec les mêmes notations.

Prenons maintenant deux dés à f faces et associons leur à chacun un gros dé de Moivre. Si nous jetons ces deux gros dés, le nombre de résultats possibles est

$$(r + r^2 + \dots + r^f)^2$$

et le coefficient de la puissance r^s est égal au nombre de façons de former la somme s avec des entiers compris entre 1 et f , c'est-à-dire précisément au nombre de cas du problème des points dans le cas de deux dés. Par exemple pour deux dés cubiques, on écrit

$$(r + r^2 + \dots + r^6)^2 = r^2 + 2r^3 + 3r^4 + 4r^5 + 5r^6 + 6r^7 + 5r^8 + \dots$$

et on obtient ainsi la suite triangulaire 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1 des chances des différentes sommes de points obtenues en jetant les deux dés sur le tapis de jeu.

Plus généralement, considérons n dés à f faces, associons leur à chacun leur gros dé. Le nombre de résultats possibles d'un jet de ces n gros dés est égal à

$$(r + r^2 + \dots + r^f)^n$$

et le coefficient de la puissance r^s dans ce multinôme est égal au nombre de façons de former la somme s avec n entiers compris entre 1 et f , c'est-à-dire le nombre de cas du problème des points. On écrit ensuite

$$(r + r^2 + \dots + r^f)^n = \frac{r^n(1 - r^f)^n}{(1 - r)^n}$$

et on développe le second membre en puissances de r . Ce qui peut se faire par les formules connues et des calculs classiques au XVIII^e siècle dont Moivre, comme Euler et les autres, est un virtuose. On retrouve ainsi la formule de Montmort-Moivre exposée plus haut.

Cette « règle supérieure » comme l'appelle Moivre s'applique pour des dés pipés de toutes les façons possibles, et donne, mettons, le résultat i avec la chance c_i , pour $a \leq i \leq b$, où a et b sont deux entiers positifs ou négatifs, ordonnés, quelconques. On associe à ce dé la progression géométrique

pondérée correspondante $\sum_{i=a}^b c_i r^i$ et on poursuit comme précédemment.

C'est bien ainsi que sera comprise la règle de Moivre dans la seconde moitié du XVIII^e siècle, d'abord par Thomas Simpson dès 1755, puis par Lagrange et Laplace ensuite. La théorie analytique des probabilités est née, du moins une de ses méthodes les plus utilisées, dite des fonctions caractéristiques, une locution tardive introduite par Poincaré dans la seconde édition de son cours de probabilités de la Sorbonne [1912].

III. Simpson et la théorie probabiliste des erreurs

Nous quittons Moivre pour discuter l'apport de Thomas Simpson, son principal disciple et concurrent¹⁰, qui a introduit une variante continue de la formule des points dont la postérité est considérable. Simpson s'intéresse à un tout autre problème, la théorie probabiliste des erreurs d'observation et de mesure. Moivre, mort en 1754, ne paraît pas s'être intéressé à ce problème. En tout cas, cela n'apparaît pas dans les applications de sa *Doctrin of Chances*, dont la principale, en dehors des jeux de hasard, est la théorie des annuités, en actuariat, publiée dès 1725 et reprise en 1743, 1750, 1752 et dans [Moivre 1756, p. 261-348].

Depuis toujours on sait que les mesures les plus soigneusement faites sont sujettes à des erreurs inévitables, dont il faut essayer de s'affranchir, autant qu'on le peut, par un choix judicieux d'un « milieu ». Les premiers calculs de ces « milieux », nécessaires aux besoins du commerce ou de la justice, sont non probabilistes. Le choix du milieu est de pure convention. Il est généralement fixé par la loi ou la tradition, sans qu'on ait à s'inquiéter de la probabilité qu'il a de s'approcher de la véritable valeur de ce qui est mesuré, si tant est que celle-là ait un sens. Le plus souvent on opte pour le milieu arithmétique, la somme des valeurs observées divisée par leur nombre. Ce n'est que dans un second temps et pour les besoins de l'Astronomie de précision, la plus parfaite des sciences, que les savants ont tenté d'appliquer le calcul des chances pour évaluer les « avantages » du choix considéré. À cet égard, rien ne milite en faveur de la moyenne arithmétique, en dehors de sa simplicité de mise en œuvre. Quel avantage réel y a-t-il à l'adopter ? S'approche-t-on davantage, grâce à elle, des véritables valeurs des inconnues ? Nombreux sont ceux qui en doutent, et qui pensent qu'une seule mesure bien exécutée est préférable à la moyenne arithmétique de dix mesures effectuées sans soin.

On le voit, la question n'a pas de réponse déterminée. Parfois une mesure est suffisante, si l'on sait que l'erreur est de toute façon très petite, parfois la moyenne de plusieurs mesures est préférable, lorsque les erreurs peuvent être positives ou négatives avec des chances sensiblement égales et qu'alors, en en faisant la somme, elles se compensent, à moins d'une malchance particulière. D'où l'idée de tenter d'appliquer aux erreurs d'observation la théorie déjà bien constituée des hasards et des chances. On dispose pour cela au milieu du XVIII^e siècle du grand traité que Moivre a mis un demi-siècle à enrichir et qui est alors le chef-d'œuvre de la doctrine des chances. Plusieurs savants ont proposé à cette époque des éléments de théorie probabiliste des erreurs¹¹ : certaines erreurs sont plus probables

10. Sur les rapports difficiles entre les deux savants, voir [Bellhouse 2011, chap. 13].

11. Voir [Stigler 1986, chap. 1].

que d'autres, comme certains résultats dans un jeu de hasard ou certaines durées de vies humaines en actuariat. Mais le premier auteur à avoir utilisé la théorie de Moivre est Thomas Simpson, qui a obtenu un résultat nouveau et significatif, comme nous le voyons maintenant.

Le comportement probabiliste des erreurs peut être décrit par une distribution de probabilités sur un ensemble fini de valeurs, mettons -1 , 0 et 1 avec des probabilités égales ou inégales, comme on voudra bien le supposer, mais en général les erreurs varient de façon continue sur tout un intervalle, mettons entre $-1/2$ et $1/2$. La distribution est alors donnée par une courbe dont le nom varie suivant les auteurs : « courbe de probabilité », « courbe de facilité », « courbe de possibilité », etc. Cette courbe est déterminée par une fonction positive f dont l'intégrale est prise généralement égale à 1 pour simplifier¹². La probabilité que l'erreur soit située dans un sous-intervalle (a, b) est alors égale à l'intégrale de f prise entre les deux bornes a et b . Elle est plus grande, plus facile, aux endroits où la courbe est plus haute. Ce que montre Simpson c'est que, si on dispose de n observations dont les erreurs sont également distribuées sur un intervalle symétrique autour de 0 , et si on en forme la moyenne arithmétique, la courbe de facilité de l'erreur résultante est semblable à un pic centré en 0 qui serait de plus en plus pointu et accentué au fur et à mesure que n grandirait, de sorte que la probabilité que l'erreur soit resserrée dans un petit intervalle autour de l'origine est de plus en plus grande¹³.

La démonstration procède du fini à l'infiniment petit et n'a aucun caractère de rigueur¹⁴. Simpson considère d'abord une erreur qui ne pren-

12. Chez Lagrange [1776] et surtout chez Laplace [1777], une *facilité* f (ce qu'on appelle maintenant une densité de probabilité) est une fonction absolument générale, continue ou discontinue, pouvant prendre des valeurs infiniment grandes, etc. Elle se distingue en cela des fonctions de la mécanique, généralement analytiques. En ce sens, on peut dire que la théorie analytique de Laplace est une théorie générale des fonctions. Bientôt Poisson, le principal disciple de Laplace, traitera de la même façon et grâce au même formalisme, les distributions discrètes et continues, toutes données par des fonctions éventuellement généralisées, du type « fonctions de Dirac » notamment, comme le feront les physiciens puis les mathématiciens un siècle plus tard (sur cette question, on peut voir, notamment, [Sheynin 1975 ; Laugwitz 1992]).

13. Sur Simpson [1755, 1757], on verra surtout Stigler [1986, p. 88-98].

14. En suivant les méthodes d'alors, prenons s et f infiniment grands, et posons $\frac{1}{f} = dx$ et $\frac{s}{f} = x$, la formule alternée discrète de la note 5 devient

$$\frac{dx}{(n-1)!} \left[x^{n-1} - n(x-1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(x-2)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(x-3)^{n-1} + \dots \right]$$

draît qu'un nombre fini de valeurs symétriquement autour de zéro et avec la même probabilité. Chaque erreur apparaît ainsi comme le résultat du jet d'un dé bien équilibré à f faces, où f désigne le nombre de valeurs possibles de l'erreur dont il s'agit¹⁵. La distribution de la somme de n erreurs de cette sorte a été calculée par Montmort, Moivre et Nicolas Bernoulli dans les années 1710, on l'a vu. C'est le problème des points avec un dé aux faces numérotées symétriquement autour de 0. La formule qui le résout passe bien à l'infini, et on obtient ainsi la facilité de la somme de n erreurs également distribuées sur un intervalle continu, pour de petites valeurs de n au moins. Discrètement encore, le calcul des chances pénètre au cœur des mathématiques newtoniennes, au service de la philosophie de la nature. Nous sommes en 1750.

IV. L'entrée en scène de Lagrange et Laplace

L'article de Simpson [1755] a inspiré un mémoire très important de Lagrange, qui n'a été publié qu'en 1776, mais dont Laplace a connu l'existence dès 1772¹⁶. Il y avait là un sujet neuf qui a aussitôt attiré ce dernier et où son génie s'est épanoui rapidement et sur le très long terme, puisque son résultat principal dans cette théorie date de 1810 et que ses travaux probabilistes se sont poursuivis jusqu'à sa mort en 1827¹⁷.

Le mémoire de Lagrange, l'un des plus étonnants qui soient, est motivé, comme celui de Simpson, par la théorie des erreurs, et, comme lui, il part du problème des points avec n dés à f faces, par la méthode de Moivre. Pour le savant turinois (alors à Berlin), c'est l'occasion de démontrer des lemmes

que l'on arrête dès que $x - k < 0$. C'est l'expression classique de la densité en x d'une somme de n quantités indépendantes également distribuées entre 0 et 1. Cette méthode de passage du fini à l'infiniment petit est utilisée par Simpson [1757], mais aussi par Lagrange [1776, n^{os} 27 et 31] et Laplace [1812, p. 257-260]. Pour ces deux savants, le passage en question ne peut servir de preuve définitive. Il doit être confirmé par une autre méthode mais, dans tous les cas, il permet un premier calcul qui donne une idée de la solution définitive. Cependant, pour Lagrange, un tel passage ne saurait faire l'objet d'un enseignement et ses cours d'analyse le banniront tout à fait, alors qu'au contraire, Poisson l'enseignera, de même que Cournot, parce qu'il tient à la nature des choses ; les infiniment petits ont une existence physique pour le premier, une existence rationnelle pour le second (ce qui est encore plus fort). Pour la façon de rendre rigoureux ce « passage », on verra, par exemple, l'exercice 20 de Feller [1968, § XI.7, p. 285].

15. Sur l'application du calcul des chances à la théorie des observations, on verra notamment la référence à Stigler, note 11 *supra*.

16. Dans le tome II du *Recueil pour les astronomes*, publié à Berlin en 1772 par Jean III Bernoulli, Laplace a appris que Lagrange, mais aussi Euler et Daniel Bernoulli, s'intéressaient de près à la théorie probabiliste des erreurs d'observation.

17. Sur la biographie scientifique de Laplace, on verra les beaux travaux de Gillispie [1978/1997, 2004] et Hahn [2004, 2013], ainsi que Stigler [1986] et Hald [1998].

algébriques intéressants (par exemple d'introduire les polynômes « de Legendre ») que nous ne rappelons pas ici. Il passe ensuite aux infiniment petits, nous l'avons dit, mais, peu satisfait d'un tel passage acrobatique, il se propose de démontrer directement la formule de Simpson qui donne la facilité de la somme de n quantités indépendantes également distribuées entre 0 et 1.

La méthode de Lagrange mérite d'être rappelée ici. Elle expose pour la première fois la méthode de Moivre des fonctions génératrices dans le cas continu. Elle date de 1770 à fort peu près. Lagrange se propose donc de résoudre le problème suivant :

« Problème X :

On suppose que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs possibles comprises entre ces deux limites p et $-q$, et que la facilité de chaque erreur x , c'est-à-dire le nombre des cas où elle peut avoir lieu divisé par le nombre total des cas, soit représentée par une fonction quelconque de x désignée par y ; on demande la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit comprise entre les limites r et $-s$. » [1776, p. 227]

Soit donc y la facilité de x . On lui associe $\int ya^x dx$ où a est un réel positif.

On écrit

$$\left(\int ya^x dx \right)^n = \int Ya^z dz.$$

La facilité en z de la somme des n erreurs d'observation est alors donnée par $Y(z)dz$, le coefficient de a^z . C'est la « règle supérieure » de Moivre étendue au cas continu, ce qu'on appelle maintenant la propriété de convolution des fonctions génératrices ou des transformées de Laplace, qu'on retrouve dans l'analyse de Fourier actuelle, et qui est écrite pour la première fois par Lagrange, puis par Laplace dans toute sa *Théorie analytique*.

La question revient alors à calculer Y , en supposant, ce que Lagrange fait implicitement, que cette fonction Y est unique (elle ne l'est qu'aux ensembles de mesure nulle près). Il faudrait pour cela trouver un algorithme simple et général d'inversion des transformées de Laplace, qui malheureusement n'existe pas. Lagrange semble s'en être persuadé, et traite seulement de cas particuliers, notamment celui des erreurs également distribuées sur un intervalle, lorsque y est constante. Sa méthode est éblouissante, et réussira même à impressionner le jeune Laplace, qui toutefois ne s'en laisse pas compter. Pour lui, Lagrange a le tort d'employer une méthode indirecte, en faisant le détour par les fonctions génératrices, alors qu'une méthode directe est possible et ne lui cède en rien pour l'élégance et la commodité.

En 1777, Laplace lit à l'Académie un mémoire important dans lequel il introduit le produit de convolution, l'une des opérations fondamentales de la théorie des fonctions : si deux quantités indépendantes sont de facilités f et g , la facilité de leur somme en x est donnée par la formule dite maintenant de convolution

$$f \otimes g(x) = \int f(x-y)g(y)dy.$$

Pour obtenir la facilité de la somme de n quantités également distribuées sur l'intervalle unité, il suffit d'itérer cette formule, ce qui redonne la formule alternée classique trouvée par passage du fini à l'infiniment petit, puis par la méthode de Moivre généralisée¹⁸.

La théorie analytique des probabilités prend dès lors une consistance sérieuse. L'édifice entier tient debout, même si certaines parties en sont encore discutables, celles qui sont contaminées par l'un de ces passages douteux dont nous avons parlé.

V. Laplace et les formules d'approximation

On l'a déjà indiqué, les formules alternées de Montmort-Moivre-Simpson-Lagrange-Laplace présentent cet inconvénient majeur d'être incalculables dès que le nombre des dés (ou des erreurs) est important. Déjà, pour $n = 10$, il faut une patience et une dextérité considérables pour arriver au bout du calcul sans erreur.

Il s'agit donc de trouver une formule d'approximation convenable, un problème que Laplace s'est posé dès 1776¹⁹, et qui l'a arrêté jusqu'en 1810.

18. [Laplace 1777], repris dans [1781 ; 1810, art. I ; 1812]. Le mémoire original de Laplace, lu le 8 mars 1777, n'a été publié qu'en 1979 par C. C. Gillispie. Pour une analyse de ce mémoire, on verra [Stigler 1986].

19. Le problème abordé par Laplace dans ce mémoire [1776] est très différent de celui des points au jeu de dés, mais il conduit au même calcul. Il vient de l'étude statistique des comètes inspirée de Dionis du Séjour. Il s'agit de savoir si les inclinaisons des 63 comètes observées en 1776 sont compatibles avec l'hypothèse du « hasard », selon laquelle elles seraient d'origine externe au système solaire et seraient entrées dans la zone d'attraction du Soleil selon des angles également distribués, ou bien si, au contraire, « [elles] participent à la tendance primitive des orbes des planètes et de leurs satellites pour se rapprocher du plan de l'équateur solaire » [Laplace 1810, p. 302]. Pour vérifier ou contredire ces hypothèses, Laplace forme la moyenne arithmétique des inclinaisons des orbites des comètes sur l'écliptique et en cherche la facilité sous l'hypothèse du hasard. Il cherchera ensuite si la valeur observée de l'inclinaison moyenne des comètes est ou n'est pas compatible avec la valeur calculée sous l'hypothèse en question. Il connaît l'expression littérale de la facilité de la somme ou de la moyenne de 63 variables indépendantes de même loi uniforme, mais est incapable d'évaluer numériquement la probabilité dont il s'agit. Laplace a finalement résolu ce problème dans son mémoire

Nous ne suivrons pas toutes les étapes de cette recherche, qui nous mèneraient trop loin. Déjà en 1785, Laplace s'est approché si près de la solution qu'on a du mal à comprendre pourquoi il n'a pas abouti alors. En effet, dans son grand mémoire [1785] sur la « méthode de Laplace » d'approximation des formules qui sont fonctions de très grands nombres, Laplace a l'idée de considérer dans un cas particulier les fonctions génératrices en la variable imaginaire.

Si une quantité peut prendre un nombre fini de valeurs entières k avec probabilité a_k , on lui associe la fonction $g(t) = \sum a_k e^{ikt}$ qui présente l'avantage de redonner très simplement les probabilités a_k , par la formule dite de Fourier

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \sum a_k e^{ikt} dt = a_n.$$

Cette formule qu'on trouve chez Laplace ou Parseval a été utilisée brillamment par Fourier en 1807-1808 pour résoudre l'équation de la chaleur dans le cas d'un anneau circulaire, une armille. Ce qui n'a pu manquer d'attirer de nouveau l'attention de Laplace sur la théorie des fonctions génératrices et l'a conduit au mémoire [1810], le point culminant de notre histoire, qui contient le théorème de Laplace et son application au problème des dés que l'on étudie. Suivons donc un moment ce mémoire.

Soit un dé à f faces, on peut imaginer de lui associer un gros dé « imaginaire » plutôt qu'un gros dé réel

$$\sum_{k=1}^f e^{ikt} = \frac{e^{it} - e^{i(f+1)t}}{1 - e^{it}},$$

que Laplace préfère écrire dans le domaine réel par un changement de variable qui renumérote les dés de $-b$ à b . En supposant f impair et égal à $2b + 1$, on a alors

$$\sum_{k=-b}^b e^{ikt} = 1 + 2 \sum_{k=1}^b \cos kt = \frac{\sin f \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

Si maintenant on s'intéresse à la somme des points de n dés, il faut former la puissance

[1810], alors même qu'il dispose des inclinaisons de 97 comètes dorénavant observées, et qu'il doit donc résoudre le problème des points pour 97 dés à un nombre infini de faces. Grâce à son théorème et à une table de la loi normale, le calcul se fait en une ligne.

$$\left(\sum_{k=-b}^b e^{ikt} \right)^n = \left(\frac{\sin f \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^n.$$

On obtient la probabilité d'une somme égale à s , par la formule des séries de Fourier

$$\frac{1}{2\pi f^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ist} \left(\frac{\sin f \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^n dt = \frac{1}{\pi f^n} \int_0^{\pi} \cos st \left(\frac{\sin f \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^n dt,$$

intégrale qui présente l'avantage de contenir un facteur élevé à une « grande puissance », si n est grand. Son évaluation relève donc de la méthode d'approximation de Laplace, d'où l'on tire une expression approchée de la probabilité cherchée autorisant un calcul numérique, contrairement à ce qui se passait avec la formule alternée de l'analyse combinatoire de Montmort ou de la règle supérieure de Moivre. La méthode de Laplace pour résoudre le problème des points, dans le cas de n dés à un nombre fini f de faces, est entièrement rigoureuse. Elle est reprise à l'identique dans la *Théorie analytique* [1812, n° 18]²⁰.

Le problème des points est ainsi complètement résolu, deux siècles après avoir été posé. Un joueur jettant 1 000 dés à 10 000 faces pourrait évaluer numériquement ses chances. Il a dû apparaître immédiatement à Laplace que, par passage du fini à l'infiniment petit, cette méthode devait nécessairement se transposer à la théorie des comètes, ou à la théorie des erreurs, et contribuer de façon éminente à la connaissance du système du monde, pour lui le plus haut idéal de l'esprit humain.

Encore faut-il réussir le passage toujours périlleux du fini à l'infiniment petit, au risque de se perdre. Certes, on peut faire confiance à Laplace, mais le passage est ici particulièrement aventureux, de sorte que périodiquement on contestera au savant d'y avoir réussi vraiment. La clé de la démonstration réside en effet dans une extension aux intégrales de la formule de Fourier, dont Laplace paraît s'être convaincu dès 1810, à partir du problème

20. Pour éviter les complications de notation, énonçons la formule des points au jeu de dés de Laplace dans le cas où le nombre de faces f est un nombre impair $2b + 1$, de sorte que le point moyen est unique et égal à nb . La probabilité d'une somme $s = nb + k$ est alors égale à fort peu près, pour n grand et f fixé, à

$$\frac{1}{f} \sqrt{\frac{6}{\pi n}} e^{-\frac{6k^2}{nf^2}}.$$

On peut noter que, dans le cas des dés à six faces, la formule de Laplace est précise dès les premières valeurs de n , beaucoup plus que la formule alternée de Montmort, Moivre et les autres. On se reportera à Hald [1998, p. 307-311], qui donne une remarquable analyse de ce résultat de Laplace avec une évaluation de l'erreur.

des points pour des dés à un très grand nombre de faces. Voyons cela, en suivant Laplace d'aussi près que possible²¹.

Pour fixer les idées, nous nous plaçons, comme le fait Laplace, dans le cadre de la théorie des comètes. L'inclinaison x de l'orbite d'une comète lancée au hasard dans la zone d'attraction du Soleil est supposée « également possible » entre deux bornes symétriques $-h$ et h . On divise l'intervalle dont il s'agit en un nombre infini $2b$ de parties infiniment petites, « que je prends pour l'unité », indique-t-il. Chaque partie a donc pour longueur, $dx = h/b =$ une unité sur l'intervalle $(-h, h)$. On lui associe, comme précédemment, le gros dé imaginaire normalisé

$$\frac{1}{f} \sum_{k=-b}^b e^{ikt} = \frac{1}{f} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^b \cos kt \right)$$

où, cette fois-ci, $f = 2b + 1$ est infiniment grand, « d'où il est facile de conclure », poursuit-il, que l'on obtiendra la facilité en l de la somme des n inclinaisons en prenant l'intégrale [1810, p. 310]

$$(1) \quad \frac{1}{\pi f^n} \int_0^\pi d\varpi \cos l\varpi (1 + 2 \cos \varpi + 2 \cos 2\varpi + \dots + 2 \cos b\varpi)^n.$$

La somme à l'intérieur de la parenthèse est infinie et diverge visiblement. Ce n'est donc certainement pas ainsi que la voit Laplace, qui considère les séries trigonométriques infinies singulières ou incongrues publiées ici ou là comme des « illusions »²². Il faut interpréter autrement la formule (1). La façon la plus simple est encore la suivante²³ : l'intervalle $(-h, h)$ est divisé

21. [Laplace 1810, § III, p. 309-316]. La *Théorie analytique* [1812, livre II, chapitre IV, n° 18] reprend essentiellement la même analyse, mais avec une rédaction plus resserrée. On verra Hald [1998, chapitre 17, § 1 et 2] pour des analyses détaillées de ces pages qualifiées par Todhunter [1865, p. 561] d'« obscure and repulsive, yet they contain all that is essential in the theory », et qui renonce à les analyser, suivi en cela par la plupart des commentateurs à de rares exceptions près. Hald, citant Todhunter, ajoute fort judicieusement : « we do not feel that Laplace's processes are "obscure and repulsive" in a greater measure than those found in other pioneering papers [...], we cannot but feel great admiration for the perseverance and ingenuity that led Laplace to this fundamental result which forever will hold a central place in the theory of statistical inference » [Hald 1998, p. 317].

22. Voir l'*Essai philosophique sur les probabilités* de Laplace [1814/1986, p. 165], dirigé contre Bernoulli [1772, 1773, 1774]. La haute analyse laplacienne s'interdit les séries divergentes, même si elle tolère « avec beaucoup de précautions et de réserves » les passages du fini à l'infiniment petit, qui sont souvent des discrétisations d'intégrales, avec passages à la limite non justifiés, mais généralement corrects.

23. Cette interprétation est celle que reprend Laplace à l'article VI de son mémoire [1810] et dans la *Théorie analytique* avec d'autres notations [1812, p. 311 et suiv.], dans le cas d'erreurs de facilité quelconque, ce qui lui permet d'énoncer le théorème « de Laplace » : une somme d'erreurs est toujours (ou presque) de loi asymptotiquement normale. C'est aussi de cette façon que procède Poisson dans son traité [1837, nos 96-97].

en un nombre fini $2b$ de parties de longueur $\frac{h}{b}$, de sorte que les points de subdivision de l'intervalle sont situés aux abscisses $k\frac{h}{b}$, pour k compris entre $-b$ et $+b$. Le gros dé doit donc être modifié et s'écrire

$$\frac{1}{f} \sum_{k=-b}^b e^{ik\frac{h}{b}t} = \frac{1}{f} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^b \cos k \frac{h}{b} t \right),$$

c'est-à-dire que dans la formule (1) il faut faire le changement de variable $\varphi = \frac{h}{b}t$. On obtient la facilité de la somme en $x = l\frac{h}{b}$, en prenant l'intégrale

$$(2) \quad \frac{1}{\pi f^n} \int_0^{\pi \frac{b}{h}} dt \frac{h}{b} \cos l \frac{h}{b} t \left(1 + 2 \cos \frac{b}{h} t + 2 \cos 2 \frac{b}{h} t + \dots + 2 \cos th \right)^n,$$

et l'on écrit ensuite

$$\frac{1}{f} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^b \cos k \frac{h}{b} t \right) = \frac{1}{f} \frac{\sin f \frac{ht}{2b}}{\sin \frac{ht}{2b}}$$

qui, pour b très grand, est très proche de

$$\frac{\sin ht}{ht} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h e^{ith} dt$$

la fonction caractéristique de la densité uniforme sur l'intervalle $(-h, h)$. La formule (2) ci-dessus s'écrit finalement

$$\frac{1}{\pi} \frac{h}{b} \int_0^{\pi \frac{b}{h}} dt \cos xt \left(\frac{\sin th}{th} \right)^n.$$

Laplace rend ensuite b et l infiniment grands de sorte que $x = l\frac{h}{b}$, et en déduit que la facilité de la somme en x est égale à

$$(3) \quad dx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt \cos xt \left(\frac{\sin th}{th} \right)^n.$$

Cette intégrale contient un facteur élevé à une grande puissance dès que n le nombre de comètes est grand. On peut lui appliquer la méthode de Laplace. Elle n'a de valeur sensible que pour t très voisin de zéro, auquel cas $\frac{\sin th}{th} \cong 1 - \frac{h^2 t^2}{6} \cong e^{-\frac{h^2 t^2}{6}}$, de sorte que la formule (3) devient

$$(4) \quad dx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt \cos xt \, e^{-n \frac{t^2}{6}}$$

contenant une intégrale que Laplace calcule ici et recalculera ensuite de plusieurs façons différentes [1811, p. 366 ; 1812, p. 97-98], et Poisson à sa suite [1811, 1813]. La formule devient

$$(5) \quad dx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n \frac{h^2}{3}}} e^{-\frac{x^2}{2n \frac{h^2}{3}}}$$

et on reconnaît la densité d'une loi normale centrée de variance $n \frac{h^2}{3}$, c'est-à-dire n fois la variance de la loi uniforme sur l'intervalle $(-h, h)$,

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h x^2 dx = \frac{h^2}{3}.$$

On le voit, la démonstration de Laplace ci-dessus repose tout entière sur une formule d'inversion du gros dé imaginaire, la « formule de Fourier », comme on l'appellera à partir des années 1820 : si on associe à une fonction f de la variable réelle x sa transformée

$$\varphi(t) = \int f(x) e^{itx} dx,$$

on retrouve la fonction f par la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-itx} \varphi(t) dt$$

qui peut être vue comme résultant du passage à l'infiniment petit de la formule de Fourier pour les sommes ou les séries de Fourier.

Rappelons cette dernière formule classique : si on associe à une fonction a_n de la variable entière n , sa transformée $\alpha(t) = \sum a_n e^{int}$, on retrouve la fonction a_n à partir de cette fonction par les formules de Fourier

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{-int} \alpha(t) dt,$$

la seule différence apparente entre les deux formules venant du changement des bornes.

Force est de constater que Laplace ne s'est pas contenté d'indiquer ce passage en ajoutant qu'il est facile de voir que les bornes doivent être prises infinies dans le cas d'une fonction de la variable réelle, mais qu'il a voulu le démontrer, en discrétisant de plus en plus finement l'intervalle de définition

de la facilité, tous les passages de ce type devant être entrepris avec « précaution et réserve »²⁴.

On doit ainsi comprendre l'égalité (1) ci-dessus comme la première manifestation évidente de la formule intégrale de Fourier, qui est apparue, comme toutes les formules importantes, avant que l'on puisse en faire la théorie, laquelle ne viendra qu'un bon siècle plus tard. Autant qu'on le sache, elle est entièrement due à Laplace qui l'a aussitôt étendue aux facilités quelconques [1810, § VI].

VI. La difficile réception des travaux de Laplace au XIX^e siècle²⁵

Bien que Poisson ne l'ait pas comprise immédiatement²⁶, on peut penser que cette étrange formule (1) a été aperçue assez vite de Gauss et de Fourier, même si le premier de ces savants a sans doute estimé sa démonstration trop douteuse encore pour mériter d'être publiée et diffusée en l'état²⁷. On sait cependant que la formule de Fourier, sous la forme intégrale de Fourier, sera très vite considérée comme hors de doute, et sera

24. Laplace visiblement n'en revenait pas lui-même d'avoir obtenu un résultat aussi simple et aussi général. Pour s'en assurer et en convaincre ses lecteurs, il a aussitôt essayé de retrouver la formule (5) en partant de la formule alternée. Ce que bien entendu il est parvenu à faire connaissant le but à atteindre ; c'est le paragraphe VII du mémoire [1810]. De sorte qu'au moins dans le cas d'une facilité constante, son théorème devenait incontestable, à ses yeux au moins.

25. Sur la réception de la théorie laplacienne des probabilités au XIX^e siècle, voir aussi [Schneider 1987].

26. Dans le compte rendu du mémoire [Laplace 1810], qu'il donne pour la société philomatique, Poisson [1810] souligne que l'analyse qui a conduit Laplace à son résultat est « extrêmement délicate » et qu'il lui est impossible d'en donner un exposé satisfaisant. Poisson insiste sur la fin du mémoire où Laplace compare la formule alternée et sa nouvelle formule exponentielle. Cependant, Poisson, dès son mémoire [1811], retrouve de plusieurs façons les intégrales de Laplace (4) qui correspondent aux transformées de Fourier des densités dites actuellement de Gauss et de Cauchy, tout entières dues à Laplace, qui trouvait là une vérification expérimentale de sa formule d'inversion. C'est également Poisson qui donnera la meilleure exposition du théorème de Laplace dans son mémoire [1824] qui sera largement repris au XIX^e siècle.

27. On sait que Fourier a utilisé « sa » formule dans son second manuscrit sur la théorie analytique de la chaleur couronné en 1812 par l'Académie. Dans ce manuscrit [1811], repris dans [1816, p. 360] et [1822, nos 346, 361, 404, 415], Fourier énonce explicitement la formule « de Fourier » et la démontre à peu près, de plusieurs façons, en particulier par discrétisation à la manière de Laplace [Fourier 1822, n° 359]. Il utilise cette formule pour traiter le cas d'une barre infinie dans sa théorie analytique de la chaleur, un problème qui lui avait échappé en 1807 et que Laplace a résolu par une autre méthode en 1809 [Laplace 1809, p. 190]. Fourier a-t-il été inspiré par Laplace [1810], de même que Laplace aurait été inspiré par Fourier [1808] ? On peut le penser, sans pouvoir l'affirmer, ni l'un ni l'autre de ces savants n'ayant évoqué cette question, à notre connaissance.

utilisée, après Fourier, par Poisson et Cauchy dès 1815, dans leurs travaux sur la théorie des ondes.

Quoi qu'il en soit, Laplace a réussi enfin à résoudre complètement le problème des points dans le cas d'un dé à un nombre fini ou infini de faces, et infiniment mieux que par la formule alternée de Simpson, Lagrange et lui-même. On a ainsi atteint le sommet du Mont Blanc²⁸, celui que Galilée avait peut-être entrevu.

Il semble en tout cas que Laplace ait vécu son mémoire de l'année 1810 comme une véritable rupture ou une renaissance, au sein de la continuité imperturbable de son œuvre, qui va bouleverser la rédaction en cours de la *Théorie analytique*, conçue au départ comme une reprise de ses mémoires probabilistes des années 1775-1785, et qui devient après 1810 un exposé extraordinairement riche des nouvelles méthodes du calcul des probabilités et de leurs applications universelles. Mais nous sortons de notre sujet. Revenons-y.

Après une telle apothéose, les choses nécessairement paraissent moins belles, et nous irons très vite. Rappelons simplement que le premier exposé compréhensible du théorème de Laplace et de sa formule des dés est dû à Poisson²⁹. Son approche est évidemment la même ; il s'agit d'analyse « de Fourier », mais Poisson, le premier, s'est rendu compte progressivement que cette analyse ne pouvait s'exprimer dans le cadre de la théorie ordinaire des fonctions. En particulier la formule intégrale de Fourier pêche quelque peu là où la facilité est discontinue. Poisson pour sa part a l'idée remarquable de considérer non pas les facilités mais leurs intégrales sur des intervalles, leurs « fonctions de répartition » comme on les appelle maintenant. Il obtient une formule d'inversion aussi rigoureuse que possible en 1824, que Cauchy recopiera [1853] et que l'analyse moderne démontrera en toute rigueur dès qu'elle en aura les moyens³⁰.

Nous sommes arrivés ainsi à 1850 ou peu s'en faut. Les derniers représentants de l'école laplacienne encore présents font figure de pièces de musée³¹, et le théorème de Laplace disparaît complètement des cursus mathématiques, de même que la formule de Fourier, etc. Il n'y a pas

28. Allusion à Augustus de Morgan [1837, p. 244], qui qualifie la *Théorie analytique des probabilités* de Laplace de « Mont Blanc de l'analyse mathématique ». Sur la réception de la *Théorie analytique* en Angleterre et le rôle d'A. de Morgan, on pourra voir [Durand-Richard 2012].

29. Sur le calcul des probabilités chez Poisson, on peut voir [Bru 1981/2013].

30. Poisson [1824, 1829], repris dans [Poisson 1837, chap. IV]. On pourra voir [Hald 1998] pour un exposé des travaux de Poisson.

31. Sur l'un des rares défenseurs alors de la statistique laplacienne, Irenée Jules Bien-aimé, voir l'article [Bru *et al.* 1997]. Sur les problèmes de fondements posés alors au calcul des probabilités, voir Th. Martin [1996] et les commentaires des éditeurs des *Œuvres complètes* de Cournot (t. I et t. XI, notamment).

vraiment rupture mais oubli, ce qui est pire d'une certaine façon, parce qu'une rupture laisse des traces et un oubli les efface. Pour s'en rendre compte, il suffit d'examiner rapidement l'exemple français, là où tout est né et où tout semble mourir. Le principal traité de calcul des probabilités français de la seconde moitié du XIX^e siècle est le *Calcul des probabilités* de Joseph Bertrand [1888], ouvrage remarquable à plus d'un titre³², mais où le théorème de Laplace n'est pas mentionné, ni même son cas particulier relatif au problème des points au jeu de dés. Certes, Bertrand traite dans son chapitre 1 le problème des points pour un petit nombre de dés, mais ses résultats ne vont pas au-delà de ceux de Galilée ou de Huygens.

Considérons maintenant le traité de Poincaré. Henri Poincaré, nommé en 1886 titulaire de la chaire parisienne de calcul des probabilités et physique mathématique, a enseigné une seule fois le calcul des probabilités à la Sorbonne au printemps 1894. Ses leçons, rédigées par A. Quiquet, ont été publiées en 1896. Poincaré suit visiblement Bertrand dont son cours est une sorte de commentaire éclairé, avec des remarques incidentes au gré des idées que le texte bertrandin lui suggère. Dans cette première édition, nulle trace de la méthode des fonctions caractéristiques, ni du théorème de Laplace, si ce n'est une allusion énigmatique dans la 14^e leçon (n^o 12) : s'il n'y a pas d'erreurs systématiques, la moyenne d'un grand nombre d'erreurs « a une probabilité conforme à la loi de Gauss », avec pour argument un calcul rapide de moments qui ne prouve rien³³. Ce n'est que dans les ajouts de la seconde édition de ce cours [1912], rédigés peu de temps avant sa mort que Poincaré expose très rapidement le théorème dont il s'agit³⁴. Ce court passage de Poincaré a inspiré les premiers travaux de Lévy en calcul des probabilités, à partir de 1919-1920, et à sa suite une partie des travaux probabilistes de l'entre-deux-guerres³⁵.

La démonstration de Poincaré ne va pas plus loin que celle de Laplace, et, comme le souligne Lévy [1970, p. 75], elle est aussi peu « rigoureuse » que possible. Cependant, on l'a dit, c'est cette rédaction de Poincaré qui a servi de point de départ à l'école française de calcul des probabilités, et non celle de Laplace de 1812, tout à fait oubliée en 1912. Il n'y a ni continuité ni rupture, c'est un retour en arrière qui relance la théorie intégrée dorénavant à la nouvelle théorie des fonctions. Constat décevant pour Laplace sans

32. Voir [Sheynin 1991 ; Armatte 2006 ; Mazliak 2012].

33. De la même façon, le cours de calcul des probabilités de Borel [1909] qui est une lecture positive du cours de Poincaré, et à travers lui de celui de Bertrand, ne mentionne nulle part le théorème de Laplace ni les fonctions caractéristiques.

34. Ce passage est repris mot à mot du *Cours d'astronomie générale* fait par Poincaré à l'École polytechnique en 1905. On ignore ses sources, mais il est possible que Poincaré s'inspire de la démonstration originale de Liapounov [1900].

35. Le premier cours français qui expose ces belles théories est celui que Paul Lévy enseigne à l'École polytechnique à partir de 1919 et qui a été publié en 1925.

doute, mais qui illustre un mode d'enchaînement particulier aux mathématiques, la transmission souterraine. Certaines parties des mathématiques semblent parfois s'évanouir en d'obscures oubliettes, mais elles continuent leur vie indépendamment des mathématiciens et soudain réapparaissent, jaillissent de nouveau à l'air libre, parfois en plusieurs endroits à la fois, aussi brusquement qu'elles avaient disparu, comme une rivière, un moment engloutie qui, après un long parcours sous terre, reprend son cours ordinaire affublé d'autres noms et d'autres origines, jusqu'à ce qu'un spéléologue hésitant à chaque pas, tâtonnant, la suive dans son périple obscur, caché mais bien réel.

VII. Une réapparition au xx^e siècle

Ainsi, les problèmes mathématiques ont de ces éclipses apparentes, et pour conclure notre courte escapade à la poursuite de la formule des points du jeu de dés, nous allons expliquer rapidement comment elle a ressurgi en Europe centrale vers 1912, au moment de la renaissance de l'analyse pure, celle de Hardy, Littlewood, Fejér, Steinhaus, Pólya, Bochner, Zygmund, Khinchin, Szegő, et mille autres, qui entendent absolument démontrer les passages et les convergences rencontrés en chemin, en majorant et minorant et en rangeant en ordre de bataille tous les epsilons nécessaires ; cette analyse que le xx^e siècle a enseignée avec toute la clarté analytique possible semble toujours en vigueur en 2015, de sorte que nous aurons ainsi bouclé la boucle des dés, commencée au $xvii^e$ siècle ou avant.

Dans sa thèse d'analyse soutenue en 1912 à Budapest, devant Lipót Fejér, George Pólya résout le problème suivant³⁶ :

Calculer $\iint \dots \int_{V_n} dx_1 \dots dx_n$, où V_n désigne le volume de l'espace $\mathbb{R}^n$ à n dimensions défini par les inégalités $-a_i \leq x_i \leq a_i$, pour $1 \leq i \leq n$ et $-a_{n+1} \leq x_1 + \dots + x_n \leq a_{n+1}$.

Ce problème lui a été posé par Paul Hertz qu'il a rencontré à Göttingen et avec lequel il a sympathisé. Il vient de la mécanique statistique de Gibbs dans les détails de laquelle nous n'entrerons pas³⁷.

Nous allons suivre les grandes lignes de la démonstration de Pólya, ce qui nous permettra de mesurer le chemin parcouru. Pour alléger les notations et ne pas être trop illisible, nous nous contenterons du cas où le volume V_n est défini par les inégalités $-h \leq x_i \leq h$, pour $1 \leq i \leq n$ et $-s \leq x_1 + \dots + x_n \leq s$. Sous cette forme, le problème est équivalent au

36. Voir [Pólya 1912], repris dans [1913] que nous suivons.

37. [Hertz 1913], sur lequel on pourra consulter [Borel 1915].

problème des dés continus ou des orbites cométaires. Il s'agit de calculer la probabilité que la somme des orbites de n comètes soit comprise entre $-s$ et s , si on suppose qu'elles ont été lancées au hasard et que leurs inclinaisons sont également distribuées entre $-h$ et h . Le volume V_n est égal à cette probabilité multipliée par le volume du cube à n dimensions de côté égal à $2h$. Toutefois, nous gardons la formulation en termes de volume adoptée par Pólya.

D'abord en quel sens doit être pris ce volume ? Voilà une question ignorée de Moivre, Laplace et les autres. Depuis Archimède, un volume est un volume et il est doté des propriétés naturelles d'un volume, l'additivité finie voire dénombrable, en particulier. Mais cela ne peut satisfaire les nouveaux analystes qui ont lu la seconde édition du cours de Camille Jordan. Le volume V_n est donc mesuré au sens de Jordan³⁸. Pour cela, Pólya se donne un entier m et divise l'intervalle $(-h, h)$ en parties égales de largeur³⁹ $1/m$. Les points de subdivision sont ainsi⁴⁰

$$-\frac{[mh]}{m}, -\frac{[mh]-1}{m}, \dots, -\frac{1}{m}, 0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{[mh]}{m}.$$

Partant de l'origine, découpons l'espace à n dimensions en petits cubes de côtés $1/m$. L'intervalle $(-h, h)$ étant recouvert par $2[mh] + 1$ intervalles de longueur $1/m$, le gros cube de l'espace $\mathbb{R}^n$ centré en l'origine et de côté $2h$ est entièrement recouvert par les $(2[mh] + 1)^n$ petits cubes dont les coins

$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{i_1}{m}, \frac{i_2}{m}, \dots, \frac{i_n}{m}\right)$ satisfont la condition

$$-[mh] - 1 \leq i_j \leq [mh], \text{ pour } 1 \leq j \leq n,$$

et le volume V_n sera recouvert par les petits cubes définis ci-dessus dont les coins vérifient en outre la condition

$$-[ms] - 1 \leq i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq [ms].$$

Si dans les inégalités précédentes on met des inégalités strictes, on obtient une famille de petits cubes entièrement contenus dans le volume V_n . On observe que la différence de ces deux volumes de petits cubes est un $o\left(\frac{1}{m^n}\right)$, quand m tend vers l'infini, de sorte que le volume V_n est mesurable

38. [Jordan 1893, chapitre I, § II].

39. Nous conservons les notations de Pólya qui sont ici légèrement différentes de celles introduites ci-dessus où nous divisons $(-h, h)$ en intervalles de longueur h/b , pour un entier b appelé comme m à devenir infiniment grand. Cette modification ne change pas la démarche ni le calcul. D'ailleurs Laplace emploie également ce partage en inverse d'entier, à l'occasion.

40. Le symbole $[mh]$ désigne, de façon habituelle, la partie entière de mh .

au sens de Jordan. Il est égal à la limite de la quantité $\frac{N_n}{m^n}$ dans lequel N_n désigne le nombre de n -uplets d'entiers $(i_1, \dots, i_n)$ compris entre $-[mh]$ et $[mh]$ et dont la somme vérifie

$$(6) \quad -[ms] \leq i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq [ms].$$

N_n est donc aussi le nombre de cas du problème des points pour n dés à $f = 2[mh] + 1$ faces numérotées de $-[mh]$ à $[mh]$, lorsqu'on s'intéresse non pas seulement à une somme particulière mais à toutes celles vérifiant les inégalités (6). Il y a donc passage du fini à l'infiniment petit, mais cette fois-ci il est géométrique ou plutôt métrique, et doit se faire dans les règles de l'art nouveau.

Certes, Pólya aurait pu en rester là et renvoyer à Laplace et à tous les auteurs suivants qui ont repris et amélioré ce calcul, sous une forme ou une autre, à commencer par Hertz son ami et les auteurs récents qui ont traité cette question ou une autre voisine. Mais le jeune savant entend ne rien admettre qui ne soit parfaitement établi, à la manière de Fejér qui demandait qu'une rédaction parte des premiers principes de l'algèbre et ne laisse rien dans l'ombre.

Il s'agit donc d'abord de calculer N_n et ensuite de lui trouver un équivalent. Pólya utilise alors la méthode des fonctions génératrices en la variable imaginaire appliquée aux dénombrements. Il trouve que le nombre N_n des cubes dont les coins vérifient les inégalités (6) est égal à la somme

$$\sum_{k=-[ms]}^{[ms]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ki\alpha} \left(\frac{\sin f \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^n d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2[ms] + 1) \left(\frac{\sin f \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^n}{\sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha,$$

d'où

$$V_n = \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin sx (\sin xh)^n}{x^{n+1}} dx,$$

ce qui est essentiellement la formule de Laplace de [1810] démontrée par la méthode de Laplace, les passages à la limite étant chez Pólya établis en toute rigueur, et sans passer par la formule intégrale de Fourier, qui est ici, comme chez Laplace, implicite et ne saurait nuire à la rigueur des raisonnements.

Il reste à trouver un équivalent de V_n quand n devient infini. Pólya traite le cas $h = 1/2$, et pose $s = \eta\sqrt{n}$. Soit la facilité $S_n(\eta)$ de la somme de n quantités indépendantes X_i , $1 \leq i \leq n$, uniformément distribuées entre $-1/2$ et $1/2$ divisée par $\sqrt{n}$, on a

$$\frac{S_n(\eta)}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \cos(2\sqrt{n} \eta x) dx,$$

qui relève de la méthode d'approximation de Laplace. Pólya effectue le changement de variable $\sqrt{n} x = \sqrt{6} y$ et montre rigoureusement que la fonction $S_n(\eta)$ converge uniformément vers une intégrale de Laplace⁴¹

$$\sqrt{6} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-y^2} \cos(2\sqrt{6} \eta y) dy = \sqrt{\frac{6}{\pi}} e^{-6\eta^2}.$$

C'est la densité de la loi normale centrée de variance 1/12.

Sans le savoir sans doute, ou en le sachant, Pólya vient de démontrer le théorème de Laplace, dans le cas particulier de Laplace des orbites des comètes, avec la méthode de Laplace, c'est-à-dire en discrétisant le volume dont il s'agit, en passant aux fonctions génératrices de la variable imaginaire, puis en appliquant la formule de Fourier discrète et la méthode d'approximation de Laplace, mais dans le respect absolu des règles de la nouvelle analyse. C'est, à notre connaissance, la première démonstration entièrement rigoureuse du théorème de Laplace dans le cadre de l'analyse fine de Fejér et de ses contemporains⁴².

Ainsi, une nouvelle prise de conscience de l'héritage laplacien se manifeste au xx^e siècle. C'est ce qu'exprime clairement J. Uspensky⁴³ :

« Laplace's work, on account of the multitude of new ideas, new analytic methods, and new results, in all fairness should be regarded as one of the most outstanding contributions to mathematical literature. It exercised a great influence on later writers on probability in Europe, whose work chiefly consisted in elucidation and development of topics contained in Laplace's book. » [1937, p. 12-13]

41. Pólya renvoie au cours de Jordan [1894, p. 288], pour le calcul de cette intégrale. Cela confirme le rôle de ce cours pour la nouvelle analyse du xx^e siècle.

42. Il n'est pas interdit de penser que cette solution complète et directe du problème de Pólya et la simplicité remarquable du résultat obtenu ont pu inciter leur auteur à chercher plus loin, et ont été une motivation de son article célèbre sur le théorème central limite [Pólya 1920]. Sur l'histoire de ce dernier théorème, on pourra voir, notamment, [Hald 1998 ; Fischer 2010].

43. James V. Uspensky (1883-1947), élève de A. A. Markov, appartenait à l'école de Saint-Petersbourg fondée par Tchebychev, avant d'émigrer aux États-Unis. Comme tous les savants de cette école, qui s'est revendiquée de l'héritage de Laplace, il nomme théorème de Laplace-Liapounov, le théorème de Laplace [Uspensky 1937, chap. 14]. Sur la réception de Laplace dans l'entre-deux-guerres, voir aussi [Molina 1930].

BIBLIOGRAPHIE

- [Armatte 2006] Michel Armatte (dir.), « Teaching randomness (1880-1945) », *Journal électronique d'histoire des probabilités et de la statistique*, 2/2 (2006).
- [Bellhouse 2005] David R. Bellhouse, « Decoding Cardano's Liber de Ludo Aleae », *Historia Mathematica*, 32 (2005), p. 180-202.
- [Bellhouse 2011] D. R. Bellhouse, *Abraham De Moivre : Setting the Stage for Classical Probability and Its Applications*, Boca Raton : CRC Press, 2011.
- [Bernoulli Werke 2] *Die Werke von Daniel Bernoulli*, vol. 2, Basel : Birkhäuser, 1982.
- [Bernoulli 1772] Daniel Bernoulli, « De summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque usu », *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 16 (1772), p. 71-90 ; *Werke*, 2, p. 101-116.
- [Bernoulli 1773] D. Bernoulli, « De indole singulari serierum infinitarum quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque summatione et usu », *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 17 (1773), p. 3-23 ; *Werke*, 2, p. 119-134.
- [Bernoulli 1774] D. Bernoulli, « Theoria Elementaria serierum, ex sinibus atque cosinibus arcuum arithmetice progredientium diversimode compositarum, dilucidata », *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 18 (1774), p. 3-23 ; *Werke*, 2, p. 138-151.
- [Bertrand 1888] Joseph Bertrand, *Calcul des probabilités*, Paris : Gauthier-Villars, 1888 ; 2^e éd., 1907. Repr. New York : Chelsea, 1972 ; Paris : Gabay, 1997.
- [Borel 1909] Émile Borel, *Éléments de la Théorie des Probabilités*, Paris : Hermann, 1909.
- [Borel 1915] É. Borel, « Mécanique statistique – Supplément II », *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, J. Molk (dir.), t. IV, vol. 1, 1915, p. 272-292 ; *Œuvres de Émile Borel*, t. 3, Paris : CNRS, 1972, p. 1713-1733.
- [Borgato 2012] Maria Teresa Borgato, « Lagrange e le equazioni alle differenze finite », dans [Féry 2012, p. 301-335].
- [Bru 1981/2013] Bernard Bru, « Poisson et le calcul des probabilités », dans [Kosmann-Schwarzbach 2013, p. 333-355].
- [Bru et al. 1997] Bernard Bru, Marie-France Bru et Olivier Bienaimé, « La statistique critiquée par le calcul des probabilités : deux manuscrits inédits d'Irénée Jules Bienaimé », *Revue d'histoire des mathématiques*, 3 (1997), p. 137-239.
- [Cauchy 1853] Augustin-Louis Cauchy, « Sur les résultats moyens d'observations de même nature, et sur les résultats les plus probables », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 37 (1853), p. 198-206, 264-272, 326-334, 381-385 ; *Œuvres complètes*, 1^{re} série, vol. 12, p. 94-130.
- [Cournot Œuvres] Antoine-Augustin Cournot, *Œuvres complètes*, 11 tomes, Paris : Vrin, 1973-2010.
- [Durand-Richard 2012] Marie-José Durand-Richard, « La réception de la théorie des probabilités de Laplace chez les algébristes anglais (1812-1854) », *Journal électronique d'histoire des probabilités et de la statistique*, 8 (2012).
- [Feller 1968] William Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. I, 3^e éd., New York : J. Wiley & Sons, 1968.
- [Féry 2012] Suzanne Féry (dir.), *Aventures de l'analyse de Fermat à Borel. Mélanges en l'honneur de Christian Gilain*, Nancy : Presses Universitaires de Nancy, 2012.
- [Fischer 2010] Hans Fischer, *A History of the Central Limit Theorem : From Classical to Modern Probability*, New York : Springer, 2010.

- [Fourier 1808] Joseph Fourier, « Lettre de Fourier à Laplace », dans [Herivel 1980, p. 24-26] et [Hahn 2013, lettre 1128].
- [Fourier 1811] J. Fourier, « Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur », manuscrit, Archives de l'Académie des sciences, Paris.
- [Fourier 1816] J. Fourier, « Théorie de la chaleur (extrait) », *Annales de chimie et de physique*, 3 (1816), p. 350-376.
- [Fourier 1822] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris : Firmin Didot, 1822.
- [Galilée Opere] *Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale*, 20 vol., Firenze : Barbèra, 1890-1909, 1964-1968.
- [Galilée s.d.] « Sopra le scoperte de i dadi », *Opere*, 8, p. 591-594. Trad. fr. par D. Trotoux, J.-C. et C. d'Amico, dans J.-F. Pichard (éd.), *Histoire des mathématiques par leur littérature*, fasc. 1 : Recueil de textes sur les probabilités, Caen : IREM de Basse-Normandie, 2012, p. 4-6.
- [Gillispie 1978/1997] Charles C. Gillispie, « Laplace, Pierre-Simon de », dans *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 15, 1978, p. 273-403. Revu et augmenté dans *Pierre-Simon Laplace 1749-1827. A life in exact science*, Princeton : Princeton University Press, 1997.
- [Gillispie 1979] C. C. Gillispie, « Mémoires inédits ou anonymes de Laplace sur la théorie des erreurs, les polynômes de Legendre, et la philosophie des probabilités », *Revue d'histoire des sciences*, 32 (1979), p. 223-279.
- [Gillispie 2004] C. C. Gillispie, *Science and Polity in France. The Revolutionary and Napoleonic Years*, Princeton : Princeton University Press, 2004.
- [Hahn 2004] Roger Hahn, *Le système du monde. Pierre Simon Laplace. Un itinéraire dans la science*, Paris : Gallimard, 2004. Version anglaise, *Pierre-Simon Laplace 1749-1827 : A Determined Scientist*, Cambridge : Harvard University Press, 2005.
- [Hahn 2013] R. Hahn (éd.), *Correspondance de Pierre Simon Laplace* (Collection de travaux de l'Académie internationale d'histoire des sciences), 2 vol., Turnhout : Brepols, 2013.
- [Hald 1990] Anders Hald, *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, New York : Wiley, 1990.
- [Hald 1998] A. Hald, *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*, New York : Wiley, 1998.
- [Herivel 1980] John Herivel, *Joseph Fourier face aux objections contre sa théorie de la chaleur : lettres inédites, 1808-1816*, Paris : Bibliothèque nationale, 1980.
- [Hertz 1913] Paul Hertz, « Über die statistische Mechanik der Raumgesamtheit und den Begriff der Komplexion », *Mathematische Annalen*, 74 (1913), p. 153-203.
- [Huygens Œuvres] Christiaan Huygens, *Œuvres complètes*, 22 vol., La Haye : Société hollandaise des sciences, 1888-1950.
- [Huygens 1657] C. Huygens, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, traduit en latin et publié en appendice de Van Schooten, *Exercitationum mathematicarum libri quinque*, Leyde, 1657. Trad. fr. « Du calcul dans les jeux de hasard », dans *Œuvres*, 14, p. 60-179.
- [Jordan 1893] Camille Jordan, *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, 2^e édition entièrement refondue, t. 1, Paris : Gauthier-Villars, 1893.
- [Jordan 1894] C. Jordan, *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, 2^e édition entièrement refondue, t. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1894.
- [Kosmann-Schwarzbach 2013] Yvette Kosmann-Schwarzbach (dir.), *Siméon-Denis Poisson. Les mathématiques au service de la science*, Palaiseau : École polytechnique, 2013. Nouvelle édition augmentée de [Métivier et al. 1981].

- [Lagrange 1776] Joseph-Louis Lagrange, « Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations », *Miscellanea Taurinensia*, années 1770-1773, 5 (1776), p. 167-232 ; *Œuvres de Lagrange*, 2, Paris : Gauthier-Villars, 1868, p. 173-234.
- [Laplace *Œuvres*] Pierre-Simon Laplace, *Œuvres complètes*, 14 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1878-1912.
- [Laplace 1776] P.-S. Laplace, « Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes, sur la figure de la terre et sur les fonctions », *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie royale des sciences, par divers savans*, année 1773, 7 (1776), p. 503-540 ; *Œuvres*, 8, p. 279-321.
- [Laplace 1777] P.-S. Laplace, « Recherches sur le milieu qu'il faut choisir entre les résultats de plusieurs observations », dans [Gillispie 1979, p. 228-256].
- [Laplace 1781] P.-S. Laplace, « Mémoire sur les probabilités », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1778 (1781), p. 227-332 ; *Œuvres*, 9, p. 383-485.
- [Laplace 1785] P.-S. Laplace, « Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1782 (1785), p. 1-88 ; *Œuvres*, 10, p. 209-291.
- [Laplace 1809] P.-S. Laplace, « Mémoire sur divers points d'analyse », *Journal de l'École polytechnique*, 8, 15^e cahier (1809), p. 229-265 ; *Œuvres*, 14, p. 178-214.
- [Laplace 1810] P.-S. Laplace, « Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités », *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, année 1809 (1810), p. 353-415 ; *Œuvres*, 12, p. 301-345.
- [Laplace 1811] P.-S. Laplace, « Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités, et spécialement à la recherche du milieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations », *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, année 1810 (1811), p. 279-347 ; *Œuvres*, 12, p. 357-412.
- [Laplace 1812] P.-S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Paris : V^e Courcier, 1812, avec une introduction et des additions, 1814, avec trois suppléments ajoutés par l'auteur, 1820, avec un quatrième supplément ajouté par l'auteur, 1825 ; *Œuvres*, 7.
- [Laplace 1814/1986] P.-S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, Paris : V^e Courcier, 1814 ; 2^e éd., 1816 ; 3^e éd., 1819 ; *Œuvres*, 7, p. V-CLIII, Paris : Bachelier, 1825 ; rééd. Paris : Christian Bourgois, 1986.
- [Laugwitz 1992] Detlef Laugwitz, « Early delta functions and the use of infinitesimals in research », *Revue d'histoire des sciences*, 45 (1992), p. 115-128.
- [Lévy 1925] Paul Lévy, *Calcul des probabilités*, Paris : Gauthier-Villars, 1925.
- [Lévy 1970] P. Lévy, *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Paris : Blanchard, 1970.
- [Liapounov 1900] Alexandre Liapounov, « Sur une proposition de la théorie des probabilités », *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg*, XIII/4 (1900), p. 359-386.
- [Martin 1996] Thierry Martin, *Probabilités et critique philosophique selon Cournot*, Paris : Vrin, 1996.
- [Mazliak 2012] Laurent Mazliak (dir.), « Bicentennial of Laplace's Analytical Theory », *Journal électronique d'histoire des probabilités et de la statistique*, 8/1 (2012).
- [Métivier et al. 1981] Michel Métivier, Pierre Costabel, Pierre Dugac, *Siméon-Denis Poisson et la science de son temps*, Palaiseau : École polytechnique, 1981.

- [Moivre 1712] Abraham de Moivre, « De mensura sortis, seu de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus », *Philosophical Transactions*, 27 (1712), p. 213-264. Trad. angl. par B. McClintock, *International Statistical Review*, 52 (1984), p. 237-262.
- [Moivre 1718] A. de Moivre, *The Doctrine of Chances : or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*, London : W. Pearson, 1718.
- [Moivre 1730] A. de Moivre, *Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis, et Supplementum*, London : J. Tonson & J. Watts, 1730. Trad. fr. par Jean Peyroux, *Mélanges analytiques*, Paris : Blanchard, 1990.
- [Moivre 1738] A. de Moivre, *The Doctrine of Chances : or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*, 2^e éd., London : H. Woodfall, 1738 ; repr. London : Cass, 1967.
- [Moivre 1756] A. de Moivre, *The Doctrine of Chances : or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*, 3^e éd., London : A. Millar, 1756 ; repr. New York : Chelsea, 1967.
- [Molina 1930] Edward C. Molina, « The theory of probability : some comments on Laplace's *Théorie analytique* », *Bulletin of the American Mathematical Society*, 36 (1930), p. 369-392.
- [Montmort 1708] Pierre Rémond de Montmort, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Paris : Quillau, 1708.
- [Montmort 1713] P. R. de Montmort, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, seconde édition revue et augmentée de plusieurs lettres, Paris : Quillau, 1713 ; repr. New York : Chelsea, 1980.
- [Morgan 1837] Augustus de Morgan, « [Review of] *Théorie analytique des Probabilités* par M. le Marquis de Laplace, 3^e éd., 1820 », *Dublin Review*, 3 (1837), p. 237-248, 338-354.
- [Poincaré 1896] Henri Poincaré, *Calcul des probabilités*, leçons professées pendant le second semestre 1893-1894, rédigées par A. Quiquet, ancien élève de l'École normale supérieure, Paris : G. Carré, 1896.
- [Poincaré 1912] H. Poincaré, *Calcul des probabilités, seconde édition revue et augmentée par l'auteur*, Paris : Gauthier-Villars, 1912, nouveau tirage 1923 ; repr. Paris : J. Gabay, 1987.
- [Poisson 1810] Siméon-Denis Poisson, « [Compte rendu de] "Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres, et sur leur application aux probabilités ; par M. Laplace" », *Nouveau Bulletin des sciences, par la Société philomatique de Paris*, t. II (1810-1811), n° 35, août 1810, p. 132-136.
- [Poisson 1811] S.-D. Poisson, « Sur les intégrales définies », *Nouveau Bulletin des sciences, par la Société philomatique de Paris*, t. II (1810-1811), n° 42, fév. 1811, p. 243-252 ; n° 50, nov. 1811, p. 375-380.
- [Poisson 1813-1823] S.-D. Poisson, « Mémoire sur les intégrales définies », *Journal de l'École polytechnique*, t. IX (1813), p. 215-246 ; t. X (1815), p. 612-631 ; t. XI (1820), p. 295-341 ; t. XII (1823), p. 404-509.
- [Poisson 1824] S.-D. Poisson, « Sur la Probabilité des résultats moyens des Observations », *Connaissance des tems pour l'an 1827*, Paris : Bachelier, 1824, p. 273-302.
- [Poisson 1829] S.-D. Poisson, « Suite du Mémoire sur la probabilité du résultat moyen des observations, inséré dans la Connaissance des Tems de l'année 1827 », *Connaissance des tems pour l'an 1832*, Paris : Bachelier, 1829, « Additions », p. 3-22.

- [Poisson 1837] S.-D. Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités*, Paris : Bachelier, 1837 ; repr. Paris : J. Gabay, 2003.
- [Pólya 1912] George Pólya, *Über einige Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und gewisse damit zusammenhängende bestimmte Integrale*, (en hongrois), thèse math., Budapest, 1912 ; *Math. phys. lapok*, 22 (1913), p. 53-73, 163-219.
- [Pólya 1913] G. Pólya, « Berechnung eines bestimmten Integrals », *Mathematische Annalen*, 74 (1913), p. 204-212.
- [Pólya 1920] G. Pólya, « Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentproblem », *Mathematische Zeitschrift*, 8 (1920), p. 171-181.
- [Schneider 1987] Ivo Schneider, « Laplace and Thereafter : The Status of Probability Calculus in the Nineteenth Century », dans L. Krüger, L. J. Daston, M. Heidelberger (éd.), *The Probabilistic Revolution*, vol. 1, *Ideas in History*, Cambridge (Mass.) : MIT Press, 1987, p. 191-214.
- [Sheynin 1975] Oscar Sheynin, « On the appearance of Dirac's delta function in Laplace's work », *Istoriko-Matematicheskije Issledovaniya*, 20 (1975), p. 303-308 (en russe). Trad. angl. sur le site www.sheynin.de.
- [Sheynin 1991] O. Sheynin, « H. Poincaré's work on probability », *Archive for History of Exact Sciences*, 42 (1991), p. 139-171.
- [Simpson 1755] Thomas Simpson, « A letter to the Right Honorable George Earl of Macclesfield, President of the Royal Society, on the Advantage of taking the Mean of a Number of Observations, in practical Astronomy », *Philosophical Transactions*, 49 (1755), p. 82-93.
- [Simpson 1757] T. Simpson, *Miscellaneous Tracts on some Curious, and Very Interesting Subjects in Mechanics, Physical-Astronomy, and Speculative Mathematics*, London : J. Nourse, 1757.
- [Stigler 1986] Stephen M. Stigler, *The History of Statistics : The Measurement of Uncertainty before 1900*, Cambridge (Mass.) : The Belknap Press of Harvard University Press, 1986.
- [Todhunter 1865] Isaac Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, London : Macmillan, 1865 ; repr. New York : Chelsea, 1949.
- [Uspensky 1937] James V. Uspensky, *Introduction to Mathematical Probability*, New York : McGraw-Hill, 1937 ; rééd. 1965.

Coulomb et la difficile gestion du « mélange du Calcul & de la Physique »

Christine BLONDEL et Bertrand WOLFF

Charles-Augustin Coulomb (1736-1806) est considéré dans l'histoire de la physique comme incarnant une rupture à la fois théorique, expérimentale et sociale. La rupture théorique s'appuie sur l'introduction de lois mathématiques dans la physique expérimentale qualitative du XVIII^e siècle, la rupture expérimentale s'appuie sur l'introduction d'une instrumentation de précision, et enfin la rupture sociale s'appuie sur la fermeture au public de l'espace expérimental [Heilbron 1979 ; Hankins 1989 ; Licoppe 1996 ; Garber 1999 ; Gillispie 2004, p. 676-677]. Notre objectif ici est de questionner la première de ces ruptures, à savoir l'introduction des mathématiques dans l'art de l'ingénieur, la mécanique et la physique expérimentale. Quels furent les attendus, les méthodes et les résultats du « mélange du calcul & de la physique » promu par Coulomb dès son premier mémoire de mécanique [1776] ? Dans quelle mesure peut-on considérer cette mathématisation comme radicalement nouvelle, faisant appel à des outils mathématiques originaux, ou comme s'inscrivant dans une tradition plus ancienne ? Peut-on déceler une évolution dans les différents types de « lois » formulées par Coulomb pour interpréter les phénomènes physiques ? Dans quelle mesure les résultats de cette mathématisation constituent-ils de réels apports pour les praticiens ? Telles sont les principales questions que nous envisagerons dans l'étude des mémoires de Coulomb faisant intervenir les mathématiques.

Par ailleurs, la volonté affirmée de Coulomb de faire dialoguer les mathématiques et la physique expérimentale se heurte à des difficultés, qu'il s'agisse de difficultés encore aujourd'hui intrinsèques au domaine physique étudié, comme le frottement, ou de difficultés liées à l'introduction d'approximations physiques ou mathématiques au cours du raisonnement. La gestion de ces approximations constitue une part importante du travail à accomplir pour mathématiser la physique. Or cette gestion des approximations, la « cuisine » du physicien, moins prestigieuse que la modélisation mathématique, n'est pas moins importante et retiendra particulièrement notre attention ¹.

1. L'absence quasi totale d'archives personnelles et de correspondance de Coulomb nous limite à l'étude de ses œuvres publiées. Mais quelques mémoires de Coulomb ont été rédigés avec une certaine précipitation qui laisse voir des traces de cette « cuisine ».

Tôt attiré par les mathématiques, Coulomb est élu à 21 ans membre adjoint de la Société des sciences de Montpellier où il présente cinq mémoires de mathématiques et d'astronomie. Puis, optant pour une carrière d'ingénieur, il intègre l'École du génie de Mézières, l'une des meilleures écoles militaires d'Europe, où est donné un enseignement scientifique et technique de haut niveau. Des cours de mathématiques – géométrie, arithmétique, mécanique et hydraulique – sont assurés par Charles Bossut, mais l'analyse ne figurait pas dans le cursus même si Bossut pouvait en fournir quelques éléments à ses élèves. L'analyse, indispensable pour l'étude de la dynamique, ne l'était pas pour celle de la statique. À sa sortie de l'École du génie en 1761, Coulomb se destine à la construction des fortifications et bâtiments militaires. Il enchaîne les missions, de Brest à la Martinique, puis à Cherbourg, Besançon... Ni ce nomadisme, ni même les huit années passées à diriger le grand chantier du Fort Bourbon à la Martinique ne lui font oublier les mathématiques, qu'il tente d'appliquer aux expériences qu'il mène non seulement dans son cabinet de physique mais aussi « en grand » sur le terrain, avec les ouvriers dont il peut disposer. Il ne perd pas de vue son objectif : se rapprocher de Paris et donc de l'Académie des sciences. La plupart des ingénieurs, civils ou militaires, œuvrant dans le domaine de la construction, n'ont alors qu'une faible maîtrise de l'outil mathématique, à la différence des ingénieurs de l'artillerie ou de la construction navale. Ce sont les ingénieurs du génie militaire qui, à la fin du siècle, avec Coulomb, Borda ou Dubuat, ses condisciples à l'École de Mézières, introduisent les mathématiques, et en particulier l'analyse, dans l'art de l'ingénieur. Cet art de l'ingénieur s'appuie alors pour l'essentiel sur des règles ou formules empiriques, même si les mathématiques jouissent d'un prestige sans commune mesure avec leur efficacité réelle. Les travaux de Coulomb ou Dubuat amorcent une rupture dans l'analyse approfondie des problèmes techniques à l'aide des outils mathématiques [Picon 1989, p. 157-158].

C'est donc au début de son premier mémoire important de mécanique que Coulomb proclame son intention de mettre en œuvre « le mélange du Calcul & de la Physique » :

« Ce Mémoire est destiné à déterminer, autant que le mélange du Calcul & de la Physique peuvent [*sic*] le permettre, l'influence du frottement & de la cohésion, dans quelques problèmes de Statique. » [Coulomb 1776, p. 343]

Dans sa biographie consacrée à Coulomb, C. Stewart Gillmor considère qu'en introduisant ce « mélange » dans l'étude de la statique, Coulomb renouvelle de manière radicale l'art de l'ingénieur et la physique expérimentale [Gillmor 1971]. Selon lui, ces travaux de Coulomb se caractérisent par une fusion inédite entre les techniques de la physique expérimentale, illustrées notamment par Musschenbroek, et l'usage de l'analyse mathé-

matique en mécanique, mis en œuvre par Euler. Pour Gillmor, le savant inaugure un nouveau rapport entre mathématiques et physique, les mathématiques servant à la fois à formuler des lois expérimentales et de guide pour les recherches à mener. Enfin, à la différence de ses prédécesseurs, notamment Euler, Coulomb aurait établi des règles pratiques pour les artisans et ingénieurs.

Cette thèse a été contestée par Clifford A. Truesdell, notamment au sujet de la « rupture générationnelle » qu'aurait accomplie Coulomb [Truesdell 1973-1974]. Pour Truesdell, Coulomb s'inscrit dans le sillage d'une lignée de géomètres, depuis Huygens jusqu'à Euler, qui ont construit les bases de la mécanique de l'ingénieur. Certes, souligne-t-il, la plupart des ingénieurs du génie ne font pas usage des exemples numériques, tables numériques ou règles formulées par ces mathématiciens, mais ils auront la même attitude envers les résultats de Coulomb. Encore au début du XIX^e siècle, ils continuent de s'appuyer sur la tradition et l'expérience plutôt que sur des apports théoriques [Picon 1989]. D'après Truesdell, le mérite de Coulomb réside moins dans une rupture fondatrice que dans sa capacité à résoudre, avec les outils mathématiques qu'il maîtrise, des problèmes non étudiés par ses prédécesseurs.

De façon à mieux cerner les traditions dans lesquelles s'inscrit l'approche de Coulomb, ainsi que les innovations que l'on peut y déceler, nous étudierons ici plusieurs mémoires clés du savant en vue d'y examiner concrètement l'alliance du calcul et de la physique, tant du point de vue des moyens mis en œuvre (techniques d'expérimentation, approximations) que de leurs finalités (pratiques / théoriques).

I. Les mathématiques au service de l'art de l'ingénieur

1. De nouvelles solutions pour des questions classiques de statique (1773)

Dans son premier mémoire de mécanique présenté à l'Académie des sciences en 1773, l'« Essai sur une application des règles de *Maximis & Minimis* à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture », Coulomb étudie une série de problèmes classiques de la science des ingénieurs depuis Bélidor : la flexion des poutres, la résistance d'un pilier à la rupture, la résistance d'un mur et l'équilibre des voûtes [Coulomb 1776]. Pour tous ces problèmes Coulomb prend en compte, comme ses prédécesseurs, le poids et les forces de frottement auxquels il ajoute des forces de cohésion².

2. Pour l'analyse du mémoire et de sa diffusion, voir [Gillmor 1971, p. 83-117; Heyman 1972; Dorn 1974; Grattan-Guinness 1990, vol. I, p. 533-540; Picon & Belhoste 1994; Radelet-de Grave 1994; Guillaume 1995, p. 99-102].

auxquelles il recourt dans sa modélisation des phénomènes. Ainsi il adopte la proportionnalité de la force de frottement à la force pressante avancée par Amontons en 1699, tout en soulignant que cette loi n'est pas exacte pour les masses élevées [Amontons 1702]. Par ailleurs, dans ses applications numériques Coulomb reprend les valeurs usuelles, peu précises, des quelques coefficients de frottement connus. Comme il est habituel à l'époque, les incertitudes sur les données ne se retrouvent pas dans l'énoncé des résultats. Ainsi, lorsqu'il traite de l'effondrement d'un mur de soutènement, avec un coefficient pris égal à 1 pour le frottement des terres, il en tire un angle de $36^{\circ} 34'$ avec la verticale pour le plan de cisaillement des terres.

Si le mémoire sur la statique a pu être considéré comme une référence fondamentale de l'histoire de la résistance des matériaux, ce n'est donc pas par l'usage de mathématiques innovantes, ni par ses quelques résultats expérimentaux que les praticiens n'ont pas retenus avant leur reformulation par Prony ou Navier [Timoschenko 1953 ; Picon 1989 ; Benvenuto 1997]. En revanche les expériences sur la résistance des pierres ou des briques à la rupture, par traction ou cisaillement, peuvent être considérées comme un apport décisif dans l'étude de la cohésion [Straub 1952 ; Truesdell 1973-1974 ; Benvenuto 1997]. Sur le plan théorique, Coulomb introduit en outre le concept de contrainte de cisaillement pour l'analyse de la rupture des matériaux et résout mathématiquement de manière efficace le problème classique de la flexion d'une poutre. Ses calculs sur la rupture des voûtes et sur la poussée des terres, avec ce qu'on appelle aujourd'hui l'équation de Coulomb, seront traduits par Prony en formules plus simples et en diagrammes utilisés par les ingénieurs [Picon 1992, p. 485-488 ; Benvenuto 1997, p. 414].

2. Les lois du frottement : de multiples approximations pour des lois empiriques (1781)

Il n'y a pas chez Coulomb de méthode unique pour réaliser le « mélange du Calcul & de la Physique ». Dans son mémoire ultérieur de mécanique, la « Théorie des machines simples », grâce auquel le savant remporte le prix de l'Académie des sciences pour l'année 1781 [Coulomb 1785]³, l'approche diffère sensiblement de celle du mémoire sur la statique. En 1779, à l'instigation du ministère de la Marine, l'Académie propose comme sujet de prix les lois du frottement et l'examen des effets résultant de la raideur des cordages « déterminés d'après des expériences réelles et faites en grand ». Il est demandé que les résultats soient applicables aux machines utilisées dans la marine, telles que la poulie, le cabestan et le plan incliné. Le

3. Pour une analyse de ce mémoire, voir [Gillmor 1971, chap. IV].

mémoire soumis par Coulomb, qui va lui ouvrir les portes de l'Académie, souligne d'abord les limites des travaux sur le frottement d'Amontons, Desaguliers, Bossut ou d'autres physiciens, en particulier ceux qui se sont limités à des essais dans un cabinet de physique. Les charges qu'il place sur son traîneau destiné à l'étude du frottement pèsent plus d'une tonne (Figure 2) et les cordes dont il étudie la raideur sont tendues par des charges d'une demi-tonne.

Les expériences ne sont d'ailleurs pas sans danger et Coulomb souligne le nombre d'heures consacrées « à prendre des précautions pour la sûreté des hommes » qu'il emploie. Le nombre des expériences dépasse largement la centaine, chacune comportant plusieurs séries de mesures. La diversité des paramètres dont Coulomb étudie l'influence sur la force de frottement entre deux corps est sans précédent : la charge appliquée, la nature des matériaux en contact (différents bois et métaux), l'orientation des fibres du bois, la rugosité et l'étendue des zones de contact, la durée du contact préalable à l'essai, l'utilisation de divers enduits (huile, suif...). Dans l'étude du frottement dynamique, la vitesse de glissement s'ajoute à ces nombreux paramètres. Les influences de la température et de l'hygrométrie sont encore évoquées. Pour l'étude de la raideur des cordes, il prend aussi en compte l'influence de l'eau qui les imbibe ou du goudronnage, et pour l'étude des poulies, treuils, cabestans... l'influence de la nature des axes et des chapes, enduits ou non, etc.

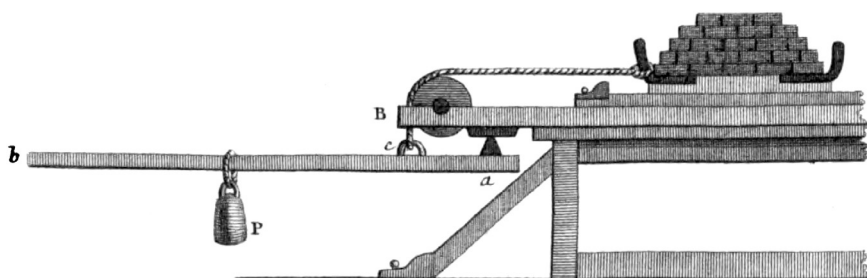


Figure 2 : [Coulomb 1785, Pl. II, Fig. 3].

La présentation des tableaux de résultats expérimentaux est systématiquement suivie d'« observations » qui discutent le rôle des différents facteurs en vue d'une première modélisation mathématique et avancent des hypothèses physiques explicatives. Les approximations sont nombreuses dans ce processus d'interprétation des résultats numériques, comme en témoignent pas moins de 53 occurrences de l'expression « à peu près » dans le cours des 160 pages de l'ouvrage. Certes, comme le souligne Coulomb, certaines approximations sont inhérentes à la nature du problème étudié. Ainsi dans le frottement il est difficile de maîtriser, d'une mesure à l'autre,

les « plus ou moins d'homogénéité des parties en contact » [Coulomb 1785, p. 173].

Examinons la suite des approximations faites dans l'étude de la force de frottement statique avec une charge posée sur un support plan et horizontal. Une première approximation de nature physique consiste à ne pas tenir compte de l'influence de la durée du contact préalable à la mesure, ou « temps de repos ». Coulomb constate en effet que le temps de repos n'influe sur le frottement « à sec » que pour des durées inférieures à quelques secondes. La force de frottement F est ensuite supposée pouvoir s'exprimer par une loi mathématique simple

$$F = A + \frac{P}{\mu}$$

où A est une constante, P le poids de la charge et μ un coefficient caractéristique des matériaux en contact (aujourd'hui reconnu comme l'inverse du coefficient de frottement). Une deuxième approximation consiste à négliger, dans la plupart des applications, le terme constant A , Coulomb estimant qu'il n'intervient de façon sensible que pour de très faibles poids et de grandes surfaces de contact. La constance du rapport P/F (c'est-à-dire le coefficient μ) est elle-même le fruit d'une approximation. Pour ne donner qu'un seul exemple, les mesures effectuées avec « bois de chêne sur bois de chêne » donnent pour P/F les valeurs 2,46 / 2,16 / 2,21 / 2,36 / 2,42 / 2,40. Coulomb considère ces différences, de l'ordre de la dizaine de pour cent, comme peu significatives, eu égard à la très grande étendue de variation des paramètres (poids et surface de contact), et conclut que « le rapport de la pression au frottement est toujours une quantité constante ».

Coulomb confirme ainsi la loi d'Amontons – la force de frottement F est indépendante de la surface de contact et proportionnelle au poids P – et ses expériences permettent de déterminer les coefficients de frottement, la plupart encore inconnus, pour une grande variété de matériaux.

Lorsque les surfaces sont garnies d'un enduit, l'influence de la durée T du contact préalable à la mesure (« temps de repos ») ne peut plus être négligée, d'où une nouvelle formule empirique hypothétique, ici présentée avec nos notations

$$F = \frac{P}{\mu'} + c T^x,$$

où μ' est un coefficient constant, c une constante et x un exposant positif à déterminer. Coulomb utilise les logarithmes pour déterminer l'exposant x à partir d'un tableau de mesures correspondant à différentes durées de contact préalable (de quelques minutes à 16 heures). Il considère comme « à peu près égales » les valeurs obtenues (0,19 / 0,20 / 0,23 / 0,19) et note

que cette loi ne peut convenir que sur un intervalle limité de durées. En effet, pour un temps de repos infiniment grand elle donnerait pour F une valeur infinie, alors que le frottement cesse de croître au bout de quelques jours. Coulomb suggère alors une formule plus complexe

$$F = \frac{a + mT^x}{b + T^x},$$

qui conduit à une limite m pour T infini, mais qu'il renonce à confronter à l'expérience, les expériences demandant cinq à six jours pour une seule observation. Ici, la mathématisation ne peut aboutir à un résultat concret.

Dans le cas du frottement dynamique, avec ou sans enduit, Coulomb établit que la force de frottement est, comme pour le frottement statique, proportionnelle au poids, mais avec un coefficient de frottement très différent. Il est amené à considérer la force comme indépendante de la vitesse tant que celle-ci reste assez faible. Certes, dans une configuration particulière (métal sur bois à sec) et dans un petit domaine de vitesses, il fait état d'une progression géométrique du frottement pour une progression arithmétique de la vitesse. Mais, ne parvenant pas à vérifier cette loi de manière générale, il renonce à une modélisation plus rigoureuse de la variation du frottement dynamique avec la vitesse. Ici encore, la mathématisation atteint ses limites.

Pour exprimer l'effet de la raideur des cordes s'enroulant autour d'un rouleau (poulie ou cabestan), Coulomb propose encore des formules empiriques à deux termes. Ainsi la force nécessaire pour enrouler une corde soutenant un poids P sera « assez exactement » de la forme

$$(a + bP) \frac{r^m}{R},$$

où r et R sont respectivement les rayons des sections de la corde et du rouleau autour duquel on l'enroule. Selon les types de cordes et leur usure, Coulomb trouve que l'exposant m varie de 1,4 à 2. On peut douter de l'utilité de cette formule pour les praticiens.

Une des principales applications pratiques des lois du frottement concernait le lancement des navires sur des cales sèches en bois. Si le frottement était trop élevé, le navire pouvait s'arrêter dans sa course et, à l'inverse, si le frottement était insuffisant, une vitesse excessive pouvait provoquer l'inflammation des surfaces de contact. Coulomb a souvent eu l'occasion de constater que l'accélération du navire est irrégulière et nettement inférieure à la valeur prévue par le calcul. Il attribue la valeur élevée du frottement sur les cales sèches à la rugosité de leurs planches, plus élevée que celle des pièces de bois du navire. Il propose alors quelques moyens d'éviter de trop fortes irrégularités du frottement, mais laisse « à MM. les Officiers de Marine » le soin d'en décider. Ne peut-on pas, en effet,

« tout attendre de leur capacité, de leur zèle » ? Au-delà de l'hommage diplomatique au commandant du port qui a mis ses installations et ses ouvriers à la disposition de Coulomb, on peut lire ici la reconnaissance de l'écart qui subsiste entre modélisation mathématique et situations pratiques. Certes, le prix de l'Académie est décerné à Coulomb en 1781, mais on ne peut considérer la « Théorie des machines simples » comme un traité pratique pour la Marine, malgré l'objectif affiché de « chercher des formules générales qui puissent s'appliquer à toutes les machines d'usage dans la Marine » et malgré la présence d'un grand nombre de tables et de valeurs numériques.

Le souci de trouver des explications proprement physiques aux phénomènes apparaît en revanche tout au long de l'ouvrage. Pour le frottement, Coulomb propose de distinguer deux facteurs physiques : la « cohésion » entre surfaces en contact, sorte d'attraction à très courte distance, et « l'engrenage des aspérités de surface ». Dans la loi sur le frottement statique, il attribue le premier terme de sa formule à la cohésion, et le second – auquel se résume la loi d'Amontons – à « l'engrenage des aspérités ». Le statut de la formulation mathématique a changé : d'abord simple traduction des résultats expérimentaux à l'aide d'une loi empirique, elle devient la source de l'interprétation de chaque terme de cette loi par un phénomène physique particulier. Dans un chapitre théorique récapitulatif, Coulomb propose un modèle de cet engrenage des aspérités microscopiques et de leur comportement, susceptible de justifier la proportionnalité du frottement à la force pressante. Mais ce modèle reste très spéculatif et, bien qu'il affirme que sa théorie « paraît expliquer avec facilité tous les phénomènes du frottement », Coulomb se réfugie *in fine* derrière la demande de l'Académie de fournir des « recherches utiles » pour ne pas aller plus loin.

3. D'une série de lois empiriques à une loi théorique : la torsion (1784)

Manifeste dans la « Théorie des machines simples », la conviction que les phénomènes les plus divers peuvent être soumis à la mathématisation est largement partagée par les membres de l'Académie des sciences, qui accueille Coulomb dans ses rangs en 1781 comme adjoint mécanicien. Cette conviction ne connaît guère de limites lorsque Coulomb signe, pour l'Académie, un rapport très favorable sur un mémoire de Montgolfier [Le Roy, Bossut & Coulomb 1784] où, dans la formule de la vitesse d'une montgolfière à rames, intervient la racine sixième de la surface des rames ! Coulomb avait lui-même soumis en 1780 un mémoire sur le vol des oiseaux démontrant l'impossibilité de faire voler un homme, en évaluant à quelques milliers de

mètres carrés la surface des ailes dont il faudrait le munir⁴. Cette conviction va trouver un terrain plus favorable avec l'étude de la torsion.

Quelques années avant le travail de Coulomb sur le frottement, l'Académie avait mis au concours la question de l'amélioration des boussoles et l'étude des variations diurnes du magnétisme terrestre. En 1777, Coulomb avait soumis un mémoire, « Recherches sur la meilleure manière de fabriquer les aiguilles aimantées » [1780], où il reprenait une idée déjà mise en œuvre avant lui : suspendre l'aiguille de la boussole à un fil de soie ou à un cheveu pour échapper aux inévitables frottements des boussoles sur pivot. Dans ce mémoire, on rencontre d'abord le même type d'approximations que dans ses recherches sur la statique de 1773. Cherchant la meilleure forme à donner aux aiguilles de boussole, Coulomb tire de ses expériences une formule empirique pour la période T d'oscillation d'une aiguille de boussole en fonction de sa largeur L , de son épaisseur E et de sa longueur l

$$T = (nL^{1/2}E + ml),$$

où n et m sont des coefficients constants. En fait, ses expériences donnaient pour L des exposants variant de 0,4951 à 0,6363 soit, conclut-il abruptement : $1/2$, « sans erreur sensible ». La formule est donc purement empirique même si Coulomb ébauche une interprétation qualitative en recourant à son hypothèse de l'existence de « molécules aimantaires » à l'intérieur de tout aimant.

La torsion du fil de suspension, si faible soit-elle, oppose cependant une résistance à la déviation de l'aiguille, faussant ainsi légèrement la mesure de la direction du magnétisme terrestre. Déterminé à évaluer l'importance de cette perturbation, Coulomb se lance dans une étude originale de la torsion des cheveux et des fils de soie. Il constate que la période des oscillations de rotation d'un cylindre métallique suspendu à un fil de soie est indépendante de l'amplitude des oscillations tant que l'angle de torsion reste faible. D'après la théorie des oscillations, ceci implique, poursuit-il, que la force de torsion⁵ est proportionnelle à l'angle de torsion. Ses expériences montrent par ailleurs que la constante de proportionnalité (constante de torsion) est inversement proportionnelle à la longueur L du fil et il annonce, sans fournir de résultats expérimentaux, avoir « trouvé assez généralement en comparant un grand nombre d'expériences » que cette constante est également proportionnelle à D^3 , D étant le diamètre du fil [Coulomb 1780, art. XLVI]. Dans sa conclusion, le savant souligne que la perturbation due à la torsion des fils de soie reste négligeable dans l'orientation de la boussole suspendue mais se montre conscient du fait que sa délicate boussole, si

4. [Condorcet, Monge & Bossut 1780]. Voir [Dubochet 1834].

5. En termes modernes, le moment du couple de torsion.

elle peut intéresser le physicien, « ne peut convenir aux opérations des navigateurs ».

Quelques années plus tard, Coulomb reprend l'étude expérimentale de la torsion en tant que telle avec un cylindre suspendu à divers fils métalliques, non plus à des fils de soie. Il revient sur l'établissement de la formule qui permet de lier la période d'oscillation à la constante de torsion dans un mémoire présenté en 1784 à l'Académie des sciences [Coulomb 1787]. Pour obtenir cette relation, Coulomb applique la loi fondamentale de la dynamique au cas idéal des petites oscillations où le moment de la force de torsion est proportionnel à l'angle de torsion. Sans écrire ni résoudre l'équation différentielle du second ordre du mouvement, il parvient, en intégrant successivement deux relations différentielles du premier ordre, à déterminer la période d'oscillation T en fonction de la constante de torsion, de la masse et des dimensions du cylindre suspendu. À l'aide d'une longue série de mesures de la période T , il confirme que la force de torsion est indépendante du poids du cylindre suspendu, inversement proportionnelle à la longueur L du fil, mais la trouve proportionnelle à D^4 , au lieu de D^3 comme il l'avait annoncé en 1777. Comment comprendre que la force de torsion apparaisse proportionnelle à D^3 en 1777 et à D^4 en 1784 ? Il est vrai que les diamètres des fils métalliques, contrairement à ceux des fils de soie, peuvent être calculés assez précisément à partir de leurs masses. Les résultats expérimentaux permettent ainsi de déterminer, à quelques pour cent près, la valeur 4 de l'exposant. Le moment de la force de torsion prend donc pour expression générale

$$\mu \frac{D^4}{L} \theta,$$

θ étant l'angle de torsion et μ « un coefficient constant [...] invariable pour les fils de même métal »⁶ [Coulomb 1787, art. XIV].

Dans ce changement de valeur de la puissance du diamètre du fil, on peut néanmoins percevoir un changement plus fondamental, concernant le statut de la formulation mathématique. « Voici ce que le raisonnement doit faire prévoir », affirme Coulomb en annonçant l'expression de la constante de torsion en fonction du diamètre et de la longueur du fil à l'aide de considérations géométriques simples [Coulomb 1787, art. XII-XIII]. Avec sa nouvelle loi sur la torsion, Coulomb s'engage sur la voie de la recherche de « lois fondamentales ». Si l'expression « loi fondamentale » n'apparaît que l'année suivante, dans son premier mémoire sur l'électricité présenté en 1785 [1788a], le titre de son mémoire sur la torsion « *Recherches théoriques*

6. Ce coefficient caractéristique du matériau est appelé aujourd'hui *module de Coulomb*.

et expérimentales sur la force de torsion... » (nous soulignons) peut être considéré comme significatif de ce tournant.

Pour étudier les oscillations de grande amplitude, Coulomb introduit des termes correctifs dans l'expression de la force de torsion sous forme d'une série, éventuellement infinie, de puissances de l'angle de torsion. Dans l'hypothèse où toutes ces « altérations » restent petites devant le terme principal, il obtient, grâce à de nouvelles intégrations simples, l'expression littérale de la décroissance de l'amplitude d'une oscillation à la suivante. Il ne fait cependant pas usage de ces calculs et les nombreuses expériences où les torsions initiales dépassent la limite d'élasticité du fil de torsion ne font l'objet d'aucune mathématisation. En revanche, ici encore, Coulomb propose, à partir de ses résultats expérimentaux, une interprétation à l'échelle microscopique de l'élasticité et de l'inélasticité.

C'est sous une autre forme que réapparaît, une quinzaine d'années plus tard, la question des « altérations » au pendule de torsion idéal. Pour étudier la résistance des fluides, Coulomb mesure l'amortissement des oscillations de rotation de plusieurs solides plongés dans divers liquides [Coulomb 1801]. Pour les petites amplitudes, il ajoute à la force de torsion une force de frottement formée de deux termes respectivement proportionnels à la vitesse et au carré de la vitesse. Ces termes sont de nouveau justifiés par des arguments physiques à l'échelle moléculaire. La décroissance de l'amplitude est obtenue par une méthode mathématique analogue à celle utilisée dans le mémoire sur la torsion de 1784, puis comparée aux résultats de l'expérience. De fait, en 1804, Prony repartira de l'expression $av + bv^2$ pour la force de frottement fluide, précisant que Coulomb en a apporté la preuve « par le raisonnement et par le fait » [Prony 1804, p. v-vi]⁷.

L'étude du « frottement des fluides contre les solides » à l'aide de la balance de torsion avait été ébauchée dans le mémoire sur la torsion de 1784. Coulomb affirmait alors avoir « cru apercevoir que dans les très petites vitesses ce frottement est comme les vitesses, et dans les grandes vitesses comme le carré ; mais ces expériences demandent un travail exprès » [Coulomb 1787, art. XIX]. On retrouve ici le même type de prévision – la proportionnalité à une puissance entière de la variable –, précisée ou rectifiée après une expérimentation plus approfondie, que dans l'étude de la torsion d'un fil métallique de diamètre D , où le coefficient de torsion d'abord prévu proportionnel à D^3 devient proportionnel à D^4 après de nouvelles expériences. Ce travail sur la résistance des fluides, annoncé en 1784, est différé après la lecture du mémoire sur la torsion, au profit d'un domaine de recherches radicalement différent, l'électricité et le magnétisme. Nous reviendrons plus loin sur les raisons plausibles de ce

7. Voir [Gillmor 1971, p. 165-174 ; Darrigol 2002, p. 100].

changement d'orientation rendu possible par le fait que les lois de la torsion et l'instrument qui les exploite, la balance de torsion, fournissent le principe d'une nouvelle technique de mesure. Cet instrument permet en effet d'évaluer quantitativement toute force faible en lui opposant une force de torsion mesurée à l'aide de la balance.

II. Coulomb et l'électricité : quel programme de recherche ?

1. La référence à Aepinus (1759) : la mathématisation de l'action à distance

Ayant à sa disposition une technique de mesure des forces faibles à l'aide de sa balance de torsion, Coulomb applique en priorité cette technique à l'étude des forces électriques et magnétiques [Coulomb 1787, art. XIX]. Dans son premier mémoire sur l'électricité, il ne fait référence à aucun physicien antérieur, faisant table rase du passé pour fonder la théorie de l'électricité sur de nouvelles bases. Plusieurs physiciens du XVIII^e siècle avaient pourtant suggéré une loi de force électrique en inverse du carré de la distance. Ainsi Priestley avait-il mis en relation l'observation selon laquelle un corps introduit à l'intérieur d'un gobelet métallique électrisé ne subit aucune force électrique avec le théorème de Newton sur l'absence d'action d'une coquille sphérique sur une masse intérieure. Il avait suggéré – seulement suggéré – que l'attraction électrique était soumise à la même loi que la gravitation. Certains expérimentateurs avaient par ailleurs effectué des mesures de forces électriques, mais sur des corps macroscopiques de formes particulières et leurs lois ne pouvaient prétendre à un caractère général. La seule exception notable est celle de Franz Aepinus, dont Coulomb saluera ultérieurement « l'excellente théorie du magnétisme & de l'électricité » [1788b, p. 589], également louée par Volta [Heilbron 1976]. Au milieu du XVIII^e siècle, une tentative de mathématisation de l'électricité et du magnétisme avait en effet été menée par Aepinus, mathématicien et astronome allemand. Ce dernier a étudié les œuvres de Clairaut, Bernoulli et Euler et conduit des recherches, notamment sur les équations algébriques et l'intégration des équations aux dérivées partielles. Élu membre de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin en 1755, puis nommé directeur de l'Observatoire de Saint-Pétersbourg, sur la recommandation d'Euler dont il est devenu un familier, et professeur de physique, il se consacre à l'électricité.

Aepinus rompt avec l'interprétation commune des actions électriques en termes d'actions de contact, effluves ou atmosphères, et prolonge les recherches de Benjamin Franklin tout en abandonnant son hypothèse des atmosphères électriques. Appliquant à l'électricité la même démarche que celle mise en œuvre pour le magnétisme, encore souvent interprété en

termes de tourbillons, Aepinus élabore une théorie de l'électricité fondée sur l'action à distance. Dans son ouvrage publié en 1759, le *Tentamen theoriae electricitatis et magnetismi*, il recourt seulement à l'hypothèse de la mobilité du fluide électrique dans les corps conducteurs et à une loi de force élémentaire attractive ou répulsive, proportionnelle à l'excès ou au défaut de fluide électrique, et décroissante avec la distance. Si Aepinus ne se prononce pas sur la forme mathématique de la loi de force, se contentant de sa décroissance avec la distance, son ouvrage diffère radicalement de toute publication antérieure sur l'électricité et le magnétisme par l'usage constant des mathématiques [Heilbron 1979, p. 384-402 ; Home 1979]. Sa théorie, qui s'appuie sur des calculs d'algèbre élémentaire faisant intervenir les excès ou défauts de fluide et les forces associées, guide ses expériences. Le raisonnement sur les expressions littérales lui permet de résoudre, sans application numérique, plusieurs problèmes sur lesquels butaient les « électriciens », en particulier les phénomènes d'influence électrique. Ainsi peut-il prévoir la possibilité paradoxale d'une attraction entre deux conducteurs chargés de même signe, et expliquer non seulement la condensation de l'électricité dans la bouteille de Leyde, mais aussi ce qu'on appelle aujourd'hui la décharge oscillante d'un condensateur.

Aepinus ne va pas au-delà de ces calculs algébriques « courts et faciles », comme il les qualifie dans sa préface, sauf pour interpréter une expérience complexe avec la bouteille de Leyde décrite par Richmann. Afin de tenir compte des pertes électriques des deux armatures, il écrit et résout une équation différentielle reliant entre elles les variations temporelles de leurs charges. Il donne dans ce cas des applications numériques dont il montre qu'elles s'accordent avec l'expérience de Richmann, affirmant même que sa théorie aurait pu en prévoir les résultats. Après son interprétation des phénomènes d'influence, il représente par un graphe – usage très rare chez les physiciens du XVIII^e siècle – la variation de la force électrique en fonction de la distance (Figure 3). Ce graphe traduit son postulat initial d'une fonction décroissante et tendant asymptotiquement vers zéro. Il ne peut, ajoute-t-il, avoir de point d'inflexion, dans la mesure où la présence d'un point d'inflexion conduirait à des situations où deux conducteurs de charges opposées se repousseraient, en contradiction avec des « expériences innombrables ». Déduite de considérations physiques, la courbe ne traduit donc pas la variation d'une fonction mathématique déterminée, mais permet d'appliquer un raisonnement mathématique qualitatif. C'est déjà une forme de mélange des mathématiques et de la physique. Aepinus ne va pas plus loin dans la détermination de la fonction, se contentant d'affirmer prudemment qu'une loi en $1/d^2$ est suggérée par « l'analogie dans la nature », allusion newtonienne implicite.

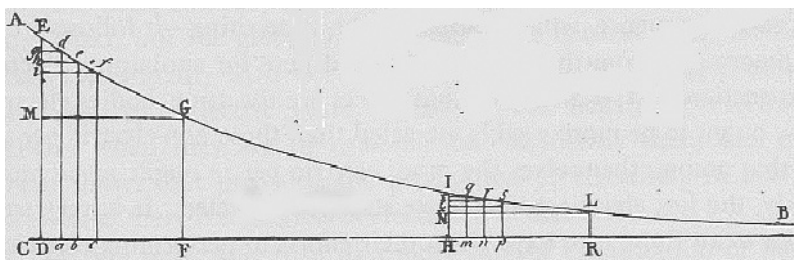


Figure 3 : Décroissance de la force électrique en fonction de la distance, suivant une loi non déterminée [Aepinus 1759/1979, Pl.1, Fig. XXIV].

Malgré l'espoir affiché par Aepinus, ses « calculs faciles » restent inaccessible à la plupart des physiciens qui n'ont pas une véritable formation mathématique, ce qu'il reconnaît lui-même :

« Some will perhaps be displeased that I have fallen into some rather lengthy mathematical disquisitions, for there are those who scarcely tolerate such things in physics. But I judge otherwise, and I consider this short dissertation⁸ [...] of the greatest value in proving the truth of the principles of the electrical theory. » [Aepinus 1759/1979, p. 468]

De plus le *Tentamen*, qui n'a pas été traduit du latin, est peu diffusé. Au début des années 1780, à la demande de Monge qui s'intéresse à l'électricité, René-Just Haüy en rédige néanmoins un court résumé. En 1787, devenu membre de l'Académie des sciences et ayant assisté à la lecture des premiers mémoires de Coulomb, Haüy publie une *Exposition raisonnée de la théorie de l'électricité et du magnétisme, d'après les principes d'Aepinus* qui explicite le pas franchi par Coulomb par rapport à l'ouvrage d'Aepinus [Blondel 1997]. Dans le courant des années 1780, les idées d'Aepinus reprennent donc vie à l'Académie des sciences.

2. La conviction newtonienne

C'est, d'une certaine manière, le programme d'Aepinus que reprend Coulomb, mais avec une méthode différente. Dès son mémoire sur la meilleure manière de fabriquer les aiguilles aimantées, en 1777, la conviction newtonienne est manifeste. Ayant montré que l'action du magnétisme terrestre équivaut à un couple de forces, il en déduit que le magnétisme doit s'expliquer par des « forces attractives & répulsives de la nature de celles dont on est obligé de se servir pour expliquer la pesanteur des corps & la physique céleste » et non par des tourbillons [Coulomb 1780, p. 173]. Le

8. Il s'agit de la discussion de l'expérience de Richmann.

magnétisme est donc en droit de relever d'une mathématisation sur le modèle de la gravitation.

De fait, les sept « Mémoires sur l'électricité et le magnétisme », lus à l'Académie des sciences entre 1785 et 1789, fondent une théorie mathématique de l'électrostatique et du magnétisme, reprenant une partie des outils mathématiques de la mécanique [Coulomb 1788a-d, 1789, 1791, 1793]⁹. Le premier mémoire, où est établie la « loi fondamentale » en inverse carré de la distance à partir de la mesure des répulsions entre deux petites boules électrisées, manifeste la culture newtonienne de Coulomb. Le terme même de « balance », choisi pour désigner un dispositif fondé sur l'opposition entre la force électrique à mesurer et une force de torsion, inscrit cet instrument dans l'histoire de la mécanique. La dépendance de la force en $1/d^2$ est justifiée numériquement par une seule expérience fournissant trois valeurs. Enfin, Coulomb assimile, comme si cela allait de soi, une sphère chargée à une charge ponctuelle en son centre, de même qu'une masse à symétrie sphérique est assimilée en mécanique à une masse ponctuelle en son centre. L'extension aux forces magnétiques de la loi en $1/d^2$ dans le deuxième mémoire renforce encore la prégnance du modèle newtonien.

La différence essentielle entre la gravitation et l'électricité réside dans la mobilité des charges électriques, du moins dans les conducteurs. Pour pouvoir appliquer les théorèmes de la mécanique à l'électricité, il faut donc d'abord savoir comment l'électricité se répartit dans un conducteur. Dans le quatrième mémoire, Coulomb prouve que l'électricité, fluide subtil sans masse, ne pénètre pas à l'intérieur des conducteurs et se répartit entièrement à leur surface. Comme preuve expérimentale, il avance seulement le fait qu'il ne détecte pas d'électricité à l'intérieur d'une cavité creusée à la surface d'un conducteur. Il démontre par ailleurs mathématiquement qu'une loi en $1/d^2$ implique cette répartition en surface. La répartition de l'électricité à la surface des conducteurs n'attend pas d'autre justification pour fonder la conception d'un nouvel instrument. En conséquence du caractère surfacique de la répartition, affirme Coulomb, un petit disque de papier doré, tenu par une tige isolante et appliqué étroitement sur un point de la surface d'un conducteur chargé, prendra une quantité d'électricité qui, mesurée avec la balance électrique, donnera la charge en ce point du conducteur. Au XIX^e siècle, ce petit objet, appelé « plan d'épreuve », prendra une place essentielle, en association avec la balance de Coulomb, dans les traités d'électricité.

Coulomb revient, au cours de son sixième mémoire, sur la confirmation de cette conséquence de la loi fondamentale « par une nouvelle expérience qui paraît décisive » : si une sphère électrisée est enfermée à l'intérieur de

9. Ces sept mémoires sont réédités dans [Coulomb s.d. ; Coulomb 1884].

deux demi-sphères conductrices, « toute l'électricité du corps [passe] aux enveloppes et le corps, ou n'en conserve point, ou n'en conserve qu'une partie insensible »¹⁰. La mobilité et l'existence de deux types de charges rendent le calcul des forces plus complexe que dans le cas de la gravitation, mais le caractère surfacique de la distribution électrique permet de le simplifier.

3. Le défi de « l'engrenage » entre physique et mathématiques

Dans ses mémoires ultérieurs sur l'électricité, qui ont peu retenu l'attention jusqu'ici, Coulomb s'attache, non sans difficultés mathématiques, à confronter les résultats numériques d'un grand nombre d'expériences aux prévisions quantitatives déduites de sa loi fondamentale. Le seul sujet étudié est celui de la répartition à l'équilibre de l'électricité à la surface de divers conducteurs en contact ou, *in fine*, à distance l'un de l'autre. Les cinquième et sixième mémoires forment un ensemble long (150 pages environ) et de lecture laborieuse [Blondel & Wolff 2007-2013, 2009]. Coulomb y rapporte dans l'ordre où il les a obtenus les résultats d'une foule d'expériences, impliquant des centaines de mesures, entrecoupés de calculs et de réflexions théoriques. Dans ces mémoires, le mélange du calcul et de la physique, ou plus précisément leur articulation ou leur « engrenage », pour reprendre un terme utilisé par Coulomb dans sa théorie du frottement, se présente sous diverses formes, parfois difficiles à démêler. Entre deux expériences, on peut trouver deux théories contradictoires du plan d'épreuve, la justification du caractère surfacique de la distribution électrique par l'expérience décrite plus haut des deux demi-sphères métalliques entourant une sphère, des considérations contre les atmosphères électriques ou sur la nature de l'électricité (un ou deux fluides), etc. De nouvelles expériences, de nouveaux outils théoriques, des études non annoncées sont introduits de manière inattendue. Tout ceci laisse à penser que ces cinquième et sixième mémoires, lus en 1788, mais publiés pendant la tourmente révolutionnaire en 1789 et 1791, n'ont pas bénéficié d'une réécriture approfondie. Indépendamment des conditions historiques de leur publication, les détours et retours en arrière, les moments de bricolage mathématique, témoignent toutefois du caractère exploratoire de la démarche de Coulomb et de la difficulté à construire l'articulation entre physique et mathématiques¹¹.

10. Dans les années 1770 Cavendish avait trouvé, par une expérience analogue, que la charge résiduelle de la sphère intérieure était inférieure au 60^e de la charge totale et en avait déduit que, dans l'hypothèse d'une loi en $1/d^n$, l'exposant n ne pouvait différer de plus de 2 % de la valeur 2. Mais ce résultat, comme beaucoup d'autres, n'avait pas été publié.

11. Sur le caractère construit et historique de l'articulation entre physique et mathématiques, voir [Garber 1999, p. 12-20 ; Roux 2011].

Pour l'essentiel, Coulomb explore la répartition de l'électricité à la surface de différents conducteurs à l'aide du plan d'épreuve et de la balance électrique. La forme géométrique privilégiée dans la mécanique newtonienne étant la sphère, les conducteurs considérés sont le plus souvent de cette forme : deux sphères de diamètres différents, des alignements de sphères identiques, une sphère de grand diamètre en contact avec un fin cylindre, etc. Les cas d'une sphère électrisée influençant à distance un ensemble de sphères en contact, un cylindre ou un disque, sont également étudiés. Coulomb ne part pas de sa force élémentaire en $1/d^2$, mais des formules relatives aux couches sphériques ou planes, établies en mécanique, et qu'il considère comme connues. Ainsi pose-t-il d'emblée, sans les justifier pour le lecteur non initié, les conséquences mathématiques de la loi en $1/d^2$, transférées de la mécanique à l'électricité, pour des densités surfaciques *uniformes* : en tout point intérieur à une sphère, « l'action »¹² d'une couche sphérique *uniforme* de densité D est nulle, et pour tout point situé à une distance d supérieure au rayon R , elle est proportionnelle à $2D \frac{R^2}{d^2}$; en tout point de la sphère elle-même, l'action est proportionnelle à la densité D .

Du fait de la mobilité des charges électriques, il s'agit cependant de traiter de répartitions *non uniformes* pour lesquelles le calcul ne sera maîtrisé par Poisson qu'une vingtaine d'années plus tard. Alors qu'il pouvait se laisser guider par les conséquences directes de la loi de force dans ses premiers et quatrièmes mémoires, Coulomb ne peut donc plus ici prévoir les résultats de ses expériences par des déductions mathématiques. Dans ses tentatives pour rendre compte par le calcul de ses résultats expérimentaux, il doit recourir à des approximations audacieuses, dont nous allons donner deux exemples.

4. Des approximations audacieuses : le partage de l'électricité entre trois sphères en contact

Coulomb commence, avant tout calcul, par une série d'expériences sur le cas général de deux sphères inégales en contact, en mesurant, à l'aide d'une balance électrique, le partage de l'électricité entre les deux sphères, puis la répartition de l'électricité à leur surface avec un plan d'épreuve. Ceci lui donne une première approche du phénomène et une série de résultats numériques. Ne parvenant cependant pas à prévoir ces résultats « par la théorie », c'est-à-dire par le calcul, il prend le parti de mener

12. En termes modernes, l'« action » correspond, à un facteur près, à la force subie par une charge d'essai en un point donné sous l'action de la distribution de charges.

préalablement d'autres expériences auxquelles « le calcul pût s'appliquer directement ».

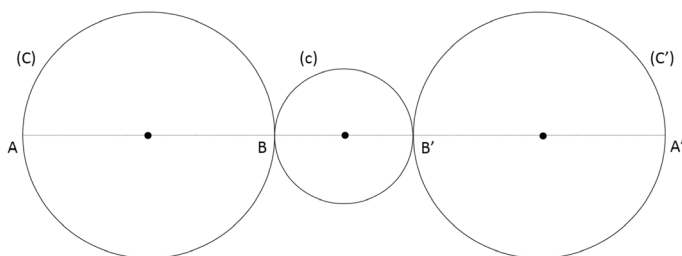


Figure 4: Trois sphères conductrices en contact.
D'après [Coulomb 1789].

Il remplace les deux sphères inégales par une configuration symétrique formée d'une sphère (c) de rayon r , située entre deux sphères identiques (C) et (C') de rayon R (Figure 4) et se limite au calcul du partage de la charge globale entre les trois sphères ou, ce qui revient au même, de la densité surfacique moyenne de chacune. Il commence par supposer l'électricité répartie uniformément sur chaque globe, une approximation d'autant plus surprenante qu'elle intervient après le rappel que « le fluide électrique sera inégalement répandu », et notamment « comprimé » au voisinage des points diamétralement opposés A et A'. Mais c'est la condition pour pouvoir utiliser les seules propriétés connues, celles des couches sphériques uniformes, rappelées ci-dessus. Les charges étant en situation d'équilibre, Coulomb exprime mathématiquement cet équilibre pour une charge au point de contact B. Il y a dans la supposition de l'existence même d'une charge en B une seconde approximation, ses expériences ayant en effet conduit Coulomb à considérer la densité électrique comme s'annulant aux points de contact des sphères.

Les densités électriques étant donc supposées uniformes, soit D la densité sur (C) et (C'), δ la densité sur (c). Les actions électriques subies par la couche électrisée infinitésimale, commune en B aux sphères (C) et (c), ont pour valeur, d'après les propriétés des couches sphériques uniformes : D exercée par (C) ; δ exercée par (c) ; $2D \frac{R^2}{(R+2r)^2}$ exercée par (C'). L'action de (C) étant équilibrée par celles de (c) et (C'), il vient donc

$$D = \delta + 2D \frac{R^2}{(R+2r)^2}.$$

Coulomb remarque d'abord que si le rapport r/R est inférieur à $1/5$, l'équation donne pour δ et D des signes opposés, alors que les trois sphères

portent toujours des charges de même signe, celle de (c) devenant indécidable pour r très petit. C'est bien sûr, note Coulomb, parce qu'on n'a pas tenu compte de la non-uniformité de la distribution de charges et notamment de la quasi-nullité de la densité au voisinage des points de contact. L'erreur ainsi introduite est, souligne-t-il, particulièrement sensible quand (c) est très petit. Une correction, visant à tenir compte de l'absence de charge aux points de contact entre les sphères, lui permet d'obtenir une décroissance de δ vers zéro avec r . Dans le cas particulier de trois sphères identiques ($R = r$) où sont confrontées les valeurs numériques des expériences et du calcul, il lui semble inutile de faire usage de cette correction.

L'équation devient $D = \delta + \frac{2D}{9}$, soit $D = 1,29\delta$. La valeur expérimentale 1,34 ne « diffère que de $1/27$ » de 1,29, ce qu'il considère comme satisfaisant. Après ce galop d'essai qui lui confirme la validité de sa méthode, Coulomb revient au problème général de deux sphères inégales en contact.

5. Du cas général à quelques cas particuliers

Le problème général consiste à déterminer la variation de la densité électrique à la surface du globe (C') de rayon r , en contact avec le globe (C) de rayon R , en fonction de l'angle α (Figure 5).

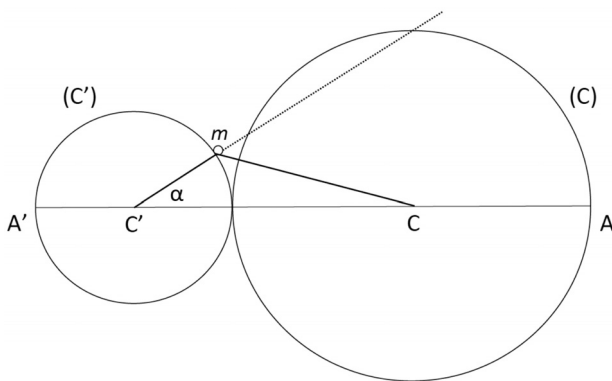


Figure 5: Deux sphères conductrices inégales en contact.
D'après [Coulomb 1789].

Pour ce faire, Coulomb s'appuie sur le cas précédent des trois sphères en imaginant que la charge de (C') est constituée « d'une infinité de petits globules conducteurs » électrisés tels que (m). Implicitement, l'hypothèse consiste à supposer que la densité électrique δ calculée pour le globule (m) constitue une bonne approximation de la densité superficielle locale réelle sur (C').

Reprenant le même raisonnement que dans le cas des trois sphères, Coulomb écrit que l'électricité au point de contact entre le globule (m) et la sphère (C') est en équilibre sous les actions de (C'), du globule lui-même et de la composante selon C'm de l'action exercée par (C). Ces actions ont pour valeur : D' exercée par (C') ; $\delta(\alpha)$ exercée par (m) ; $2D.f(R, r, \alpha)$, composante selon C'm de l'action exercée par (C), ici présentée selon nos propres notations. L'équilibre s'écrit alors

$$D' = \delta(\alpha) + 2D.f(R, r, \alpha)$$

et permet d'obtenir $\delta(\alpha)$ en fonction de D et D' .

Ici encore, les approximations sont audacieuses. Les densités sur chaque sphère sont de nouveau considérées comme *uniformes*, alors qu'il s'agit d'en calculer la variation. D'autre part, l'action de (C) possède une composante selon la tangente en m à (C') qui, dans la modélisation ci-dessus, n'est équilibrée par aucune autre action. Coulomb ne s'en préoccupe pas, la composante tangentielle étant implicitement compensée du fait de la non-uniformité de la distribution sur (C').

Qu'en est-il de l'accord avec l'expérience ? Comparer δ , pour diverses valeurs de l'angle α , aux densités moyennes D et D' , nécessite de connaître le rapport entre ces deux dernières, soit par l'expérience, soit par le calcul. Aussi Coulomb commence-t-il par le cas particulier où les deux globes sont égaux ($D = D'$). En considérant des angles de 30° , 60° , 90° et 180° , pour lesquels il a effectué des mesures à l'aide du plan d'épreuve, les valeurs obtenues pour le rapport $\delta(\alpha)/D$ lui permettent d'affirmer : « on trouve ici une conformité entre les résultats de l'expérience & ceux de la théorie, qu'on pouvait à peine espérer » [Coulomb 1789, p. 456]. De fait, les écarts se trouvent compris entre 2% et 7% ce qui, dans ces conditions expérimentales, constitue une précision remarquable.

Dans le cas général de globes (C) et (C') inégaux, les résultats expérimentaux ne portent que sur la valeur $\alpha = 180^\circ$ (densité δ au point A'). Dans un premier temps, pour mener à bien le calcul, Coulomb maintient l'hypothèse $D = D'$. Dès que le rapport R/r dépasse sensiblement 2, l'écart entre la valeur calculée et la valeur expérimentale devient important : pour $R/r = 4$, il s'élève à près de 20%. Pour obtenir le rapport réel des densités moyennes D'/D , puis le rapport $\delta(180^\circ)/D$, Coulomb se lance alors dans de nouveaux, longs et laborieux calculs afin d'intégrer l'effet de la variation de la densité sur (C'). L'approximation physique consiste à tenir compte de la non-uniformité de la densité par une suite de corrections au cours desquelles le savant intègre les contributions de petites calottes sphériques assimilées à des disques. Il ne mène toutefois ses calculs jusqu'à l'application numérique que dans les deux seuls cas $R/r = 4$ et R/r « infini », parce qu'« il sera plus facile de saisir l'esprit des méthodes que nous avons suivies, en les appliquant à des exemples particuliers, qu'en les généralisant »

[Coulomb 1789, p. 459]. D'où de nouvelles expériences correspondant à ces cas particuliers. L'accord avec les valeurs expérimentales de D'/D et $\delta(180^\circ)/D$ se trouve satisfaisant, à moins de 10% près, dans les deux cas traités.

C'est un trait caractéristique de la méthode de Coulomb que de considérer un problème dans toute sa généralité, de faire succéder les approximations, et de voir en fin de calcul quels sont les cas particuliers – sphères égales, densités égales, points particuliers – accessibles à la mesure. Ces cas particuliers prennent pour lui une valeur heuristique pour la suite de ses recherches, la méthode est rodée ; ce sont eux qui ont retenu l'attention des historiens [Heilbron 1979, p. 495-497].

6. Diverses méthodes d'approximation à l'épreuve

Le sixième mémoire, présenté comme la suite du cinquième, vise à déterminer la distribution de l'électricité à la surface de configurations variées : série de sphères en contact, fin cylindre allongé en contact avec une grosse sphère ou à distance de la sphère, etc. Dans chaque cas, Coulomb reprend la méthode utilisée dans le cas particulier de trois sphères identiques et compare les résultats du calcul à ceux de ses expériences. Plusieurs types d'approximations sont mis en œuvre.

Pour l'alignement de sphères identiques, Coulomb considère deux distributions hypothétiques, l'une avec des densités uniformes sur chaque sphère, l'autre avec une charge répartie sur l'équateur vertical des sphères. La distribution réelle étant intermédiaire entre ces deux distributions hypothétiques, il prend la valeur moyenne des deux résultats, qui se trouve en bon accord avec l'expérience.

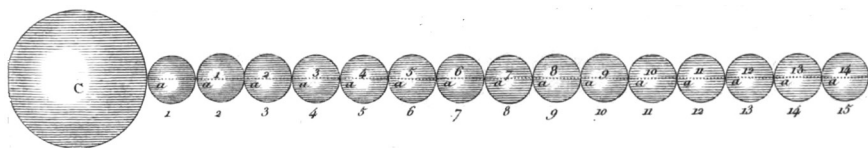


Figure 6 : [Coulomb 1791, Pl. XXX, Fig. 3].

Pour la série de 24 petites sphères en contact avec une grosse sphère (Figure 6), Coulomb applique à nouveau la méthode de l'équilibre électrique aux points de contact, ce qui conduit à un système de 24 équations linéaires à 24 inconnues, dont la réduction « n'a aucune difficulté [mais] pourrait fatiguer la plupart des physiciens ». Il recourt alors à « différentes méthodes d'approximation pour l'abrégé » [Coulomb 1791, p. 641]. L'expérience lui ayant montré que les densités moyennes varient peu d'une petite sphère à l'autre, sauf pour celle située à l'opposé de la grosse sphère, il fait

d'abord l'approximation physique de l'égalité des densités, avant d'utiliser le résultat obtenu pour des approximations successives plus fines. Il recourt en outre à une approximation mathématique : la somme des inverses carrés des nombres impairs de 1 à 45, intervenant dans la première équation simplifiée, est remplacée par un calcul d'aire sous une courbe hyperbolique (Figure 7).

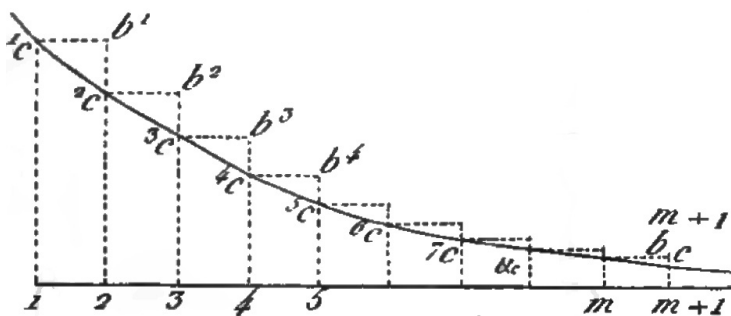


Figure 7: [Coulomb 1791, Pl. XXX, Fig. 4].

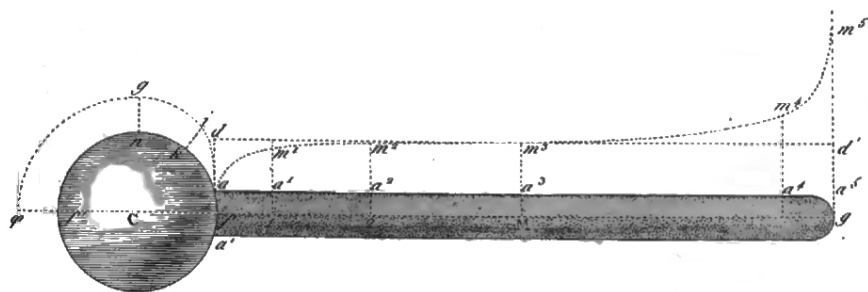


Figure 8: [Coulomb 1791, Pl. XXX, Fig. 6].

Quant au fin cylindre allongé (Figure 8), Coulomb le découpe par la pensée en tranches verticales fines et inégales pour tenir compte de la variation de la densité. Il calcule par intégration la contribution de chaque tranche en chaque point de contact entre deux tranches. Dans tous les cas, la confrontation entre les résultats du calcul et la mesure des densités électriques à la balance électrique fournit un accord étonnamment satisfaisant. L'augmentation de la densité électrique sur les pointes, ou « effet des pointes », bien connu des électriciens depuis le milieu du siècle, se voit ainsi justifié théoriquement.

Pour l'application au cerf-volant électrique et au paratonnerre (Figure 9), une grosse sphère conductrice représente un nuage électrisé

et un fin cylindre le fil du cerf-volant (plongeant dans le nuage) ou la tige du paratonnerre (à distance du nuage). La démarche est ici différente : au lieu de commencer par le calcul théorique, Coulomb débute par des mesures de densités dont il cherche à tirer une formule empirique, comme dans ses recherches sur le frottement ou sur la torsion. Pour le paratonnerre, représenté par un cylindre relié à la terre, il fournit l'expression suivante du rapport δ/D

$$\frac{mR^2}{r(R+a)^{3/2}},$$

où δ est la densité électrique du cylindre, D celle de la sphère, R le rayon de la sphère, r le rayon du cylindre, a la distance du cylindre au centre de la sphère. Coulomb risque une application numérique avec un nuage de 300 mètres de rayon, qui aboutit à une densité à la pointe du paratonnerre 278 fois supérieure à celle du nuage. Il reconnaît toutefois que la valeur $3/2$ de l'exposant du facteur $R+a$ est déterminée avec une faible précision. Lorsqu'il revient ensuite au calcul théorique de la densité avec les approximations habituelles, il se satisfait de prédire un rapport supérieur à 400, et insiste, comme toujours, sur l'accord en ordre de grandeur avec la valeur fournie par l'expérience.

Le bilan de l'application au paratonnerre se limite donc à un calcul très approché du rapport entre les densités électriques à la pointe du paratonnerre et sur le nuage, compte tenu notamment des incertitudes sur les propriétés d'un nuage d'orage. En revanche, l'intérêt de Coulomb pour les questions théoriques se manifeste clairement à l'intérieur de son mémoire. À l'occasion d'un retour sur la théorie du plan d'épreuve, il démontre en effet un théorème important de l'électrostatique relatif à l'expression de la force s'exerçant au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur chargé, appelé aujourd'hui « théorème de Coulomb » [Bauer 1949, p. 232].

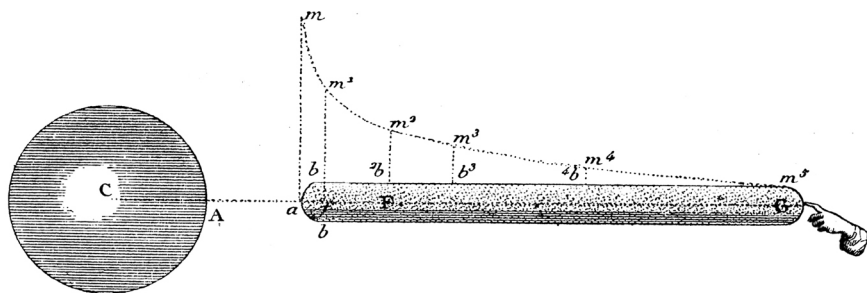


Figure 9: [Coulomb 1791, Pl. XXXI, Fig. 11].

7. *L'objectif des recherches de Coulomb en électricité et magnétisme : pratique ou théorique ?*

P. Heering a récemment donné une interprétation différente de l'historiographie qui voyait jusqu'alors l'objectif de Coulomb en électricité et magnétisme comme la mathématisation de deux sciences baconiennes sur le modèle de la mécanique newtonienne¹³. Pour lui, les recherches de Coulomb en électricité sont motivées non par un intérêt théorique mais par un souci d'application pratique, dans la continuité des physiciens ayant défendu l'intérêt du paratonnerre : « I shall argue that Coulomb's electrical research was another attempt to demonstrate the utility of the lightning rod » [Heering 2009, p. 121, 130-134]. De fait, en 1783, Coulomb a participé à une commission nommée par l'Académie des sciences pour répondre à une demande du ministère de la Guerre concernant la protection des magasins à poudre militaires contre la foudre. Dans la commission figurent à côté de Coulomb, familier des constructions militaires mais qui n'a jusqu'alors rien publié sur l'électricité, Benjamin Franklin, alors en séjour à Paris, et Jean-Baptiste Le Roy, deux « électriciens » reconnus et partisans de l'action à distance en électricité. Le rapport de leur commission fait état de multiples incertitudes tant sur la question cruciale de la « sphère d'action » du paratonnerre que sur la meilleure forme à lui donner, sur ses dimensions, etc., et ses auteurs regrettent le manque de connaissances sur le sujet ainsi que la faiblesse des données d'observation.

Heering ajoute que le style d'expérimentation de Coulomb, radicalement différent de celui de Bertholon, de Sigaud de la Fond ou de Le Roy, « can, at least in part, be explained by ascribing a political meaning to this new style of experimentation » [Heering 2009, p. 122]. Selon lui, ce nouveau style aurait été mis en œuvre à la veille de la Révolution par des savants royalistes et soutiendrait « an authoritarian system of knowledge production » [*Ibid.*, p. 136], associé à la professionnalisation de la pratique scientifique. Pour ce qui est de la professionnalisation, il est indubitable que le recours à une expérimentation de précision étroitement associée à un processus de mathématisation ont rendu les recherches de Coulomb inaccessibles aux amateurs d'électricité et de démonstrations publiques. Ses recherches ont ainsi participé à la professionnalisation de la physique de laboratoire. Mais on peut se demander dans quelle mesure ce style d'expérimentation n'était pas intrinsèquement lié à l'objectif de Coulomb. Cette question nous amène à discuter la nature de cet objectif.

L'examen des problèmes posés par la construction des paratonnerres et la conscience de l'importance de la demande sociale, ainsi que la fréquen-

13. [Bauer 1949, p. 218-235 ; Gillmor 1971, chap. VI ; Heilbron 1979, p. 465-477, 494-500 ; Blondel 1994 ; Garber 1999].

tation de Franklin et Le Roy dans la commission sur le paratonnerre, ont pu inciter Coulomb à étudier l'électricité avant la résistance des fluides. Mais il faut noter que la question de l'utilité du paratonnerre n'était plus guère débattue à Paris en 1784. À l'Académie et dans leurs publications, les principaux physiciens Le Roy, Brisson, Guyton de Morveau et Sigaud de la Fond, ont énoncé comme acquis le caractère protecteur du paratonnerre¹⁴. Le Louvre, siège des académies, a été équipé en 1782. Ce caractère protecteur n'est d'ailleurs pas discuté par Coulomb. Le paratonnerre apparaît dans la partie finale du sixième mémoire comme une application de ses études sur les sphères et les cylindres, et ne fait pas partie des objectifs mentionnés au début du mémoire. Le résultat de cette application au paratonnerre – la densité électrique à la pointe du paratonnerre est au moins 400 fois supérieure à la densité du nuage – ne présente d'ailleurs pas d'utilité pour la pratique. Après avoir établi expérimentalement la formule empirique du rapport de ces densités, Coulomb cherche à la justifier théoriquement et n'en tire pas de conséquences. Il n'a pas étudié les questions soulevées par la commission de l'académie : « la sphère d'action du paratonnerre [et] la meilleure forme à lui donner : hauteur, épaisseur, etc. » Il n'a pas discuté l'étendue de la zone protégée, la distance à partir de laquelle la décharge se déclenche, la distance à établir entre plusieurs paratonnerres reliés, questions essentielles pour la protection des bâtiments. Et l'auteur n'envisage pas d'aller plus loin, avec un épilogue dont il ne peut ignorer le caractère hyperbolique : « Les calculs de cet article, quoique très-imparfaits, sont presque suffisans pour tous les objets de pratique relatifs à l'électricité où il pourroit être nécessaire d'employer le calcul. » [Coulomb 1791, p. 704-705] Ses calculs de densité n'ont d'ailleurs pas eu d'influence sur les recherches ultérieures sur les paratonnerres ou sur les rapports ultérieurs de l'Académie sur le sujet.

Entièrement centré sur la répartition de l'électricité à la surface de conducteurs *en équilibre*, le projet de Coulomb pouvait difficilement déboucher sur une théorie du paratonnerre utile pour la pratique. La fin de son sixième et dernier mémoire sur l'électricité annonce un nouveau mémoire sur un tout autre sujet que le paratonnerre : la répartition de l'électricité dans les isolants [Coulomb 1791, art. LXIV]. Certes, aucun mémoire ne fut publié ultérieurement sur ce sujet très difficile du point de vue théorique comme du point de vue expérimental. Mais c'est cette question, prolongeant ses précédentes recherches sur la répartition de l'électricité dans les conducteurs, que Coulomb comptait étudier et non celle du paratonnerre.

14. [Le Roy 1777 ; Guyton de Morveau 1777 ; Brisson 1781 ; Sigaud de la Fond 1781].

La volonté de construire une physique de style newtonien s'étend au magnétisme. Parmi les sept « Mémoires sur l'électricité et le magnétisme », dont le regroupement dans une même publication [Coulomb s.d.] laisse à penser que Coulomb considérerait qu'ils formaient un tout¹⁵, les deux premiers soulignent l'identité mathématique entre les lois qui régissent les fluides électriques et magnétiques, et le deuxième et le septième traitent spécifiquement du magnétisme. L'ensemble de ces recherches présente un projet de mathématisation conjointe de ces deux branches de la physique, souligné au début du septième mémoire : « Dans les six Mémoires qui précèdent, [...] j'ai eu principalement en vue de soumettre au calcul les différents phénomènes de l'électricité » [Coulomb 1793, p. 455]. Dans ce dernier opus, l'expérimentation (mesure de l'intensité magnétique d'une aiguille aimantée en chacun de ses points et en fonction de ses dimensions) et les intuitions physiques jouent un rôle majeur. Coulomb applique cependant à l'aimant une méthode parallèle à celle utilisée pour calculer la répartition de l'électricité à la surface d'un cylindre. Il aboutit à une solution mathématique cohérente avec ses résultats expérimentaux mais en contradiction avec l'expérience de l'aimant brisé, ce qui l'amène à son hypothèse des aimants élémentaires à l'intérieur d'un aimant. Si le mémoire se donne comme objectif de « déterminer par l'expérience *et par le calcul théorique*, les lois du magnétisme » (nous soulignons), ce qui reprend presque mot pour mot sa profession de foi sur le « mélange du Calcul & de la Physique » [1776], les calculs déduits de la théorie restent beaucoup plus limités que pour l'électricité. Seule est étudiée la répartition du magnétisme dans un barreau aimanté, les interactions entre deux aimants ou entre aimants et barreaux de fer non aimantés n'étant pas abordées. En revanche, le procédé pour réaliser des aimants puissants, d'un intérêt majeur pour l'aimantation des boussoles, attire l'attention de Coulomb.

Conclusion

Le « mélange du Calcul & de la Physique », annoncé dès le mémoire sur la statique, soutient une ambition à la fois heuristique et épistémologique. La volonté de Coulomb d'aboutir à des applications pratiques, suscitée tant par son expérience d'ingénieur que par les demandes des ministères de la Marine et de la Guerre relayées par l'Académie des sciences, a produit des contributions essentielles dans les divers domaines de l'art de l'ingénieur : flexion des poutres, résistance des piliers ou des soutènements, équilibre des voûtes, frottement, même si les résultats ne sont pas directement utiles pour les praticiens et si Coulomb se situe dans le prolongement de ses

15. Coulomb lui-même les appelle *ses sept mémoires* [Gillmor 1971, note h, p. 50].

prédécesseurs. Par contraste, dans le domaine de l'électricité et du magnétisme, la rupture épistémologique est manifeste. La recherche de « la plus grande précision » dans les mesures, le déroulement systématique du « calcul » à partir de « la théorie », l'intervention d'approximations successivement physiques et mathématiques, et enfin l'affirmation répétée de manière obsessionnelle de l'accord entre résultat du calcul et résultat de l'expérience, forgent les éléments essentiels d'une articulation étroite entre physique et mathématiques. Coulomb pousse aussi loin qu'il lui est possible les techniques mathématiques qu'il maîtrise, pour l'essentiel le calcul différentiel et intégral élémentaire, recourant fréquemment à des « bricolages » mathématiques pour faire agir ces techniques dans des domaines qui, jusque-là, ne relevaient pas, ou peu, du calcul. Le caractère systématique de la confrontation entre chaque résultat expérimental et un résultat de calcul, et le caractère non moins systématique de la constatation – au prix parfois d'un certain optimisme – de l'accord entre ces résultats, montrent qu'il s'agit d'établir une nouvelle méthode pour traiter les questions de physique expérimentale. Enfin le passage de la recherche de lois *empiriques* à des lois *théoriques*, comme dans le cas de la torsion, puis *fondamentales*, en électricité et magnétisme, marque la progression de la confiance dans les possibilités des mathématiques pour traduire la réalité physique.

De fait, l'œuvre de Coulomb en physique est comprise et reçue par ses pairs comme une nouvelle manière d'étudier la physique et de l'enseigner aux nouvelles générations. Dès 1794, à l'École normale de l'an III, créée par la Convention pour former un bon millier de « citoyens-instituteurs », le professeur de physique Haüy, pourtant lui-même peu mathématicien, glorifie le caractère fondateur du travail de Coulomb [Haüy 1787]. Les traités de physique de Biot et de Haüy, références pour l'enseignement de la physique en France et dans quelques autres pays européens au début du XIX^e siècle, oublient pour l'électricité la science de salon et ses expériences spectaculaires au profit des résultats numériques des expériences de Coulomb. Lorsque Poisson étend à l'électricité la reformulation laplacienne de la gravitation à l'aide de la notion de potentiel, il intègre la moisson de données expérimentales de Coulomb [Poisson 1812a,b]. En traitant mathématiquement le problème de deux sphères électrisées inégales en contact, que Coulomb avait renoncé à calculer dans le cas général, Poisson obtient des valeurs en bon accord avec les valeurs expérimentales de son prédécesseur¹⁶. Étant donné la

16. Dans la réédition des mémoires de Coulomb en 1884 par la Société française de physique, Alfred Potier met systématiquement en regard les valeurs calculées par Plana et Poisson avec les valeurs expérimentales de Coulomb, voir en particulier [Coulomb 1884, p. 192-193, 218, 219] ; voir aussi [Grattan-Guinness 1990, vol. I, p. 502-513] et, pour une vision plus critique des mémoires de Poisson, [Garber 1999].

difficulté des mesures avec un plan d'épreuve et une balance, cet accord témoigne de la maîtrise remarquable acquise par Coulomb dans le maniement de ses instruments.

Les représentants de la physique mathématique du début du XIX^e siècle, Fresnel, Malus, Fourier ou Ampère, ne cherchent plus à établir des formules empiriques ou à interpréter les termes d'une formule empirique par des effets physiques particuliers, à la manière de Coulomb. Ils introduisent les approximations avec parcimonie. Ces physiciens formés au maniement des outils mathématiques les plus avancés, recourent à la résolution d'équations différentielles, voire forgent de nouveaux outils mathématiques si nécessaire. Leurs théories possèdent aussi un pouvoir prédictif bien supérieur. Mais ils retiennent de la méthode défendue et illustrée par Coulomb la nécessité de l'accord systématique entre résultats du calcul et résultats expérimentaux, et surtout, ils partagent sa confiance dans la capacité des mathématiques à traduire les phénomènes physiques.

BIBLIOGRAPHIE

Sources primaires

- [Aepinus 1759/1979] Franz Aepinus, *Tentamen theoriae electricitatis et magnetismi*, Petropoli : Typis Academiae scientiarum, 1759. Trad. angl., *Essay on the Theory of Electricity and Magnetism*, introduction et notes par R. W. Home, Princeton : Princeton University Press, 1979.
- [Amontons 1702] Guillaume Amontons, « De la résistance causée dans les machines », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1699 (1702), p. 205-225.
- [Brisson 1781] Mathurin-Jacques Brisson, *Dictionnaire raisonné de physique*, t. 3, 1781, article « Tonnerre », p. 653-658.
- [Condorcet, Monge & Bossut 1780] Condorcet, Gaspard Monge et Charles Bossut, « Rapport sur un mémoire de M. Coulomb sur les limites de la force des hommes, [...] sur l'insuffisance de cette force pour imiter le vol des oiseaux... », *Procès-verbaux des séances de l'Académie royale des sciences*, séance du 24 mai 1780, vol. 99, Archives de l'Académie des sciences (Paris).
- [Coulomb 1776] Charles-Augustin Coulomb, « Essai sur une application des règles de *Maximis & Minimis* à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture », *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie royale des sciences, par divers savans. Année 1773*, VII (1776), p. 343-382 ; réédité dans [Coulomb 1821].
- [Coulomb 1780] C.-A. Coulomb, « Recherches sur la meilleure manière de fabriquer les aiguilles aimantées », *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie royale des sciences, par divers savans*, IX (1780), p. 166-264.
- [Coulomb 1785] C.-A. Coulomb, « Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties, et à la roideur des Cordages », *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie royale des sciences, par divers savans*, X (1785), p. 161-332 ; réédité dans [Coulomb 1821].

- [Coulomb 1787] C.-A. Coulomb, « Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion, & sur l'élasticité des fils de métal », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1784 (1787), p. 229-269 ; réédité dans [Coulomb 1821].
- [Coulomb 1788a] C.-A. Coulomb, « Premier mémoire sur l'électricité et le magnétisme. Construction & usage d'une Balance électrique, fondée sur la propriété qu'ont les Fils de métal, d'avoir une force de réaction de Torsion proportionnelle à l'angle de Torsion », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1785 (1788), p. 569-577 ; réédité dans [Coulomb s.d.].
- [Coulomb 1788b] C.-A. Coulomb, « Second mémoire sur l'électricité et le magnétisme. Où l'on détermine, suivant quelles loix le Fluide magnétique, ainsi que le Fluide électrique, agissent, soit par répulsion, soit par attraction », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1785 (1788), p. 578-611 ; réédité dans [Coulomb s.d.].
- [Coulomb 1788c] C.-A. Coulomb, « Troisième mémoire sur l'électricité et le magnétisme. De la quantité d'Électricité qu'un corps isolé perd dans un temps donné, soit par le contact de l'air plus ou moins humide, soit le long des soutiens plus ou moins idio-électriques », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1785 (1788), p. 612-638 ; réédité dans [Coulomb s.d.].
- [Coulomb 1788d] C.-A. Coulomb, « Quatrième mémoire sur l'électricité. Où l'on démontre deux principales propriétés du Fluide électrique : la première, que ce fluide [...] se partage entre différens corps mis en contact uniquement par son action répulsive ; la seconde, que dans les corps conducteurs, le fluide parvenu à l'état de stabilité, est répandu sur la surface du corps, & ne pénètre pas dans l'intérieur », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1786 (1788), p. 67-77 ; réédité dans [Coulomb s.d.].
- [Coulomb 1789] C.-A. Coulomb, « Cinquième mémoire sur l'électricité. De la manière dont le fluide électrique se partage entre deux corps conducteurs mis en contact, & de la distribution de ce fluide sur les différentes parties de la surface de ces corps », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1787 (1789), p. 421-467 ; réédité dans [Coulomb s.d.].
- [Coulomb 1791] C.-A. Coulomb, « Sixième mémoire sur l'électricité. Suite des recherches sur la distribution du fluide électrique entre plusieurs corps conducteurs : détermination de la densité électrique dans les différens points de la surface de ces corps », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1788 (1791), p. 617-705 ; réédité dans [Coulomb s.d.].
- [Coulomb 1793] C.-A. Coulomb, « Septième mémoire sur l'électricité et le magnétisme. Du Magnétisme », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1789 (1793), p. 455-505 ; réédité dans [Coulomb s.d.].
- [Coulomb s.d.] (après 1793) C.-A. Coulomb, *Mémoires sur l'électricité et le magnétisme*, Paris [s.d.]. Reprod. en fac-similé des sept mémoires sur l'électricité et le magnétisme publiés dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences*.
- [Coulomb 1801] C.-A. Coulomb, « Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents », *Mémoires de l'Institut national des sciences et arts*, 3 (1801), p. 246-305.
- [Coulomb 1821] C.-A. Coulomb, *Théorie des machines simples en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*, Paris : Bachelier, 1821.
- [Coulomb 1884] C.-A. Coulomb, *Collection de mémoires relatifs à la physique*, publiés par la Société française de physique, t. I, *Mémoires de Coulomb*, Paris, 1884 [cette édition modernise les notations et comporte d'importantes coupures, en particulier dans les calculs étudiés ici].

- [Haüy 1787] René-Just Haüy, *Exposition raisonnée de la théorie de l'électricité et du magnétisme, d'après les principes de M. Aepinus*, Paris, 1787.
- [Le Roy 1777] Jean-Baptiste Le Roy, « Mémoire sur la forme des barres ou des conducteurs métalliques... », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1773 (1777), p. 671-686.
- [Le Roy, Bossut & Coulomb 1784] Jean-Baptiste Le Roy, Charles Bossut et Charles-Augustin Coulomb, « Rapport sur un mémoire de Montgolfier lu le 6 mars 1784 sur la théorie des rames appliquée aux machines aérostatiques », *Procès-verbaux des séances de l'Académie royale des sciences*, 13 mars 1784, vol. 103, Archives de l'Académie des sciences (Paris).
- [Guyton de Morveau 1777] Louis-Bernard Guyton de Morveau, *Nouveau Dictionnaire pour servir de Supplément aux Dictionnaires des Sciences, des Arts et des Métiers*, t. 4, 1777, article « Tonnerre », p. 948-952.
- [Poisson 1812a] Siméon-Denis Poisson, « Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs », *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, année 1811, 12 (1812), p. 1-92.
- [Poisson 1812b] S.-D. Poisson, « Second Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs », *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, année 1811, 12 (1812), p. 163-274.
- [Prony 1804] Gaspard-Marie Riche de Prony, *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes*, Paris : Imprimerie impériale, 1804.
- [Sigaud de la Fond 1781] Joseph-Aignan Sigaud de la Fond, *Précis historique et expérimental des phénomènes électriques*, 1781, p. 370.

Sources secondaires

- [Bauer 1949] Edmond Bauer, « L'œuvre scientifique de Coulomb », dans *L'électromagnétisme hier et aujourd'hui*, Paris : Albin Michel, 1949, p. 213-235.
- [Benvenuto 1997] Eduardo Benvenuto, « Résistance des matériaux (Histoire de la) », dans Antoine Picon (dir.), *L'art de l'ingénieur constructeur, entrepreneur, inventeur*, Paris : Centre Pompidou, 1997, p. 408-414.
- [Blondel 1994] Christine Blondel, « La "mécanisation" de l'électricité : idéal de mesures exactes et savoir-faire qualitatifs », dans [Blondel & Doerries 1994, p. 99-119].
- [Blondel 1997] C. Blondel, « Haüy et l'électricité : De la démonstration-spectacle à la diffusion d'une science newtonienne », *Revue d'histoire des sciences*, 50/3 (1997), p. 265-282.
- [Blondel & Doerries 1994] Christine Blondel et Matthias Doerries (éd.), *Restaging Coulomb : Usages, controverses et répliques autour de la balance de torsion*, Firenze : Leo S. Olschki, 1994.
- [Blondel & Wolff 2007-2013] Christine Blondel et Bertrand Wolff, *Des lois pour l'électricité : Coulomb et quelques autres...*, site *Ampère et l'histoire de l'électricité*, <http://www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique/zoom/coulomb/>.
- [Blondel & Wolff 2009] C. Blondel et B. Wolff, « Expériences et calculs de Coulomb en électricité : un accord discuté », *Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie*, 917 (2009), p. 845-857.
- [Corradi 1995] Massimo Corradi, « De la statique des demi-fluides à la théorie de la poussée des terres », dans P. Radelet-de Grave et E. Benvenuto (dir.), *Entre Mécanique et Architecture / Between Mechanics and Architecture*, Basel : Birkhäuser, 1995, p. 236-243.

- [Darrigol 2002] Olivier Darrigol, « Between Hydrodynamics and Elasticity Theory : The First Five Births of the Navier-Stokes Equation », *Archive for the History of Exact Sciences*, 56 (2002), p. 95-150.
- [Dorn 1974] Harold Dorn, Recension de « Jacques Heyman, *Coulomb's Memoir on Statics. An Essay in the History of Civil Engineering* », *ISIS*, 65 (1974), Book reviews, p. 277-279.
- [Dubochet 1834] J.-A. Dubochet, *Recherches sur le vol des oiseaux et l'art aéronautique*, Nantes, 1834.
- [Garber 1999] Elisabeth Garber, *The Language of Physics. The Calculus and the Development of Theoretical Physics in Europe, 1750-1914*, Boston : Birkhäuser, 1999.
- [Gillispie 2004] Charles C. Gillispie, *Science and polity in France : the revolutionary and Napoleonic years*, Princeton & Oxford : Princeton University Press, 2004.
- [Gillmor 1971] C. Stewart Gillmor, *Coulomb and the Evolution of Physics and Engineering in Eighteenth-Century France*, Princeton : Princeton University Press, 1971.
- [Grattan-Guinness 1990] Ivor Grattan-Guinness, *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840*, 3 vol., Basel : Birkhäuser, 1990.
- [Guillerme 1995] André Guillerme, *Bâtir la ville. Révolutions industrielles dans les matériaux de construction, France-Grande-Bretagne (1760-1840)*, Paris : PUF, 1995.
- [Hankins 1989] Thomas L. Hankins, *Science and the Enlightenment*, Cambridge & New York : Cambridge University Press, 1989.
- [Heering 2009] Peter Heering, « Styles of Experimentation and the Attempts to Establish the Lightning Rod in the Pre-Revolutionary Paris », dans P. Heering *et al.* (éd.), *Playing with Fire. Histories of the Lightning Rod*, Philadelphia : American Philosophical Society, 2009, p. 121-143.
- [Heilbron 1976] John L. Heilbron, « Volta », *Dictionary of Scientific Biography*, New York : Charles Scribner's Sons, vol. 14, 1976, p. 72.
- [Heilbron 1979] J. L. Heilbron, *Electricity in the 17th and 18th Centuries : a Study of Early Modern Physics*, Berkeley : University of California Press, 1979 ; rééd., Dover, 1999.
- [Heyman 1972] Jacques Heyman, *Coulomb's Memoir on Statics : An Essay in the History of Civil Engineering*, Cambridge : Cambridge University Press, 1972.
- [Home 1979] Roderick Weir Home, « Aepinus's Essay on the Theory of Electricity and Magnetism », Introduction dans [Aepinus 1759/1979, p. 1-224].
- [Licoppe 1996] Christian Licoppe, *La Formation de la pratique scientifique. Le discours de l'expérience en France et en Angleterre (1630-1820)*, Paris : La Découverte, 1996.
- [Picon 1989] Antoine Picon, « Les ingénieurs et la mathématisation. L'exemple du génie civil et de la construction », *Revue d'histoire des sciences*, 42 (1989), p. 155-172.
- [Picon 1992] A. Picon, *L'invention de l'ingénieur moderne*, Champs-sur-Marne : Presses des Ponts & Chaussées, 1992.
- [Picon & Belhoste 1994] Antoine Picon et Bruno Belhoste, « Charles-Augustin Coulomb ingénieur des Lumières », dans [Blondel & Doerries 1994, p. 31-45].
- [Radelet-de Grave 1994] Patricia Radelet-de-Grave, « Étude de l'Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, par M. Coulomb, Ingénieur du Roi », *Sciences et Techniques en Perspective*, 27 (1994), p. 2-22.

- [Roux 2011] Sophie Roux, « Pour une étude des formes de la mathématisation », dans H. Chabot et S. Roux (dir.), *La mathématisation comme problème*, Paris : Éditions des archives contemporaines, 2011, p. 3-38.
- [Straub 1952] Hans Straub, *A History of Civil Engineering*, London : Leonard Hill Limited, 1952.
- [Timoschenko 1953] Stephen Timoschenko, *History of strength of materials, with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*, New York : Mac Graw Hill, 1953.
- [Truesdell 1973-1974] Clifford Ambrose Truesdell, « Review of C. Stewart Gillmor, Coulomb and the Evolution of Physics and Engineering in Eighteenth-Century France », *Eighteenth-Century Studies*, 7 (1973-1974), p. 213-225.

CHAPITRE 3

Géométrie : entre tradition et modernité

Les travaux de Lambert sur la perspective et leur réception au début du XIX^e siècle

Christophe ECKES

La perspective constitue un thème récurrent dans l'œuvre de Johann Heinrich Lambert (1728-1777), qui mène des recherches dans ce domaine dès les années 1750. Ses contributions sur la perspective se caractérisent par leur diversité : Lambert y aborde les perspectives *linéaire* (construction de figures et des ombres en perspective) et *aérienne* (dégradation des couleurs pour suggérer une apparence de profondeur) ; il s'intéresse aux instruments (perspectographe, compas de proportion, règle) et aux méthodes de construction ; il étudie les propriétés géométriques des figures construites en perspective ; il précise le statut ontologique des apparences visuelles ; enfin, on lui doit une courte histoire de la perspective.

La perspective affranchie de l'embaras du plan géométral paraît en 1759, simultanément en français et en allemand¹ [Lambert 1759a,b]. Lambert publie en 1774 une seconde édition en allemand comportant des notes additionnelles, dont une histoire de la perspective et quinze problèmes de géométrie à la règle seule [1774/1987a,b].

Les sources de Lambert sur la perspective sont difficiles à identifier avant son entrée à l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin en 1765. Il est précepteur au sein de la famille von Salis jusqu'en 1756 [Formey 1780, p. 77-79], période au cours de laquelle il rédige son premier manuscrit sur la perspective, consacré à un projet de perspectographe [Lambert 1752/1943]. Il projette de rédiger son traité de perspective dès 1756, comme en atteste son journal [Andersen 2007, p. 638]. Il a peut-être eu accès à des traités de perspective dans la bibliothèque de la famille von Salis, mais il tait alors ses références. Une fois à l'Académie, Lambert est plus prolixe sur ses sources. Dans son « Mémoire sur la partie photométrique de tout l'art de peindre » [1770, p. 88], il commente le *Traité de la peinture* (1651) de Léonard de Vinci, où il voit les prémisses d'une science du coloris. Il se réfère au surplus à Albrecht Dürer, Abraham Bosse et Brook Taylor dans son histoire de la perspective. L'inventaire de sa bibliothèque montre qu'il possédait un exemplaire de la traduction française [1757] des deux traités de Taylor [1715, 1719] sur la perspective [Andersen 2007, p. 641].

1. Sous le titre *Die freie Perspektive oder Anweisung jeden perspektivischen Aufriß von freien Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen*, abrégé en *Freie Perspektive*.

Notre objectif, dans cet article, consiste à prolonger les réflexions menées par Kirsti Andersen s'agissant de la réception du traité de Lambert et, plus particulièrement, des quinze problèmes à la règle seule qui figurent à la fin de la seconde édition de la *Freie Perspektive*. L'historienne critique la thèse *continuiste* selon laquelle les problèmes de Lambert feraient la transition entre la perspective et la géométrie projective ainsi que les travaux de Poncelet pourraient le suggérer. Elle montre par exemple que ce dernier découvre après coup la référence à Lambert au milieu des années 1810 [Andersen 2007, p. 702]. Nous souhaitons surtout déterminer les caractéristiques, la provenance et les raisons d'être de cette thèse qui fait de Lambert un « précurseur » de la géométrie projective. Cette thèse présuppose d'isoler les quinze problèmes afin de les traiter pour eux-mêmes. Nous allons voir justement que les motivations qui conduisent Lambert à y minimiser l'usage du compas sont du même ordre que celles qui l'incitent à rejeter l'usage de géomètres dans l'exécution de dessins en perspective. C'est pourquoi, avant d'en donner un aperçu, il nous paraît essentiel de revenir sur les raisons qui ont poussé le savant à proposer une méthode de construction en perspective sans géomètres, ceci nous permettant ensuite de comprendre, par analogie, pourquoi il privilégie la règle au détriment du compas dans ses quinze problèmes.

Cette thèse continuiste, qui cherche à établir une passerelle entre la perspective et la géométrie projective via Lambert et ses quinze problèmes notamment, est d'abord soutenue par Jean-Victor Poncelet et Michel Chasles, avant d'être reprise par L. Cremona [1875], G. Loria [1908], H. Lebesgue [1942] et R. Laurent [1987]. Pour faire un pas de plus par rapport à K. Andersen, il nous semble essentiel de savoir pourquoi Poncelet et Chasles se réclament de Lambert au moment même où ils mettent en exergue des méthodes synthétiques en géométrie projective. Il nous paraît également nécessaire de montrer que leurs sources, mais aussi celles, avant eux, de Carnot et Servois en géométrie de la règle, renvoient moins au traité de perspective de Lambert qu'à des problèmes relevant de l'artillerie.

Dans un premier temps, nous reviendrons sur la méthode utilisant une échelle d'angle que Lambert propose dans son traité pour concurrencer les méthodes fondées sur l'usage des géomètres². Nous caractériserons et localiserons alors la rupture induite par son rejet des géomètres. Dans un second temps, nous préciserons le statut des quinze problèmes à la règle seule en les rapportant à l'ensemble de l'ouvrage. Nous soulignerons certaines parentés avec des problèmes issus des *Récréations mathématiques* d'Ozanam – en particulier l'édition de Montucla [1778] –, ce qui impliquera de revoir le corpus pertinent pour contextualiser les constructions de

2. Les géomètres désignent des vues en plan et en élévation de l'objet à représenter en perspective.

Lambert. Pour finir, nous aborderons la circulation de ces problèmes en montrant que Lambert a été rétrospectivement considéré comme une figure tutélaire dans le renouvellement de méthodes synthétiques en géométrie. Poncelet et Chasles apparaissent comme les principaux initiateurs de la thèse continuiste mentionnée ci-dessus, sur fond de rupture avec l'analyse comme unique voie d'accès à la généralité.

I. La méthode de Lambert : un élément de rupture dans l'apprentissage des règles de la perspective

Le traité de Lambert doit sa notoriété à l'introduction d'une méthode de construction sans géométraux que l'auteur juge pratique pour les dessinateurs. Le *plan géométral* est le plan horizontal sur lequel est représentée à l'échelle la figure à dessiner – ici un parallélogramme $ABCD$ (Figure 1). Son image en perspective $abcd$ se situe sur le *plan du tableau*. Signalons d'autres éléments clés : le *point de vue* ou œil du spectateur O ; la *ligne d'horizon* (sur le plan du tableau), située à hauteur de O ; le *point de fuite principal P , c'est-à-dire le projeté orthogonal de O sur la ligne d'horizon ; la *ligne de terre* FR , correspondant à l'intersection entre le plan du tableau et le plan géométral.*

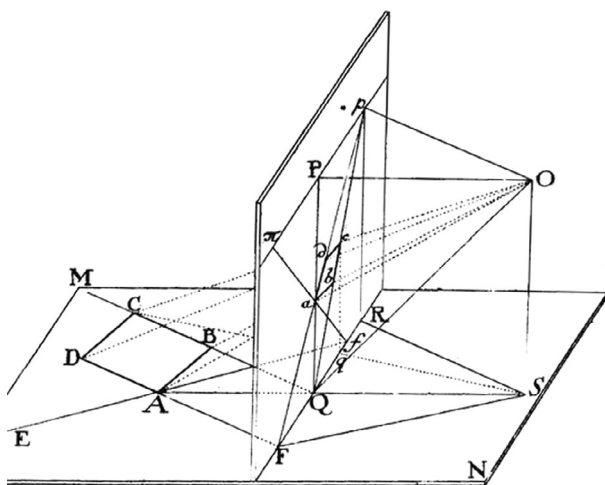


Figure 1 : [Lambert 1759b, Tab. I, Fig. I].

Les méthodes classiques, fondées sur l'utilisation du plan géométral, opèrent en deux étapes : tracé à l'échelle de la figure sur le plan géométral, construction point par point de son image en perspective sur le plan du tableau. Lambert souligne l'incommodité de ces méthodes :

« Pour dessiner une figure tant soit peu composée, on se voioit obligé, d'en tracer un plan géométral, & de s'en servir pour le mettre en perspective. C'étoit redoubler le travail, & on ne pouvoit s'en passer, que dans quelques cas plus simples. Vouloit on dessiner à fantaisie quelque paysage, il falloit s'en rapporter aux yeux, pour donner à chaque partie une grandeur proportionnée à son éloignement. Et quand même on se soumettoit à l'incommodité du plan géométrique, il s'y joignoit une autre, c'est qu'il falloit tirer nombre de lignes superflues, pour déterminer la position d'un seul point, & chaque nouveau point demandoit, qu'on repetat le même travail. » [Lambert 1759b, p. ii-iii]

Il n'est donc pas évident de construire la figure à représenter sur le plan géométral. Il faut effectuer au préalable des mesures coûteuses sur le terrain. Les méthodes par les géomètres impliquent en outre de nombreuses lignes de construction, comme l'illustre l'exemple de la figure 2 – emprunté au traité d'Edmé-Sébastien Jeurat [1750], contemporain de Lambert faisant un usage exclusif de géomètres –, dans lequel il s'agit de construire l'image en perspective d'un hexagone régulier, le plan du tableau étant rabattu sur le plan géométral. La figure montre que Jeurat utilise de nombreuses lignes de construction pour identifier l'image en perspective de chacun des sommets d'une figure pourtant élémentaire.

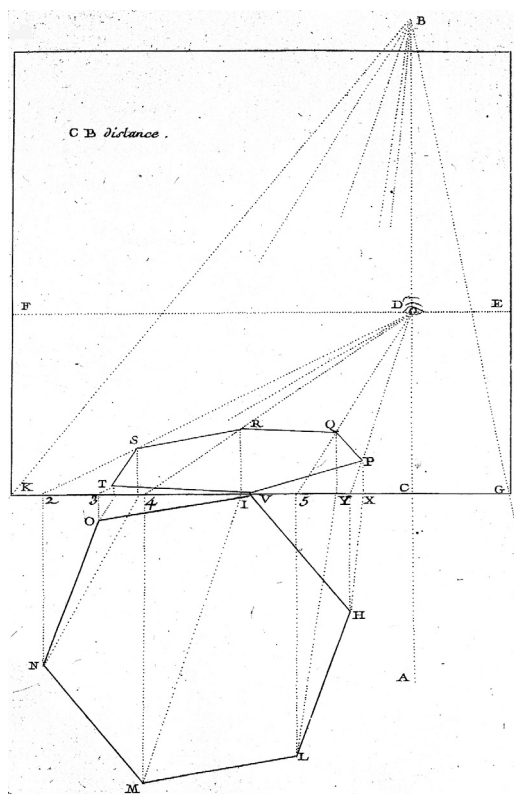


Figure 2: [Jeurat 1750, Pl. XIX, Fig. 28].

Malgré leur complexité, les géométraux sont prédominants dans les cours de perspective professés au sein des Académies d'art. Lambert se situe donc à contre-courant d'une tradition d'enseignement de la perspective qui remonte au second XVII^e siècle si l'on se réfère à l'Académie royale de peinture et de sculpture. Pour donner des exemples connus, jusqu'à son exclusion de cette académie en 1661 en raison de la controverse qui l'oppose au peintre Charles Le Brun, Abraham Bosse se fonde sur les géométraux dans son enseignement de la perspective, inspiré de Girard Desargues³. À partir de 1672, la dynastie des Le Clerc prend en charge l'enseignement de la perspective à l'Académie royale de peinture et de sculpture. D'après le traité de Jeaurat [1750] qui rassemble les leçons de Sébastien Le Clerc I (1637-1714) et II (1673-1763)⁴, la construction de géométraux apparaît comme une étape essentielle dans les constructions en perspective⁵. Le plan géométral vient même guider le tracé de figures sur le plan du tableau et rend compte de ce que sont véritablement les objets à représenter, puisqu'il en respecte les proportions. Aux yeux de Jeaurat, la perspective linéaire est donc subordonnée à la géométrie élémentaire, témoignant ainsi de la pérennité des arguments de Bosse en faveur du strict usage de géométraux.

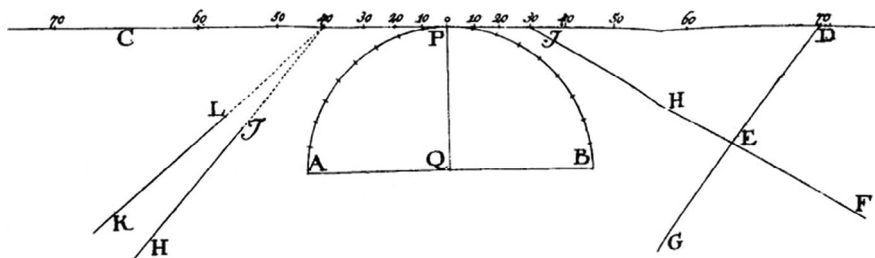


Figure 3: [Lambert 1759b, Tab. I, Fig. II].

3. Voir en particulier [Bosse 1648]. Pour un commentaire des travaux de Bosse et de la controverse qui l'oppose notamment à Le Brun, voir [Heinich 1983]. L'importance accordée par Bosse aux géométraux repose sur la prévalence que celui-ci accorde à la raison sur la vision, comme en atteste ce passage de son *Traité des pratiques géométrales* (1666) : « Il se faut bien donner garde de dessiner les objets comme l'œil les voit, mais bien de [...] pouvoir remettre en son véritable géométral un tableau composé de divers objets perspectifs » (cité dans [Heinich 1983, p. 47]).

4. Le second étant le fils du premier. Pour sa part, Jeaurat est le petit-fils de Sébastien Le Clerc I et le neveu de Sébastien Le Clerc II.

5. « On représente les objets de deux manières : ou géométralement, ou perspectivevement. Dans la manière de les représenter géométralement, on considère dans ces objets deux coupes : l'une verticale, l'autre horizontale. La représentation verticale, nommée *élévation*, donne leur hauteur perpendiculaire ; l'horizontale, nommée *plan*, fait voir leur étendue. Cette manière de représenter les objets est en quelque façon la plus parfaite, parce qu'elle rend un compte certain de la proportion de chacune de leurs parties, & que d'ailleurs on ne parvient à la connoissance du Perspectif que par celle du Géométral. » [Jeaurat 1750, p. 2-3]

Lambert propose une méthode alternative fondée sur une échelle d'angle (Figure 3) et montre qu'il n'y a aucun lien indissoluble entre les géométraux et le plan du tableau dans la mesure où l'on peut exécuter directement une figure en perspective sans passer par son géométral. Pour ce faire, il utilise une forme de rapporteur, dont le centre coïncide avec le point de vue du spectateur. En prolongeant les lignes issues de ce point, noté *Q* sur la figure ci-dessus, il reporte cette échelle d'angle sur la ligne d'horizon et repère ainsi les points de fuite pertinents pour tracer un dessin en perspective. Sa méthode implique en outre des mesures d'angles sur le terrain moins coûteuses que ne le sont les mesures de distances impliquées par les géométraux.

Pour mieux caractériser et localiser la rupture à l'œuvre chez Lambert, il convient de préciser qu'elle ne réside pas dans la nouveauté de la méthode proposée. Comme l'a établi K. Andersen, cette méthode est en effet déjà évoquée par Jacques Aleaume dans un manuscrit des années 1620 qui inspirera Estienne Migon [1643]⁶. Nicolas-Louis de La Caille décrit également cette méthode en 1756⁷. Dans son histoire de la perspective, Lambert fait allusion à Aleaume sans lui reconnaître la paternité de cette méthode [1774/1987a, p. 205-206], mais admet la priorité qui revient à La Caille [*Ibid.*, p. 209]. Les motivations de La Caille et de Lambert diffèrent cependant. Le premier se contente de faire un inventaire des méthodes disponibles, tandis que le second défend l'utilisation d'une échelle d'angle à l'exclusion de tout autre procédé, rejetant ainsi l'usage de géométraux. Cette rupture est donc revendiquée par Lambert.

Soyons attentifs à l'économie de son discours. Alors que Bosse et Jeurat fondaient les règles de la perspective sur la vérité des principes de géométrie élémentaire qui président au tracé des géométraux et des lignes de construction, Lambert évalue les méthodes existantes en fonction de leur seule utilité et va jusqu'à dénouer le lien entre géométrie élémentaire et perspective linéaire. La rupture ainsi mise en œuvre trouve finalement son fondement dans le statut que Lambert assigne à la perspective, celle-ci consistant selon lui à représenter les apparences visuelles en tant que telles. Il ne la voit pas comme une branche de la géométrie ou même de l'optique, puisqu'elle « ne s'arrête qu'aux apparences » [Lambert 1759b,

6. *La perspective spéculative et pratique* de Migon comporte un sous-titre pour le moins éloquent : « où sont démontrés les fondements de cet art, et de tout ce qui en a été enseigné jusqu'à présent. Ensemble la manière universelle de la pratiquer, non seulement sans plan géométral, et sans tiers point, dedans ni dehors du tableau. Mais encore par le moyen de la ligne, communément appelée horizontale ». Pour une analyse des travaux d'Aleaume et de Migon, voir [Andersen 2007, p. 418 et suiv.].

7. [Andersen 2007, p. 651]. La dernière partie de l'ouvrage de La Caille, sur la perspective, comporte un chapitre dévolu à diverses méthodes de construction : la troisième, « par le châssis perspectif » [1756, p. 145], correspond à celle de Lambert.

p. 2]. Il établit d'ailleurs dès le premier chapitre une dichotomie entre les « apparences visibles » des objets et « leur véritable figure ». Si Bosse et Jeurat voyaient les géométraux comme un guide sûr pour construire des représentations en perspective, Lambert part d'une incommensurabilité entre l'apparence d'un objet et sa « figure véritable » qui justifie la coupure qu'il instaure entre le plan du tableau et le plan géométral – ce dernier n'étant ni utile ni même *nécessaire* pour reproduire les objets tels qu'ils paraissent.

Intéressons-nous à présent à l'impact du traité de Lambert sur l'enseignement de la perspective. D'après les résultats établis par K. Andersen [2007, p. 704], il faut attendre l'entrée du savant à l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin en 1765 pour que sa méthode acquière une certaine notoriété. Avant même d'en devenir membre, Lambert se lie d'amitié avec le philosophe Johann Georg Sulzer⁸ qui publie une encyclopédie des Beaux-Arts contenant un article sur la perspective largement inspiré de Lambert [1774, p. 670 et suiv.]. En 1771, ce dernier destinait à Sulzer un manuscrit – publié à titre posthume [Lambert 1799] – dans lequel la méthode de construction par une échelle d'angle est appliquée à la représentation d'un paysage en perspective. Cet écrit s'achève sur une gravure reprise par Sulzer dans son article sur la perspective [1774, p. 900-901]. Membre de l'Académie d'Art de Berlin de 1790 à sa mort en 1800, le mathématicien Bernhard Friedrich Mönnich (1741-1800) s'inspire par ailleurs des travaux de Lambert sur le compas de proportion pour y enseigner la perspective sans avoir recours aux géométraux. Ses leçons sont consignées dans un ouvrage dont la première édition paraît en 1794. À l'instar de Lambert, Mönnich se veut accessible à un public de dessinateurs.

Les travaux de Lambert ont finalement une incidence sur l'enseignement de la perspective dans les Académies d'art de Berlin et de Dresde, rompant ainsi avec la suprématie de méthodes fondées sur les géométraux. D'après les recherches de S. Siebel citées par K. Andersen, la rupture initiée par Lambert reste cependant très localisée puisqu'elle se joue essentiellement à Berlin et à Dresde au tournant du XIX^e siècle⁹.

8. « Berlin l'attiroit depuis longtemps par bien des endroits ; surtout il y avoit un Ami infiniment précieux, M. *Sulzer*, qui lui tendoit les bras depuis longtemps, & qui eut enfin le plaisir de l'y serrer étroitement au mois de Février 1764. » [Formey 1780, p. 83]

9. Pour une étude plus générale sur l'enseignement de la perspective dans les académies d'art allemandes autour de 1800, voir [Siebel 1999] : « Sabine Siebel has documented that around 1800, a group connected to the academies of art in Berlin and Dresden advocated basing the teaching of perspective on Lambert's ideas [Siebel 1999, p. 23, 91, 96, 169-171] » [Andersen 2007, p. 704].

II. Quel statut accorder aux quinze problèmes de construction à la règle seule (1774) ?

La deuxième édition du traité de perspective de Lambert [1774] s'achève sur quinze problèmes de construction « à la règle seule » : il s'agit pour l'auteur de minimiser en pratique l'utilisation du compas dans l'étude de certaines configurations géométriques impliquant le dispositif de la perspective. Nous allons voir que Lambert utilise le même type de justification pour rejeter l'usage de géomètres dans son traité et réduire au minimum l'intervention du compas dans la formulation et la résolution de ces quinze problèmes. Ceci nous conduira à souligner le lien étroit entre les quinze problèmes et le traité lui-même. Le statut de ces problèmes est complexe, de sorte qu'il est difficile de les insérer dans une trame historique continue, unifiée et linéaire qui irait de la perspective linéaire à la géométrie projective. Nous verrons ici qu'ils font davantage écho à des problèmes pratiques, voire même récréatifs, antérieurs ou contemporains.

Les quinze problèmes, étroitement reliés au reste du traité de Lambert, reposent sur le dispositif de la perspective. Ils sont tous présentés suivant le même modèle : données et formulation de problèmes à finalité essentiellement pratique ; solutions proposées avec une description minutieuse des étapes de la construction. Lambert adjoint parfois des explications et des variantes. Les éléments théoriques requis pour comprendre pourquoi les constructions fonctionnent sont présentés *a minima*.

Lambert privilégie d'ailleurs la règle pour des raisons pratiques. Certes, le compas permet d'économiser des étapes en théorie, c'est-à-dire sur le papier, voire d'effectuer des constructions qu'il serait impossible de réaliser à la règle seule. Mais en pratique, l'usage du compas se révèle complexe, en raison des mesures qu'il présuppose sur le terrain :

« Peu importe si ces solutions [à la règle] sont généralement plus longues [qu'avec le compas]. [...] La solution la plus brève sur le papier présuppose souvent des mesures de lignes et d'angles sur le terrain qui peuvent ne pas être réalisables, parce qu'elles nécessitent trop de temps et d'efforts ou sont trop coûteuses. » [Lambert 1774/1987b, p. 262]

Souvenons-nous que Lambert invoquait le même type d'argument pour éviter le recours aux géomètres dans la construction d'un dessin en perspective : le caractère fastidieux des mesures à accomplir sur le terrain constituait la première raison avancée. Il existe donc d'étroites parentés argumentatives entre la préface du traité de Lambert et les quinze problèmes qui viennent le clore. Les ajouts qui caractérisent la seconde édition de la *Freie Perspektive* ne remettent pas en cause la cohérence d'ensemble de l'ouvrage, qui porte essentiellement sur l'exécution de tracés sur le plan du tableau à partir de mesures sur le terrain devant être les plus simples à mettre en œuvre.

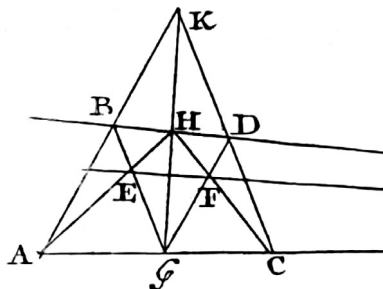


Figure 4: [Lambert 1774, Tab. X, Fig. 68].

Lambert montre aussi comment certaines difficultés techniques rencontrées par les dessinateurs peuvent être contournées au moyen de la règle. Par exemple, le problème V conduit à tracer des lignes convergeant vers un point de fuite inaccessible¹⁰ : « *AC, BD sont des lignes qui se coupent en un point en dehors de la table, tracer à l'aide d'une règle seulement et sans prolonger ces lignes, une ligne passant par un point E donné et coupant BD, AC au même point d'intersection.* » [1774/1987b, p. 268] Voici la solution de Lambert (Figure 4) : on trace la ligne *AE*, qui coupe *BD* en *H*, et la ligne *BE*, qui coupe *AC* en *G*. On prolonge ensuite les lignes *AB* et *GH* qui se coupent en *K*. On trace la ligne *CK* qui coupe *BD* en *D*. Il suffit ensuite de tracer les lignes *CH* et *DG* qui se coupent en *F*. La ligne *EF* est la ligne recherchée.

D'une manière générale, Lambert se contente de mesurer « empiriquement » les potentialités offertes par la règle seule, sans déterminer *a priori* ce qu'il est possible de construire avec cet instrument [*Ibid.*, p. 262]. Il distingue en outre les données et la résolution de ses problèmes, cette dernière devant s'effectuer à la règle seule, alors que certaines données peuvent être construites au compas :

« Dans les premiers problèmes, j'ai utilisé le compas uniquement pour les constructions géométriques des *Datis* ; l'usage de la règle seule a été réservé aux solutions apportées. Parmi ces *Datis*, la configuration la plus simple est justement celle de deux lignes partagées en deux parties égales. » [*Ibid.*, p. 274]

Lambert étudie en fait « la manière de réduire au maximum le nombre d'éléments exigeant l'emploi du compas dans la résolution des problèmes » [*Ibid.*, p. 262] en ayant toujours à l'esprit un objectif de commodité et de simplicité pratique.

Ces problèmes frappent surtout par la variété des situations envisagées et des rapports instaurés entre le plan du tableau et le plan géométral. Une telle variété suggère que les problèmes proposés sont aussi destinés à susciter l'agrément du lecteur par la découverte des étapes permettant

10. Il s'agit là d'une difficulté courante lorsque l'on exécute un dessin en perspective.

de contourner les obstacles induits par la contrainte de la règle, ce qui nous conduit à revoir le corpus pertinent pour les situer.

Plutôt que de les rapporter à des contributions ultérieures en géométrie projective pour reconstituer la trame d'une « continuité par filiations » ayant l'usage de la règle seule comme dénominateur commun, il nous semble en effet intéressant de les comparer à des problèmes d'optique et de perspective issus des *Récréations mathématiques* de Jacques Ozanam [1694] augmentées par Jean-Étienne Montucla [1778] et des *Nouvelles récréations* de l'abbé Edmé-Gilles Guyot [1769-1770]. Rappelons qu'en 1693, Ozanam publie un traité de perspective qui contient des problèmes de construction visant à cerner le rapport entre le plan géométral et le plan du tableau. La quatrième partie de ses *Récréations* est consacrée à des problèmes d'optique et de perspective, dont la résolution constitue une modalité commune d'acquisition des règles de la perspective. En 1778 paraît une « nouvelle édition, totalement refondue & considérablement augmentée » par Montucla. La préface, que l'on doit à ce dernier, nous renseigne sur le public visé : un public lettré, qui s'intéresse aux sciences mathématiques non comme une fin en soi, mais comme un divertissement. L'ouvrage s'adresse également à « ceux qui commencent à étudier ces sciences » afin de « piquer [leur] curiosité » [Montucla 1778, t. I, p. ii et iii]. On y trouve en particulier le problème d'optique XXIV (Figure 5), posé en ces termes :

« Etant donné un quadrilatere quelconque, trouver les divers parallélogrammes ou rectangles dont il peut être la représentation perspective ; ou bien,

Etant donné un parallélogramme quelconque, rectangle ou non, trouver sa position & celle de l'œil, qui feront que sa représentation perspective sera un quadrilatere donné. » [Ibid., t. II, p. 183]

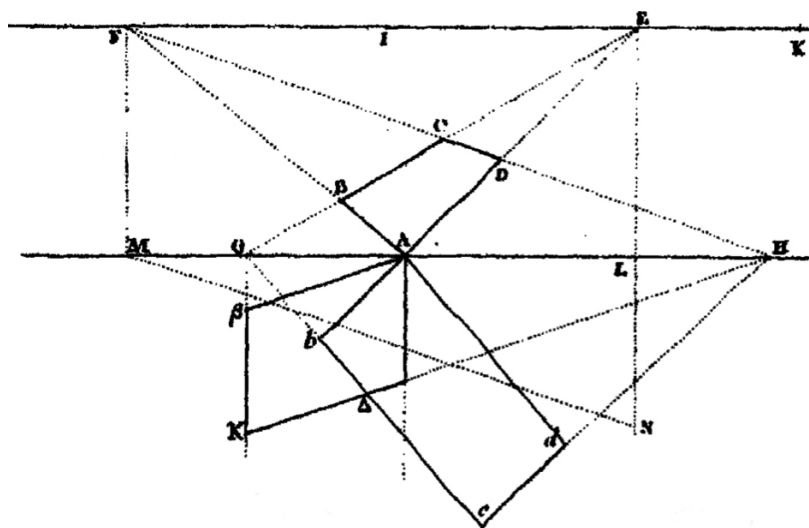


Figure 5 : [Montucla 1778, t. II, Optique, Pl. 6, Fig. 30].

Les similitudes avec le problème III de Lambert sont frappantes¹¹ : « *Un parallélogramme $ABCD$ étant donné, construire à l'aide d'une règle seulement, par un point P donné, une ligne parallèle à une ligne IE donnée.* » [Lambert 1774/1987b, p. 266] Dans ce problème (Figure 6), la ligne de terre (EI), le parallélogramme $ABCD$ et le point P sont donnés. Il s'agit d'abord de construire l'image en perspective du parallélogramme $ABCD$ comme suit (en supposant le plan du tableau rabattu sur le plan géométral) : on prolonge les côtés de $ABCD$ ainsi que la diagonale AC de telle sorte qu'ils coupent respectivement la ligne de terre en E, F, G, H et I . On trace une ligne arbitraire partant de G , notée (GR), puis (PE) et (PF) qui coupent (GR) respectivement en c et en a , ainsi que (Ha) et (Ic) qui se coupent en Q : la ligne (PQ) est la ligne recherchée. Dans cette solution de Lambert, $abcd$ doit être vue comme l'image en perspective (sur le plan du tableau) du parallélogramme $ABCD$. Les points P et Q peuvent être considérés comme deux points de fuite situés sur la ligne d'horizon qui, par définition, est parallèle à la ligne de terre.

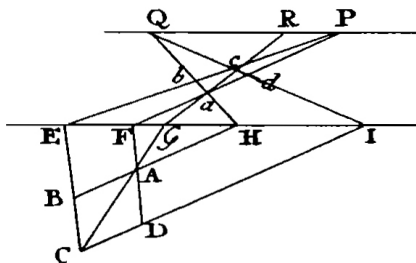


Figure 6: [Lambert 1774, Tab. X, Fig. 65].

D'autres références quasiment contemporaines à l'édition des *Récréations* d'Ozanam par Montucla indiquent que les problèmes d'optique et de perspective occupent une place de choix dans les récréations mathématiques. Ainsi, l'abbé Guyot aborde divers problèmes de ce type dans le tome troisième de ses *Nouvelles récréations* [1769-1770]. Le *Dictionnaire des amusements physiques et mathématiques* contient un article conséquent sur la perspective et l'optique [Lacombe 1792, p. 780 et suiv.] inspiré de Guyot. Inversement, certains des problèmes formulés par Lambert semblent avoir une visée récréative, au sens où ils aiguïseraient la curiosité d'un lecteur qu'il ne suppose pas géomètre. Dans la préface à la première édition de son traité, il se propose « d'écrire aussi pour ceux, qui n'ont d'autre

11. Lambert interprète ce problème dans le cadre de sa « géométrie perspective » et il propose donc une solution qui implique de reconstituer une partie du dispositif de la perspective : ligne de terre, ligne d'horizon et points de fuite.

connaissance de la perspective, que tout au plus celle, qu'ils ont puisée des premiers *Elemens des Mathematiques* » [1759b, p. v]. Cette préface est reproduite à l'identique dans la seconde édition exclusivement publiée en allemand [1774, p. iv]. Plus généralement, il est frappant de constater que Lambert vise un type de lectorat qui n'est pas sans rappeler le public auquel Montucla entend s'adresser. La perspective, affirme-t-il par exemple, « se recommande d'elle même à quiconque fait de la Peinture & du dessin son occupation principale, ou qui n'y destine que les heures, qu'il veut employer à un *amusement agréable* » (nous soulignons) [*Ibid.*, p. 2]. Autrement dit, loin de se restreindre à un public d'artistes, Lambert dédie aussi ce texte à des « amateurs » qui considèrent la perspective comme un divertissement. Il s'avère que Montucla utilise exactement le même type de vocabulaire pour caractériser les mathématiques récréatives et le public associé :

« il y a deux classes de personnes qui [...] cultivent [les mathématiques] : les unes par état, ou par le désir de s'illustrer en reculant leurs limites ; les autres par pur amusement, ou par un goût naturel qui les porte vers ce genre de nos connoissances. Ce sera, si l'on veut, à cette dernière classe de Mathématiciens & de Physiciens que cet ouvrage sera destiné ; quoique nous ne renoncions pas à intéresser en quelques endroits ceux de la première. » [Montucla 1778, t. I, p. ii]

Le terme d'amusement se retrouve donc aussi bien sous la plume de Lambert au début de son traité que sous celle de Montucla dans sa réédition des récréations d'Ozanam.

Venons-en plus précisément au problème VIII de Lambert qui illustre la portée potentiellement récréative de ses problèmes. Il s'agit de représenter en perspective à l'aide de la règle seule la figure qui sert de base à la démonstration euclidienne du théorème de Pythagore [1774/1987b, p. 270]. Lambert exemplifie ici la commodité de sa méthode fondée sur une échelle d'angle, qui lui permet de représenter dans le plan du tableau l'image en perspective de la figure illustrant le théorème de Pythagore sans avoir à tracer cette dernière sur le plan géométral. Ce problème instruit le lecteur sur l'effectivité de la méthode de Lambert. Il est également susceptible de l'intéresser et de l'amuser dans la mesure où il s'agit de représenter une figure canonique, rencontrée dans les « premiers éléments de mathématiques » : il ne suppose donc que des connaissances minimales en perspective et en géométrie élémentaire. De manière plus générale, ainsi que nous l'avons indiqué, Lambert choisit de réduire au minimum les justifications théoriques des solutions qu'il propose tout en faisant varier considérablement les configurations étudiées. Ces indices suggèrent qu'il cherche à piquer la curiosité de l'amateur éclairé auquel il destine aussi son traité.

Que déduire de tout cela ? Des problèmes similaires à ceux proposés par Lambert sont formulés et résolus dans l'édition augmentée des *Récréations* par Montucla [1778]. Le mode d'exposition choisi par Lambert ainsi que

certains problèmes peuvent avoir une fonction récréative, c'est-à-dire à la fois instructive et divertissante, étant précisé que dans les deux cas, le lecteur visé (des artistes, mais aussi des amateurs qui ne pratiquent qu'occasionnellement la perspective) n'est supposé avoir que des connaissances élémentaires en mathématiques. Il s'agit d'un aspect des quinze problèmes de Lambert qui mérite d'être mis en lumière. Dans cette annexe à la *Freie Perspektive* comme dans les récréations mathématiques, le lecteur doit semblablement passer du plan géométral au plan du tableau. Le savoir-faire requis pour résoudre ces problèmes est donc du même ordre. Néanmoins, la plupart des problèmes posés par Ozanam, Guyot et Montucla renvoient à des phénomènes remarquables, en particulier des illusions d'optique. Lambert s'en tient au contraire à des figures géométriques exécutées à la règle seule, contrainte qu'il juge essentielle pour faire le lien entre plan géométral et plan du tableau, introduire certaines astuces de construction, ou encore appliquer sa méthode par une échelle d'angle.

À une *continuité par filiations* qui implique de lire les quinze problèmes comme une préfiguration de la théorie des transversales¹² et de la doctrine des projections¹³, nous privilégierions ainsi divers éléments de *contexte* qui montrent que les problèmes de Lambert s'inscrivent dans des savoir-faire que l'on retrouve tout au long du XVIII^e siècle : usages d'instruments, étude des rapports entre plan géométral et plan du tableau, comme en attestent des problèmes issus de récréations mathématiques.

Signalons qu'en aval, la partie géométrique des *Récréations* d'Ozanam revues par Montucla constitue l'une des références mentionnées par Lazare Carnot et François-Joseph Servois. Dans la préface à sa *Géométrie de position*, Carnot affirme par exemple que les *Récréations* représentent, à côté des travaux d'Euler et de Vandermonde, l'un des principaux supports à la diffusion de la *géométrie de situation*, le terme désignant sous sa plume « une certaine classe de questions qui, quoique du ressort de la géométrie, ne paraissent guère susceptibles d'être soumises à l'analyse algébrique » [Carnot 1803, p. xxxvj]¹⁴. Il leur oppose sa *géométrie de*

12. La théorie des transversales, initiée par Lazare Carnot au tout début du XIX^e siècle, puis développée en particulier par Servois et Brianchon, consiste en l'étude de lignes droites ou courbes traversant un système de lignes droites ou courbes. Voir en particulier [Chemla 1998, p. 186 et suiv.].

13. Systématisée par Poncelet [1822].

14. « La géométrie de situation n'a jamais été, que je sache, traitée d'une manière spéciale. On en trouve quelques exemples dans les récréations mathématiques d'Ozanam et de Montucla : c'est à elle que se rapporte un problème résolu par Euler dans les *Mémoires de l'académie de Pétersbourg*, et qui consiste à savoir par quel chemin on doit passer, pour traverser des ponts disposés sur une rivière qui serpente ; de manière qu'on ne passe jamais deux fois sur le même pont. C'est également à cette branche de la géométrie, que se rapportent les ingénieuses recherches de feu Vandermonde sur la marche du fil qui forme successivement toutes les mailles d'un tricotage » [*Ibid.*].

position, dont l'objectif est de suppléer « à la doctrine des quantités dites positives ou négatives » [*Ibid.*, p. ii], ce qui implique de « rendre plus féconde l'application de l'algèbre à la géométrie ordinaire » [*Ibid.*, p. xxxvj]. De son côté, Servois propose en 1803 une solution purement géométrique, limitée au cas du triangle, au problème suivant de Montucla¹⁵ : « Ayant joint les milieux des côtés d'un polygone par des droites, pour avoir un second polygone du même nombre de côtés, puis les milieux des côtés de celui-ci pour en avoir un troisième et ainsi de suite, trouver le point où s'arrêtera l'opération ? » [Servois 1803, p. 17]

De manière plus significative, certains des problèmes résolus par Servois sont directement issus du problème III de la partie géométrie des *Récréations*, formulé de la façon suivante : « Sans aucun instrument que quelques piquets & un bâton, exécuter sur le terrain la plupart des opérations géométriques. » [Montucla 1778, t. I, p. 269] Conformément au caractère récréatif de l'ouvrage, Montucla imagine un géomètre « dans les forêts de l'Amérique, où il ne lui est possible de se procurer avec son couteau que quelques jalons, & un bâton pour lui servir de mesure » [*Ibid.*]. Il exclut l'usage du cordeau, qui permet de tracer des arcs de cercle, de sorte que l'on ne puisse donc « employer d'autre ligne que la droite » [*Ibid.*, p. 270]. Cette contrainte imposée, Montucla résout une série de problèmes de construction qui seront tous repris par Servois en 1803¹⁶, et appliqués à l'artillerie [Aebischer & Languereau 2010, p. 49-59].

La réédition des *Récréations* d'Ozanam par Montucla constitue donc un réservoir de problèmes pour certains géomètres français au début du XIX^e siècle : d'une part, la caractérisation de la géométrie de situation et des difficultés qui s'y rapportent constitue alors une question récurrente¹⁷ ; d'autre part, des problèmes de construction excluant le tracé d'arcs de cercle sont formulés et résolus par Montucla. Chasles mentionne d'ailleurs cette édition des *Récréations* pour expliciter certaines des sources de Servois en géométrie de la règle [1837, p. 214]. Ce dernier, comme nous le verrons, développe surtout sa géométrie de la règle en résolvant des problèmes liés à l'arpentage et à l'artillerie, sans jamais se référer à la perspective, ce qui nous conduira à relativiser fortement la thèse selon laquelle la géométrie de la règle constituerait, au tournant du XIX^e siècle, une transition entre la perspective linéaire et la géométrie projective. Les

15. Montucla avait lui-même résolu ce problème par des considérations mécaniques : voir [Aebischer & Languereau 2010, p. 100 et suiv.].

16. On s'en convaincra en comparant ce passage des *Récréations* de Montucla [1778, t. I, p. 270-273] aux constructions énumérées par Servois à la fin de son ouvrage.

17. Nous pensons notamment à Carnot et à sa distinction entre géométrie de position et géométrie de situation. On peut aussi mentionner Louis Poinsoy qui essaie de dessiner les contours d'une géométrie de situation dès ses premiers travaux sur les polygones et les polyèdres : voir [Boucard 2011, p. 216 et suiv.].

développements de Servois, Brianchon ou Poncelet en géométrie de la règle s'effectuent dans un cadre qui n'est pas celui de la perspective ; ils ne sont en outre que très indirectement reliés aux problèmes de Lambert, ce que nous établirons en nous intéressant à la question de la circulation de ces quinze problèmes.

III. Circulation des quinze problèmes de Lambert, géométrie de la règle et géométrie synthétique

La thèse historique continuiste qui présente la géométrie de la règle comme un trait d'union entre la perspective linéaire et la géométrie projective figure, nous l'avons vu, dans divers ouvrages publiés au cours du dernier tiers du XIX^e siècle et tout au long du XX^e siècle. Elle apparaît par exemple dans la préface des *Éléments de géométrie projective* de Cremona [1875], chez Loria [1908, p. 612] et, de manière éclatante, dans le premier chapitre de l'ouvrage *Les coniques* de Lebesgue [1942], où ce dernier fait remonter la théorie géométrique des coniques (qu'il oppose à l'approche analytique) à Desargues :

« Celui-ci, examinant la perspective des artistes, les tracés des charpentiers, des coupeurs de pierre, des tailleurs d'engrenages, en tire l'idée d'utiliser la perspective, aussi bien pour étudier les figures que pour les engendrer, et la notion des éléments à l'infini. Son élève, de La Hire, suit les mêmes voies. Lambert s'occupe du dessin à la règle et de la perspective. Puis, voici les ingénieurs militaires français : Monge, Carnot, Brianchon, Servois, Poncelet. Le titre d'un ouvrage : *Géométrie de la règle et des jalons*, par Servois, explique la réunion de ces noms. » [Lebesgue 1942, p. 4]

Plus près de nous, cette lecture historique est largement reprise par R. Laurent [1987].

Notre but ne sera pas seulement ici de la contredire – elle a déjà été critiquée par K. Andersen –, mais d'en comprendre les caractéristiques, la provenance et la genèse. Les interprétations allant dans le sens de cette lecture admettent quatre points en commun : (a) elles traitent les quinze problèmes comme un texte autonome – nous avons pourtant établi que Lambert emploie les mêmes justifications pour abandonner les géomètres et pour réduire au minimum l'usage du compas – ; (b) elles les voient comme une illustration de « la » géométrie de la règle, dont Lambert serait un fondateur ; (c) elles empruntent cette lecture continuiste à Poncelet [1822] et à Chasles [1837] ; (d) elles font du traité de Poncelet un texte fondateur au regard duquel Lambert apparaît comme un précurseur.

Plusieurs indices dans le texte de Lambert permettent de relever les biais interprétatifs induits par cette lecture historique. Dans son annexe, Lambert se contente en effet de sonder l'usage de la règle « en perspective »

puis « en géométrie » via des « problèmes » et « des constructions » [1774/1987b, p. 262]. Il n'évoque qu'incidemment une « géométrie linéaire » dont il précise les contours à mesure qu'il résout ses problèmes. Il maintient en outre la distinction entre la perspective et la géométrie, cherchant tout au plus à « mettre en lumière [leurs] liens de parenté » [*Ibid.*]. Lambert n'envise donc pas de réduire la perspective linéaire à une géométrie de la règle, mais d'esquisser une « géométrie linéaire » en s'appuyant sur la perspective et en faisant varier les données des problèmes. Il n'exhibe pas non plus les contours théoriques de cette géométrie pratique, étroitement liée à l'exécution de dessins en perspective. Le dispositif de la perspective est d'ailleurs convoqué par Lambert pour résoudre tous ses problèmes, ainsi que le confirme un renvoi à la première partie, consacrée à la géométrie pratique, de ses *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik* [1765]. La géométrie pratique porte, selon lui, sur des figures observées qu'il s'agit de reconstituer à partir de la donnée de certaines de leurs parties, les autres étant jugées inaccessibles en raison de la situation de l'observateur. Ce faisant, Lambert souligne, dans son annexe de 1774, l'utilité de la « géométrie linéaire » dans « les mesures à vue d'œil » [1774/1987b, p. 262]. Difficile donc, dans ces conditions, de lire ses quinze problèmes comme une préfiguration de la théorie des transversales développée par Carnot, Servois, Brianchon, puis exploitée par Poncelet, à moins de succomber à une illusion rétrospective.

Plus précisément, bien que certains problèmes *similaires* à ceux énoncés et résolus par Lambert se retrouvent chez des géomètres français au début du XIX^e siècle, il nous semble que la lecture continuiste proposée par Cremona, Loria, Lebesgue ou Laurent masque deux éléments de rupture. D'une part, la géométrie de la règle chez Servois et Brianchon n'est pas liée à la pratique de la perspective, mais à celle de l'artillerie ; il est donc biaisé d'interpréter la géométrie de la règle comme une transition entre la perspective et la géométrie projective, puisque la géométrie de la règle admet également des applications dans un tout autre contexte. D'autre part, la géométrie de la règle reçoit au début du XIX^e siècle une cohérence théorique grâce à la théorie des transversales.

Commençons par faire état de la diffusion de problèmes similaires à ceux de Lambert en approfondissant certaines données suggérées par K. Andersen [2007, p. 702]. Le problème V circule via Poinot et Hachette dans la *Correspondance sur l'École impériale polytechnique*¹⁸ à partir de 1807. On y trouve notamment un extrait d'une lettre de Poinot datée du 6 janvier 1807, dans lequel ce dernier s'intéresse au problème suivant : « Etant données deux droites qu'on ne peut pas prolonger, et un point

18. Abrégée en *Correspondance* dans ce qui suit.

dedans ou hors l'angle qu'elles comprennent, mener par ce point une troisième droite vers leur point de concours, en ne faisant usage que de la règle. » [1807, p. 246] Hachette mentionne les noms des élèves qui ont su le résoudre dans le numéro suivant, de mai 1807 :

« M. Poinsoy a proposé cette question dans le numéro précédent de la *Correspondance*. J'en ai reçu plusieurs solutions, parmi lesquelles on remarque celles de M. Roche, élève de l'École Polytechnique, *première division*, de MM. Duleau et Delon, aspirans à la même École, élèves de M. Dinet. » [Hachette 1807, p. 305-306]

Il présente ensuite sa solution fondée sur le dispositif de la perspective sans référer à Lambert¹⁹, sans que nous disposions d'aucun indice prouvant qu'il ait pu lui emprunter.

Ancien élève de l'École polytechnique (1803-1806), officier d'artillerie à Metz, Brianchon formule un problème identique au problème III de Lambert dans une lettre du 3 janvier 1807, reproduite dans le même numéro (mai 1807) de la *Correspondance*. Il commence par aborder des problèmes impliquant des coniques et des polygones inscrits ou circonscrits aux coniques dans le prolongement de son mémoire [1806] contenant le dual du théorème de Pascal²⁰. Ce faisant, Brianchon définit les contours d'une géométrie qui nous « apprend à tirer tout le parti possible de la seule ligne droite qui peut servir à résoudre beaucoup plus de problèmes qu'on ne le pense communément » [1807, p. 310]. Alors que chez Lambert la formulation et la résolution de problèmes impliquant initialement le dispositif de la perspective constituait une voie d'accès à une « géométrie linéaire », Brianchon établit à l'inverse que la géométrie de la ligne droite conditionne la résolution de problèmes, comme si elle avait acquis une autonomie théorique. Il poursuit :

« Parmi les questions utiles ou curieuses dont les solutions peuvent s'obtenir en n'employant que la seule ligne droite, considérée simplement comme direction et non comme mesure, je me bornerai à indiquer la suivante, parce qu'elle peut se résoudre très-brièvement, et qu'elle présente quelque chose de piquant. "Une ligne droite étant disposée d'une manière quelconque dans le plan d'un parallélogramme, on propose de lui mener une parallèle par un point donné du même plan". » [Brianchon 1807, p. 310]

19. Et sans préciser quelle était la solution de Poinsoy, dont nous n'avons pas retrouvé la trace.

20. Le théorème de Pascal affirme que les trois points de concours des côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique sont alignés. Le théorème de Brianchon affirme pour sa part que les trois diagonales reliant les côtés opposés d'un hexagone circonscrit à une conique se rencontrent en un même point.

Ce problème illustre le projet d'une géométrie de la règle que Brianchon développe à partir de la théorie des transversales.

Les problèmes III et V suscitent l'intérêt de Poncelet dès ses années d'études à l'École polytechnique, comme en attestent ses souvenirs issus des sept cahiers qu'il rédige entre mars 1813 et juin 1814 au cours de son séjour en prison à Saratoff, en Russie [Poncelet 1862]²¹. Dans le septième cahier, on trouve trois solutions au problème III [*Ibid.*, p. 437-439], dont ses souvenirs indiquent qu'il l'avait résolu dès 1809. Il en avait d'ailleurs déjà publié une première solution dans la *Correspondance* [Poncelet 1811]. Pour être complète, cette solution nécessite de s'appuyer sur le problème V (Figure 7)²².

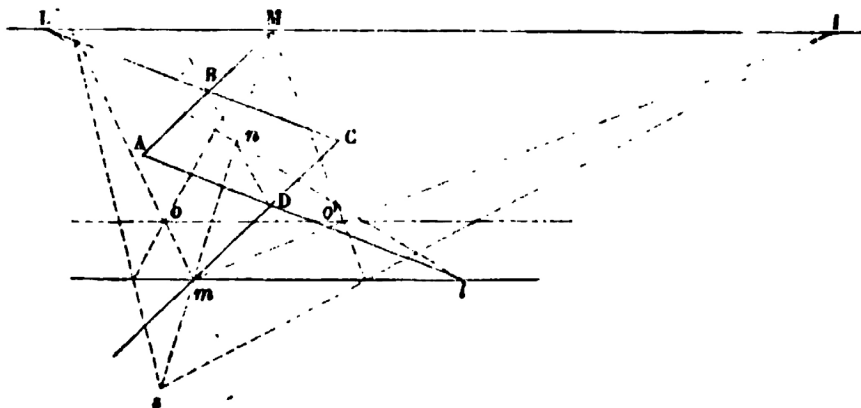


Figure 7: [Poncelet 1862, p. 437, Fig. 172].

Le nom de Lambert n'apparaît cependant ni dans l'article de Poncelet pour la *Correspondance*, ni dans le septième cahier. Par contraste, Poncelet citera Lambert avec insistance dans son *Traité des propriétés projectives des figures*²³ [1822]. Plus intéressant encore, les solutions proposées par Poncelet dans tous ces textes ne renvoient pas à la perspective alors qu'elle intervient pourtant de manière essentielle dans l'annexe que Lambert consacre à ses quinze problèmes. Nous pouvons en tirer deux

21. Pour une analyse de ces cahiers, voir [Belhoste 1998].

22. La droite LM , le parallélogramme $ABCD$ et le point o sont donnés. Voici la solution de Poncelet : on prolonge les côtés AB et BC du parallélogramme. Ils coupent respectivement la droite donnée en M et en L . On se donne ensuite un point n sur la diagonale BD . On trace Mn qui coupe CD en m et Ln qui coupe AD en l . La droite lm est parallèle à LM . On se ramène alors à une configuration équivalente à celle du problème V de Lambert : il suffit en effet de construire une parallèle à LM et lm passant par o .

23. Abrégé en *Traité* dans ce qui suit.

enseignements. Il semble d'une part nécessaire de relativiser l'idée selon laquelle la géométrie de la règle ferait naturellement le lien entre la perspective et la géométrie projective : Poncelet traite un problème similaire au problème III de Lambert sans jamais se référer au dispositif de la perspective. Ces informations documentent, d'autre part, l'hypothèse de K. Andersen selon laquelle :

« One may then wonder how and when Poncelet became acquainted with Lambert's work. I tend to believe this happened between 1814 and 1822, that is, after Poncelet returned from Russia – where he developed projective geometry – and before he published his *Traité*. » [2007, p. 702]

Poncelet découvre *a posteriori* la seconde édition de l'ouvrage de Lambert auquel il réfère de manière précise et détaillée dans son *Traité* [1822]. Cet argument peut d'ailleurs être étendu à Servois. Ce dernier mentionne après coup les travaux de Lambert sur « la géométrie de la règle » dans la notice qu'il lui consacre dans la *Biographie universelle* de Michaud [Servois 1819, p. 42], à peu près au moment où Poncelet commence lui-même à les exploiter. Dans cet article, Servois définit la géométrie de la règle comme une nouvelle branche de la géométrie qui constitue l'un des « titres de reconnaissance » de Lambert [*Ibid.*]. Les quinze problèmes de Lambert n'ont donc pas constitué une source d'inspiration pour Servois et Poncelet – dont les travaux en géométrie de la règle précèdent leur découverte de ces problèmes. Dans les deux cas, en revanche, la référence à Lambert vient justifier après coup la portée de la géométrie de la règle.

Poncelet revient sur les problèmes III et V en les traitant d'abord en dehors de la perspective (conformément aux solutions qu'il avait trouvées alors qu'il était élève à l'École polytechnique) avant de reproduire les solutions originales de Lambert [1822, p. 106-108]²⁴. Il s'inspire en outre de Servois [1803], dont il relie étroitement, et à juste titre, comme nous allons le voir, la géométrie de la règle à la théorie des transversales de Carnot :

« [L'ouvrage de Servois] a le mérite d'offrir les premières applications de la théorie des transversales à la géométrie de la règle ou des jalons, et d'avoir ainsi mis au jour la fécondité et l'utilité de cette théorie » [*Ibid.*, p. xliv].

Dans cet ouvrage, Servois, qui a enseigné les mathématiques dans diverses écoles d'artillerie à partir de 1801²⁵, développe une géométrie de la règle via la résolution de problèmes pratiques relevant de l'artillerie. Poncelet insère donc les problèmes de Lambert dans une filiation qui irait de Lambert à Brianchon, en passant par Carnot et Servois. Ce faisant, il rassemble cepen-

24. Cremona [1875, p. 80-81] compare les solutions (sans perspective) de Poncelet à celles de Lambert.

25. [Aebischer & Languereau, p. 29].

dant des travaux qui appartiennent à des lignées historiques différentes. En effet, Carnot, Servois et Brianchon ne se réfèrent pas à Lambert, ni même à la perspective linéaire au début du XIX^e siècle ; ils partagent en revanche un même cadre théorique, à savoir la théorie des transversales, et un même intérêt pour l'artillerie.

Comme le note K. Chemla [1990, p. 527, 538], Carnot introduit la notion de transversale dans une lettre à Charles Bossut de 1800 et il en développe certains aspects dès 1803 avant de la traiter pour elle-même [1806]. Il fait par ailleurs allusion à l'artillerie dans son ouvrage *De la corrélation des figures géométriques* [1801, p. 135-136], lorsqu'il évoque l'usage de jalons. Comme nous l'avons vu, Servois emprunte une partie de ses problèmes aux *Récréations* de Montucla, mais ce n'est pas sa seule source : il se réfère également au traité pour les arpenteurs de Lorenzo Mascheroni [1793/1803] et s'appuie, pour les résoudre, sur *La géométrie de position* de Carnot [1803]. Dans son mémoire « Sur les surfaces courbes du deuxième degré » [1806], Brianchon s'inspire également des méthodes de ce dernier. Artilleur, puis professeur de mathématiques à l'École d'artillerie de Vincennes, il fait paraître ses cours d'application de la théorie des transversales à l'artillerie en 1818 en référant à Carnot et Servois²⁶. Les travaux de Servois et Brianchon se situent donc dans une lignée historique qui ne renvoie pas directement aux quinze problèmes de Lambert.

Il ne faudrait cependant pas extrapoler en supposant que les sources initiales de Servois et Brianchon, en particulier Mascheroni et Carnot, sont radicalement étrangères au traité de Lambert. Même s'ils se rapportent à des situations différentes et qu'ils n'impliquent pas les mêmes techniques de résolution, il existe en effet un dénominateur commun aux problèmes de Lambert (perspective), de Mascheroni (arpentage), de Servois et de Brianchon (artillerie) : il s'agit dans les trois cas de problèmes de géométrie pratique qui tous supposent *des données inaccessibles*. D'un côté, il est clair que Servois et Brianchon développent leur géométrie de la règle dans un cadre qui n'est pas celui de la perspective : nous n'avons donc pas affaire à une unique lignée historique qui conduirait de la perspective à la géométrie projective en passant par la géométrie de la règle. De l'autre, on ne saurait, à l'extrême inverse, conclure qu'il n'existe aucun lien entre les travaux de Servois et de Brianchon d'une part, et les quinze problèmes de Lambert d'autre part.

26. L'ouvrage s'ouvre ainsi : « La Théorie des Transversales est due à M. Carnot, qui l'a développée dans la *Géométrie de Position*. M. Servois a publié ensuite les *Solutions peu connues de différens Problèmes de Géométrie-Pratique*, ouvrage plein de vues ingénieuses sur les élémens et les applications de la géométrie des transversales [...]. Notre but, dans ce Recueil, est de répandre des méthodes, utiles aux Artilleurs, pour effectuer sur le terrain diverses opérations géométriques » [Brianchon 1818].

De façon plus générale, l'expression « géométrie de la règle » se retrouve au début du XIX^e siècle dans divers supports textuels attestant de la diversité de ses usages – apprentissage scolaire, applications pratiques, développements théoriques de la géométrie projective. Elle apparaît déjà dans l'ouvrage de Servois mentionné plus haut [1803]. Certains articles issus de la *Correspondance sur l'École polytechnique* portent, nous l'avons vu, sur la résolution de problèmes de géométrie à la règle seule. Une rubrique « géométrie de la règle » apparaît enfin dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Gergonne, même si l'on y dénombre cependant moins d'une dizaine d'articles classés dans cette rubrique, les principaux contributeurs étant Servois, Gergonne et Poncelet. La plupart de ces articles consistent en la résolution de questions de géométrie relevant des transversales et des projections qui confèrent donc une cohérence théorique à ces pratiques autour de la géométrie de la règle²⁷. Aucun lien ne semble établi entre la géométrie de la règle et la perspective linéaire, même si Gergonne y publie un article sur la perspective [1823]. Dans son *Traité des propriétés projectives des figures*, Poncelet synthétise et unifie diverses modalités et applications de la géométrie de la règle au début du XIX^e siècle en les faisant converger vers sa doctrine des projections.

Plutôt que de considérer la géométrie de la règle comme le point de contact entre le traité de perspective de Lambert et le *Traité* de Poncelet, nous préférons donc soutenir que ce dernier s'intéresse aux usages de la règle seule en géométrie à travers le prisme de la théorie des transversales de Carnot, Servois et Brianchon, lesquels s'inspirent eux-mêmes de sources en géométrie pratique relevant de l'artillerie et de l'arpentage, et non de la perspective. Poncelet recherche *a posteriori* des « signes » de cette théorie dans les problèmes proposés par Lambert. Il reconstitue, ce faisant, une continuité avec certains de ses prédécesseurs, notamment Lambert, mais aussi, plus loin de lui, Desargues, Pascal, ou La Hire.

Cette « continuité » n'est pourtant là que pour servir un discours de rupture que Poncelet élabore pour contrer les méthodes analytiques en géométrie. Il suggère que les travaux de Lambert participent d'un mouvement global conduisant au renouvellement des méthodes synthétiques en géométrie, et aborde la géométrie de la règle dans son traité pour montrer que la « nouvelle » géométrie synthétique porte sur des configurations géné-

27. Voir en particulier [Gergonne 1814; Ferriot 1827]. Ferriot publie plus tard un ouvrage de synthèse sur la doctrine des projections dans lequel il plaide vigoureusement pour un « retour » de la géométrie en vue de concurrencer l'algèbre : « Je ne pousserai pas plus loin ces observations sur la nature de l'algèbre parce que ce n'est pas ici le lieu ; seulement je ferai remarquer qu'un retour des esprits vers la géométrie me paraît prochain, si déjà il n'a lieu » [1838, p. 9].

rales²⁸. Cette « nouvelle » géométrie synthétique dépasse l'ancienne, circonscrite à des figures particulières, tout en concurrençant les méthodes analytiques qui cessent d'être l'unique voie d'accès à des théorèmes généraux.

Quelques rappels s'imposent sur la controverse qui oppose notamment Gergonne à Poncelet avant même la publication du traité de ce dernier²⁹. Dans différents articles [1817a,b,c], Gergonne souligne les mérites de la géométrie analytique pour résoudre des problèmes à la règle seule, avant de proposer des réflexions générales sur l'analyse et la synthèse en mathématiques :

« la geometrie analitique, convenablement employee, peut conduire, pour la solution des problèmes de geometrie, à des constructions bien supérieures, pour l'élégance et la simplicité, à celles que fournit la geometrie pure » [Gergonne 1817b, p. 325].

Dans un article de 1818, Poncelet conteste cet argument :

« je ne saurais admettre avec vous, Monsieur, que cette géométrie [pure] ne puisse donner, à la fois, des solutions aussi simples et aussi élégantes que celles qu'on déduit du calcul. J'avoue même que j'incline fortement à penser que, traitée à son tour d'une manière convenable, et moins restreinte qu'on ne l'a fait jusqu'ici, elle peut fournir, par la voie de l'intuition qui lui est propre, et pour certaines classes de problèmes, des solutions qui l'emportent de beaucoup sur celles qu'on déduit de la géométrie analitique, même dans l'état de perfection auquel elle est aujourd'hui parvenue » [Poncelet 1818, p. 143].

Il développe ensuite ce point dans son *Traité* en montrant que les problèmes de Lambert illustrent la simplicité et la généralité de la doctrine des projections [1822, p. xxxiv]. Il fait de la *Freie Perspektive* l'un des jalons dans le renouvellement des méthodes synthétiques en géométrie, incarné par la théorie des transversales³⁰ :

« Enfin on doit encore distinguer le célèbre Lambert qui, dans un *Traité de perspective*, publié en 1774, employa le premier, depuis Desargues et Pascal, les considérations générales de cette Théorie [des projections] pour établir plusieurs propositions élégantes dans le genre de celles de la Géométrie de la règle, et qui sentit ainsi, jusqu'à un certain point, les ressources qu'on pouvait tirer de ce genre de considérations. » [*Ibid.*, p. xliij]

28. Sur la distinction entre figure et configuration chez Carnot, Brianchon et Poncelet, K. Chemla écrit : « Avec la configuration tout particulièrement, s'amorce la question de ce que peut être une figure générale, par opposition à la multitude des dessins particuliers. Ceci nous amène à la distinction que l'on retrouvera, dans les écrits de Poncelet par exemple, entre "figure décrite" et "disposition générale des objets d'une figure" » [1998, p. 173].

29. Pour une analyse précise de cette controverse, voir [Gérini 1992, p. 237-246].

30. Poncelet évoque ainsi les « considérations générales fournies par la perspective et la théorie des transversales » [1822, p. xliij].

Poncelet est ici à la recherche de figures tutélaires sur le long terme pour justifier son plaidoyer en faveur de la synthèse en géométrie. Tout en s'éloignant des motivations initiales de Lambert, Chasles reprendra ces mêmes arguments dans son *Aperçu historique* [1837] :

« Le célèbre Lambert, autre Leibnitz par l'universalité et la profondeur de ses connaissances, doit être placé au nombre des mathématiciens qui, dans un temps où les prodiges de l'analyse occupaient tous les esprits, ont conservé la connaissance et le goût de la Géométrie et ont su en faire les plus savantes applications. [...] La perspective de Lambert parut en 1759, puis en 1773 [1774], accrue d'une seconde partie, où l'auteur, faisant usage des principes de cet art, comme méthode géométrique, démontra plusieurs propositions concernant les propriétés descriptives des figures, qui rentrent aujourd'hui dans la théorie des transversales, et donna les élémens de cette partie de la Géométrie qu'on a appelée dans ces derniers temps *Géométrie de la règle*. » [*Ibid.*, p. 185-186]

Des problèmes pratiques de construction deviennent ainsi des propositions démontrées. En évoquant, dans cette citation, les « propriétés descriptives des figures », Chasles fait de Lambert un précurseur de la géométrie descriptive. À l'instar de Poncelet, il interprète les quinze problèmes avec la théorie des transversales, et voit en Carnot, Brianchon et Poncelet les continuateurs de Desargues, Pascal, La Hire et de Lambert, les contributions de ces derniers ayant été sous-estimées en raison d'une promotion exclusive des méthodes analytiques. Chasles reconstruit ainsi la trame d'une continuité entre Desargues et Poncelet, via Lambert qu'il valorise pour légitimer la géométrie synthétique « moderne ». La conclusion de l'ouvrage de Chasles constitue le point d'orgue de ce discours :

« on peut dire aujourd'hui, avec raison, de cette science [la géométrie synthétique], ce qui a paru, dans un temps, faire le caractère exclusif de la Géométrie analytique : "L'esprit de la géométrie moderne est d'élever toujours les vérités soit anciennes, soit nouvelles, à la plus grande généralité qu'il se puisse" [Fontenelle, *Histoire de l'Académie des sciences*, ann. 1704 ; *sur les spirales à l'infini*] » [*Ibid.*, p. 269].

Conclusion

Le traité de perspective de Lambert marque dès 1759 une rupture dans la pratique de la perspective, avec le rejet des géomètres, qui semblaient pourtant constituer une étape essentielle dans l'apprentissage des règles de la perspective au sein des Académies d'art. Plusieurs intermédiaires – dont Sulzer et Mönnich – rendront cette rupture effective dans les Académies d'art de Berlin et de Dresde, où l'approche de Lambert est enseignée au tournant du XIX^e siècle. Lambert justifie sa méthode par une échelle d'angle

pour des raisons de commodité et parce qu'il assigne un statut précis à la perspective qui n'a à rendre compte que de l'apparence des objets. De même, il insiste sur la simplicité pratique de la règle par rapport au compas, dont il veut minimiser l'usage avec ses quinze problèmes. Ces derniers font tous intervenir le dispositif de la perspective. Ils exigent ainsi de passer habilement du plan géométral au plan du tableau (et vice versa), à l'instar de certains problèmes que l'on trouve de longue date dans les *Récréations mathématiques*. Au vu de cette caractérisation des problèmes de Lambert, il paraît difficile de les interpréter comme une anticipation de la théorie des transversales et de la doctrine des projections, ou comme un trait d'union entre la perspective et la géométrie projective.

Cette lecture historique continuiste, linéaire et rétrospective mérite elle-même d'être historicisée : Poncelet et Chasles en sont les initiateurs alors qu'ils cherchent à promouvoir une géométrie synthétique générale. D'où leur valorisation des contributions de Desargues, Pascal, La Hire et Lambert, afin de minorer la place de l'analyse dans l'histoire de la géométrie. Cette lecture historique doit également être relativisée dans la mesure où la théorie des transversales et les problèmes à la règle seule qui s'y rattachent entretiennent des liens très ténus avec la perspective linéaire. Si Servois se réfère en 1803 à des problèmes issus de la partie géométrie des *Récréations* de Montucla [1778], il laisse en revanche de côté la partie perspective et optique. Servois et Brianchon développent en outre leur géométrie de la règle dans le cadre de leur enseignement dans les écoles d'artillerie. Poncelet et Chasles insèrent ainsi dans une même filiation des textes qui, de fait, appartiennent à des contextes différents.

Finalement, on peut opposer plusieurs arguments à celui de Poncelet et Chasles visant à coordonner leur rupture avec l'analyse à une hypothétique continuité entre la perspective et la géométrie projective. On observe en réalité une pluralité de ruptures disjointes et désynchronisées : une rupture avec l'usage de géométraux initiée par Lambert et qui demeure localisée dans le temps et dans l'espace, comme l'ont établi S. Siebel et K. Andersen ; une rupture avec les méthodes analytiques qui se cristallise dans la controverse Gergonne-Poncelet en 1816-1817. L'incidence de Lambert sur Poncelet demeure très restreinte en comparaison du groupement de textes, mêlant théorie des transversales, géométrie de la règle et applications à l'artillerie, que nous avons dégagé via les publications de Carnot, Servois et Brianchon. Il ne faut cependant pas perdre de vue que ces géomètres s'appuient sur des sources antérieures en géométrie pratique : tel est par exemple le cas de Servois, qui s'inspire des travaux de Mascheroni consacrés à des problèmes d'arpentage. Quoique nous ayons fait apparaître des lignées historiques distinctes au fur et à mesure de notre examen des quinze problèmes de Lambert, puis des travaux de Servois, Brianchon et Poncelet en géométrie de la règle, nous avons aussi souligné un lien de parenté entre

les problèmes de Lambert (perspective), Mascheroni (arpentage) et Carnot, Servois, Brianchon (artillerie) : tous relèvent de la géométrie pratique et impliquent des données inaccessibles.

BIBLIOGRAPHIE

- [Aebischer & Languereau 2010] Anne-Marie Aebischer et Hombeline Languereau, *Servois ou la géométrie à l'école de l'artillerie*, Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté, 2010.
- [Andersen 2007] Kirsti Andersen, *The Geometry of an Art. The History of the Mathematical Theory of Perspective, from Alberti to Monge*, New York : Springer, 2007.
- [Belhoste 1998] Bruno Belhoste, « De l'École polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet », *Bulletin de la SABIX*, 19 (1998), p. 9-29.
- [Bosse 1648] Abraham Bosse, *Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le geometral*, Paris, 1648.
- [Boucard 2011] Jenny Boucard, *Un rapprochement curieux de l'algèbre et de la théorie des nombres : études sur l'utilisation des congruences en France de 1801 à 1850*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2011.
- [Brianchon 1806] Charles-Julien Brianchon, « Sur les surfaces courbes du deuxième degré », *Journal de l'École polytechnique*, 6 (1806), p. 297-311.
- [Brianchon 1807] C.-J. Brianchon, « Lettre de M. Brianchon, officier d'artillerie, ancien élève de l'École Impériale Polytechnique », dans [Correspondance 1808, n° 8 (mai 1807)], p. 307-310].
- [Brianchon 1818] C.-J. Brianchon, *Application de la théorie des transversales*, Paris : Bachelier, 1818.
- [Carnot 1801] Lazare Carnot, *De la corrélation des figures géométriques*, Paris : Duprat, 1801.
- [Carnot 1803] L. Carnot, *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.
- [Carnot 1806] L. Carnot, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace suivi d'un essai sur la théorie des transversales*, Paris : Courcier, 1806.
- [Chasles 1837] Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles : Hayez, 1837.
- [Chemla 1990] Karine Chemla, « Remarques sur les recherches géométriques de Lazare Carnot », dans J.-P. Charnay (éd.), *Lazare Carnot ou le savant citoyen*, Paris : Presses de l'Université de Paris-Sorbonne, 1990, p. 525-542.
- [Chemla 1998] K. Chemla, « Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème de Menelaus », *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 (1998), p. 163-190.
- [Correspondance] Jean-Nicolas-Pierre Hachette (éd.), *Correspondance sur l'École impériale polytechnique*, Paris, t. I (années 1804-1808), 1808 ; t. II (années 1809-1813), 1813.
- [Cremona 1875] Luigi Cremona, *Éléments de géométrie projective*, Paris : Gauthier-Villars, 1875.
- [Ferriot 1827] Louis-Antoine-Stanislas Ferriot, « Géométrie de la règle. Note sur la théorie des transversales », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 17 (1826-1827), p. 141-147.

- [Ferriot 1838] L.-A.-S. Ferriot, *Application de la méthode des projections à la recherche de certaines propriétés géométriques*, Paris : Bachelier, 1838.
- [Formey 1780] Johann Heinrich Samuel Formey, « Éloge de M. Lambert », *Nouveaux mémoires de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1778 (1780), p. 72-90.
- [Gergonne 1814] Joseph-Diez Gergonne, « Application de la doctrine des projections à la démonstration des propriétés des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 4 (1813-1814), p. 78-84.
- [Gergonne 1817a] J.-D. Gergonne, « Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 7 (1816-1817), p. 289-303.
- [Gergonne 1817b] J.-D. Gergonne, « Solution et construction, par la géométrie analytique, de deux problèmes dépendant de la géométrie de la règle », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 7 (1816-1817), p. 325-334.
- [Gergonne 1817c] J.-D. Gergonne, « De l'analyse et de la synthèse, dans les sciences mathématiques », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 7 (1816-1817), p. 345-372.
- [Gergonne 1823] J.-D. Gergonne, « Petit traité de perspective linéaire », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 13 (1822-1823), p. 181-192.
- [Gérini 1992] Christian Gérini, *Les annales de Gergonne : apport scientifique et épistémologique dans l'histoire des mathématiques*, Lille : Atelier national de reproduction des thèses, 1992.
- [Guyot 1769-1770] Edmé-Gilles Guyot, *Nouvelles récréations physiques et mathématiques*, Paris : Gueffier, t. I-II, 1769 et t. III-IV, 1770.
- [Hachette 1807] Jean-Nicolas-Pierre Hachette, « Problème de géométrie. Résolu graphiquement, en ne faisant usage que de la règle », dans [Correspondance 1808, n° 8 (mai 1807), p. 305-307].
- [Heinich 1983] Nathalie Heinich, « La perspective académique », *Actes de la recherche en sciences sociales*, 49 (1983), p. 47-70.
- [Jeaurat 1750] Edmé-Sébastien Jeaurat, *Traité de perspective à l'usage des artistes*, Paris, 1750.
- [La Caille 1756] Nicolas-Louis de La Caille, *Leçons élémentaires d'optique*, Paris, 1756.
- [Lacombe 1792] Jacques Lacombe, *Dictionnaire encyclopédique des amusements des sciences mathématiques et physiques*, Paris : Panckoucke, 1792.
- [Lambert 1752/1943] Johann Heinrich Lambert, *Anlage zur Perspektive*, 1752 ; dans M. Steck (éd.), *Schriften zur Perspektive*, Berlin, 1943, p. 161-186. Trad. fr., *Essai sur la perspective*, Paris : Monom, 1982.
- [Lambert 1759a] J. H. Lambert, *Die freie Perspektive oder Anweisung jeden perspektivischen Aufriß von freien Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen*, Zürich, 1759.
- [Lambert 1759b] J. H. Lambert, *La perspective affranchie de l'embaras du plan géométral*, Zürich, 1759.
- [Lambert 1765] J. H. Lambert, *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Berlin, 1765.
- [Lambert 1770] J. H. Lambert, « Mémoire sur la partie photométrique de tout l'art de peindre », *Nouveaux mémoires de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1768 (1770), p. 80-108.
- [Lambert 1774] J. H. Lambert, *Die freie Perspektive...*, 2^e éd., Zürich, t. I-II, 1774.

- [Lambert 1774/1987a] J. H. Lambert, « Anmerkungen und Zusätze zum dritten § », dans [Lambert 1774, t. II, p. 6-31]. Trad. fr., « Une histoire de la perspective », par J. Peiffer dans [Laurent 1987, p. 195-209].
- [Lambert 1774/1987b] J. H. Lambert, « Zum Beschlusse », dans [Lambert 1774, t. II, p. 161-181]. Trad. fr., « Les quinze problèmes de géométrie à la règle », par J. Peiffer dans [Laurent 1987, p. 262-274].
- [Lambert 1799] J. H. Lambert, « Grundsätze der Perspektive, aus Betrachtung einer perspektivisch gezeichneten Landschaft abgeleitet », *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, III (1799), p. 1-21.
- [Laurent 1987] Roger Laurent (éd.), *La place de J.-H. Lambert (1728-1777) dans l'histoire de la perspective*, Paris : Cedic, 1987. (Contient la traduction française des Notes et Additions de [Lambert 1774].)
- [Lebesgue 1942] Henri Lebesgue, *Les coniques*, Paris : Gauthier-Villars, 1942.
- [Loria 1908] Gino Loria, « Perspektive und darstellende Geometrie », dans M. Cantor (éd.), *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, vol. 4, Leipzig, 1908, p. 577-637.
- [Mascheroni 1793/1803] Lorenzo Mascheroni, *Problemi per gli agrimensori con varie soluzioni*, Pavia, 1793. Trad. fr., *Problèmes pour les arpenteurs*, Paris : Courcier, 1803.
- [Migon 1643] Estienne Migon, *La perspective spéculative et pratique*, Paris, 1643.
- [Mönnich 1794] Bernard Friedrich Mönnich, *Versuch, die mathematische Perspektive für den Künstler ohne Theorie anwendbar zu machen*, Berlin, 1794.
- [Montucla 1778] Jean-Étienne Montucla (éd.), *Récréations mathématiques et physiques, [...] Par feu M. Ozanam [...] Nouvelle édition, totalement refondue & considérablement augmentée*, t. I-IV, Paris : Jombert, 1778.
- [Ozanam 1693] Jacques Ozanam, *Perspective théorique et pratique*, Paris, 1693.
- [Ozanam 1694] Jacques Ozanam, *Récréations mathématiques et physiques*, t. I-II, Paris : Jombert, 1694.
- [Poinso 1807] Louis Poinso, « Extrait d'une lettre de M. Poinso, ancien élève, Professeur au Lycée Bonaparte, du 6 janvier 1807 », dans [Correspondance 1808, n° 7 (janvier 1807), p. 245-246].
- [Poncelet 1811] Jean-Victor Poncelet, « Problèmes de Géométrie » [solutions de deux problèmes communiquées par Poncelet à Hachette], dans [Correspondance 1813, n° 3 (janvier 1811), p. 271 et 273-274].
- [Poncelet 1818] J.-V. Poncelet, « Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie ; suivies de la solution de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 8 (1817-1818), p. 141-155.
- [Poncelet 1822] J.-V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Bachelier, 1822.
- [Poncelet 1862] J.-V. Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie*, Paris : Gauthier-Villars, t. I, 1862.
- [Servois 1803] François-Joseph Servois, *Solutions peu connues de différens problèmes de géométrie-pratique*, Paris : Bachelier, 1803.
- [Servois 1819] F.-J. Servois, « Johann-Heinrich Lambert », dans *Biographie universelle ancienne et moderne*, t. XXIII, Paris : Michaud, 1819, p. 265-274.
- [Siebel 1999] Sabine Siebel, *Die Ausbildung in der Perspektive an den deutschen Kunstakademien um 1800*, thèse de doctorat, Université de Hambourg, 1999.
- [Sulzer 1774] Johann Georg Sulzer, *Allgemeine Theorie der schönen Künste*, t. III, Leipzig, 1774.

- [Taylor 1715] Brook Taylor, *Linear Perspective : or New Method of Representing justly all Manner of Objects*, London, 1715.
- [Taylor 1719] B. Taylor, *New Principles of Linear Perspective : or the Art of Designing on a Plane the Representations of all sorts of Objects in a more General and Simple Method than has been done before*, London, 1719.
- [Taylor 1757] B. Taylor, *Nouveaux principes de la perspective linéaire*, traduction de deux ouvrages, l'un anglais de Docteur Brook Taylor, l'autre latin de M. Patrice Murdoch (trad. fr. attribuée à Antoine Rivoire), Paris, 1757.

L'étude des propriétés projectives des figures par Poncelet : une modernité explicitement ancrée dans la tradition

Philippe NABONNAND

Le *Traité des propriétés projectives des figures* de Jean-Victor Poncelet paraît en 1822¹. De nombreux commentateurs ont, à juste titre, souligné l'importance et le caractère novateur du point de vue présenté dans cet ouvrage pour le champ de la géométrie, en particulier l'utilisation systématique de la notion de projection pour aborder les questions géométriques². Pour autant, la conception générale de la géométrie, la plupart des formes de démonstration – même les plus novatrices – et les discours de justification mobilisés par Poncelet s'inscrivent dans la continuité des travaux de ses prédécesseurs. Le titre même de son ouvrage traduit la tension qui caractérise ses travaux géométriques entre, d'une part, une revendication affichée d'innovation et, d'autre part, un ancrage dans la tradition de la géométrie pure. En effet, en identifiant la géométrie à l'étude des figures, Poncelet adopte sans restriction une approche classique mais dans le même temps, en annonçant qu'il se focalise sur les propriétés projectives des figures, il revendique le point de vue le plus moderne, celui inauguré entre autres par Gaspard Monge et Charles-Julien Brianchon. L'objectif de cet article est de montrer comment Poncelet, tout en justifiant l'introduction de nouvelles méthodes en géométrie pure, reprend en même temps les conceptions les plus traditionnelles de cette discipline.

Dans la première partie, le programme de recherche en géométrie de Poncelet est mis en perspective à partir des questions de tradition et de nouveauté. Dans la deuxième partie, l'exposé liminaire de la théorie des coniques dans la première section du *Traité des propriétés projectives des figures* sera analysé de manière à en faire apparaître les intentions pédagogiques et rhétoriques. En effet, si une présentation des éléments de la

1. Une seconde édition du *Traité des propriétés projectives des figures* paraît en deux tomes [Poncelet 1865-1866]. Le premier tome est une réédition légèrement modifiée de l'ouvrage de 1822 ; le second réunit des articles publiés dans le *Journal de Crelle*. Dans la suite, cet ouvrage sera souvent désigné simplement comme le *Traité*.

2. Sur le contenu des travaux géométriques de Poncelet, voir, notamment, [Belhoste 1998 ; Gray 2007 ; Friedelmeyer 2010 ; Nabonnand 2010, 2011, à paraître].

théorie des coniques est indispensable pour établir les principes de projection, ce qui sera l'objet de la troisième partie, les premiers chapitres du *Traité* ont aussi pour objectif d'illustrer à partir de résultats bien connus l'efficacité du point de vue projectif, d'en montrer la pertinence et d'accoutumer le lecteur aux nouvelles méthodes prônées par Poncelet. Ainsi, cet exposé des premières notions de la théorie des coniques est aussi l'occasion d'une utilisation d'abord implicite puis commentée du principe de continuité. La quatrième partie suivra l'argumentation en faveur de l'adoption du principe de continuité développée par Poncelet dans un texte de philosophie mathématique « dont la rédaction définitive date de l'hiver de 1818 à 1819 » [Poncelet 1818, p. 296]. Un des principaux arguments avancés par l'auteur consiste à montrer qu'on utilise déjà depuis longtemps un tel principe dans d'autres disciplines, en particulier en algèbre et en géométrie analytique. Poncelet prend donc soin d'inscrire le principe de continuité dans une tradition mathématique qui dépasse le champ de la géométrie et touche aux conditions de possibilité, pour la pratique mathématique, d'atteindre un certain niveau de généralité.

I. Le programme de recherche de Poncelet en géométrie

L'ambition affirmée de Poncelet est de renouveler les approches synthétiques de la géométrie en rompant avec la pratique traditionnelle d'une géométrie pure qui a tendance, à ses yeux, à n'étudier que des problèmes attachés à une seule figure. Tout en vantant la généralité des techniques mises en œuvre dans le cadre de la géométrie analytique, comprise comme application de l'algèbre à la géométrie, Poncelet déplore le manque de méthode de la « géométrie des Anciens », entendue comme la géométrie de tradition euclidienne. Selon lui, la généralité de point de vue de la géométrie analytique ne réside pas tant dans les moyens algébriques qu'elle utilise que dans sa capacité à s'abstraire de la considération des grandeurs absolues et à raisonner avec des « grandeurs indéterminées ». L'utilisation des formules algébriques en géométrie analytique permet d'envisager en un seul geste tout un ensemble de figures et l'analyse des problèmes par le biais de l'algèbre permet de raisonner sur cet ensemble en ne considérant pourtant qu'une figure particulière. Le propos de Poncelet est de doter la géométrie pure d'une méthode analogue.

Son idée consiste donc à mettre en place des stratégies qui, partant d'une démonstration établie dans un cas particulier et conforme aux canons de rigueur de la géométrie pure traditionnelle, permettraient d'étendre le résultat à une classe entière de figures. La première est d'admettre un principe dit de continuité ou de « permanence des relations mathématiques de la grandeur figurée » [Poncelet 1818, p. 319] qui permet d'assurer, pour

un ensemble de figures corrélatives³, la validité d'une propriété montrée dans un cas particulier par-delà les changements de configuration, les passages à l'infini ou la perte de réalité de certains éléments. Une propriété démontrée pour l'une des figures corrélatives (dite *figure primitive*) pourra être considérée, grâce au principe de continuité, comme valide pour l'ensemble des figures corrélatives. La seconde stratégie consiste à formuler le corpus déjà établi de la géométrie, ainsi que les nouvelles questions, en termes de propriétés projectives, c'est-à-dire de propriétés qui se conservent par projection centrale. Dans le *Traité*, une fois les premiers éléments de la géométrie exposés en ces termes, Poncelet établit une série de principes de projection permettant de passer d'une configuration à une autre qui lui est projective.

Comme la plupart des mathématiciens, Poncelet pose des questions motivées par des travaux antérieurs, mais n'hésite pas, contrairement à nombre de ses contemporains, à citer les résultats sur lesquels il s'appuie, les auteurs qu'il a lus, par rapport auxquels il se positionne, ainsi que les travaux dont il s'inspire. Les approches par la géométrie pure de l'étude des coniques s'ancrent dans une tradition des mathématiques grecques pratiquée et enseignée au long des siècles. Poncelet cite à plusieurs reprises des ouvrages comme les *Coniques* d'Apollonius ou la *Collection mathématique* de Pappus tant pour montrer qu'il retrouve les principaux résultats de la tradition grecque, que pour célébrer la rigueur de ces traités. Pour autant, il tient aussi à se démarquer du manque de méthode et de généralité de « cette Géométrie ancienne, de cette Géométrie cultivée par Euclide, Archimède, Apollonius, et plus récemment par les Viète, les Fermat, les Grégoire de St.-Vincent, les Halley, les Viviani, les R. Simson, etc. [...] qui, mettant en œuvre une multitude de relations et de lignes auxiliaires, a une marche à la fois embarrassée et incertaine » [Poncelet 1822, p. xxviii]. Parallèlement, le « système de Descartes » est souvent invoqué pour affirmer la généralité de cette nouvelle approche des questions géométriques :

« Descartes n'avait certainement pas entrevu la fécondité et la portée de sa méthode, qui, dans les derniers temps, entre les mains d'Euler, de Clairaut, mais surtout de Lagrange et de Monge, est devenue un instrument général de démonstration et de découvertes, une langue géométrique pour ainsi dire universelle ; avantage qu'elle doit non-seulement à la simplicité de son algo-

3. Poncelet reprend la notion et le terme de corrélation à Lazare Carnot [1801, 1803]. Deux figures sont corrélatives si l'une est obtenue à partir de l'autre en modifiant par un « mouvement progressif et continu » [Poncelet 1818, p. 300] les positions relatives des éléments qui la composent. La corrélation est *directe* si elle ne modifie pas qualitativement la figure (mêmes éléments – éventuellement rejetés à l'infini – disposés de la même manière), *indirecte* si les positions relatives des éléments constituant la figure sont modifiés (mêmes éléments pouvant être disposés dans un ordre différent), et *idéale* lorsque des éléments réels deviennent imaginaires ou réciproquement.

rithme et de ses notations, mais surtout à son système métrique de représentation des éléments droits ou courbes des figures, par la projection, véritable transformation linéaire ou rectiligne de ces derniers éléments, qui n'altère pas le degré, les affections et les propriétés essentielles des lignes, et ne sort point, en apparence, des voies de l'Algèbre pure, justement ici nommée *Analyse indéterminée*⁴. » [Poncelet 1815b, p. 252]

Tout en posant la « fécondité et la portée » de la géométrie analytique comme horizon de la géométrie pure, Poncelet introduit le cadre à partir duquel il va justifier son point de vue projectif : une des clés de la richesse de l'approche par l'algèbre réside dans le fait que les projections implicitement utilisées pour définir les coordonnées, et pour en changer, n'affectent pas la forme des équations.

Pour le mathématicien, les temps sont venus de reprendre le chantier de la géométrie pure. Les récents travaux de Monge⁵, Charles Dupin ou Brianchon⁶ « ont prouvé que la Géométrie descriptive [...] peut se suffire à elle-même, et atteindre à toute la hauteur des conceptions de l'Analyse algébrique » [Poncelet 1822, p. xvii-xviii]. En même temps qu'il revendique la présentation d'une théorie d'ensemble intégrant les derniers développements en géométrie pure (théorie des transversales de Lazare Carnot, géométrie pure à trois dimensions de Monge et Dupin, théorie des polaires et des projections de Brianchon), Poncelet s'attache à montrer que les méthodes qu'il propose ont déjà été utilisées ou au moins esquissées par des prédécesseurs plus anciens. L'utilisation de la doctrine des projections est ainsi présentée comme une pratique sinon commune, au moins courante ; de ce point de vue, l'accumulation de références est loin d'être innocente :

« Un grand nombre de géomètres distingués, à la tête desquels il faut placer l'illustre Monge, ont senti toute l'importance des ressources que pouvait offrir la doctrine des projections pour la recherche et la démonstration des propriétés générales des figures. Pascal, De Lahire, Lambert, et plus récemment encore M. Carnot, dans son *Essai sur la Théorie des transversales*, MM. Gergonne, Servois, Ferriot, Durrande, etc., dans les *Annales de Mathé-*

4. Dans toutes les citations, les caractères en italique figurent dans l'original, sauf indication contraire explicite.

5. La référence à Monge a un double objectif. Poncelet doit non seulement montrer que son projet mathématique s'inscrit dans une série de travaux inspirés entre autres par la *Géométrie descriptive* [Monge 1799], mais aussi expliquer pourquoi celui qu'il présente comme son mentor a formé des générations d'étudiants à la géométrie analytique dans ses cours à l'École de Mézières et à l'École polytechnique. La raison en est, selon lui, qu'« à cette époque, la science était tout entière à créer, et les principes, jusqu'alors suivis et reçus dans la *Stérotomie*, étaient beaucoup trop restreints pour servir de base à la nouvelle Géométrie » [Poncelet 1822, p. xvii].

6. [Brianchon 1806, 1810, 1817 ; Dupin 1813].

matiques, MM. Hachette, Roche, Chasles, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, ont successivement fait usage, avec plus ou moins de restriction, de considérations semblables pour étendre le résultat des premières conceptions géométriques. » [*Ibid.*, p. xxxiv]

Quelques lignes plus loin, en évoquant les travaux de Brianchon, Poncelet cite aussi le *Journal de l'École polytechnique*. S'il juge nécessaire de multiplier les noms de mathématiciens pour montrer que la « doctrine des projections » est loin d'être une innovation, il ne trouve pas inutile de faire voir que celle-ci traverse l'offre éditoriale de journaux français publiant des mathématiques en 1822. Il y a là un effet de la rupture dans la représentation des formes de la circulation mathématique provoquée par la diversification de l'offre éditoriale mathématique au début du XIX^e siècle⁷.

De même que la théorie des polaires, le point de vue projectif adopté par Poncelet est présenté comme repris de Brianchon⁸ ; l'introduction en géométrie du principe de continuité est attribuée à Monge⁹. Dans la même veine, Poncelet établit une analogie entre l'utilisation de l'analyse infinitésimale (en particulier par Monge) et le recours au principe de continuité : on doit pouvoir étendre les considérations géométriques aux éléments de l'infini et de l'imaginaire comme on le fait déjà dans le domaine infinitésimal¹⁰. Poncelet présente donc les principales innovations méthodologiques de la fin du XVIII^e siècle et du début du XIX^e siècle comme relevant d'une même épistémologie de la généralisation obtenue par continuité.

Sa revendication à l'innovation concerne essentiellement le caractère systématique et général de son approche. Poncelet montre que sa démarche consiste à reprendre nombre de problèmes, de résultats et de théories anciens et plus contemporains en les organisant autour d'énoncés généraux. Les méthodes et les outils qu'il propose assurent à la nouvelle théorie le même caractère de généralité que la géométrie analytique sans perdre les bénéfices de la rigueur attribuée traditionnellement à la « géométrie des Anciens ». En ce sens, ses références à des travaux antérieurs (du XVIII^e siècle et d'avant) servent à la fois à cerner le corpus à partir duquel il va développer sa théorie, et à spécifier et justifier son point de vue à partir de diverses traditions actives au début du XIX^e siècle.

7. Sur l'offre éditoriale de journaux français au début du XIX^e siècle, voir [Verdier 2009].

8. [Poncelet 1822, p. xxxiv, xlv-xlv].

9. [Poncelet 1818, p. 309-310].

10. [Poncelet 1822, p. xxv].

II. L'introduction de la théorie des coniques dans le *Traité des propriétés projectives des figures* (1822)

Poncelet consacre une grande partie de la première section de son *Traité* à exposer les principes généraux de son approche de la géométrie en se concentrant sur la théorie des coniques¹¹. Il y explique en préambule qu'il exposera d'abord rapidement, pour aider son lecteur, « les notions préliminaires concernant la projection ou perspective des figures en général »¹² pour les appliquer à « certaines lignes particulières »¹³, à savoir les lignes droites et les coniques. L'intention du mathématicien est pédagogique en ce sens que ce mode de présentation lui permet de relier des propriétés bien connues avec « les considérations nouvelles »¹⁴ qu'il souhaite promouvoir. En procédant ainsi, Poncelet espère non seulement rendre son exposé plus accessible, mais aussi montrer les « avantages »¹⁵ et la simplicité de son point de vue.

La notion de projection centrale sur laquelle se fonde celle de propriété projective est immédiatement illustrée par un renvoi à la définition classique des coniques comme section d'un cône à base circulaire, ou encore, en reprenant le vocabulaire des projections, comme la « *projection* d'un cercle ». Poncelet ne change donc pas de définition, il modifie simplement le vocabulaire et embauche les coniques au service de sa présentation. Celles-ci sont immédiatement utilisées dans le premier exemple de propriété projective, celle de la conservation du degré des courbes par les projections centrales : puisque « la circonférence du cercle ne peut être coupée en plus de deux points par une droite arbitraire tracée dans son plan »¹⁶, les coniques en tant que projections d'un cercle sont elles-mêmes de degré 2.

La théorie des coniques est de nouveau convoquée afin d'illustrer la richesse de la classe des propriétés que Poncelet se propose d'étudier. En effet, s'il est aisé de reconnaître les propriétés « graphiques » ou « de disposition »¹⁷ comme des propriétés conservées par projection, il est par contre plus difficile de reconnaître celles qui sont projectives parmi les

11. Une première version de la première partie du *Traité* était intitulée « Essai sur les propriétés projectives des sections coniques » [Poncelet 1820].

12. [Poncelet 1822, p. 1].

13. [*Ibid.*].

14. [*Ibid.*, p. 2].

15. Le terme « avantages » est utilisé maintes fois par Poncelet tant pour expliquer ceux de la géométrie analytique ou de la géométrie descriptive que pour argumenter en faveur de sa méthode des projections.

16. [*Ibid.*, p. 4].

17. [*Ibid.*, p. 5].

propriétés métriques des figures. Or, caractériser les propriétés projectives est crucial pour l'approche de Poncelet et l'incapacité dans laquelle il est de déterminer si une propriété géométrique est ou n'est pas projective entache sérieusement ses développements :

« Si donc une figure d'espèce particulière jouissait de certaines propriétés métriques, on ne pourrait affirmer *à priori*, et sans examen préalable, ni que ces propriétés subsistent, ni qu'elles cessent de subsister dans les diverses projections de la figure primitive. Or on sent toutefois l'importance qu'il y aurait à pouvoir reconnaître, à l'avance, si telle ou telle relation examinée est ou n'est pas projective de sa nature ; car il en résulterait qu'ayant démontré cette relation pour une figure particulière, on pourrait de suite l'étendre à toutes les projections possibles de cette figure. » [Poncelet 1822, p. 5]

À défaut de réussir à déterminer l'ensemble des propriétés projectives¹⁸, Poncelet tente d'en caractériser une sous-classe importante dont il montre qu'elle apparaît naturellement et qu'elle est présente dans les travaux antérieurs. Sa définition utilise un critère opératoire [*Ibid.*, sect. 1, chap. 1, art. 11] dont il ne donne pas d'interprétation géométrique¹⁹. Le savant insiste en revanche sur le fait que cette définition permet de rendre compte des propriétés liées à la dualité ou à des généralisations en géométrie sphérique²⁰ et de retrouver des théories classiques comme celle des points et des faisceaux harmoniques, ou la théorie des transversales de Carnot. Des premiers mathématiciens grecs aux derniers développements de Carnot et Brianchon, affirme-t-il, les géomètres se sont occupés de propriétés relevant de son critère. Pour finir de convaincre le lecteur de

18. Poncelet tient à préciser que ni la « méthode trigonométrique » ni « l'Analyse des coordonnées » ne donnent non plus des résultats satisfaisants [*Ibid.*, p. 6].

19. Si l'on considère deux droites AA' et BB' se coupant en S , un résultat classique de géométrie élémentaire permet d'affirmer que

$$\frac{\text{Surf.}(SAB)}{SA \cdot SB} = \frac{\text{Surf.}(SA'B')}{SA' \cdot SB'} = m.$$

Une propriété projective au sens de Poncelet est une propriété qui peut se réduire à une relation entre les facteurs m . Par exemple, si l'on considère quatre points A, B, C, D alignés et que l'on note m, m', m'', m''' les facteurs correspondant respectivement aux triangles SAC, SAD, SBC et SBD , le birapport des quatre points A, B, C, D peut s'écrire sous la forme

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{m}{m'} : \frac{m''}{m'''}$$

Cette formule exprime l'égalité entre le birapport des quatre points A, B, C, D et celui des quatre droites SA, SB, SC, SD .

20. Carnot insiste de la même manière pour montrer que les relations de sa théorie des transversales peuvent se généraliser en géométrie sphérique [Carnot 1806, p. 94].

la pertinence de son approche, il se propose d'exposer la théorie classique des coniques à partir de ses principes :

« Avant de terminer ce sujet, nous donnerons dès-à-présent, une idée de la facilité avec laquelle les principes qui précèdent peuvent conduire aux diverses propriétés connues des sections coniques, d'autant plus que presque toutes ces propriétés nous seront indispensables pour ce que nous aurons à dire dans les chapitres suivans. » [Poncelet 1822, p. 17]

En quelques pages virtuoses, Poncelet établit toutes les propriétés des diamètres, des centres, des axes, des directions conjuguées, sans oublier les relations caractéristiques des coniques établies par Apollonius (et appelées par ce dernier « symptômes » de ces courbes²¹).

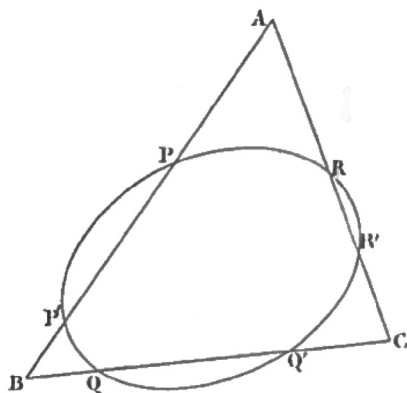


Figure 1 : [Poncelet 1822, planche I, fig. 3].

Partant de la propriété élémentaire de la puissance d'un point par rapport à un cercle, Poncelet établit par projection²² que les points P et P' , Q et Q' , R et R' en lesquels les côtés AB , BC , CA d'un triangle ABC (Figure 1) coupent respectivement une conique vérifient la relation²³

$$(1) \quad AP \cdot AP' \cdot BQ \cdot BQ' \cdot CR \cdot CR' = BP \cdot BP' \cdot CQ \cdot CQ' \cdot AR \cdot AR'.$$

21. Voir [Zeuthen 1919] et [Apollonius *Coniques*].

22. [Poncelet 1822, p. 18]. Il explique que cette propriété vérifie les critères de sa définition des propriétés projectives.

23. Dans ce qui suit, une notation telle que AB (en italique) désignera la longueur du segment AB . La notation AB (en romain) désignera soit le segment délimité par les points A et B , soit la droite définie par ces deux points, soit la direction de cette droite. Sauf exception, lorsque le contexte le permettra, l'élément désigné par AB sera toujours indiqué.

En utilisant le principe de continuité, de façon implicite, et la propriété établie antérieurement selon laquelle « deux distances ou grandeurs infinies [qui] ne diffèrent entre elles que d'une quantité finie et donnée » ont un rapport égal à 1 et peuvent donc « être regardées comme rigoureusement égales entre elles »²⁴, Poncelet envisage le cas particulier où deux côtés sont parallèles (Figure 2). Considérant le cas où le sommet A est à l'infini, il retrouve une « propriété très-anciennement connue des sections coniques » [*Ibid.*, p. 18]

$$(2) \quad \frac{BP.BP'}{BQ.BQ'} = \frac{CR.CR'}{CQ.CQ'}.$$

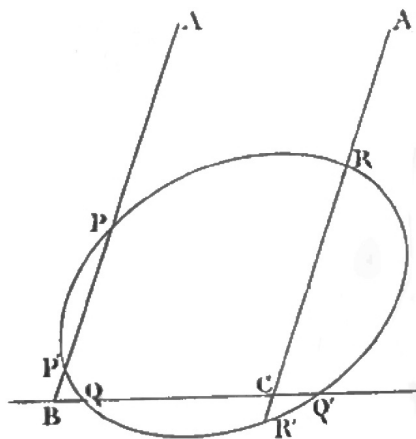


Figure 2: [Poncelet 1822, planche I, fig. 4].

Poncelet glisse ainsi d'une propriété relevant de la théorie des transversales à une propriété de la théorie des coniques ; le vocabulaire évolue en même temps, puisque l'on passe de considérations sur les côtés d'un triangle à l'examen de propriétés des sécantes parallèles d'une conique.

Toujours grâce au recours à des considérations implicites de continuité, Poncelet traite le cas où le triangle est circonscrit à la conique (c'est-à-dire où les points P et P' , Q et Q' , R et R' sont respectivement confondus) et retombe sur une formule obtenue par Carnot

$$(3) \quad AP.BQ.CR = BP.CQ.AR.$$

24. [*Ibid.*, p. 15].

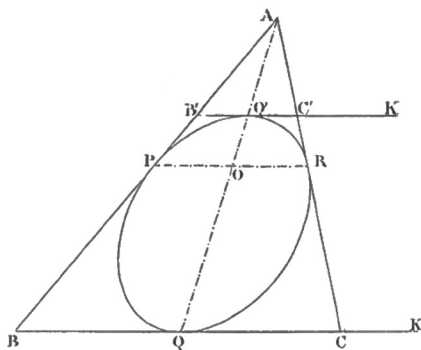


Figure 3: [Poncelet 1822, planche I, fig. 5].

De l'étude du cas où le côté BC est parallèle à la corde PR (Figure 3), il déduit un résultat fondamental pour les théories des coniques et de la polarité : « les cordes parallèles des sections coniques ont leurs milieux, et les points de concours des tangentes qui correspondent à leurs extrémités respectives, distribués sur une même droite appelée diamètre²⁵ » [*Ibid.*, p. 19].

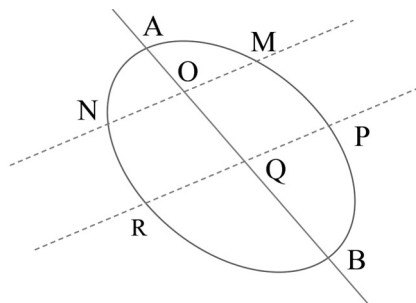


Figure 4

Soient deux cordes parallèles MN et PR d'une conique (Figure 4), leur diamètre conjugué AB passera par leurs milieux respectifs O et Q et la formule (2) devient

$$\frac{OM^2}{OA \cdot OB} = \frac{PQ^2}{QA \cdot QB},$$

permettant ainsi à Poncelet d'introduire le coefficient²⁶ p qui intervient dans l'« équation » des coniques :

25. La direction de ce diamètre est dite conjuguée à celle des cordes parallèles. Deux diamètres ayant des directions conjuguées sont dits conjugués.

26. Dans la suite de l'article, bien que dépendant de la direction choisie, p sera désigné comme le coefficient de la conique.

« $OM^2 = p.OA.OB$, p étant une quantité constante qui ne varie qu'avec la direction du diamètre AB , et représente évidemment, dans le cas de l'*ellipse* et de l'*hyperbole*, le rapport inverse du carré de ce diamètre à celui qui lui est conjugué²⁷ » [*Ibid.*, p. 20].

Grâce aux propriétés projectives des figures (en particulier celles inhérentes à la définition des sections coniques) et à l'utilisation implicite du principe de continuité pour étudier des cas limites simples, Poncelet familiarise progressivement le lecteur à ses méthodes et ses outils dans le cadre d'un corpus de propositions classiques et bien connues. Il établit, dans le même temps, les propositions fondamentales nécessaires à la poursuite de son exposé.

Poncelet explique notamment que la projection d'une section conique quelconque et d'un triangle sur un plan arbitraire vérifie la formule (1) – puisque cette propriété est projective. La projection d'une conique peut ainsi être décrite par une équation du même type que celle qui décrivait la conique originelle : il s'agit donc également d'une conique²⁸. Poncelet considère alors deux coniques qui sont sections d'un cône dont la base est elle-même une conique²⁹. Ces deux coniques ont soit une sécante réelle commune, soit une sécante commune idéale³⁰, à savoir la droite d'intersection des deux plans ; si AB et $A'B'$ sont des diamètres homologues dans la projection induite par le cône, on obtient l'égalité

$$(4) \quad p.OA.OB = p'.OA'.OB',$$

puisque les deux coniques ont une corde (réelle ou idéale) commune.

27. Poncelet utilise de nouveau un argument de continuité pour justifier une formule analogue dans le cas de la parabole (en considérant que le centre de la courbe « passe à l'infini »).

28. Démontrer en géométrie pure qu'une section plane d'un cône dont la base est une conique est une conique forme l'un des problèmes cruciaux de la théorie des coniques.

29. [*Ibid.*, p. 37 et suiv.].

30. Poncelet introduit la notion de sécante idéale pour pouvoir décrire en une seule expression la situation où une droite coupe réellement une conique et celle où la droite ne la coupe pas. Dans ce dernier cas, les points d'intersection et la corde définie par ces points deviennent imaginaires. Cette corde imaginaire a un point réel, son milieu O qui correspond, en vertu du principe de continuité, au point d'intersection de la sécante idéale et du diamètre conjugué à la direction de la sécante idéale. Une sécante idéale mn à une conique peut être vue comme la polaire d'un point intérieur O' à la conique. Il passe par ce point une corde dont les extrémités sont les points de contact des tangentes à la conique issue de O . Le support de cette corde est la polaire du point O et est parallèle à la sécante idéale. Les deux points M et N de la sécante idéale vérifiant la relation $OM^2 = ON^2 = p.OA.OB$ définissent la corde idéale MN portée par la sécante idéale mn (Figure 5).

Poncelet utilise ici des notions mathématiques récentes (les éléments géométriques infiniment petits) dont l'introduction, qui caractérise la nouvelle géométrie infinitésimale développée en particulier par Monge à la fin du siècle précédent (application de l'analyse à la géométrie), n'a pas fait l'objet de controverse particulière. En présentant les méthodes ayant recours aux éléments infinitésimaux comme une application du principe de continuité, et en les utilisant sans précaution particulière dans son exposé des principes élémentaires de la théorie des coniques, le mathématicien accoutume le lecteur familiarisé aux méthodes de la géométrie pure à l'utilisation de nouveaux outils décalés par rapport à cette tradition³⁴.

III. L'établissement de principes de projection

Poncelet se trouve alors en mesure d'établir un nouveau type d'énoncés, à savoir une série de principes de projection qui affirment qu'une configuration est réductible à une autre par projection. La démonstration du premier principe, selon lequel *« une figure plane quelconque, où entre une certaine droite et une section conique, peut, en général, être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la droite est passée entièrement à l'infini, et la section conique est devenue une circonférence de cercle »*³⁵, est l'occasion de mettre en œuvre les premiers éléments de la théorie des coniques qu'il vient d'exposer et d'approfondir la discussion autour du principe de continuité. Énoncée sous cette forme générale, cette propriété ne se prête guère à une démonstration ; aussi, Poncelet la reformule sous la forme d'un problème assorti d'une figure :

« Étant données une section conique (C), fig. 9³⁶, et une droite MN située, à volonté, sur son plan, trouver un centre et un plan de projection tels, que la droite donnée MN soit projetée à l'infini sur ce plan, et que la section conique y soit en même temps représentée par un cercle. » [Poncelet 1822, p. 54]

Les conditions du problème imposent que le plan défini par S, le centre de projection recherché, et la droite MN soit parallèle au plan de projection – puisqu'il est demandé que la droite MN soit projetée à l'infini. Pour la même raison, la droite MN ne doit pas intersecter la conique, autrement dit, en utilisant les dénominations de Poncelet, être une *« sécante idéale »* de cette

34. Brianchon utilise à plusieurs reprises (sans l'expliciter) une propriété de continuité en géométrie pour justifier l'extension à un cas limite de théorèmes montrés dans le cas général : voir, par exemple, [Brianchon 1806, prop. VII ; 1817, prop. XV].

35. [Poncelet 1822, p. 54].

36. Il s'agit de la figure 5 dans notre texte, déjà utilisée par Poncelet pour étendre infinitésimalement un résultat classique de théorie des coniques.

courbe ». Par définition des cordes idéales et des coniques supplémentaires, si on appelle AB le diamètre conjugué à la direction MN et MN la corde idéale de (C) portée par la droite MN , le point d'intersection O de la droite AB et de la droite MN est aussi le milieu de la corde idéale MN . Notant p le coefficient de la conique (C) , on a

$$OM^2 = p.OA.OB.$$

Lorsque l'on coupe un cône par deux plans passant par la droite MN , la corde (idéale ou réelle) MN est commune aux deux coniques ainsi définies et l'on obtient

$$OM^2 = p.OA.OB = p'.OA'.OB',$$

c'est-à-dire la formule (4), où p' est le coefficient de la seconde conique et $A'B'$ le diamètre conjugué à la direction MN . À la limite, si un des plans sécants passe par S , on a, par continuité, comme on l'a vu plus haut,

$$OM^2 = p.OA.OB = p'.OS^2.$$

Le plan SMN étant parallèle à un plan qui intersecte le cône le long d'un cercle (le plan de projection), il vient $OM = OS$ et MOS est un angle droit puisque les directions OS et MN sont conjuguées par rapport au cercle infinitésimal situé en S . La démonstration donnée peut sembler rapide ; pour autant, Poncelet avait déjà distillé l'ensemble des arguments nécessaires tout au long de sa présentation des éléments de la théorie des coniques. Le résultat est d'abord énoncé sous la forme d'un théorème ne concernant que la configuration dans laquelle la droite MN ne rencontre pas la conique :

« Le centre auxiliaire de projection doit se trouver sur une circonférence de cercle, décrite du milieu de la corde idéale qui répond à la droite donnée, comme centre, avec un rayon égal à la moitié de cette corde, et dans un plan qui lui soit perpendiculaire. » [Poncelet 1822, p. 55]

Il y a loin de l'énoncé de ce théorème à celui du principe général de projection annoncé dans la mesure où la corde doit être idéale et où le principe n'est pas démontré rigoureusement dans les cas où la droite coupe (réellement) la conique. Après avoir suggéré un certain nombre de pistes permettant de traiter les cas où le principe cesse d'être vrai « d'une manière absolue et géométrique »³⁷, Poncelet affirme sans ambages que les projections qu'il envisage sont « possibles et réelles » dans certains cas, et deviennent « impossibles ou imaginaires » dans d'autres situations. « Ainsi », écrit-il, « les propriétés examinées ne seront démontrées, d'une manière rigou-

37. [*Ibid.*, p. 67].

reuse et absolue, que pour les premières de ces positions, et elles cesseront de l'être pour les autres. » [*Ibid.*, p. 67]. Néanmoins, quoique certains éléments géométriques sont devenus imaginaires, les figures restent liées entre elles puisque l'« on peut regarder, à volonté, les unes comme provenant des autres par le mouvement progressif et continu de certaines parties de cette figure, sans violer la liaison et les lois primitivement établies entre elles » [*Ibid.*]. Moyennant quelques modifications formelles dans les figures, les propriétés de l'une s'appliquent donc à l'autre dans des cas « qu'il est toujours facile de reconnaître à l'avance, à la simple inspection de la figure » [*Ibid.*]. Ici réside l'essence du principe de continuité dont Poncelet rappelle qu'il a déjà été mis en application dans le cours de cette première section de son *Traité*, « dans des circonstances où son application devenait conforme aux idées reçues » [*Ibid.*]. Poncelet ne revendique que l'acceptation explicite du principe de continuité en géométrie pure. L'essentiel de son argumentation consiste, comme on va le voir, à expliquer que ce principe est déjà implicitement utilisé par nombre de mathématiciens du XVIII^e siècle en algèbre, en géométrie analytique et *a fortiori* en géométrie infinitésimale. Son application constitue d'après lui l'une des clés du succès des nouvelles mathématiques pratiquées au siècle dernier.

IV. La justification du principe de continuité

Poncelet évoque dès 1815 le principe de continuité dans un commentaire à la suite de l'exposé d'une démonstration de Maclaurin. Il est alors présenté comme un principe intuitif, facilitant les démonstrations de la théorie générale des transversales [Poncelet 1815a, p. 148]. La même année, Poncelet consacre un essai à la loi des signes de position [1815b] dans lequel il discute les arguments avancés sur cette question par Carnot dans sa *Géométrie de position* [Carnot 1803]. L'« hypothèse de la continuité » y est admise « sans la discuter, ni l'approfondir à l'avance », de la même manière que les règles du calcul algébrique, « fondées sur le rapprochement, l'analogie logique des idées ou des résultats antérieurement acquis »³⁸. Un paragraphe consacré à des « réflexions générales sur le principe de continuité »³⁹ justifie la généralisation à tous les spectres de figures corrélatives d'une « permanence ou *continuité* des relations métriques » constatée sur des situations simples. L'usage du terme de continuité provient de la définition de la notion de corrélation, reprise de Carnot, comme déplacement continu des éléments d'une figure dite « primitive ». Le principe de continuité, tel que Poncelet l'entend dans ce texte, apparaît

38. [Poncelet 1815b, p. 168].

39. [*Ibid.*, p. 203].

comme une généralisation aux éléments d'une figure de la loi de continuité notamment invoquée par Lacroix [1803, p. 19], Monge [1807, p. 6-7, 11] ou Dupin [1813, p. 171, 179], auteurs chez lesquels cette loi ne concerne que la continuité des quantités décrites par des formules algébriques associées à une courbe envisagée comme le mouvement continu d'un point.

Dans ce même mémoire de 1815, Poncelet cherche, à partir de la loi des signes de position, et moyennant quelques changements de signe, à étendre la signification de la loi de continuité à l'admission d'une stabilité de la forme algébrique des formules décrivant les propriétés d'un spectre de figures corrélatives⁴⁰ :

« Quand une fois on a trouvé toutes les solutions algébriques d'un problème de Géométrie pour la position actuelle des données, on étend sans peine ces solutions à toutes les situations possibles des mêmes données, en ayant égard à la continuité et à la règle des signes » [Poncelet 1815b, p. 233-234].

L'argumentation de Poncelet consiste dès lors à montrer qu'une application imprudente de l'algèbre à des questions de géométrie peut introduire des solutions « étrangères à la question » proposée, et que la mise en équation d'un problème de géométrie « suppose, de la part du géomètre, une grande habitude du calcul et du raisonnement géométrique » [*Ibid.*, p. 292]. S'il se montre critique vis-à-vis de la géométrie « des anciens », dont il doute qu'« avec le secours seul de cette géométrie, on puisse jamais parvenir à quelque chose de bien général » [1817, p. 142], Poncelet refuse néanmoins d'admettre que le point de vue analytique en géométrie soit toujours supérieur à celui de la géométrie rationnelle⁴¹. Il défend l'idée d'une modernité en géométrie pure incarnée par la géométrie infinitésimale ou la stéréométrie, et plaide, à l'instar de Dupin⁴², pour une cohabitation raisonnée des deux approches :

« En considérant ainsi l'analyse et la géométrie dans leurs rapports, ces deux sciences s'éclaireront mutuellement, et chacune d'elles s'accroîtra de tous les progrès de l'autre. [...] Ne rejetons donc aucun de ces moyens pour procéder à la recherche de la vérité ; jugeons-les utiles l'un et l'autre, et cherchons dans chaque cas le plus avantageux » [Dupin 1813, p. 238].

Dès 1818, le projet, poursuivi dans le *Traité*, de généraliser le langage et les conceptions de la géométrie⁴³ est certainement mieux cerné et prend de l'ampleur. Au cours de l'hiver 1818-1819, Poncelet termine la rédaction d'un

40. [Poncelet 1815b, p. 277-278].

41. Poncelet désigne sous l'expression « géométrie rationnelle » la géométrie qui refuse l'usage des coordonnées et du calcul algébrique.

42. Poncelet réfère à ce passage dans son article de « philosophie mathématique » publié dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* [Poncelet 1817, p. 143].

43. [Poncelet 1820, p. 366].

essai consacré à la justification de l'adoption en géométrie pure d'un principe de continuité [1818]. En 1820, il dépose à l'Académie des sciences un mémoire consacré à l'étude des propriétés projectives des coniques [Poncelet 1820]. Malgré l'accueil mitigé de l'Académie, ce dernier servira de première version du *Traité*. Le principe de continuité dont Poncelet fait abondamment usage dans le mémoire déposé ne trouve notamment aucune grâce auprès d'Augustin-Louis Cauchy, qui n'y voit au mieux qu'« *une forte induction, à l'aide de laquelle on étend des théorèmes établis, d'abord à la faveur de certaines restrictions, aux cas où ces mêmes restrictions n'existent plus* » [Cauchy 1820, p. 73]⁴⁴. Si Cauchy reconnaît qu'appliqué aux courbes du second degré, ce principe ne conduit pas à des erreurs, il souligne (avec raison) que sa généralisation à des questions de degré supérieur, ou à d'autres domaines des mathématiques, pourrait faire « tomber quelque fois dans des erreurs manifestes ».

À partir de 1818, Poncelet voit donc dans l'adoption du principe de continuité la possibilité d'étudier dans un cadre général les propriétés descriptives et métriques d'ensembles de figures corrélatives, non seulement lorsque l'ordonnancement de leurs parties se trouve modifié, mais aussi lorsque des éléments partent à l'infini ou deviennent imaginaires. Comme on l'a vu au § 1, Poncelet pense que la faculté de la géométrie analytique à s'attaquer à des problèmes généraux tient moins aux algorithmes algébriques qu'à la capacité de traiter des problèmes indéterminés grâce à la traduction algébrique des hypothèses du problème par des équations. Le mathématicien, dont l'argument central dans son essai sur le principe de continuité [Poncelet 1818] est de montrer qu'il est admis en géométrie analytique, distingue deux moments dans l'histoire de l'application de l'algèbre à la géométrie. Une première période, à laquelle il associe le nom de Viète, correspond aux débuts de l'utilisation de procédures algébriques en géométrie, conduisant à une géométrie, désignée « sous le nom d'*Analyse déterminée* », qui ne fait alors que compléter les résultats obtenus en géométrie pure en permettant d'interpréter numériquement « les résultats sur la figure » [*Ibid.*, p. 299]. La seconde période est celle où les techniques de mise en équation des problèmes se mettent en place et se développent :

44. On peut remarquer que Cauchy, au nom de la rigueur, utilise le même vocabulaire pour refuser le principe de continuité de Poncelet en géométrie que dans sa critique de l'usage en analyse de « raisons tirées de la généralité de l'algèbre ». « Les raisons de cette espèce », écrit-il dans l'introduction de son cours d'analyse de l'École polytechnique, « quoique assez communément admises, sur-tout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux quantités imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. » [Cauchy 1821, p. ii-iii]

« Mais la Géométrie analytique a reçu, dès le temps de Descartes, une extension beaucoup plus grande sous le nom d'*Analyse indéterminée* ; par elle on est parvenu, non-seulement à soumettre les rapports métriques au calcul, mais encore à peindre les formes et la disposition même des objets de la Géométrie : c'est cette analyse, qu'on nomme aussi *méthode des coordonnées*, qu'ont cultivée avec tant de succès les Euler, les Monge, les Lagrange, etc. ; ses avantages sur la première sont aujourd'hui bien connus, et ne forment le sujet d'aucun doute. » [*Ibid.*, p. 299-300]

En faisant ce rappel historique⁴⁵, Poncelet poursuit deux objectifs. Le premier vise à écarter toutes les discussions autour de l'application de l'algèbre à la géométrie (introduction de nouvelles solutions, oubli de solutions, problèmes pour affecter un signe à une quantité, etc.) en les renvoyant à des questions déterminées : en d'autres termes, la supériorité de la géométrie analytique sur la géométrie des Anciens ne doit pas être entachée du moindre doute. Le second objectif consiste à montrer que l'algèbre n'a véritablement révélé son potentiel qu'à partir du moment où elle a été mise au service de la mise en équation des problèmes. D'ailleurs, la procédure de mise en équation des problèmes géométriques n'est pas justifiée géométriquement et nécessite déjà d'admettre le « *principe de la continuité ou permanence des relations mathématiques de la grandeur figurée* »⁴⁶ :

« Or, ne l'oublions pas, [raisonner sur des équations en faisant abstraction des figures] ce n'est point là une conséquence rigoureuse de vérités géométriques antérieurement établies, mais bien un simple rapprochement, une vérification à posteriori, de laquelle on ne pourrait déduire aucune conséquence nouvelle, indiscutable et applicable à tous les cas possibles ; à moins d'admettre qu'il soit permis de conclure du particulier au général par voie d'analogie, ou d'adopter ouvertement le principe de continuité » [Poncelet 1815b, p. 253].

Même la fécondité des méthodes de la *Géométrie descriptive* de Monge est présentée comme redevable de l'adoption du principe de continuité en géométrie analytique ; car c'est bien en s'appuyant tacitement, selon Poncelet, sur la capacité de l'analyse à appliquer une relation démontrée sur une figure à toutes situations possibles, que Monge justifie l'extension de certains énoncés⁴⁷.

45. Poncelet reprend ici le point de vue partagé par les autres mathématiciens de l'époque sur l'histoire de l'application de l'algèbre à la géométrie. Voir par exemple la préface de [Lacroix 1803].

46. [Poncelet 1818, p. 319].

47. [Poncelet 1818, p. 312-313]. Poncelet appuie son argument sur les développements de Monge concernant les plans tangents aux surfaces passant par des points donnés [Monge 1799, p. 44-50]. Il dépasse cependant certainement quelque peu les intentions de Monge qui, même s'il revendique pour la géométrie descriptive « des méthodes générales pour construire tout ce qui résulte de la forme et de la position respective des corps »

Poncelet associe l'admission d'un principe de continuité à la possibilité de raisonner de manière indéterminée, c'est-à-dire en faisant abstraction d'une figure ou d'un système particulier. S'ouvre ainsi la possibilité d'envisager des « formes extraordinaires », des « êtres de raison » comme les éléments à l'infini, les éléments imaginaires ou les éléments infinitésimaux⁴⁸ et de raisonner « d'une manière purement *implicite* ». Lagrange qui définit l'objet de l'algèbre comme l'étude d'un « système d'opérations »⁴⁹, les Anciens qui en pratiquant l'« analyse » admettaient « dans le discours et la conception, des grandeurs indéterminées ou implicites »⁵⁰, Carnot et son principe de la corrélation des figures, « le *Calcul infinitésimal*, la *Théorie des limites*, la *Théorie générale des équations*, et tous les écrits de nos jours, où l'on s'attache à une certaine généralité dans les conceptions »⁵¹ sont tous appelés comme « témoins » en faveur de l'admission d'un principe de continuité. En convoquant ainsi la plupart des théories qui constituent le corps des mathématiques du début du XIX^e siècle, Poncelet ne défend pas seulement l'idée que ces théories à forte valeur symbolique à l'époque dans le champ mathématique ont dû admettre un principe de continuité pour mettre en place leurs méthodes respectives de raisonnement implicite. Il cherche également à montrer que l'adoption d'un tel principe en géométrie pure n'est pas plus illicite que dans d'autres théories où son utilisation a précédé les « considérations métaphysiques des quantités négatives, infinies, imaginaires » [Poncelet 1818, p. 332]. L'admission d'un principe de continuité a signé pour ces théories l'entrée dans une nouvelle ère en

[*Ibid.*, p. 16] défend plutôt l'idée de tirer partie des avantages de chaque approche plutôt que celle consistant à leur chercher des principes communs :

« Ce n'est pas sans objet que nous comparons ici la géométrie descriptive à l'algèbre ; ces deux sciences ont les rapports les plus intimes. Il n'y a aucune construction de géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en analyse ; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en géométrie.

Il serait à désirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble : la géométrie descriptive porterait dans les opérations analytiques les plus compliquées, l'évidence qui est son caractère ; et, à son tour, l'analyse porterait dans la géométrie la généralité qui lui est propre. » [*Ibid.*]

48. Poncelet signale que l'adoption des éléments infiniment petits par Monge et ses disciples entre autres est aussi justifiée par l'adoption d'un principe de continuité : « En effet, dans ces recherches [basées sur la considération des *infiniment petits* et des *infiniment grands*], on commence toujours par rapporter le système à un autre qu'on suppose lui être corrélatif, et dans lequel toutes les quantités sont d'une grandeur absolue et finie ; on examine alors les propriétés soit métriques, soit descriptives de ce dernier système, et l'on en étend immédiatement la signification à la limite, c'est-à-dire au système particulier qu'il s'agissait d'examiner » [*Ibid.*, p. 313-314].

49. [Lagrange 1808, p. vi].

50. [Poncelet 1818, p. 333-334].

51. [Poncelet 1822, p. xxiii].

autorisant le raisonnement « purement *implicite* »⁵² sur des grandeurs indéterminées, et il n'y a donc aucune raison de ne pas en faire autant en géométrie. Poncelet prétend même être plus prudent que ses prédécesseurs en rappelant de manière récurrente que le principe de continuité qu'il propose d'admettre en géométrie pure « ne [se] prononce nullement sur la nature et l'existence absolue des objets ou des grandeurs que ces relations concernent » [*Ibid.*, p. 338].

Conclusion

Poncelet situe son programme de recherche en « géométrie rationnelle » par rapport à trois traditions de travaux mathématiques des siècles passés. Le domaine mathématique qu'il investit, la géométrie pure, l'amène d'abord à s'appuyer sur la tradition euclidienne et sur les travaux plus récents en théorie des coniques de la tradition newtonienne (Newton, Cotes, Maclaurin...). S'il critique les méthodes qu'il attribue à la géométrie pure « des Anciens », il n'écarte pas pour autant cette tradition, d'une part parce qu'elle garantit la rigueur des démonstrations (une généralisation qui utilise le principe de continuité s'appuie en dernière instance sur une démonstration établie dans le cadre de la géométrie pure) et, d'autre part, parce que le corpus des théorèmes de cette géométrie constitue le terrain d'expérience des nouvelles méthodes. Le projet de Poncelet se veut aussi une synthèse des travaux et des méthodes développées depuis le XVIII^e siècle, qu'il s'agisse de l'utilisation d'éléments imaginaires, infinitésimaux, de la théorie des transversales, de la géométrie dans l'espace et de la théorie des projections, ou encore de la théorie des pôles et polaires. Il reprend donc aussi cet ensemble de travaux récents pour montrer que ses méthodes permettent, entre autres, de réunir les résultats obtenus en géométrie par Carnot, par Monge et son école, ou par Brianchon. En même temps, les références à ces travaux sont souvent autant d'exemples d'utilisation du principe de continuité et donc autant d'arguments pour justifier l'introduction d'un tel principe en géométrie. Enfin, s'il analyse longuement les avantages de la géométrie analytique, Poncelet ne cite toutefois que très peu de mathématiciens pratiquant ce type de géométrie. En vantant cette géométrie et ses méthodes, Poncelet met en place son principal argument pour défendre l'intérêt des propriétés projectives et l'utilisation du principe de continuité en géométrie rationnelle : la géométrie des coordonnées utilise déjà un principe de continuité en considérant que la forme des formules algébriques utilisées pour décrire une situation géométrique reste inchangée par projection.

52. [Poncelet 1818, p. 330].

Les travaux préparatoires et le *Traité* lui-même font appel à de nombreux travaux antérieurs. Ces références permettent au lecteur de cerner le cadre mathématique revendiqué par Poncelet, tout en se familiarisant avec de nouvelles méthodes. S'il plaide pour adopter de nouveaux points de vue en géométrie pure, Poncelet ne remet en cause ni le modèle de la géométrie, ni celui plus général des mathématiques, hérités de ses prédécesseurs. Bien au contraire, il considère que son programme de recherche contribue à inscrire la géométrie pure dans une modernité mathématique apparue au cours du XVIII^e et au début du XIX^e siècle.

BIBLIOGRAPHIE

- [Apollonius *Coniques*] Apollonius de Perge, *Coniques*, t. 1, R. Rashed, M. Decorps-Foulquier, M. Federspiel (éd.), Berlin : Walter de Gruyter, 2008.
- [Belhoste 1998] Bruno Belhoste, « De l'École polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet », *Bulletin de la SABIX*, 19 (1998), p. 9-29.
- [Bioesmat-Martagon 2010] Lise Bioesmat-Martagon (dir.), *Éléments d'une biographie de l'espace projectif*, Nancy : Presses universitaires de Nancy, 2010.
- [Bioesmat-Martagon à paraître] L. Bioesmat-Martagon (dir.), *Éléments de biographie des espaces géométriques*, Nancy : Presses universitaires de Nancy – Éditions universitaires de Lorraine, à paraître.
- [Brianchon 1806] Charles-Julien Brianchon, « Sur les surfaces courbes du second degré », *Journal de l'École polytechnique*, t. VI, 13^e cahier (1806), p. 297-311.
- [Brianchon 1810] C.-J. Brianchon, « Solution de plusieurs problèmes de géométrie », *Journal de l'École polytechnique*, t. IV, 10^e cahier (1810), p. 1-15.
- [Brianchon 1817] C.-J. Brianchon, *Mémoire sur les lignes du second ordre*, Paris : Bachelier, 1817.
- [Carnot 1801] Lazare Carnot, *De la corrélation des figures de géométrie*, Paris : Duprat, 1801.
- [Carnot 1803] L. Carnot, *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.
- [Carnot 1806] L. Carnot, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace ; suivi d'un Essai sur la théorie des transversales*, Paris : Courcier, 1806.
- [Cauchy 1820] Augustin-Louis Cauchy, « Géométrie des courbes. Rapport à l'académie royale des sciences sur un mémoire relatif aux propriétés projectives des sections coniques par M. Poncelet, capitaine du génie », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 11 (1820-1821), p. 69-83.
- [Cauchy 1821] A.-L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. I^{re} Partie, Analyse algébrique*, Paris : Imprimerie royale, 1821 ; *Œuvres complètes*, 2^e série, t. 3.
- [Dupin 1813] Charles Dupin, *Développements de géométrie, avec des Applications à la stabilité des Vaisseaux, aux Déblais et Remblais, au Défilement, à l'Optique, etc. pour faire suite à la géométrie descriptive et à la géométrie analytique de M. Monge*, Paris : V^{re} Courcier, 1813.
- [Flament & Nabonnand 2011] Dominique Flament et Philippe Nabonnand (dir.), *Justifier en mathématiques*, Paris : Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 2011.
- [Friedelmeyer 2010] Jean-Pierre Friedelmeyer, « L'impulsion originelle de Poncelet dans l'invention de la géométrie projective », dans [Bioesmat-Martagon 2010, p. 55-158].

- [Gray 2007] Jeremy J. Gray, *Worlds Out of Nothing : A Course in the History of Geometry in the 19th Century*, London : Springer, 2007.
- [Lacroix 1803] Sylvestre-François Lacroix, *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie*, 3^e éd., Paris : Courcier, 1803.
- [Lagrange 1808] Joseph-Louis Lagrange, *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Paris : Courcier, 1808 ; *Œuvres*, t. 8.
- [Monge 1799] Gaspard Monge, *Géométrie descriptive*, Paris : Baudouin, an VII.
- [Monge 1807] G. Monge, *Application de l'analyse à la géométrie, à l'usage de l'École impériale polytechnique*, Paris : Bernard, 1807.
- [Nabonnand 2010] Philippe Nabonnand, « Deux droites coplanaires sont sécantes », dans [Bioesmat-Martagon 2010, p. 159-195].
- [Nabonnand 2011] P. Nabonnand, « L'argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles », dans [Flament & Nabonnand 2011, p. 17-45].
- [Nabonnand à paraître] P. Nabonnand, « Utiliser des éléments imaginaires en géométrie : Carnot, Poncelet, von Staudt et Chasles », dans [Bioesmat-Martagon à paraître].
- [Poncelet 1815a] Jean-Victor Poncelet, « Méthode des transversales appliquée à la recherche et à la démonstration des propriétés des lignes et surfaces géométriques », dans [Poncelet 1864, p. 67-166].
- [Poncelet 1815b] J.-V. Poncelet, « Sur la loi des signes de position en géométrie, la loi et le principe de continuité », dans [Poncelet 1864, p. 167-295].
- [Poncelet 1817] J.-V. Poncelet, « Philosophie mathématique. Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie ; suivies de la solution de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 8 (1817-1818), p. 141-155.
- [Poncelet 1818] J.-V. Poncelet, « Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques », dans [Poncelet 1864, p. 296-364].
- [Poncelet 1820] J.-V. Poncelet, « Essai sur les propriétés projectives des sections coniques », dans [Poncelet 1864, p. 365-454].
- [Poncelet 1822] J.-V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Bachelier, 1822.
- [Poncelet 1864] J.-V. Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, t. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1864.
- [Poncelet 1865-1866] J.-V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, 2^e éd., Paris : Gauthiers-Villars, t. 1, 1865 et t. 2, 1866.
- [Verdier 2009] Norbert Verdier, « Les journaux de mathématiques dans la première moitié du XIX^e siècle en Europe », *Philosophia Scientiae*, 13 (2009), p. 97-126.
- [Zeuthen 1919] Hieronymus Georg Zeuthen, *Sur l'origine de l'algèbre*, Copenhague : Bianco Lunos Bogtrykkeri, 1919.

La géométrie en Grande-Bretagne 1750-1830

Olivier BRUNEAU

Dans l'historiographie des mathématiques, le second XVIII^e siècle et le début du XIX^e sont souvent présentés comme une période de stagnation des mathématiques britanniques et de déclin relativement aux développements qui se produisent alors sur le Continent¹. Récemment encore, dans son introduction à un ouvrage dédié aux mathématiques sous l'ère victorienne, Adrian Rice caractérise ainsi la période antérieure :

« The Victorian period coincided with a revival of British Mathematics from its mid-18th-century slump. Despite the strong impetus given to British Mathematics by the prestige and achievements of Isaac Newton and the ability of his immediate successors (such as Roger Cotes, Brook Taylor, Colin Maclaurin, Thomas Simpson), British Mathematics had entered a period of stagnation from the middle of the 1700s. Indeed, no really first-rate mathematicians were produced from about 1750 until around 1830. » [Flood *et al.* 2011, p. 3]

Diverses explications à cette situation de coupure des mathématiques britanniques de la dynamique continentale ont été avancées par les historiens. On retrouve souvent l'idée d'un rôle négatif joué par une fidélité newtonienne insulaire marquée par une domination récurrente de la géométrie classique dans l'enseignement et la recherche mathématiques², et une forme du calcul des fluxions bridée par des notations peu pratiques.

Ce panorama est cependant à relativiser. Dans son étude de référence sur le développement du calcul newtonien en Grande-Bretagne au XVIII^e siècle, N. Guicciardini [1989] remet en cause la radicalité de la thèse du déclin et de l'isolement des mathématiques britanniques, ainsi que l'interprétation selon laquelle les mathématiciens britanniques se seraient bornés à l'utilisation de méthodes géométriques obsolètes. L'historien propose une autre temporalité : « The era of the Newtonian calculus

1. Voir, par exemple, [Boyer 1968, p. 583, 620-621; Koppelman 1971, p. 155-156 ; Struik 1987, p. 171].

2. J. L. Richards donne cette explication de la persistance de cette domination au XIX^e siècle à Cambridge : « A neo-Newtonian natural theology lay behind the nineteenth-century geometrical education at Cambridge. Classical geometry was valued because it was known with the same absolute certainty with which God was known. » [Richards 2003, p. 461]

cannot be simply described as a period of decline. It was a period of the history of British mathematics which began with successes, suffered a period of crisis, and ended with serious attempts to reform. » [Guicciardini 1989, p. 139] Pour lui, le processus de réformes en analyse (« calculus ») commence vers 1775, avec quelques décalages chronologiques selon les lieux considérés : universités écossaises, écoles militaires de Woolwich et de Sandhurst, universités de Dublin et de Cambridge [*Ibid.*, chap. 7-9].

Des travaux³ consacrés à plusieurs mathématiciens de cette période (Wallace, Playfair, Ivory, Leslie, Spence, etc.) ont permis de documenter le cadre ainsi posé et de montrer la complexité de cette période en Grande-Bretagne mêlant, suivant les lieux, poussée réformatrice, influence continentale et résistance intérieure. Plusieurs historiens soulignent aussi le rôle des réformateurs britanniques, notamment Playfair, dans la construction historiographique de la thèse du déclin [Guicciardini 1989, p. 102-103 ; Ackerberg-Hastings 2008].

Qu'en est-il de la géométrie ? On trouve quelques informations relatives à ce domaine dans les références citées note 3. Sur les travaux géométriques de Wallace, on peut signaler aussi les contributions de M. Panteki [1987] et d'A. Craik et J. O'Connor [2011]. Sur les vives contradictions dans le milieu écossais confronté à l'idée d'une incompatibilité philosophique entre la géométrie classique et l'analyse continentale, on peut voir [Olson 1971] et [Craik 2000a]. Par ailleurs, S. Lawrence [2002, 2003] et K. Andersen [2007] mettent en évidence une activité mathématique soutenue dans la seconde moitié du XVIII^e siècle directement inspirée des travaux de Brook Taylor, dans le domaine de la perspective et de la géométrie pratique. Cependant, au regard des récents progrès effectués dans la connaissance de l'histoire de l'analyse en Grande-Bretagne, l'évolution de la géométrie et de ses différentes branches dans la période 1750-1830 demeure encore mal connue, alors que cette science est supposée y jouer un rôle dominant.

Nous nous proposons ici d'établir une première cartographie des travaux géométriques en Grande-Bretagne entre la mort de Maclaurin et le début de l'ère victorienne, grâce à un recensement le plus complet possible des textes consacrés en totalité ou en partie à la géométrie, publiés dans cette période : ouvrages, articles dans les périodiques ou dans les encyclopédies. Nous chercherons à identifier les principaux types de géométrie développés et les foyers de production correspondants, à repérer les traditions à l'œuvre, les influences continentales et les principaux changements au cours de la période, en prenant en compte aussi bien les contenus mathématiques que la place de la discipline au sein des sciences mathéma-

3. Citons notamment, sur le milieu mathématique écossais de cette période, la série de travaux d'A. Craik [1998, 1999, 2000a,b, 2002, 2009, 2012, 2013a,b], ainsi que [Craik & Roberts 2009]. Voir aussi [Grattan-Guinness 1988] sur les mathématiciens de Dublin.

tiques et, plus largement, dans le cadre du milieu scientifique britannique de l'époque.

I. Quelles géométries ?

Les productions en géométrie rassemblées dans notre corpus couvrent un vaste paysage institutionnel et éditorial dans lequel nous retrouvons de prime abord tous les principaux lieux de recherche et d'enseignement, de même que les principaux médias de diffusion des mathématiques connus pour la période qui nous intéresse ⁴.

Il s'agit d'abord, avec un corpus incluant un important ensemble de manuels et de traités, des principales universités (Cambridge, Dublin et les écossaises Édimbourg, Glasgow, St Andrews, Aberdeen), ainsi que des deux principales écoles militaires, la Royal Military Academy de Woolwich, créée en 1741 pour former les officiers de l'artillerie et du génie, et le Royal Military College de Sandhurst, mis en place en 1799 pour l'éducation des officiers de la cavalerie et de l'infanterie ⁵. Il s'agit aussi de la Royal Society of London et de ses *Philosophical Transactions*, ainsi que des deux académies royales, la Royal Irish Academy et la Royal Society of Edinburgh, la première fondée en 1782, la seconde l'année suivante, et les deux périodiques associés, les *Transactions of the Royal Irish Academy* et les *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* respectivement lancés en 1787 et 1788. Il s'agit encore du *Mathematical Repository*, créé par Thomas Leybourn en 1795 (avant de devenir *The new series of mathematical repository* de 1806 à 1835), et de certains des périodiques qui voient le jour à la fin du XVIII^e siècle et dans la première décennie du XIX^e, par exemple le *Philosophical Magazine* (1798-1826), édité par A. Tilloch et R. Taylor, le *Journal of Natural Philosophy, Chemistry and the Arts* (1797-1813) édité par W. Nicholson, ou les *Annals of Philosophy* (1813-1820) éditées par T. Thomson.

De la géométrie est également publiée dans les *Ladies' Diary*, qui paraissent à partir de 1704 et jusqu'en 1840, et dont chaque volume contient des questions mathématiques auxquelles les lecteurs peuvent envoyer leurs solutions aux éditeurs qui se chargent de fournir une ou plusieurs démonstrations dans le volume suivant. Ce journal s'adresse en particulier à une catégorie de lettrés qui émerge en Grande-Bretagne à la fin du XVII^e siècle,

4. Nous renvoyons au panorama établi par N. Guicciardini [1989, chap. 7 à 9, p. 95-138 et Appendices C et D, p. 150-158].

5. Le Royal Military College est divisé en deux départements, un Senior Department, mis en place en 1799-1800 à High Wycombe, et un Junior Department créé en 1802 à Great Marlow ; ils seront respectivement transférés à Farnham et Sandhurst en 1813. Pour des raisons de commodité, nous parlerons du Royal Military College de Sandhurst sur l'ensemble de la période.

les *Philomaths*, terme derrière lequel se cachent des religieux, des marchands, des avocats ou des maîtres d'écoles s'intéressant aux mathématiques⁶.

Les dictionnaires et encyclopédies sont également au rendez-vous. À la suite du *Lexicon Technicum* de Harris (1704-1710) et de la *Cyclopædia* de Chambers (1728), et en réaction à l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert (1751-1772), plusieurs encyclopédies voient le jour en Grande-Bretagne, et plus particulièrement à Édimbourg, tout au long de notre période d'étude. Toutes contiennent de la géométrie, à commencer, bien sûr par l'*Encyclopædia Britannica*, dont les quatre premières éditions paraissent respectivement en 1771-1773, 1778-1783, 1797 (avec un *Supplément* de 2 volumes en 1801-1803), et 1810. D'autres encyclopédies voient ensuite le jour à la fin du XVIII^e et au début du XIX^e siècle, telles que l'*Encyclopædia Perthensis*, la nouvelle *Cyclopædia* (1802-1820) d'A. Rees, l'*Edinburgh Encyclopædia* (1808-1830) ou l'*Encyclopædia Metropolitana* (1845), publiée à Londres. À côté de ces encyclopédies généralistes, la géométrie apparaît aussi dans les dictionnaires de mathématiques, tels que le *Mathematical and Philosophical Dictionary* de Charles Hutton [1795], réédité avec d'importantes additions et révisions en 1815, et le *New Mathematical and Philosophical Dictionary* de Peter Barlow [1814].

Voyons à présent ce que ce paysage éditorial recèle précisément en terme de géométries, et comment s'y intègrent ou non les travaux continentaux au cours de la période considérée. Nous distinguerons, pour ce faire, la géométrie classique – dans laquelle nous incluons notamment celle des *Éléments* d'Euclide, l'étude des sections coniques, la géométrie plane et sphérique –, la géométrie pratique et la perspective, la géométrie descriptive, ainsi que le domaine de l'application de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie. Les contributions de géométrie publiées dans les *Ladies' Diary* et dans le corpus des encyclopédies et dictionnaires feront l'objet d'une étude plus spécifique dans la seconde partie.

1. La géométrie classique

Le type de géométrie le plus représenté dans notre corpus est assurément la géométrie classique, en particulier sous forme de manuels, continuellement publiés sur l'ensemble de la période.

Les traductions des *Éléments* d'Euclide occupent parmi eux une place particulièrement importante⁷. La *Royal Road to Geometry* [1774] et la *New*

6. Sur cette catégorie d'amateurs de mathématiques, voir [Pedersen 1963 ; Taylor 1966 ; Wallis 1973, R. & P. Wallis 1980].

7. Voir [Barrow-Green 2006].

Royal Road to Geometry [1793] de Thomas Malton ou encore l'ouvrage de George Douglass [1812] s'appuient par exemple essentiellement sur les premiers livres des *Éléments*, qu'ils réorganisent en donnant une table de correspondance entre les nouvelles propositions et les originales. L'édition anglaise de Robert Simson, le chantré écossais de la géométrie grecque, est cependant de loin la plus importante. Ses *Elements of Euclid* [Simson 1756], réédités pas loin d'une trentaine de fois jusqu'en 1856 – sans compter les multiples traductions qui en sont faites, et leurs propres rééditions –, constitueront le socle de l'enseignement de la géométrie classique en Grande-Bretagne jusqu'au milieu du XIX^e siècle⁸.

Cherchant par ailleurs à renouveler l'enseignement de la géométrie classique, plusieurs auteurs prennent de larges libertés avec le texte euclidien. S'il s'appuie sur l'édition de Simson, John Playfair réorganise ainsi les différents livres au sein de ses *Elements of Geometry* [1795], dont les nombreuses éditions, qui paraissent jusqu'en 1875, rencontrent également un très large succès, non seulement en Grande-Bretagne, mais aussi aux États-Unis [Ackerberg-Hastings 2002]. Playfair y ajoute ses propres propositions et en introduit ponctuellement une, dans la deuxième édition du manuel (1804), issue des *Éléments de géométrie* de Legendre [1794]⁹. En réaction à Playfair auquel il succède en 1809 à la chaire de mathématiques de l'Université d'Édimbourg, John Leslie proposera à son tour sa propre version du texte euclidien [1809]¹⁰. William Wallace, qui occupera la chaire dix ans plus tard, reviendra ensuite à la version de Playfair.

En dehors des textes basés sur Euclide, d'autres manuels, souvent rédigés par des enseignants à destination de jeunes élèves ou des étudiants fraîchement entrés à l'université, sont publiés entre 1750 et 1830. Certains d'entre eux connaissent plusieurs éditions, une ou deux en général, voire plus, ainsi que des traductions, comme les *Elements of Plane Geometry* de Thomas Simpson [1747], réédités six fois de 1747 à 1809, et traduits en français et en hollandais. À la fin de notre période, de nouveaux ouvrages de géométrie classique paraissent davantage tournés vers les débutants ou s'adresser à ceux qui suivent des cours du soir, par exemple [Leslie 1828], ou [Morton 1830a], publié sous les auspices de la *Society for the diffusion of useful knowledge*.

Dans les manuels de mathématiques en général, une large partie est souvent consacrée à la géométrie. Ces manuels s'adressent en général aux plus jeunes [Draper 1772 ; Donne 1775 ; West 1784 ; Ludlam 1785]. D'autres

8. Voir [Moktefi 2011].

9. Voir [Ackerberg-Hastings 2002, p. 52 et 61].

10. La seconde édition de 1811 est traduite par Hachette qui l'insère à la suite de son *Second supplément de la Géométrie descriptive* [Hachette 1818]. Une version augmentée sera incluse par Leslie dans son *Course of Mathematics* [1821].

sont destinés à l'enseignement des mathématiques dans un cadre particulier. C'est, par exemple, le cas des manuels de John Muller [1765, 1773], de Hutton [1798-1801, 1811] ou d'Isaac Dalby [1806], tous écrits pour les écoles militaires, ou celui d'André Darré [1813] pour un collège de Dublin.

Les manuels issus de traductions d'ouvrages continentaux n'apparaissent qu'en toute fin de période. Une traduction par Thomas Carlyle, et éditée par David Brewster, des *Éléments de géométrie* de Legendre paraît en 1822. Quant aux deux premières parties des *Éléments de géométrie* de Clairaut [1741], elles sont traduites et publiées en 1836 afin de servir de modèle pour l'enseignement de la géométrie en Irlande.

La géométrie classique fait aussi l'objet de plusieurs articles traversant toute notre période d'étude et se répartissant suivant plusieurs thèmes. Nous trouvons quelques articles en relation avec les sections coniques [Waring 1764 ; Wallace 1801a ; Morton 1830b] et les propriétés de polygones inscrits ou circonscrits au cercle [Horsley 1775 ; Stedman 1775 ; Wallace 1801b]. La publication, à la mort de Simson, de sa version reconstituée des porismes d'Euclide [Simson 1776], suscite par ailleurs un certain écho à Édimbourg, ainsi qu'en témoignent les articles de Playfair [1794], Brougham [1798], Wallace [1798], Mark Noble [1806], Scoticus [1806] et, plus tardivement, de Thomas Galloway [1830]. Hormis ceux de Playfair et de Henry Brougham, ces derniers travaux sont tous publiés dans le *Mathematical Repository* de T. Leybourn, qui paraît ainsi constituer un lieu de publication privilégié pour la géométrie en général, et la géométrie classique en particulier¹¹.

2. Géométrie pratique, perspective

Une autre part importante de notre corpus concerne la géométrie pratique, ce qui recouvre les applications de la géométrie à différents types de problèmes concrets. Comme nous allons le voir, les travaux de perspective en circulation en Grande-Bretagne au cours de notre période entrent de plain-pied dans cette catégorie.

Nous trouvons en premier lieu des ouvrages généraux de géométrie pratique, tel que [D. Gregory 1745], résultat de la traduction anglaise, par Maclaurin, de notes de cours en latin de David Gregory de la fin du xvii^e siècle. Ce livre connaît un certain succès avec au moins onze éditions parues entre 1745 et 1798. Des manuels sont également publiés à destination

11. Outre plusieurs extraits de [Stewart 1746] ou des *Mathematical Memoirs* de J. Landen [1780-1789], nous y trouvons également des séries d'articles originaux de géométrie classique sur des sujets divers par J. Lowry [1795a,b, 1801], J. Cunliffe [1819, 1835], ou T. S. Davies [1830a,b, 1835a-e] – Davies publie aussi une série d'articles de géométrie plane dans le *Philosophical Magazine* [Davies 1826a-c, 1827] –, ainsi que des contributions d'auteurs aux positions institutionnelles moins bien établies [Lawson 1795 ; Harrison 1795-1801 ; Douglas 1809 ; Bransby 1814].

des élèves des académies militaires, où il existe un enseignement de géométrie pratique destiné à la fortification et à l'artillerie. L'un des ouvrages de référence est celui d'Isaac Landmann [1798], professeur d'artillerie et de fortification à Woolwich à partir de 1777. John Bonnycastle, qui y enseigne les mathématiques à partir de 1792, publie également un manuel de géométrie pratique à succès [Bonnycastle 1782] réédité plus de 18 fois jusqu'en 1823¹². À la toute fin de notre période, George Birkbeck [1827] traduit le premier volume du cours de géométrie et de mécanique de Charles Dupin [1825] et l'adapte afin de pouvoir le proposer aux artisans et ouvriers anglais.

Comme le montre K. Andersen [2007]¹³, le domaine plus spécifique de la perspective est largement dominé par l'influence des deux traités de B. Taylor [1715, 1719] tout au long de la seconde moitié du XVIII^e siècle, voire même au-delà. Largement diffusés et, surtout, mis à la portée des praticiens par John J. Kirby, professeur de dessin [Kirby 1754]¹⁴, les deux traités de Taylor trouvent en effet une nouvelle vie dans de nombreux domaines d'application. Certains auteurs, comme Daniel Fournier [1761], qui se présente comme maître de dessin et professeur de perspective, et John L. Cowley [1765], professeur de mathématiques à Woolwich de 1761 à 1773, proposent des manuels de perspective à destination des écoles militaires. John Muller, professeur d'artillerie et de fortification à Woolwich également, intègre un ajout de neuf pages sur le sujet dans la troisième édition de ses *Elements of Mathematics* [Muller 1765]. D'autres auteurs perpétuent l'idée de rendre la théorie accessible au plus grand nombre dans différents domaines : parmi eux, Joseph Priestley [1770] et Edward Noble [1771]. Signalons encore les contributions de William Emerson [1768], de Malton [1775, 1783], d'Henry Clarke [1776], enseignant de mathématiques à Sandhurst, de John Wood [1799], enseignant de dessin, ou du fabricant d'instruments mathématiques George Adams [1791].

La tradition taylorienne se perpétue-t-elle cependant au-delà du second XVIII^e siècle ? K. Andersen suggère une réponse positive¹⁵ et cite à l'appui un traité pratique de perspective fondé sur les principes de Taylor publié au tout début du XIX^e siècle par Edwards [1803], peintre et enseignant de perspective à l'Académie royale des arts, ainsi que les rééditions de [Taylor 1719] en 1811 et 1835. Nous avons également pu relever d'autres références

12. Bonnycastle est aussi l'auteur d'un commentaire des *Éléments d'Euclide* [1789].

13. Voir le chapitre X, notamment le § 16, « The Taylor Tradition Continued », p. 568-587. Une partie des informations qui suivent est extraite de son étude.

14. Le peintre Joseph Highmore y contribua également, mais son ouvrage [Highmore 1763], publié tardivement quoique terminé la même année que celui de Kirby, n'eut cependant qu'un écho très limité [Andersen 2007, p. 548].

15. « In connection with Britain, my project of only surveying the literature published up to 1800 is somewhat unfortunate, for the Taylorian approach lived on after that date. » [Andersen 2007, p. 598]

accréditant cette hypothèse, telles qu'un mémoire de Richard Hey [1814] publié dans les *Philosophical Transactions*, ou l'ouvrage *The Rudiments of Practical Perspective* de l'architecte, ingénieur et mathématicien Peter Nicholson [1822].

3. Géométrie descriptive

L'introduction de la géométrie descriptive en Grande-Bretagne s'effectue en plusieurs étapes au cours du premier XIX^e siècle, par le biais des académies militaires et du milieu des architectes. Selon S. Lawrence [2003, p. 1270-1271], une traduction du cours de Monge de 1799 circulerait en langue anglaise dès 1809. Il ne s'agit pas d'une version imprimée, mais d'un manuscrit à destination des écoles militaires, et dont plusieurs copies circulent aussi chez les artisans et dessinateurs dès le début du XIX^e siècle. L'hypothèse d'une diffusion précoce à Sandhurst ou à Woolwich semble confirmée par l'apparition d'une même présentation succincte (référant à Monge et à Lacroix) de la géométrie descriptive dans les articles GEOMETRY de la *Pantologia* (1813), par Olynthus Gregory, du dictionnaire de mathématiques de P. Barlow [1814] et de la seconde édition du *Mathematical Dictionary* de C. Hutton [1815].

S. Lawrence mentionne en outre le « British System of Projection », système de projection lié à la pratique de la taille des pierres et incorporant certains principes de géométrie descriptive. Ce système est dû à Peter Nicholson [Lawrence 2002, chap. 5], auteur, l'année même de la parution de l'article GEOMETRY de la *Pantologia*, d'une entrée sur la géométrie descriptive dans le premier volume de son *Architectural Dictionary* [Nicholson 1813]¹⁶. Ce dernier expose sa méthode quelques années plus tard dans *A Popular and Pratical Treatise on Masonry and Stone-Cutting* [Nicholson 1827], et dont la préface précise :

« To enable the workman to construct the plans and elevations of the various forms of arches or vaults, as much as *descriptive* Geometry and Projection

16. Nicholson publie aussi un court mémoire dans les *Mathematical Repository* en lien avec ce système de projection, mais sans donner de référence particulière [1819]. Contrairement par ailleurs à ce qu'indique S. Lawrence [2003, p. 1274-1275], nous n'avons pas trouvé, dans [Nicholson 1822], de mention de l'exemplaire de la *Géométrie descriptive* de Monge qui aurait été transmis à Nicholson par le biais du graveur Wilson Lowry. Nous n'avons pas pu avoir accès au premier volume de l'*Architectural Dictionary*. En revanche, le deuxième volume de *The Magazine of Popular Science, and Journal of the Useful Arts*, publié en 1836, contient « An Elementary Course of Descriptive Geometry » anonyme introduit par une courte notice historique précisant que : « It is true that several years ago, a considerable extract [of descriptive geometry] was made from Monge's work in the *Architectural Dictionary* of Mr. Peter Nicholson ; but the high price and scarcity of that work percluse most readers from the opportunity of consulting it. » (p. 302)

has also been introduced, as will be found necessary to conduct him through the most difficult undertakings. » [*Ibid.*, p. vi]

À notre connaissance, la première traduction anglaise éditée en Grande-Bretagne de la *Géométrie descriptive* de Monge [1799] est l'œuvre de Thomas G. Hall [1841] destinée aux étudiants du King's College de Londres, l'année même de la création d'écoles d'architecture dans cet établissement, ainsi qu'à l'University College of London¹⁷.

4. Application de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie

Le premier XVIII^e siècle britannique est marqué par les travaux de Newton [1704a,c, 1707, 1711, 1720] sur l'étude des courbes algébriques, y compris à l'aide du calcul fluxionnel, et leur développement ultérieur par Stirling [1717] et Maclaurin [1742]. S'y ajoutent notamment, dans la seconde moitié du XVIII^e siècle, les contributions d'Edward Waring et de John Landen. Le premier est l'auteur de deux traités [Waring 1762, 1772] pour partie consacrés à l'étude des courbes algébriques et de leurs intersections, de la rectification des courbes planes et gauches, des propriétés des surfaces ou du calcul des volumes sous ces surfaces. Après plusieurs sections de géométrie dans ses *Mathematical Lucubrations* [1755], Landen produit quant à lui une importante série de mémoires sur la rectification des sections coniques [Landen 1771, 1775, 1780]. Les deux mathématiciens étudient des objets géométriques en utilisant le calcul algébrique ou le calcul fluxionnel, et se montrent au fait des travaux de leurs contemporains du Continent (Euler, d'Alembert, Clairaut, Cramer).

L'étude algébrique ou analytique des courbes et surfaces se poursuit au siècle suivant. Les articles de John Hellins [1788, 1802, 1811] s'inscrivent dans la continuité des recherches sur la rectification des sections coniques : ses méthodes reposent sur les techniques d'analyse (développement en séries, accélération de convergence), mais l'auteur considère sa production sur les sections coniques comme : « a part of geometry so requisite in optics, astronomy, and other branches of natural philosophy » [Hellins 1802, p. 448]. Il se situe ainsi dans une filiation explicite avec les travaux britanniques sur ce type de problèmes (en soulignant le rôle de Maclaurin et minorant quelque peu celui de Landen). On trouve en outre plusieurs mémoires consacrés à l'usage du calcul différentiel et intégral en géométrie : [Brinkley 1803]¹⁸, [Ivory 1798, 1806a,b], [Lardner 1825a,b]. De nombreux

17. Une présentation en langue anglaise de la géométrie descriptive de Monge est publiée plus tôt aux États-Unis [Crozet 1821].

18. Tout en indiquant sa préférence pour la méthode utilisant le calcul différentiel et intégral, Brinkley donne aussi une démonstration de géométrie pure de son théorème à partir d'une propriété de l'ellipse.

autres s'appuient sur des techniques algébriques, notamment en relation avec la trigonométrie et des problèmes liés aux propriétés du cercle ou des sections coniques¹⁹.

Cette longue série de travaux plaide a priori en faveur d'une réelle continuité entre le XVIII^e et le XIX^e siècle, en Grande-Bretagne, dans ce domaine de l'application de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie. Cependant, nous constatons une évolution tangible dès les toutes premières années du XIX^e siècle, due à deux phénomènes liés : l'apparition de références appuyées aux travaux continentaux et l'augmentation du nombre de publications où la géométrie est ainsi traitée. C'est ce qu'illustre par exemple un mémoire de Brinkley [1803], lu le 20 décembre 1802 à la Royal Irish Academy, qui réfère non seulement à Newton, Landen, Ivory et Wallace, mais aussi à Euler, Lagrange [1786] et Lacroix pour son *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* [1798b]. Ce dernier ouvrage est également cité par Hellins [1811]. Dans son mémoire dédié à la démonstration algébrique du théorème de Cotes, Barlow [1809] réfère à la première édition de la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange [1797]. À l'autre bout de la période, le mémoire de Lardner [1825b] évacue toute référence aux savants britanniques au seul profit de Monge et Lacroix.

Nous n'avons pas trouvé d'ouvrage spécifiquement dédié à l'application de l'algèbre ou de l'analyse à la géométrie avant la toute fin du premier quart du XIX^e siècle. Ce thème est longtemps inclus dans les traités d'algèbre ou d'analyse. Ainsi, le *Treatise of Algebra* de Thomas Simpson [1745], qui connaît de nombreuses éditions jusqu'au milieu du XIX^e siècle, comporte une section conséquente consacrée à « The application of algebra to the solution of geometrical problems ». L'ouvrage *The Elements of Algebra* de James Wood [1795], une des références pour l'enseignement de l'algèbre à Cambridge jusque dans les années 1850, comporte aussi une partie significative dédiée aux applications géométriques. Il faudra attendre l'ouvrage *A System of Algebraic Geometry* de Lardner [1823]²⁰ pour voir paraître un manuel exclusivement consacré à la géométrie traitée par les méthodes algébriques (ainsi que par celles du calcul différentiel et intégral). Justifié

19. [Maseres 1760 ; Emerson 1764 ; Simpson 1765 ; Mauduit & Crakelt 1768 ; Payne 1772 ; Wright 1772 ; Jones & Robertson 1773 ; Brinkley 1800a,b ; Vince 1800 ; Bonnycastle 1806 ; Gompertz 1806 ; Trail & Robertson 1806 ; Garrard 1808 ; Maskelyne 1808 ; Woodhouse 1809 ; Bridge 1810 ; Marsh 1810 ; Glenie 1812 ; Hymers 1812 ; Wallace 1812 ; Herschel 1814 ; O. Gregory 1816 ; Keith 1816 ; Babbage 1817a ; James 1818 ; Luby 1825 ; Thomson 1825 ; Darley 1827 ; Lardner 1828].

20. Dans l'introduction de ce manuel utilisé à Cambridge, l'auteur rend compte aussi du changement de l'enseignement des mathématiques à l'université de Dublin durant la deuxième décennie du XIX^e siècle sous l'impulsion de B. Loyd. D'après lui, les ouvrages de référence sont alors ceux de Woodhouse sur la trigonométrie [Woodhouse 1809], de Brinkley sur l'astronomie, de Lacroix pour le calcul différentiel et intégral et de Poisson sur la mécanique [Lardner 1823, p. xxxviii].

par l'auteur dans l'introduction, le choix du titre « Algebraic Geometry » plutôt que « Application of Algebra to Geometry » témoigne d'une volonté de marquer clairement la place de cette pratique de la géométrie par opposition à l'ancienne géométrie synthétique. Lardner critique d'ailleurs longuement l'ouvrage de Leslie, *Geometrical Analysis & Geometry of Curved Lines* [1821], où celui-ci expose selon la méthode géométrique des anciens. Lardner considère qu'avec ce livre le but de Leslie est : « to produce a counter revolution in geometrical science in Great Britain, and to restore it to the state it had been in before the introduction of the modern analysis » [1823, p. xl]²¹.

Plusieurs ouvrages consacrés à ce domaine de la géométrie algébrique ou analytique (pouvant aussi contenir des thèmes ressortissant de la géométrie différentielle) sont alors publiés. On peut notamment citer les contributions de Henry Parr Hamilton [1826, 1828] et de Samuel Waud [1835] ; souvent directement destinés à l'enseignement, et de niveaux divers, elles s'inspirent clairement de manuels français de l'époque comme ceux de Lacroix [1798a], de Biot [1802] et, bien sûr, de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* de Monge [1807]. John Hymers [1830] présente son traité comme le premier, en langue anglaise, entièrement consacré à la géométrie de trois dimensions ; il y utilise à la fois l'algèbre et le calcul différentiel et intégral.

Au début de la préface de son ouvrage *An Elementary Treatise on the Application of the Algebraic Analysis to Geometry*, Wesley Woolhouse souligne la portée des recherches sur ce domaine : « The decidedly great advantage of the Modern Mathematicians over the Ancients, has almost entirely arisen from the introduction and refinement of the Algebraic Analysis, united with the Differential and Integral Calculus ; and particularly from the truly elegant and systematic mode which has been adopted in their application to problems connected with Geometry. » [Woolhouse 1831, p. 1]

* *

À l'issue de ce passage en revue des différents types de géométrie développés au cours de la période 1750-1830, plusieurs tendances se font jour²².

21. L'historien A. Craik [2000a] souligne la forte résistance du milieu culturel écossais à l'introduction de l'analyse continentale dans l'enseignement de la géométrie. Du point de vue de la recherche, le débat se fait aussi sentir au travers de l'échange qui fait suite à la publication, par Brewster et Carlyle, de la première traduction anglaise des *Éléments de géométrie* de Legendre [1822] : initiée par Leslie, qui remet en cause l'introduction de méthodes analytiques en géométrie, la querelle entraîne ces deux derniers, Ivory et un contributeur anonyme dans une discussion portant sur les fondements de la géométrie et les problèmes de rigueur posés par le rapprochement entre calcul et géométrie.

22. Voir, en annexe, le tableau I (p. 436) qui présente l'ensemble des productions de géométries relevées, classées par thème et par décennie.

Une continuité forte, tout d'abord, se dessine nettement en géométrie classique, tant en terme de nombre de textes produits que de thèmes développés. L'enseignement joue un rôle important dans ce cadre. La continuité pourrait bien aussi primer dans le domaine de la perspective, où l'application de l'approche taylorienne dans de nombreux domaines pratiques tout au long du XVIII^e siècle semble *a priori* se prolonger au début du XIX^e siècle : sur ce point, une étude reste cependant à conduire dans la lignée des travaux de K. Andersen [2007].

Concernant l'application de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie, nous observons une continuité sur certains sujets, tels que la rectification ou l'étude des courbes algébriques, dans la tradition impulsée par Newton et Maclaurin. Il est néanmoins particulièrement intéressant de constater l'apparition, dès les toutes premières années du XIX^e siècle (1802), de références aux travaux continentaux les plus récents : la rupture est ici particulièrement nette, même si la tradition analytique fluxionnelle apparaît encore prégnante pendant une vingtaine d'années, souvent par le biais de références aux contributions de Landen et de Waring dans la seconde moitié du XVIII^e siècle.

L'introduction de la géométrie descriptive en Grande-Bretagne s'effectue quant à elle de manière plus discrète et progressive, dès le milieu de la décennie 1800 jusque dans le courant des années 1820 et 1830, à la fois par le biais des écoles militaires et du milieu des architectes. Pour ce qui est des *Éléments de géométrie* de Legendre, ou d'autres traités de géométrie continentaux, les premières traductions imprimées ne paraissent qu'en toute fin de période, au début du second quart de siècle.

II. Lieux et modes de production et de diffusion de la géométrie

Afin de compléter cette image encore partielle de la production en géométrie de la Grande-Bretagne entre 1750 et 1830, il convient à présent de reconsidérer le même corpus sous d'autres angles de vue. Nous tenterons dans un premier temps d'en dresser une cartographie sociale et institutionnelle et d'en analyser les dynamiques, avant de nous concentrer plus avant sur l'étude de la diffusion de la géométrie suivant trois perspectives : les journaux et périodiques, l'enseignement de la géométrie, et le corpus encyclopédique britannique.

1. Auteurs, lieux et contextes de production

Comme la précédente partie le laisse aisément deviner, la production de géométrie, que ce soit à visée pratique, à visée d'enseignement ou de recherche, est le fruit d'un public divers et mouvant compte tenu de l'étendue temporelle de la période considérée.

Les universitaires y occupent une place importante, à commencer par les enseignants de mathématiques : l'un, Waring, est professeur lucasien à Cambridge, les autres enseignent dans des universités écossaises – Stewart, Playfair, Leslie et Wallace à Édimbourg, Simson à Glasgow. Signalons également des auteurs de géométrie professant dans d'autres domaines, tels que Farish, professeur de philosophie naturelle à Cambridge, Lardner à l'University College de Londres, ou Brinkley titulaire de la chaire d'astronomie à l'Université de Dublin.

Les professeurs et maîtres des académies militaires occupent aussi une place importante en mathématiques, avec au moins dix-huit représentants, soit à la Royal Military Academy de Woolwich (Muller, Simpson, Landmann, Cowley, Hutton, Bonnycastle, O. Gregory, Barlow, Davies), soit au Royal Military College de Sandhurst (Clarke, Leybourn, Wallace, Ivory, Lowry, Cunliffe, M. Noble, Galloway), soit à la Royal Naval Academy de Portsmouth (Witchell).

Les passerelles entre les académies militaires et les universités sont bien sûr nombreuses²³ : plusieurs des auteurs universitaires de géométrie ont, comme on le voit dans le tableau II, préalablement enseigné les mathématiques dans une académie militaire. De la même façon, plusieurs contributeurs, le plus souvent dans le *Mathematical Repository*, ou comme auteurs de manuels, ont été maîtres ou tuteurs dans une académie ou une université – c'est le cas de Bonnycastle, Hymers, Waud, Davies, Simpson, Stirling, Wallace, Emerson, John Wood – avant d'obtenir une situation plus prestigieuse ou de bifurquer vers un autre domaine²⁴.

En dehors des universitaires et enseignants, nous trouvons également dans les académies militaires des auteurs issus de domaines connexes aux mathématiques : des astronomes (Herschel, Maskelyne, Garrard, Brinkley), des architectes, souvent enseignants de dessin et/ou de perspective (Nicholson, E. Noble, Kirby), un peintre (Edwards), un arpenteur (Landen), des fabricants d'instruments mathématiques (Adams, Bransby). Plus loin encore des mathématiques, nous trouvons des médecins (Stedman, Pemberton, Birkbeck), des militaires passés par l'une des académies (Glenie, Glover), des prêtres ou pasteurs (Small, James Wood, Waud, Hymers, Horsley), ainsi qu'un homme politique (Brougham), un homme d'affaires (Glenie) et un légiste (Hamilton).

Le tableau ainsi dressé plaide pour une certaine continuité des positions sociales et institutionnelles des auteurs de géométrie dans les universités et les académies militaires. Nous retrouvons par ailleurs, avec ces deux

23. Un tableau récapitulatif des enseignants dans les universités et les académies militaires est donné en annexe : voir le tableau II, p. 438.

24. Lorsqu'ils sont ordonnés prêtres anglicans, les tuteurs de Cambridge quittent l'université pour occuper une charge liée à leur nouvelle fonction.

dernières, les deux principaux lieux porteurs de la réforme des mathématiques mis en évidence par N. Guicciardini [1989] pour le calcul différentiel et intégral. Voyons à présent ce qu'il en est des modes de diffusion de la géométrie au cours de la même période.

2. Périodiques

Les lieux habituels de publication d'articles de recherche en mathématiques en général, et de géométrie en particulier, en contiennent beaucoup moins à partir de la seconde partie du XVIII^e siècle²⁵. Dans les *Philosophical Transactions* de la Royal Society of London, qui constitue le média de diffusion privilégié des mathématiques en Grande-Bretagne au cours du second XVII^e et du premier XVIII^e siècle, seuls un peu plus de vingt-cinq articles de géométrie, ou attenants à la géométrie, paraissent entre 1750 et 1830. Les autres branches des mathématiques ne sont pas mieux loties : l'algèbre et l'analyse sont le sujet d'à peu près le même nombre d'articles. Landen²⁶ et Hellins²⁷ y sont les auteurs les plus prolifiques avec un total de huit articles portant sur les problèmes de rectification des courbes. À l'exception de deux articles de géométrie en lien avec l'astronomie [Witchell 1767 ; Pemberton 1772], les autres contributions concernent très majoritairement la géométrie classique²⁸. Si le volume d'articles publiés reste faible à la charnière des deux siècles, nous relevons néanmoins une continuité importante dans les thèmes traités.

Qu'en est-il des périodiques des deux académies créées à la fin du XVIII^e siècle en Irlande et en Écosse ? Dans les *Transactions of The Royal Irish Academy*, publiées tous les 2-3 ans à partir de 1787, chaque volume contient généralement entre 15 et 20 articles de sciences. Peu d'entre eux sont consacrés aux mathématiques, et encore moins à la géométrie, pour laquelle nous ne relevons que neuf occurrences, dont trois signées par Brinkley en 1800 et 1803 et deux publiées la même année, en 1825, par Lardner, sur le thème de la géométrie analytique. Les autres articles portent essentiellement sur des problèmes de géométrie classique. Quant aux *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, qui paraissent de façon plus erratique (au moins trois ans entre chaque volume) à partir de 1788, le bilan paraît somme toute assez similaire, avec huit articles au total²⁹, dont six sont dus à deux mathématiciens occupant une position

25. Sur les périodiques savants de l'époque, voir [Gascoigne 1985].

26. [Landen 1771, 1775].

27. [Hellins 1802, 1811].

28. [Waring 1764 ; Jones & Robertson 1773 ; Horsley 1775 ; Stedman 1775 ; Brougham 1798 ; Garrard 1808 ; Maskelyne 1808 ; Hey 1814].

29. Signalons que les volumes 7 (1815), 8 (1818) et 9 (1823) n'en contiennent aucun.

institutionnelle au sein de l'Université d'Édimbourg (Playfair et Wallace). Les mémoires portent sur les porismes d'Euclide [Playfair 1794 ; Wallace 1798], sur des problèmes de rectification ou de quadrature [Ivory 1798 ; Playfair 1805 ; Wallace 1812], ou relèvent de la géométrie classique [Small 1790 ; Glenie 1812 ; Wallace 1826].

Les périodiques créés entre la fin du XVIII^e et 1830 contiennent également peu de mathématiques. Pour la géométrie, les contributions sont l'œuvre d'Ivory [1816] dans les *Annals of Philosophy*, de Babbage [1817a,b] dans les premiers volumes du *Quarterly Journal of Science and the Arts*, de T. S. Davies [1826a-c, 1827] dans le *Philosophical Magazine*. On trouve aussi deux articles [Farish 1822 ; Morton 1830b] répartis dans les trois premiers volumes des *Transactions* de la Cambridge Philosophical Society, qui voit le jour en 1821.

Nous avons déjà souligné l'importance du *Mathematical Repository* pour la géométrie, et la géométrie classique en particulier. Comme N. Guicciardini le notait pour le *calculus*, nous sommes surtout frappés, pour la géométrie, par la place importante qu'y occupent semblablement les enseignants de Sandhurst (Ivory, Wallace, Lowry, Cunliffe et Noble) et de Woolwich (Barlow et O. Gregory). Néanmoins, si les contributions des mêmes auteurs en analyse peuvent être considérées comme l'une des premières manifestations d'un début de distanciation par rapport à la tradition fluxionnelle [Guicciardini 1989, p. 116-117], il ne semble pas en être de même en géométrie, où la très grande majorité des articles continue à s'inscrire dans une tradition assez classique (voir § I.1). Les quelques articles mobilisant l'analyse et l'algèbre pour l'étude de problèmes ou de courbes géométriques paraissent plutôt dans les périodiques académiques précédemment cités³⁰.

N'oublions pas, bien sûr, la rubrique de questions-réponses mathématiques publiées annuellement dans les *Ladies' Diary*. Si ce journal joue, avec d'autres³¹, un rôle fondamental pour la vulgarisation des mathématiques en Grande-Bretagne³², notamment auprès des *Philomaths*, il ne publie cependant aucun article de recherche proprement dite au cours de notre période. Compte tenu du public auquel le journal s'adresse, les questions restent souvent élémentaires et demeurent largement à l'écart des évolutions qui ont lieu à la suite de l'introduction des mathématiques

30. Le *Mathematical Repository* permet également à certains mathématiciens de se faire reconnaître. Tel sera le cas de T. S. Davies grâce à sa longue série de publications en géométrie classique.

31. Tel est le cas du *Gentleman's Diary* qui démarre en 1741. Le *Mathematical Repository* contient également une rubrique de questions-réponses.

32. Voir [Perl 1979 ; Albree & Brown 2009 ; Despeaux 2002, 2011 ; Costa 2000, 2002].

continentales³³. La rubrique de questions-réponses des *Ladies' Diary* constitue néanmoins un corpus privilégié pour se faire une idée de l'imprégnation des différentes branches des mathématiques dans ce public d'amateurs. Sur la période 1741-1760 étudiée par O. Pedersen [1963], presque 30% des questions posées appartiennent ainsi à la géométrie³⁴. Sur l'ensemble de la période de publication du journal (1704-1840)³⁵, près de la moitié des questions est classée en géométrie, avec un quart de géométrie classique, 35% de questions impliquant l'utilisation de l'algèbre et 17% dédiées à l'étude d'extrema.

Un autre média important pour la diffusion de la géométrie sur la période 1750-1830 correspond aux encyclopédies et dictionnaires. Avant de nous pencher plus avant sur ce corpus particulier, il semble utile d'insister sur le rôle central que jouent les écoles militaires au terme de ce passage en revue des positions institutionnelles des auteurs et des principaux modes de publication de géométrie. Le *Mathematical Repository*, dont le fondateur et directeur Thomas Leybourn enseigne les mathématiques à Sandhurst de 1802 à 1839, constitue, nous l'avons vu, un lieu de publication de géométrie classique privilégié par la communauté des enseignants de cette académie, et par quelques autres de Woolwich. Le poste d'éditeur des *Ladies' Diary* est de même respectivement occupé de 1774 à 1818, puis de 1819 à 1840, par deux enseignants de mathématiques à Woolwich : Hutton de 1773 à 1807, et O. Gregory de 1803 à 1838. En plus d'avoir regroupé les questions des *Ladies' Diary* de 1704 à 1816 dans un seul volume [Leybourn 1817], Leybourn est aussi l'éditeur du *Gentleman's Diary* à partir de 1821, à la suite d'O. Gregory qui en assurait la charge depuis 1804. Les deux dictionnaires de mathématiques de la période, celui de Hutton [1795, 1815], et celui de Barlow [1814], sont encore l'œuvre de deux enseignants de Woolwich. Nous constaterons bientôt qu'il existe aussi certains rapports entre les académies militaires et la rédaction des articles de géométrie dans les encyclopédies publiées au cours de la période. Voyons néanmoins, avant cela, comment évolue l'un des piliers de la diffusion de la géométrie en Grande-Bretagne, l'enseignement dans les principales universités et académies militaires.

33. J. Albree et S. H. Brown [2009] notent qu'entre 1822 et 1840, on y trouve 87 références à des travaux de mathématiciens britanniques, et 25 références continentales, majoritairement françaises. La plupart de ces dernières se concentrent cependant sur la période 1835-1840.

34. Suivie par la détermination de maxima et minima, qui concerne près de 15% des questions.

35. Voir [Albree & Brown 2009], qui s'appuie notamment sur [Leybourn 1817].

3. L'enseignement de la géométrie en Grande-Bretagne dans les universités et les académies militaires

Nous avons souligné l'existence d'une production significative et ininterrompue de manuels de géométrie – géométrie classique et pratique notamment, dont une importante part de perspective – tout au long de notre période d'étude. La géométrie constitue de fait le socle de l'enseignement des mathématiques dans le monde universitaire, à la fois en Angleterre et en Écosse, ainsi que dans les écoles militaires britanniques. Il reste à voir comment la situation évolue au cours de la période.

Le *Scots Magazine* de 1741 (p. 372) contient un compte rendu des enseignements de mathématiques de Maclaurin³⁶ à l'Université d'Édimbourg à destination de futurs praticiens ou ingénieurs. Le savant écossais y enseigne : les six premiers livres des *Éléments* d'Euclide et une partie de géométrie pratique (incluant la fortification) au cours de la première année ; la géométrie des solides et les sections coniques (pour l'artillerie) en deuxième année ; la perspective et l'application du calcul des fluxions à la géométrie en dernière année³⁷. À l'Université de Glasgow, R. Simson, auteur de l'édition de référence des *Éléments* d'Euclide pour toute la période 1750-1830, enseigne majoritairement les mathématiques des Anciens.

Au début du XIX^e siècle, la situation en Écosse reste à peu près identique. Comme le montre A. Craik [2000a], l'arrivée de l'analyse continentale s'accompagne même d'une forte résistance idéologique³⁸ à l'idée d'introduire le nouvel outil dans le programme d'enseignement de géométrie. Si Leslie et Wallace – qui succèdent respectivement de 1805 à 1819, et de 1819 à 1838 à Playfair comme titulaires de la chaire de mathématiques de l'Université d'Édimbourg – partagent un certain intérêt (certes nettement plus vivace chez Wallace que chez Leslie, plus conservateur) pour les nouveaux outils mathématiques venus du Continent, les deux perpétuent néanmoins fidèlement la tradition d'enseignement de la géométrie euclidienne héritée de Simson et de Playfair. Malgré tout, les autres branches des mathématiques ne sont pas négligées. Lors des examens de deuxième année pour 1817 par exemple, les questions incluent certes de la géométrie, mais aussi de l'arithmétique et de l'algèbre³⁹.

36. Sur les enseignements de Maclaurin, voir [Bruneau 2011].

37. Bien entendu, l'algèbre, l'arithmétique et d'autres parties des mathématiques ne sont pas négligées, mais nous ne les avons pas signalées ici.

38. La philosophie écossaise du sens commun promue par Thomas Reid, et qui exerce alors une influence importante sur les élites, concourt également à cette situation. Voir [Olson 1971 ; Ruffieux 2005].

39. Voir par exemple le programme pour les 8 et 15 mars 1817, University of Edinburgh Library, DC.1.101/4.

Dans les universités anglaises, notamment à Cambridge⁴⁰, le constat semble à peu près le même dans la seconde moitié du XVIII^e siècle : la géométrie domine, l'algèbre est présente et le calcul fluxionnel n'est enseigné que dans les classes les plus avancées. L'introduction des travaux continentaux dans les programmes d'enseignement semble en revanche particulièrement rapide, ainsi qu'en témoigne l'exemple, apporté par A. Craik, d'un élève, J. M. F. Wright, qui y débute ses études en 1815, soit trois ans seulement après la fondation de l'*Analytical Society*, et qui affirme avoir non seulement étudié des mathématiciens britanniques, mais aussi de nombreux travaux français, tels que le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* et des travaux d'algèbre de Lacroix, le *Système du Monde* de Laplace, le *Calcul des fonctions* et la *Mécanique analytique* de Lagrange, le *Calcul des dérivations* d'Arbogast, ainsi que des travaux de Francœur, Bossut et Garnier [Craik 2007, p. 62-63].

Dans les écoles militaires, sur lesquelles très peu de travaux sont disponibles⁴¹, il semble que l'enseignement de la géométrie, notamment classique et pratique, soit particulièrement mis en valeur au cours du second XVIII^e siècle. Dans le programme de la Royal Military Academy de Woolwich pour la période 1764-1772, l'enseignement de la géométrie est ainsi réparti entre le professeur de fortification et d'artillerie, le professeur de mathématiques et le maître de dessin. Le premier enseigne la géométrie pratique. Le professeur de mathématiques enseigne les principes de l'arithmétique, de l'algèbre, les éléments de géométrie, la mesure des surfaces et des solides, la trigonométrie plane, les sections coniques et la théorie de la perspective. Quant au professeur de dessin, il se concentre sur la pratique de la perspective [Guggisberg 1900, p. 25-26].

L'importance de la géométrie pratique et de la perspective dans l'enseignement des deux académies militaires au cours du second XVIII^e nous est par ailleurs indirectement confirmée par la part prise par les enseignants de dessin, de fortification et de mathématiques dans l'écriture de manuels. Tel est le cas de Cowley [1765], Muller [1765], Bonnycastle [1782], Landmann [1798] à Woolwich, et de Clarke [1776] à Sandhurst⁴².

À partir du début du XIX^e siècle, un examen d'entrée est instauré à Woolwich. Les candidats doivent avoir entre 14 et 16 ans, les exigences étant plus importantes pour les plus âgés que pour les plus jeunes. Les

40. Sur l'enseignement des mathématiques à l'université de Cambridge, voir [Rouse Ball 1889 ; Gascoigne 1984 ; Stray 2001 ; Craik 2007].

41. Voir [Guicciardini 1989, chap. 8 et appendice D] sur les écoles militaires et la réforme des mathématiques entre 1773 et 1819, [Johnson 1989b] sur les professeurs de mathématiques à Woolwich et [Johnson 1989a] sur Charles Hutton.

42. Le public du manuel de Bonnycastle ou de Landmann dépassera le strict cadre des élèves des académies militaires.

recommandations pour l'examen d'entrée de 1806 comportent la connaissance des deux premiers livres des *Éléments* d'Euclide, les premiers principes de l'algèbre (sans les équations cubiques) ainsi que le début du *Course of Mathematics* de Hutton [1798]⁴³. Si nous n'avons pas connaissance des programmes de l'académie pour les trois premières décennies du XIX^e siècle, ce cours de mathématiques de Hutton, « Composed, and more Especially Designed, for the Use of the Gentlemen Cadets in the Royal Military Academy at Woolwich », constitue néanmoins un support permettant de dessiner quelques tendances. Réédité pas moins de six fois entre 1798 et 1810, l'ouvrage est complété, en 1811, avec l'assistance d'O. Gregory, par un troisième volume réédité en 1813, en 1819-1820 avec les deux premiers opus, ainsi qu'à plusieurs autres reprises jusqu'en 1860.

Hutton y intègre la totalité du contenu de son cours sur les sections coniques [1787] et ajoute un complément sur les équations algébriques des sections coniques en guise de brève introduction à l'étude des propriétés algébriques des courbes. Il y insère un chapitre sur les isopérimètres et les extrema de surfaces et de solides « in which several propositions usually investigated by fluxionary processes are effected geometrically ; and in which, indeed, the principal results deduced by Thos. Simpson, Horsley, Legendre, and Lhuillier are thrown into the compass of one short tract » [Hutton 1811, p. iv]. On y trouve en outre des éléments de trigonométrie plane et sphérique, des procédés géométriques et calculatoires de division des terres, des compléments d'algèbre en lien avec les propriétés des courbes et la construction d'équations, une brève présentation des fluentes et équations fluxionnelles, ainsi que de nombreux éléments de mathématiques mixtes, traités sans analyse, notamment en hydrostatique, hydrodynamique, mécanique, en théorie des machines, en balistique et en géodésie. Si l'on rappelle que la nouvelle édition de son *Mathematical Dictionary*, qui paraît en 1815, révèle une très bonne connaissance des travaux continentaux (notamment ceux de d'Alembert, d'Euler et de Lagrange), la place infime réservée à l'algèbre et à l'analyse dans le troisième volume de son cours, et la très forte prégnance des méthodes géométriques britanniques traditionnelles, témoignent donc de la persistance d'un programme d'enseignement traditionnel des mathématiques à Woolwich.

Rappelons enfin qu'une traduction de la *Géométrie descriptive* de Monge aurait circulé dès les premières années du XIX^e siècle au sein des académies militaires, signe d'un possible enseignement précoce de la nouvelle discipline dans ce type d'institutions.

43. [Guggisberg 1900, p. 44-45].

4. Dictionnaires et encyclopédies

Comme le souligne N. Guicciardini [1989, p. 118-121], les encyclopédies jouent un rôle important dans les deux premières décennies du XIX^e siècle pour la diffusion de l'analyse continentale en Grande-Bretagne. Voyons ce qu'il en est pour la géométrie.

La tradition des encyclopédies britanniques⁴⁴ remonte au début du XVIII^e siècle, avec le *Lexicon Technicum* de Harris (1704-1710), réédité cinq fois jusqu'en 1736, et la *Cyclopædia* de Chambers (1728), qui ne comptera pas moins de sept éditions, un *Supplément* de deux volumes publié en 1753, ainsi qu'une édition complète et révisée par A. Rees entre 1778 et 1788. Cette tradition se poursuit notamment, dans la seconde moitié du siècle, par la parution de l'*Encyclopædia Britannica* dont les six premières éditions couvrent la majeure partie de notre période d'étude⁴⁵. D'autres encyclopédies voient par ailleurs le jour à la fin du XVIII^e siècle et au début du XIX^e siècle, notamment à Édimbourg. Tel est le cas de l'*Encyclopædia Perthensis* (1796-1806) en 23 volumes, de la nouvelle *Cyclopædia* (1802-1820) de A. Rees en 45 volumes, de l'*Edinburgh Encyclopædia* (1808-1830) en 18 volumes, ainsi que de la *Pantologia* (1813) et de l'*Encyclopædia Metropolitana* (1845) publiées à Londres, respectivement en 12 et 26 volumes. Conformément au genre lexicographique de l'époque, les recopies d'une édition et d'une encyclopédie à l'autre demeurent monnaie courante. L'étude des reprises et mises à jour d'articles, ainsi que des sources utilisées, constituent dès lors un moyen privilégié de saisir les continuités et les ruptures à l'œuvre dans le cadre de ce mode de diffusion des connaissances.

Les trois premières éditions de la *Britannica* ont récemment été étudiées par F. A. Kafker et J. Loveland [2009]. Pour les mathématiques en général, les deux historiens soulignent la forte domination des mathématiques pratiques et élémentaires aux dépens des mathématiques théoriques, totalement négligées, ainsi que le manque d'organisation de l'ensemble, et de liens entre les différentes parties. À l'exception de quelques nouveaux articles dans la troisième édition et le supplément (1801-1803)⁴⁶, le contenu de la première édition n'évolue quasiment pas dans les

44. Sur les entreprises encyclopédiques en Grande-Bretagne au cours de cette période, voir [Yeo 1991 ; Kafker 1994 ; Kafker & Loveland 2009].

45. La première, en 3 volumes, paraît entre 1771 et 1773, une deuxième édition en 10 volumes voit le jour entre 1778 et 1783, une troisième en 18 volumes en 1797, complétée par un *Supplément* de 2 volumes (1801-1803), une quatrième édition en 20 volumes en 1810, une cinquième de 20 volumes en 1817, une sixième en 20 volumes en 1823, elle-même complétée par un supplément de 6 volumes parus entre 1823 et 1824, ainsi qu'une septième édition de 22 volumes publiée en 1842.

46. Il s'agit, dans ce dernier cas, d'articles d'arithmétique [Kafker & Loveland 2009, p. 276].

deux suivantes, c'est-à-dire jusqu'à la fin du XVIII^e siècle. La géométrie fait l'objet de trois principaux articles dans cette première édition : CONIC SECTIONS, de 3 pages, TRIGONOMETRY, en 8 pages, ainsi qu'un article GEOMETRY de 26 pages composé de deux principales parties⁴⁷ : la première contient une série réordonnée de propositions tirées des *Éléments* d'Euclide ; la seconde, déconnectée de la première, constitue une compilation de D. Gregory [1745]. Si, comme annoncé, aucun des trois articles ne fait l'objet d'une réactualisation dans les deuxième et troisième éditions, cette dernière marque néanmoins l'entrée en scène d'un important contributeur au corpus encyclopédique, Wallace, sur le point de devenir maître de mathématiques à Sandhurst (1802). Celui-ci y ajoute en effet un article PORISM, en lien avec le mémoire [Wallace 1798] qu'il publie la même année [Panteki 1987, p. 121].

Cette addition annonce, dans une certaine mesure, le renouveau mathématique de la quatrième édition, publiée en 1810. Wallace en constitue l'un des principaux contributeurs grâce à plusieurs articles entièrement réécrits et actualisés, comme CONIC SECTIONS, qu'il publiera plus tard sous forme de traité [Wallace 1837], ou ALGEBRA et FLUXIONS, toujours rédigés dans le style newtonien, mais dans lesquels une large place est laissée à l'application du calcul différentiel à la géométrie (problèmes d'extrema, de rayon de courbure, etc.). C'est dans cette édition qu'apparaissent en outre les premières références aux travaux continentaux, comme en témoigne l'article MATHEMATICS, constitué d'un précis historique d'une quinzaine de pages se concluant par la mention des travaux de Laplace, Lagrange, Lacroix, Cousin, Bossut ou Legendre. L'article GEOMETRY, qui change de même en profondeur, offre désormais une synthèse des *Éléments de géométrie* de Legendre, présentés comme l'ouvrage « the most complete and extensive that has yet appeared » [vol. 9, 1810, p. 631].

Comme nous le signalions, la *Pantologia* [vol. 5, 1813] renferme la première référence imprimée que nous ayons pu trouver de la *Géométrie descriptive* de Monge dans l'ensemble des ouvrages consultés. Cette référence prend la forme d'une sous-entrée GEOMETRY (Descriptive) de l'article GEOMETRY, dans lequel son auteur, O. Gregory, définit le sujet comme « the name given to a species of geometry almost entirely new, and which we owe in great measure to M. Monge », avant d'en donner une brève présentation d'une vingtaine de lignes, et de renvoyer aux traités de Lacroix et de Monge sur le sujet. La sous-entrée est reprise telle quelle par Barlow dans l'article DESCRIPTIVE *Geometry* [Barlow 1814], puis par Hutton sous la sous-entrée

47. Dans les six premières éditions de la *Britannica*, l'article PERSPECTIVE s'appuie sur les travaux de Taylor à travers la troisième édition de [Taylor 1719] par Colson. Une courte introduction historique est ajoutée à la seconde édition. Les suivantes sont identiques.

GEOMETRY (Descriptive) de la seconde édition de son propre dictionnaire [Hutton 1815, vol. 1, p. 581].

L'*Edinburgh Encyclopædia* (1808-1830) contient à son tour de nombreuses références aux travaux continentaux, que ce soit en analyse – avec, en particulier, l'article FLUXIONS de Wallace⁴⁸ – ou en géométrie. C'est encore le cas de la géométrie descriptive, abordée dans une entrée GEOMETRY, DESCRIPTIVE différente de celles de Gregory, de Barlow ou de Hutton, et complétée par un renvoi indiquant que le sujet a déjà été traité sous l'entrée CONSTRUCTIVE CARPENTRY de l'article CARPENTRY par Peter Nicholson. Publié dans le dixième volume (1816), l'article GEOMETRY de Wallace contient aussi une liste significative d'ouvrages de géométrie intégrant à la fois les principales contributions britanniques du XVIII^e siècle et les publications continentales les plus récentes : parmi elles, la *Géométrie descriptive* de Monge [1799], les *Éléments de Géométrie descriptive* de Lacroix [1802], la *Géométrie du compas* de Mascheroni [1798], la *Géométrie de position* de Carnot [1803], ainsi que la neuvième édition des *Éléments de géométrie* de Legendre (1812). Wallace renvoie par ailleurs, sur l'histoire de la géométrie, à la seconde édition de l'*Histoire des mathématiques* de Montucla [1799-1802], ainsi qu'à celle de Bossut [1802], traduite en anglais dès 1803. Pour ce qui est du contenu de l'article :

« To such as are entering on the study of geometry, we would recommend any one of the following works : Simson's Euclid, Playfair's Geometry, Legendre *Geometrie*, Leslie's Geometry. Indeed, we would recommend the perusal of Legendre's work with any of the others. We have chiefly kept it in view in drawing up the following article. » (*Edinburgh Encyclopædia*, vol. 10, 1816)

Si nombre de ces articles de mathématiques intègrent à présent des références aux travaux continentaux, le problème général du mélange réalisé entre tradition britannique et innovation importée du Continent ne s'en pose pas moins. L'*Edinburgh Encyclopædia* contient par exemple quelques dissensions révélatrices des tensions qui agitent le milieu mathématique écossais concernant les relations entre géométrie et analyse. Leslie, plutôt conservateur sur ce point malgré un réel intérêt pour les recherches françaises, signe ainsi un article ANALYSIS principalement dédié à une géométrie pensée dans la tradition des Anciens, totalement indépendante, donc, de l'algèbre et de l'analyse continentales. Dans les volumes suivants, l'article FLUXIONS de Wallace, et surtout MATHEMATICS de Herschel, défendent *a contrario* l'application de l'analyse continentale dans le domaine de la géométrie [Craik 2000a, p. 142].

Plus tardive, et londonienne, la *Metropolitana* abandonne l'ordre alphabétique au profit d'une succession méthodique de traités dédiés à

48. Voir [Panteki 1987 ; Guicciardini 1989 ; Craik 1999].

différents sujets. Tel est l'objectif de Barlow avec l'entrée GEOMETRY, dont l'introduction historique de huit pages intègre le précis donné par Wallace dans l'article de même nom de la quatrième édition de la *Britannica*, ainsi que le contenu de l'entrée GEOMETRY (Descriptive) de la *Pantologia*⁴⁹. Le traité d'une cinquantaine de pages qui lui fait suite repose sur « *The treatises of Geometry*, by Lacroix, and Le Gendre ; to which latter work we have been much indebted, in compiling the following treatise, although we have, in some instances, deviated widely from it. » [*Encyclopædia Metropolitana*, Pure sciences, vol. 1, 1845, p. 313]

Conclusions

Ce passage en revue de quelques articles de géométrie dans les principales encyclopédies et dictionnaires de la période confirme certaines des tendances mises au jour dans les parties précédentes, à commencer par l'importance du milieu mathématique écossais dans la diffusion des écrits géométriques les plus récemment publiés sur le continent. Les principaux auteurs de géométrie dans le corpus encyclopédique britannique ne sont autres, en effet, que les écossais O. Gregory⁵⁰ et Wallace, enseignant de mathématiques à Woolwich pour le premier, et à Sandhurst pour le second. D'autres, comme Bonnycastle ou Ivory, participent également activement à l'aventure, de même, on l'a vu, que les deux auteurs de dictionnaires de mathématiques, Barlow et Hutton.

Comme N. Guicciardini et A. Craik le montrent pour l'analyse, le milieu écossais, étroitement lié à celui des académies militaires, intègre donc précocement les sources géométriques du Continent, que ce soit par l'intermédiaire de publications de recherches, ou des dictionnaires et encyclopédies publiés au cours des premières décennies. Les *Éléments de géométrie* de Legendre, qui sont utilisés dès le début du XIX^e siècle en Grande-Bretagne bien que la première traduction anglaise ne paraisse qu'en 1822, jouent un rôle particulièrement central dans ce processus. L'apparition d'entrées dédiées à la géométrie descriptive dès les premières années de la décennie 1810 plaident en outre en faveur de l'hypothèse avancée par S. Lawrence [2003], selon laquelle la *Géométrie descriptive* de Monge [1799] aurait circulé très tôt dans le milieu des académies militaires. Le processus semble en revanche plus tardif dans le domaine de la géométrie faisant usage de l'algèbre ou de l'analyse.

49. Nous constatons également l'apparition de références au « Développement de la géométrie, and Applications de Géométrie, by Baron Dupin ».

50. Dont il faut signaler qu'il joue aussi le rôle de coéditeur de la *Pantologia*.

Ce mouvement réformiste ne doit cependant pas faire oublier la prégnance de la géométrie classique sur l'ensemble de la période, notamment dans le domaine de l'enseignement. Ce constat s'applique surtout, et paradoxalement, aux universités écossaises et aux académies militaires, dans les programmes desquels l'intégration des outils analytiques semble rencontrer de plus fortes résistances qu'à Cambridge, par exemple. La question de l'enseignement des mathématiques en général, et de la géométrie en particulier, demeure cependant très mal connue, et des recherches complémentaires sont donc nécessaires afin d'étayer ces premières conclusions. L'existence d'une tradition durable d'application pratique de la théorie taylorienne de la perspective paraît également très probable, bien qu'une étude plus détaillée des productions des premières décennies du XIX^e demeure, là encore, absolument nécessaire.

Cette première tentative de cartographie des travaux géométriques pour la période 1750-1830 ouvre une autre piste de travail consistant, dans la lignée des recherches conduites par Kafker et Loveland [2009] sur les trois premières éditions de la *Britannica*, à mener une étude systématique du traitement de la géométrie et, plus généralement, des différentes branches du savoir mathématique, dans le corpus encyclopédique et les dictionnaires de mathématiques, de peinture et d'architecture britanniques. Nous n'en cernerions que mieux les différentes ruptures et continuités et leurs temporalités respectives dans l'évolution des multiples facettes du développement de la géométrie à cette époque.

BIBLIOGRAPHIE

Abréviations : *The British Journal for the History of Science* : BJHS / *Journal of the British Society for the History of Mathematics* : JBSHM / *Historia Mathematica* : HM / *Mathematical Repository* : Math. Rep. / *New series of the Mathematical Repository* : New Math. Rep. / *The Philosophical Magazine* : Phil. Mag. / *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* : Phil. Trans. London / *The Quarterly Journal of Science and the Arts* : *The Quarterly* / *The Transactions of the Royal Irish Academy* : *Trans. Irish Acad.* / *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* : *Trans. Edinburgh*.

Sources primaires

- [Adams 1791] George Adams, *Geometrical and graphical essays*, London, 1791.
- [Babbage 1817a] Charles Babbage, « Demonstration of some of Dr. Matthew Stewart's General Theorems », *The Quarterly*, 1 (1817), p. 6-24.
- [Babbage 1817b] C. Babbage, « Solution of some Problems by Means of the Calculus of Functions », *The Quarterly*, 2 (1817), p. 371-379.
- [Barlow 1809] Peter Barlow, « Demonstration of the Cotesian Theorem », *Journal of Natural Philosophy, Chemistry and the Arts*, 24 (1809), p. 278-283.

- [Barlow 1814] P. Barlow, *A New Mathematical and Philosophical Dictionary*, London, 1814.
- [Biot 1802] Jean-Baptiste Biot, *Essai de géométrie analytique*, Paris, 1802.
- [Birkbeck 1827] George Birkbeck, *Mathematics practically applied to the useful and fine arts*, 1827. Tr. anglaise de [Dupin 1825].
- [Bonycastle 1782] John Bonycastle, *An Introduction to Mensuration and Practical Geometry*, London, 1782.
- [Bonycastle 1789] J. Bonycastle, *Euclid's elements of geometry*, London, 1789.
- [Bonycastle 1806] J. Bonycastle, *A treatise on plane and spherical trigonometry*, London, 1806.
- [Bossut 1802] Charles Bossut, *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*, 2 vol., Paris, 1802.
- [Bransby 1814] John Bransby, « Properties of a right-angled triangle », *New Math. Rep.*, 3 (1814), p. 71-80.
- [Bridge 1810] Bewick Bridge, *Six lectures on the elements of plane trigonometry, with the method of constructing tables of natural and logarithmic sines, cosines, tangents, &c.*, 1810.
- [Brinkley 1800a] John Brinkley, « General demonstrations of the theorems for the sines and cosines of multiple circular arcs », *Trans. Irish Acad.*, 7 (1800), p. 27-51.
- [Brinkley 1800b] J. Brinkley, « A General Demonstration of the Property of the Circle Discovered by Mr. Cotes », *Trans. Irish Acad.*, 7 (1800), p. 151-159.
- [Brinkley 1803] J. Brinkley, « A Theorem for Finding the Surface of an Oblique Cylinder, with Its Geometrical Demonstration », *Trans. Irish Acad.*, 9 (1803), p. 145-158.
- [Brougham 1798] Henry Brougham, « General Theorems, Chiefly Porisms, in the Higher Geometry », *Phil. Trans. London*, 88 (1798), p. 378-396.
- [Carnot 1803] Lazare Carnot, *Géométrie de position*, Paris, 1803.
- [Clairaut 1741/1836] Alexis Clairaut, *Éléments de géométrie*, Paris, 1741. Tr. angl. par J. B. White, *Elements of geometry for the use of the Irish national schools (Parts first and second)*, Dublin, 1836.
- [Clarke 1776] Henry Clarke, *Practical Perspective*, London, 1776.
- [Cowley 1765] John Lodge Cowley, *The Theory of Perspective, Demonstrated in a Method Entirely New*, London, 1765.
- [Crozet 1821] Claudius Crozet, *A Treatise on Descriptive Geometry*, New York, 1821.
- [Cunliffe 1819] James Cunliffe, « Certain properties appertaining to a Triangle inscribed in a given Circle », *New Math. Rep.*, 4 (1819), p. 117-124.
- [Cunliffe 1835] J. Cunliffe, « Certain Properties appertaining to a Plane Triangle brief demonstrated », *New Math. Rep.*, 6 (1835), p. 124-128.
- Cyclopædia: or An Universal Dictionary of Arts and Sciences*, E. Chambers (éd.), 2 vol., London, 1728.
- The Cyclopaedia; or, Universal Dictionary of Arts, Sciences, and Literature*, Abraham Rees (éd.), 45 vol., London, 1802-1820.
- [Dalby 1806] Isaac Dalby, *A Course of Mathematics designed for the use of the officers and cadets of the Royal Military college*, London, 1806.
- [Darley 1827] George Darley, *A system of popular trigonometry*, 1827.
- [Darré 1813] André Darré, *Elements of geometry, with both plane and spherical trigonometry*, 1813.
- [Davies 1826a] Thomas Stephen Davies, « Demonstration of Mr. Levy's property of the regular octahedron », *Phil. Mag.*, LXVII (janv. 1826), p. 52-55.

- [Davies 1826b] T. S. Davies, « Properties of the trapezium », *Phil. Mag.*, LXVIII (juil.-déc. 1826), p. 116-125.
- [Davies 1826c] T. S. Davies, « Properties of Pascal's Hexagramme Mystique », *Phil. Mag.*, LXVIII (juil.-déc. 1826), p. 333-339.
- [Davies 1827] T. S. Davies, « Symmetrical properties of plane triangles », *Phil. Mag.*, New Series, II (juil.-déc. 1827), p. 26-34.
- [Davies 1830a] T. S. Davies, « On Geometry of Three Dimensions », *New Math. Rep.*, 5 (1830), p. 111-121, 156-168.
- [Davies 1830b] T. S. Davies, « On the Stereographic Projection », *New Math. Rep.*, 5 (1830), p. 143-156.
- [Davies 1835a] T. S. Davies, « On Rule Surfaces », *New Math. Rep.*, 6 (1835), p. 8-41.
- [Davies 1835b] T. S. Davies, « On Stereographic Projection », *New Math. Rep.*, 6 (1835), p. 41-53.
- [Davies 1835c] T. S. Davies, « On Spherical Geometry », *New Math. Rep.*, 6 (1835), part. I, p. 60-80 et part. II, p. 128-140.
- [Davies 1835d] T. S. Davies, « New Researches in Spherical Trigonometry », *New Math. Rep.*, 6 (1835), p. 168-188.
- [Davies 1835e] T. S. Davies, « On the Deviation between Two Curves », *New Math. Rep.*, 6 (1835), p. 189-192.
- [Donne 1775] Benjamin Donne, *The geometrician: containing essays on plane geometry, and trigonometry*, 1775.
- [Douglas 1809] Howard Douglas, « An Occular Demonstration of the Forty-seventh proposition of the First book of Euclid », *New Math. Rep.*, 2 (1809), p. 12-14.
- [Douglass 1812] George Douglass, *The Elements of Euclid* [livres 1-6, 11,12], 1812.
- [Draper 1772] John Draper, *The young student's pocket companion, or Arithmetic, geometry, trigonometry, and mensuration*, 1772.
- [Dupin 1825] Charles Dupin, *Géométrie et Mécanique des Arts et Métiers et des Beaux-Arts*, Bruxelles, 1825.
- The Edinburgh Encyclopaedia*, D. Brewster (éd.), 18 vol., 1808-1830.
- [Edwards 1803] Edward Edwards, *A practical treatise of perspective*, 1803.
- [Emerson 1764] William Emerson, *The Elements of Trigonometry*, 2^e éd., 1764.
- [Emerson 1768] W. Emerson, *Perspective : Or the Art of Drawing the Representations of all Objects upon a Plane*, London, 1768.
- Encyclopædia Britannica ; or, a dictionary of arts and sciences*, 1^{re} éd., 3 vol., 1771-1773 ; 2^e éd., 10 vol., 1778-1783 ; 3^e éd., 18 vol., 1797, et *Supplément*, 2 vol., 1801-1803 ; 4^e éd., 20 vol., 1810 ; 5^e éd., 20 vol., 1817 ; 6^e éd., 20 vol., 1823 ; *Supplément aux 4^e-6^e éd.*, 6 vol., 1823-1824 ; 7^e éd., 22 vol., 1842.
- Encyclopædia Metropolitana ; or, Universal Dictionary of Knowledge, on an original plan*, 30 vol., 1845.
- Encyclopædia Perthensis ; or Universal Dictionary of Knowledge*, 23 vol., 1796-1806.
- Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (1751-1765), Diderot et d'Alembert (éd.), 17 vol.
- [Farish 1822] William Farish, « On Isometrical perspective », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1 (1822), p. 1-20.
- [Fournier 1761] Daniel Fournier, *A Treatise of the Theory and Practice of Perspective*, London, 1761.
- [Galloway 1830] Thomas Galloway, « On Porisms », *New Math. Rep.*, 5 (1830), p. 76-92, 103-111.

- [Garrard 1808] William Garrard, « On a New Property of the Tangents of the Three Angles of a Plane Triangle », *Phil. Trans. London*, 98 (1808), p. 120-121.
- [Glenie 1812] James Glenie, « A Geometrical Investigation of some curious and interesting Properties of the Circle », *Trans. Edinburgh*, 6 (1812), p. 21-70.
- [Glover 1835] Glover, « On the Cycloid », *New Math. Rep.*, 6 (1806), p. 123-124.
- [Gompertz 1806] Benjamin Gompertz, « On the length of the arc of a circle in terms of the tangent », *New Math. Rep.*, 1 (1806), p. 33-34.
- [D. Gregory 1745] David Gregory, *A Treatise of Practical Geometry in Three parts*, Edinburgh, trad. par C. Maclaurin, 1745.
- [O. Gregory 1816] Olynthus Gregory, *Elements of Plane and Spherical Trigonometry*, 1816.
- [Hachette 1818] Jean-Nicolas-Pierre Hachette, *Second supplément de la Géométrie descriptive, suivi de l'Analyse géométrique de M. John Leslie*, Paris, 1818.
- [Hall 1841] Thomas Grainger Hall, *The elements of Descriptive Geometry: chiefly intended for Students in Engineering*, London, 1841.
- [Hamilton 1826] Henry Parr Hamilton, *The principles of analytical geometry*, 1826.
- [Hamilton 1828] H. P. Hamilton, *An Analytical System of Conic Sections*, Cambridge, 1828.
- [Harrison 1795-1801] M. A. Harrison, « Useful Propositions in Geometry », *Math. Rep.*, 1 (1795), p. 283-285, 367-371 ; 2 (1801), p. 23-25, 234-237.
- [Hellins 1788] John Hellins, *Mathematical essay on several subjects*, 1788.
- [Hellins 1802] J. Hellins, « Of the Rectification of the Conic Sections », *Phil. Trans. London*, 92 (1802), p. 448-476.
- [Hellins 1811] J. Hellins, « On the Rectification of the Hyperbola by Means of Two Ellipses », *Phil. Trans. London*, 101 (1811), p. 110-149.
- [Herschel 1814] John F. William Herschel, « New Properties of the Conic Sections », *New Math. Rep.*, 3 (1814), p. 58-59.
- [Hey 1814] Richard Hey, « Propositions containing some Properties of Tangents to Circles ; and of Trapeziums inscribed in Circles, and non-inscribed. Together with Propositions on the Elliptic Representations of Circles, upon a plane surface, by Perspective », *Phil. Trans. London*, 104 (1814), p. 348-396.
- [Highmore 1754] Joseph Highmore, *A Critical Examination of those two Paintings on the Ceiling of the Banqueting-House at Whitehall, in which Architecture is introduced, so far as relates to the Perspective*, London, 1754.
- [Highmore 1763] J. Highmore, *The Practice of Perspective on the Principles of Dr. Brook Taylor*, London, 1754.
- [Horsley 1775] Samuel Horsley, « De Polygonis Area Vel Perimetro Maximis et Minimis », *Phil. Trans. London*, 65 (1775), p. 301-310.
- [Hutton 1787] Charles Hutton, *Elements of Conic sections*, London, 1787.
- [Hutton 1795] C. Hutton, *A Mathematical and Philosophical Dictionary*, 2 vol., 1795.
- [Hutton 1798-1801] C. Hutton, *A Course of Mathematics*, 2 vol., 1798 et 1801.
- [Hutton 1811] C. Hutton, *A Course of Mathematics in three volumes*, vol. 3, 1811.
- [Hutton 1815] C. Hutton, *A Philosophical and Mathematical Dictionary*, 1815.
- [Hymers 1812] John Hymers, *A treatise in trigonometry and on trigonometrical tables and logarithms*, Cambridge, 1812.
- [Hymers 1830] J. Hymers, *A Treatise on Analytical Geometry of Three Dimensions*, Cambridge, 1830.
- [Ivory 1798] James Ivory, « A New series for the Rectification of the Ellipsis », *Trans. Edinburgh*, 4 (1798), p. 177-190.

- [Ivory 1806a] J. Ivory, « Demonstration of some Propositions relating to such portions of the surface and solidity of a sphere as may be exactly squared and cubed », *New Math. Rep.*, 1 (1806), part II, p. 1-5.
- [Ivory 1806b] J. Ivory, « Geometrical Propositions », *New Math. Rep.*, 1 (1806), p. 17-21.
- [Ivory 1816] J. Ivory, « Solution of a curious mathematical problem », *Annals of Philosophy*, 8 (1816), p. 273-276.
- [James 1818] Samuel James, « On the Inscription of a Regular Polygon of Seventeen Sides in a Circle », *Trans. Irish Acad.*, 13 (1818), p. 175-187.
- [Jones & Robertson 1773] William Jones et John Robertson, « Properties of the Conic Sections », *Phil. Trans. London*, 63 (1773), p. 340-360.
- [Keith 1816] Thomas Keith, *An introduction to the theory of plane and spherical trigonometry*, 1816.
- [Kirby 1754] John Joshua Kirby, *Dr. Brook Taylor's Method of Perspective Made Easy, Both in Theory and Practice*, 1754.
- [Lacroix 1798a] Sylvestre-François Lacroix, *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et application de l'algèbre à la géométrie*, Paris, 1798.
- [Lacroix 1798b] S.-F. Lacroix, *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, vol. 2, Paris, 1798.
- [Lacroix 1802] S.-F. Lacroix, *Essais de géométrie sur les plans et les surfaces courbes : (Éléments de géométrie descriptive)*, 2nd éd., Paris, 1802.
- [Lagrange 1786] Joseph-Louis Lagrange, « Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré », *Mémoires de l'Académie de Turin*, années 1784-1785 (1786), p. 218-290 ; *Œuvres de Lagrange*, t. 2, p. 253-312.
- [Lagrange 1797] J.-L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1797.
- [Landen 1755] John Landen, *Mathematical Lucubrations Containing New Improvements in Various Branches of the Mathematics*, 1755.
- [Landen 1771] J. Landen, « A Disquisition concerning Certain Fluents, Which are Assignable by the Arcs of the Conic Sections », *Phil. Trans. London*, 61 (1771), p. 298-309.
- [Landen 1775] J. Landen, « An Investigation of a General Theorem for Finding the Length of Any Arc of Any Conic Hyperbola », *Phil. Trans. London*, 65 (1775), p. 283-289.
- [Landen 1780-1789] J. Landen, *Mathematical Memoirs respecting a Variety of Subjects*, Londres, vol. 1, 1780 et vol. 2, 1789.
- [Landmann 1798] Isaac Landmann, *Practical Geometry for the use of the Royal Military Academy at Woolwich*, 1798.
- [Lardner 1823] Dionysius Lardner, *A System of Algebraic Geometry*, 1823.
- [Lardner 1825a] D. Lardner, « On the General Properties of Algebraic Surfaces », *Transactions of the Royal Irish Academy*, 14 (1825), p. 69-74.
- [Lardner 1825b] D. Lardner, « An Investigation of the Lines of Curvature of Ellipsoids, Hyperboloids and Paraboloids », *Transactions of the Royal Irish Academy*, 14 (1825), p. 75-102.
- [Lardner 1828] D. Lardner, *An Analytical Treatise on Plane and Spherical Trigonometry, and the Analysis of Angular Sections*, 1828.
- [Lawson 1795] Lawson, « A Dissertation on the Geometrical Analysis of the Anciens », *Math. Rep.*, 1 (1795), p. 1-14.
- [Legendre 1794-1812] Adrien-Marie Legendre, *Éléments de géométrie avec des notes*, 1^{re} éd., 1794 ; 9^e éd., 1812.
- [Legendre 1822] A.-M. Legendre, *Elements of Geometry and Trigonometry*, 1822.

- [Leslie 1809] John Leslie, *Elements of Geometry, Geometrical Analysis, and Plane Trigonometry*, 1^{re} éd., 1809 ; 2^{de} éd., 1811. Trad. fr. de la 2^e éd. dans [Hachette 1818].
- [Leslie 1821] J. Leslie, *Geometrical analysis, and geometry of curve lines (A course of mathematics, vol. 2)*, 1821.
- [Leslie 1828] J. Leslie, *Rudiments of plane geometry, including geometrical analysis, and plane trigonometry*, 1828.
- Lexicon technicum or, an universal english dictionary of arts and sciences*, John Harris (éd.), 2 vol., 1704-1710.
- [Leybourn 1817] Thomas Leybourn, *The mathematical questions, proposed in the Ladies' Diary, and their original answers: together with some new solutions, from its commencement in the year 1704 to 1816*, 1817.
- [Lowry 1795a] John Lowry, « Lucubrations on Spherics », *Math. Rep.*, 1 (1795), p. 39-46, 89-99, 164-173.
- [Lowry 1795b] J. Lowry, « General Problems », *Math. Rep.*, 1 (1795), p. 182-187.
- [Lowry 1801] J. Lowry, « Geometrical Sections », *Math. Rep.*, 2 (1801), p. 311-316.
- [Luby 1825] Thomas Luby, *An Elementary Treatise on Trigonometry*, 1825.
- [Ludlam 1785] William Ludlam, *The Rudiments of Mathematics: Designed for the Use of Students at the Universities*, 1785.
- [Maclaurin 1742] Colin Maclaurin, *Treatise of Fluxions*, Edinburgh, 2 vol., 1742.
- [Malton 1774] Thomas Malton, *A Royal Road to Geometry*, 1774.
- [Malton 1775] T. Malton, *A Compleat Treatise on Perspective in Theory and Practice on the True Principles of Dr. Brook Taylor*, 1775.
- [Malton 1783] T. Malton, *An Appendix or Second Part to the Compleat Treatise on Perspective*, London.
- [Malton 1793] T. Malton, *The New Royal Road to Geometry*, 1793.
- [Marsh 1810] John Marsh, *The first principles of geometry and trigonometry*, 1810.
- [Mascheroni 1798] Lorenzo Mascheroni, *Géométrie du compas*, Paris, trad. fr. par A. M. Carette, 1798.
- [Maseres 1760] Francis Maseres, *Elements of plane trigonometry*, 1760.
- [Maskelyne 1808] Nevil Maskelyne, « On a New Property of the Tangents of Three Arches Trisecting the Circumference of a Circle », *Phil. Trans. London*, 98 (1808), p. 122-123.
- [Mauduit & Crakelt 1768] Antoine-René Mauduit et William Crakelt, *A new & complete treatise of spherical trigonometry*, 1768.
- [Monge 1799] Gaspard Monge, *Géométrie descriptive*, Paris, 1799.
- [Monge 1807] G. Monge, *Applications de l'Analyse à la Géométrie*, Paris, 1807.
- [Montucla 1799-1802] Jean-Étienne Montucla, *Histoire des mathématiques*, 2^e éd., 4 vol., Paris, 1799-1802.
- [Morton 1830a] Pierce Morton, *Geometry, plane, solid, and spherical. To which is added, in an appendix, the theory of projection*, 1830.
- [Morton 1830b] P. Morton, « On the focus of a Conic Section », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 3 (1830), p. 185-190.
- [Muller 1765] John Muller, *Elements of Mathematics: Containing Geometry, Conic Sections, Trigonometry*, 2 vol., 1765.
- [Muller 1773] J. Muller, *New elements of mathematics: or Euclid corrected*, 1773.
- [Newton 1704a] Isaac Newton, *Enumeratio linearum Tertii Ordinis*, dans [Newton 1704b, p. 139-169].
- [Newton 1704b] I. Newton, *Opticks: or, a Treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light*, 1704.

- [Newton 1704c] I. Newton, *Tractatus de Quadratura Curvarum*, dans [Newton 1704b, p. 164-211].
- [Newton 1707] I. Newton, *Arithmetica Universalis; sive De Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*, Cambridge, 1^{re} éd., 1707; 2^e éd., 1722.
- [Newton 1711] I. Newton, *Analysis Per Quantitum Series, Fluxiones, ac Differentias: cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis*, London, 1711.
- [Newton 1720] I. Newton, *Universal Arithmetick: Or a Treatise of Arithmetica Composition and Resolution*, London, 1720.
- [Nicholson 1813] Peter Nicholson, *Architectural Dictionary*, vol. 1, 1813.
- [Nicholson 1819] P. Nicholson, « A Problem », *New Math. Rep.*, 4 (1819), p. 26-30.
- [Nicholson 1822] P. Nicholson, *The rudiments of practical perspective*, 1822.
- [Nicholson 1827] P. Nicholson, *A Popular and Practical Treatise on Masonry and Stone-Cutting*, London, 1827.
- [E. Noble 1771] Edward Noble, *The Elements of Linear Perspective*, London, 1771.
- [M. Noble 1806] Mark Noble, « Geometrical Porisms », *New Math. Rep.*, 1 (1806), p. 35-39.
- Pantologia. A new cyclopædia, comprehending a complete series of essays, treatises, and systems, alphabetically arranged*, J. Mason Good, O. Gregory, N. Bosworth (éd.), 12 vol., 1813.
- [Payne 1772] William Payne, *Elements of Trigonometry, Plain and Spherical*, 1772.
- [Pemberton 1772] Henry Pemberton, « Geometrical Solutions of Three Celebrated Astronomical Problems », *Phil. Trans. London*, 62 (1772), p. 434-446.
- [Playfair 1794] John Playfair, « On the Origin and Investigation of Porisms », *Trans. Edinburgh*, 3 (1794), p. 154-205.
- [Playfair 1795] J. Playfair, *Elements of Geometry*, 1795.
- [Playfair 1805] J. Playfair, « Investigation of Theorems relating to the Figure of the Earth », *Trans. Edinburgh*, 5 (1805), p. 3-30.
- [Priestley 1770] Joseph Priestley, *A Familiar Introduction to the Theory and Practice of Perspective*, London, 1770.
- [Scoticus 1806] Scoticus, « A Geometrical Porism, with two examples of its application... », *New Math. Rep.*, 1 (1806), part II, p. 16-17.
- [Simpson 1745] Thomas Simpson, *A Treatise of Algebra*, London, 1745.
- [Simpson 1747] T. Simpson, *Elements of Plane Geometry*, London, 1747.
- [Simpson 1765] T. Simpson, *Trigonometry, Plane and Spherical*, 1765.
- [Simson 1756] Robert Simson, *The elements of Euclid, viz. the first six books, together with the eleventh and twelfth*, Glasgow, 1756.
- [Simson 1776] R. Simson, *Roberti Simson, M. D. matheseos nuper in academia Glasguensi professoris Opera quaedam reliqua... Nunc primum post auctoris mortem in lucem edita*, 1776.
- [Small 1790] Robert Small, « Demonstrations of some Dr Matthew Stewart's General Theorems », *Trans. Edinburgh*, 2 (1790), p. 112-134.
- [Stedman 1775] John Stedman, « Of Triangles Described in Circles and about Them », *Phil. Trans. London*, 65 (1775), p. 296-300.
- [Stewart 1746] Matthew Stewart, *General theorems of considerable use in the higher parts of mathematics*, 1746.
- [Stirling 1717] John Stirling, *Linea Tertii Ordinis Neutoniana*, Oxford, 1717.
- [Taylor 1715] Brook Taylor, *Linear Perspective: or, a New Method of Representing justly all Manner of Objects*, London, 1715.
- [Taylor 1719] B. Taylor, *New Principles of Linear Perspective*, London, 1719.
- [Thomson 1825] James Thomson, *Elements of plane and spherical trigonometry*, 1825.

- [Trail & Robertson 1806] William Trail et Abram Robertson, *The elements of plane and spherical trigonometry*, 1806.
- [Vince 1800] Samuel Vince, *A treatise on plane and spherical trigonometry*, 1800.
- [Wallace 1798] William Wallace, « Some Geometrical Porisms », *Trans. Edinburgh*, 4 (1798), p. 107-134.
- [Wallace 1801a] W. Wallace, « On the Description of Parabolic Trajectories », *Math. Rep.*, 2 (1801), p. 80-82.
- [Wallace 1801b] W. Wallace, « Mathematical Lucubrations », *Math. Rep.*, 2 (1801), p. 111-119.
- [Wallace 1812] W. Wallace, « New series for the Quadrature of the Conic Sections, and the Computation of Logarithms », *Trans. Edinburgh*, 6 (1812), p. 269-344.
- [Wallace 1826] W. Wallace, « A proposed Improvement in the Solution of a Case in Plane Trigonometry », *Trans. Edinburgh*, 10 (1826), p. 168-170.
- [Wallace 1837] W. Wallace, *A geometrical treatise on the conic sections*, Edinburgh, 1837.
- [Waring 1762] Edward Waring, *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus*, Cambridge, 1762.
- [Waring 1764] E. Waring, « Some New Properties in Conic Sections », *Phil. Trans. London*, 54 (1764), p. 193-197.
- [Waring 1772] E. Waring, *Proprietates Algebraicarum Curvarum*, Cambridge, 1772.
- [Waud 1835] Samuel Waud, *A Treatise on Algebraical Geometry*, London, 1835.
- [West 1784] John West, *Elements of Mathematics : Comprehending Geometry, Mensuration, Conic sections [and] Spherics*, 1784.
- [Witchell 1767] George Witchell, « A General Investigation of the Nature of the Curve, Formed by the Shadow of a Prolate Spheroid », *Phil. Trans. London*, 57 (1767), p. 28-43.
- [James Wood 1795] James Wood, *The Elements of Algebra*, Cambridge, 1795.
- [John Wood 1799] John Wood, *Elements of Perspective ; Containing the Nature of Light and Colours and the Theory and Practice of Perspective*, London, 1799.
- [Woodhouse 1809] Robert Woodhouse, *A treatise on Plane and Spherical Trigonometry*, 1^{re} éd., 1809 ; 2^e éd., 1819.
- [Woolhouse 1831] Wesley Woolhouse, *An Elementary Treatise on the Application of the Algebraic Analysis to Geometry*, London, 1831.
- [Wright 1772] John Wright, *Elements of Trigonometry, Plane and Spherical : With The Principles of Perspective, and Projection of the Sphere*, 1772.

Sources secondaires

- [Ackerberg-Hastings 2002] Amy Ackerberg-Hastings, « Analysis and synthesis in John Playfair's Elements of Geometry », *BJHS*, 35/1 (2002), p. 43-72.
- [Ackerberg-Hastings 2008] A. Ackerberg-Hastings, « John Playfair on British decline in mathematics », *JBSHM*, 23 (2008), p. 81-95.
- [Albree & Brown 2009] Joe Albree et Scott H. Brown, « A valuable monument of mathematical genius : The Ladies' Diary (1704-1840) », *HM*, 36/1 (2009), p. 10-47.
- [Andersen 2007] Kirsti Andersen, *The Geometry of an Art. The History of the Mathematical Theory of Perspective, from Alberti to Monge*, New York : Springer, 2007.
- [Barrow-Green 2006] June Barrow-Green, « "Much necessary for all sorts of men" : 450 years of Euclid's Elements in English », *JBSHM*, 21/1 (2006), p. 2-25.

- [Boyer 1968] Carl Boyer, *A History of Mathematics*, New-York, London, Sidney : Wiley & Sons, 1968.
- [Bruneau 2011] Olivier Bruneau, « Le *De Linearum* de Maclaurin : entre Newton et Poncelet », *Revue d'histoire des mathématiques*, 17/1 (2011), p. 9-39.
- [Costa 2000] Shelley A. Costa, *The Ladies' Diary : Society, Gender and Mathematics in England, 1704-1754*, Ph. D. thesis, Cornell University, Ithaca, NY, 2000.
- [Costa 2002] S. A. Costa, « The Ladies-Diary : Gender, mathematics, and civil society in early eighteenth-century England », *Osiris*, 17 (2002), p. 49-73.
- [Craik 1998] Alex Craik, « Geometry, Analysis, and the Baptism of Slaves : John West in Scotland and Jamaica », *HM*, 25/1 (1998), p. 29-74.
- [Craik 1999] A. Craik, « Calculus and Analysis in Early 19th-Century Britain : The Work of William Wallace », *HM*, 26/3 (1999), p. 239-267.
- [Craik 2000a] A. Craik, « Geometry versus Analysis in Early 19th-Century Scotland : John Leslie, William Wallace, and Thomas Carlyle », *HM*, 27/2 (2000), p. 133-163.
- [Craik 2000b] A. Craik, « James Ivory, F. R. S., Mathematician : The Most Unlucky Person That Ever Existed », *Notes and Records of the Royal Society of London*, 54/2 (2000), p. 223-247.
- [Craik 2002] A. Craik, « James Ivory's Last Papers on the Figure of the Earth- (With Biographical Additions) », *Notes and Records of the Royal Society of London*, 56/2 (2002), p. 187-204.
- [Craik 2007] A. Craik, *Mr. Hopkin's Men : Cambridge Reform and British Mathematics in the 19th Century*, London : Springer-Verlag, 2007.
- [Craik 2009] A. Craik, « A proportional view : The mathematics of James Glenie (1750-1817) », *HM*, 36 (2009), p. 247-272.
- [Craik 2012] A. Craik, « A forgotten British analyst : Nicolas Vilant (1737-1807) », *HM*, 39/2 (2012), p. 174-205.
- [Craik 2013a] A. Craik, « In search of Thomas Knight : Part 2 », *JBShm*, 28/3 (2013), p. 124-131.
- [Craik 2013b] A. Craik, « Polylogarithms, functional equations and more : The elusive essays of William Spence (1777-1815) », *HM*, 40/4 (2013), p. 386-422.
- [Craik & O'Connor 2011] A. Craik et John O'Connor, « Some unknown documents associated with William Wallace (1768-1843) », *JBShm*, 26/1 (2011), p. 17-28.
- [Craik & Roberts 2009] A. Craik et Alonso Roberts, « Mathematics teaching, teachers and students at St Andrews University, 1765-1858 », *History of Universities*, 24/1 (2009), p. 206-279.
- [Despeaux 2002] Sloan E. Despeaux, *The Development of a Publication Community : Nineteenth-Century Mathematics in British Scientific Journals*, Ph. D. thesis, University of Virginia, 2002.
- [Despeaux 2011] S. E. Despeaux, « A voice for mathematics. Victorian mathematical journals and societies », dans [Flood *et al.* 2011, p. 155-174].
- [Flood *et al.* 2011] Raymond Flood, Adrian Rice, Robin Wilson (éd.), *Mathematics in Victorian Britain*, Oxford : Oxford University Press, 2011.
- [Gascoigne 1984] John Gascoigne, « Mathematics and Meritocracy : The Emergence of the Cambridge Mathematical Tripos », *Social Studies of Science*, 14 (1984), p. 547-584.
- [Gascoigne 1985] Robert M. Gascoigne, *A Historical Catalogue of Scientific Periodicals, 1665-1900, with a Survey of Their Development*, New York : Garland Publishing, 1985.

- [Grattan-Guinness 1988] Ivor Grattan-Guinness, « Mathematical research and instruction in Ireland, 1782-1840 », dans J. Nudds *et al.* (éd.), *Science in Ireland 1800-1930: Tradition and Reform*, Dublin : Trinity College Dublin, 1988, p. 11-30.
- [Guggisberg 1900] Frederick G. Guggisberg, « *The Shop* », *The Story of the Royal Military Academy*, London : Cassell and Co, 1900.
- [Guicciardini 1989] Niccolò Guicciardini, *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800*, Cambridge : Cambridge University Press, 1989.
- [Johnson 1989a] William Johnson, « Charles Hutton, 1737-1823 : The prototypical Woolwich professor of mathematics », *Journal of Mechanical Working Technology*, 18 (1989), p. 195-230.
- [Johnson 1989b] W. Johnson, « The Woolwich professors of mathematics, 1741-1900 », *Journal of Mechanical Working Technology*, 18 (1989), p. 145-194.
- [Kafker 1994] Franck A. Kafker, *Notable encyclopedias of the late eighteenth century : eleven successors of the Encyclopédie*, Oxford : Voltaire Foundation, 1994.
- [Kafker & Loveland 2009] Franck A. Kafker et Jeff Loveland, *The early Britannica (1768-1803) : the growth of an outstanding encyclopedia*, Oxford : Voltaire Foundation, 2009.
- [Koppelman 1971] Elaine Koppelman, « The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra », *Archive for History of Exact Sciences*, 8 (1971), p. 155-242.
- [Lawrence 2002] Snezana Lawrence, *Geometry of Architecture and Freemasonry in 19th century England*, Ph. D. thesis, Open University, 2002.
- [Lawrence 2003] S. Lawrence, « History of Descriptive Geometry in England », dans S. Huerta (éd.), *Proceedings of the First International Congress on Construction History*, Madrid, 2003, p. 1269-1281.
- [Moktefi 2011] Amirouche Moktefi, « Geometry », dans [Flood *et al.* 2011, p. 321-336].
- [Olson 1971] Richard Olson, « Scottish Philosophy and Mathematics 1750-1830 », *Journal of the History of Ideas*, 32/1 (1971), p. 29-44.
- [Panteki 1987] Maria Panteki, « William Wallace and the introduction of continental calculus to Britain : a letter to George Peacock », *HM*, 14/2 (1987), p. 119-132.
- [Pedersen 1963] Olaf Pedersen, « The “philomaths” of 18th century England », *Centaurus*, 8 (1963), p. 238-262.
- [Perl 1979] Teri Perl, « The Ladies’ Diary or Woman’s Almanack, 1704-1841 », *HM*, 6 (1979), p. 36-53.
- [Richards 2003] Joan L. Richards, « The Geometrical Tradition : Mathematics, Space, and Reason in the Nineteenth Century », dans M. J. Nye (éd.), *The Cambridge History of Science*, vol. 5, Cambridge : Cambridge University Press, p. 449-467.
- [Rouse Ball 1889] Walter W. Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge*, Cambridge, 1889.
- [Ruffieux 2005] Christiane Ruffieux, *La naissance du concept de structure algébrique en Grande-Bretagne dans la première moitié du 19^e siècle*, thèse de doctorat, Université de Genève, 2005.
- [Stray 2001] Christopher Stray, « The Shift from Oral to Written Examination : Cambridge and Oxford 1700-1900 », *Assessment in Education : Principles, Policy & Practice*, 8 (2001), p. 33-50.
- [Struik 1987] Dirk J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 4^e éd. révisée, New York : Dover, 1987 (1^{re} éd., 1948).
- [Taylor 1966] Eva Taylor, *The Mathematical Practitioners of Hanoverian England, 1714-1840*, Cambridge : Cambridge University Press, 1966.

[Wallis 1973] Peter J. Wallis, « British Philomaths – Mid-eighteenth Century and Earlier », *Centaurus*, 17 (1973), p. 301-314.

[R. & P. Wallis 1980] Ruth Wallis & Peter J. Wallis, « Female philomaths », *HM*, 7 (1980), p. 57-64.

[Yeo 1991] Richard Yeo, « Reading encyclopedias : science and the organization of knowledge in British dictionaries of arts and sciences, 1730-1850 », *ISIS*, 82/1 (1991), p. 24-49.

ANNEXE

Tableau I : Répartition chronologique et thématique des travaux britanniques en géométrie relevés entre 1750 et 1830.

	1750	1760	1770
Géométrie classique	Simpson 1747 Simpson 1756	Waring 1764 Muller 1765	Draper 1772 Jones & Robertson 1773 Muller 1773 Malton 1774 Horsley 1775 Stedman 1775 Simson 1776
Trigonométrie		Maseres 1760 Emerson 1764 Simpson 1765	Payne 1772 Wright 1772
Géométrie pratique, perspective	D Gregory 1745 Highmore 1754 Kirby 1754	Fournier 1761 Highmore 1763 Cowley 1765 Muller 1765 Emerson 1768	Priestley 1770 E. Noble 1771 Malton 1775 Clarke 1776
Géométrie descriptive			
Application de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie	Landen 1755	Waring 1762	Landen 1771 Waring 1772 Landen 1775
	1780	1790	1800
Géométrie classique	West 1784 Ludlam 1785 Bonnycastle 1789	Malton 1793 Playfair 1794 Harrison 1795-1801 Lawson 1795 Lowry 1795a,b, 1801 Playfair 1795 Brougham 1798 Hutton 1798 Wallace 1798	Wallace 1801a,b Dalby 1806 M. Noble 1806 Douglas 1809 Leslie 1809

Trigonométrie			Vince 1800 Bonnycastle 1806 Gompertz 1806 Trail & Robertson 1806 Woodhouse 1809
Géométrie pratique, perspective	Bonnycastle 1782 Malton 1783	Adams 1791 Landmann 1798 John Wood 1799	Edwards 1803
Géométrie descriptive			
Application de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie	Landen 1780 Hellins 1788	James Wood 1795 Ivory 1798	Brinkley 1800a,b Hellins 1802 Brinkley 1803 Ivory 1806a Garrard 1808 Maskelyne 1808 Barlow 1809
	1810	1820	1830
Géométrie classique	Hutton 1811 Glenie 1812 Bransby 1814 Cunliffe 1835	Legendre 1822 T. S. Davies 1826a-c, 1827 Leslie 1828	Davies 1830a,b Galloway 1830 Morton 1830a,b Cunliffe 1819 Davies 1835a-e
Trigonométrie	Bridge 1810 Hymers 1812 O. Gregory 1816	Luby 1825 Thomson 1825 Darley 1827	
Géométrie pratique, perspective	Hey 1814 Nicholson 1819	Nicholson 1822 Birkbeck 1827	
Géométrie descriptive	Barlow 1814 Hutton 1815		
Application de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie	Hellins 1811 Wallace 1812 Herschel 1814 Babbage 1817 James 1818	Lardner 1823, 1825a,b Hamilton 1826, 1828	Hymers 1830 Waud 1835 Woolhouse 1831, 1835

Tableau II : Liste des auteurs de géométrie enseignant dans les universités et écoles militaires britanniques au cours de la période 1750-1830.

N. Guicciardini [1989, p. 150-158] dresse une liste des enseignants de mathématiques dans les universités et écoles militaires britanniques de cette période. Elle est différente de la nôtre dans la mesure où nous nous sommes ici intéressés aux auteurs de géométrie. Johnson [1989b] reprend quant à lui une liste des enseignants à Woolwich établie par Guggisberg [1900, p. 260-261].

Nom	Position	Productions en géométrie
Université d'Édimbourg		
M. Stewart (1717-1785)	professeur de mathématiques (1746-1771)	1746
J. Playfair (1748-1819)	professeur de mathématiques (1785-1805) et de philosophie naturelle (1805-1819)	1794, 1795, 1805, 1820
J. Leslie (1766-1832)	professeur de mathématiques (1805-1819) et de philosophie naturelle (1819-)	1809, 1821, 1828
W. Wallace (1768-1843)	professeur de mathématiques (1819-1838)	1798, 1801a,b, 1812, 1826, 1830, 1837
Université de Glasgow		
R. Simson (1687-1768)	professeur de mathématiques (1711-1768)	1756, 1776
Université de Cambridge		
E. Waring (1735-1798)	professeur lucasien (1760-1798)	1762, 1764, 1772
W. Farish (1759-1837)	professeur de chimie (1794-1813) et de philosophie naturelle (1813-1837)	1822
Université de Dublin		
J. Brinkley (1763-1835)	professeur d'astronomie et astronome royal (1792-1826)	1800a,b, 1803
Université de Londres		
D. Lardner (1793-1859)	professeur de mathématiques (1828-1831)	1823, 1825a,b, 1828
Royal Military Academy de Woolwich		
J. Muller (1699-1784)	maître puis professeur d'artillerie, de fortification et de dessin (1741-1766)	1765, 1773

Nom	Position	Productions en géométrie
T. Simpson (1710-1761)	professeur de mathématiques (1745-1761)	1745, 1747, 1765
I. Landmann (1741-1826)	professeur de fortification, de dessin et d'artillerie (1777-1815)	1798
J. L. Cowley (1719-1797)	professeur de mathématiques (1761-1773)	1765
C. Hutton (1737-1823)	professeur de mathématiques (1773-1807)	1770, 1787, 1795, 1798-1801, 1811, 1815
J. Bonnycastle (1751-1821)	maître (1782?-1807) puis professeur (1807-1821) de mathématiques	1782, 1789, 1806,
O. Gregory (1774-1841)	maître (1802-1807) puis professeur (1807-1838) de mathématiques	1816
P. Barlow (1776-1862)	maître de mathématiques (1801-1847)	1809, 1814
T. S. Davies (1794?-1855?)	maître de mathématiques (1834-1855)	1826a,c, 1827, 1830a,b, 1835a-e
Royal Military College (de Great Marlow puis de Sandhurst)		
H. Clarke (1743-1818)	maître de mathématiques (?-1815)	1776
T. Leybourn (1770-1840)	maître de mathématiques (1802-1839)	1817
W. Wallace (1768-1843)	professeur de mathématiques (1803-1809)	1798, 1801a,b, 1812, 1826, 1837
J. Ivory (1765-1842)	professeur de mathématiques (1804-1819)	1798, 1806a,b, 1816
J. Lowry (1769-1850)	maître de mathématiques (1804-1840)	1795a,b, 1801
J. Cunliffe (av. 1765-ap. 1809)	maître de mathématiques	1819, 1835
M. Noble (?-?)	maître de mathématiques (?-?)	1806
T. Galloway (1796-1851)	maître de mathématiques (1823-1833)	1830

Nom	Position	Productions en géométrie
Royal Naval Academy de Portsmouth		
G. Witchell (1728-1785)	maître de mathématiques (1766-1785)	1767

CHAPITRE 4

Le formel et le numérique

Le calcul aux différences finies, une nouvelle branche de l'analyse

Jean-Pierre LUBET

Au cours du XVIII^e siècle, s'est constitué sous le nom de calcul aux différences finies un domaine dont les applications concernent des thèmes très divers des mathématiques pures et des mathématiques appliquées : les séries finies ou infinies et leur sommation, les méthodes d'interpolation pour la construction des tables numériques, les formules de quadrature approchée, etc. À notre connaissance, il n'existe pas d'ouvrage d'ensemble consacré à l'histoire du calcul aux différences finies. On trouve, cependant, des éléments intéressants dans des ouvrages consacrés à l'analyse numérique [Golstine 1977 ; Chabert *et al.* 1994], dans des travaux sur des thèmes liés au calcul aux différences, comme le calcul symbolique [Koppelman 1971 ; Grattan-Guinness 2010 ; Lubet 2010] ou portant sur des auteurs qui ont contribué à ce domaine [Feigenbaum 1985 ; Friedelmeyer 1994 ; Borgato 2012]. Dans les limites de cet article, nous nous intéresserons à un aspect spécifique de cette histoire : la constitution et le développement du calcul aux différences finies comme une branche à part entière de l'analyse mathématique, dans la période située entre le milieu du XVIII^e siècle et le milieu du XIX^e. L'évolution du contenu et du statut de ce domaine, dans le cadre de la recherche ou de l'enseignement, nous permettra de mettre en évidence les continuités et les ruptures selon les temps et les lieux de cette histoire, qui se joue entre la Grande-Bretagne et le Continent.

I. La seconde moitié du XVIII^e siècle : héritage britannique et essor continental

1. *Un héritage britannique*

Au XVII^e siècle et dans la première moitié du XVIII^e, de nombreux résultats pouvant se rapporter au thème des différences finies sont obtenus par les savants britanniques dans leurs recherches sur le calcul approché des aires, la sommation des séries ou les méthodes d'interpolation pour la construction de tables numériques. On peut citer, notamment, les travaux

de T. Harriot, H. Briggs, J. Gregory, I. Newton, R. Cotes, A. de Moivre, C. Maclaurin et T. Simpson¹.

Deux auteurs directement influencés par Newton² vont produire des ouvrages particulièrement importants dans ce cadre : *Methodus Incrementorum Directa & Inversa* de Brook Taylor [1715] et *Methodus differentialis sive Tractatus de summatione & interpolatione serierum infinitarum* de James Stirling [1730]. Ils utilisent notamment les propriétés des produits de facteurs équidifférents³, expressions qui, dans le cas du calcul aux différences finies, satisfont à des règles analogues à celles des puissances dans le cas du calcul fluxionnel⁴. En effet, avec la notation $x^{(n)}$ suivante⁵, où h représente l'accroissement Δx de la variable,

$$x^{(n)} = x(x-h) \dots [x - (n-1)h]$$

pour n entier > 0 , et

$$x^{(n)} = \frac{1}{(x+h)(x+2h) \dots (x-nh)}$$

pour n entier < 0 , on a la différence $\Delta x^{(n)} = nhx^{(n-1)}$, et la somme $\Sigma x^{(n-1)} = \frac{1}{nh} x^{(n)}$ à une constante près (pour $n \neq 0$).

Dans son traité, Taylor utilise ces propriétés pour démontrer la formule d'interpolation dite de Gregory-Newton, soit, pour une fonction y de la variable x et avec des notations modernisées

$$y_{x+nh} = y_x + n\Delta y_x + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 y_x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 y_x + \dots$$

À partir de ce résultat, en faisant tendre l'accroissement h vers 0 et l'indice n vers l'infini (avec $nh = \nu$), il obtient la formule donnant le développement de $y_{x+\nu}$ en série de puissances de ν (dite série de Taylor). Pour Taylor, la méthode des différences finies doit permettre de donner une base solide à la méthode des fluxions, ces deux méthodes étant intimement liées dans la théorie et dans les applications [Feigenbaum 1985, § 2]. L'ouvrage de Taylor

1. Voir [Goldstine 1977, chap. 1-2; Chabert 1994, chap. 10, 11, 14].

2. Notamment par le texte « *Methodus differentialis* » [Newton 1711].

3. Produits auxquels Arbogast donnera le nom de « *quantité factorielle* » ou simplement *factorielle* » [Arbogast 1800, p. 364].

4. Voir [Taylor 1715, p. 19-20].

5. Taylor utilise des notations spécifiques : celle de la différence finie Δx , notée $\dot{x}$, avec un point situé en dessous de x , est visiblement inspirée de la notation de la fluxion $\dot{x}$, où le point est au-dessus. Cependant, il n'y a pas encore, à l'époque, de notation spécifique pour les produits de n facteurs en progression arithmétique ; Vandermonde [1775] semble le premier à en introduire une, $[x]_n^{\overline{n}}$.

représente un moment important de cette histoire dans la mesure où il commence à poser les bases d'une théorie du calcul aux différences finies direct et inverse. Cependant, seules certaines propositions de la partie I sont consacrées à part entière à ce calcul, une grande place étant donnée aux résultats sur les fluxions, notamment la plupart des applications dans la partie II. La présentation souvent très abstraite du calcul aux différences, avec peu d'exemples explicites, paraît de plus obscure à ses lecteurs [Feigenbaum 1985, § 3].

L'ouvrage de Taylor a cependant une influence immédiate sur le mathématicien français François Nicole qui, dès janvier 1717, commence la présentation à l'Académie des sciences de Paris d'un mémoire intitulé « Traité du calcul aux différences finies », destiné à clarifier la méthode du savant anglais. Dans la première partie, théorique, de son mémoire, il établit les formules du calcul aux différences (direct et inverse) des produits équidifférents et des inverses de tels produits [Nicole 1719]. Dans la suite, il applique les règles ainsi obtenues à la sommation de séries numériques dont le terme général correspond à ces formes [Nicole 1725a,b, 1726].

Si l'ouvrage *Methodus differentialis* que publie Stirling en 1730 recoupe des thèmes rencontrés chez Taylor⁶, elle est cependant très nettement orientée vers des méthodes de calcul numérique effectif, notamment pour l'interpolation. Par ailleurs, à partir des propriétés des produits de facteurs équidifférents, Stirling met au point une méthode d'accélération de convergence grâce à laquelle il parvient à la sommation approchée de nombreuses séries⁷.

Dans la seconde moitié du XVIII^e siècle, les travaux de Taylor et Stirling vont rester la référence essentielle en Grande-Bretagne. En 1749, le traité de Stirling fait l'objet d'une traduction anglaise par Francis Holliday, assisté de William Emerson. Jugeant que les travaux de Taylor et Stirling sont d'une lecture difficile et que la méthode des différences y est souvent mélangée à celle des fluxions, Emerson souhaite présenter un traité didactique, *The Method of Increments*, « for reducing these art to a regular, uniform, and general method » [1763, p. iv]. Cet ouvrage, entièrement consacré au calcul direct et inverse des différences⁸, donne une présentation systématique, et enrichie de nombreux exemples, d'un large ensemble de résultats. Pour le calcul des différences et des sommes, un rôle essentiel y est donné aux produits de facteurs équidifférents $x^{(n)}$ – un tel produit est dénommé « perfect quantity », mais sans notation spécifique. L'auteur présente de nombreuses applications de la méthode des différences, principalement à

6. Stirling cite Taylor mais aussi Nicole : voir [Stirling / Tweddle 2003, p. 41].

7. Voir [Goldstine 1977, § 2.7 ; Chabert 1994, chap. 14, § 1].

8. Seul un court scholie indique le passage possible des règles sur les différences à celles sur les fluxions [Emerson 1763, p. 22].

des problèmes concernant les séries. Si la formule de Gregory-Newton est donnée, aucune application numérique à l'interpolation n'est fournie. Emerson reviendra quelques années plus tard sur l'utilisation de la théorie des différences pour les méthodes d'interpolation dans un autre traité didactique, *The Arithmetic of Infinites and the Differential Method* [1767], où il présente de nombreux exemples numériques, en particulier pour les tables astronomiques. Il ne semble pas que d'autres auteurs britanniques de la seconde moitié du XVIII^e siècle aient contribué substantiellement à l'exposition ou au développement de la théorie des différences finies⁹.

2. Euler

Sur le Continent, Euler effectue, dès les années 1730, des recherches concernant les séries et leur sommation (finie ou infinie). Il apprécie les travaux de Stirling auquel il communique sa formule dite d'Euler-Maclaurin, reliant la somme finie des valeurs d'une fonction pour des abscisses en progression arithmétique et l'intégrale de la fonction prise entre les bornes correspondantes¹⁰. Dans l'*Introductio in analysin infinitorum*, Euler étudie les séries récurrentes [1748, t. I, chap. 4 et 13], dont Abraham de Moivre avait mis en évidence l'intérêt dans sa *Doctrine of Chances* [1738, p. 193 et suiv.], mais les différences interviennent peu [Euler 1748, art. 66-67]. Ce n'est que dans son second traité consacré au calcul différentiel qu'une théorie des différences finies apparaît en tant que telle.

Dans les deux premiers chapitres de ses *Institutiones calculi differentialis* [1755], Euler présente, en effet, un exposé systématique du calcul aux différences finies. Le premier chapitre renferme une présentation générale de la théorie avec l'établissement des formules donnant les différences finies des diverses fonctions élémentaires (algébriques ou transcendentes) et de leurs compositions, en fonction de l'accroissement constant de la variable. Euler souligne la simplicité des formules obtenues dans le cas des produits de facteurs équidifférents (ou leurs inverses). Le deuxième chapitre est une application aux séries de la théorie du chapitre 1. Euler considère les séries dont toutes les différences s'annulent à partir d'un certain rang et cherche, pour chacune, l'expression du terme général ; il remarque que ces séries sont récurrentes. Il étudie ensuite la sommation

9. Même si certains appliquent ponctuellement la méthode des différences, comme J. Bonnycastle [1782] pour la sommation des séries. E. Waring donne une nouvelle méthode d'interpolation, analogue à celle que donnera Lagrange plus tard, mais « without having any recourse to finding the successive differences » [Waring 1779, p. 59].

10. Sur cette formule, voir [Goldstine 1977, § 2.6 ; Chabert 1994, § 14.2]. Pour la correspondance Euler-Stirling, voir [Stirling / Tweedle 2003, p. 273-274].

finie de séries dont le terme général est connu, en utilisant le calcul inverse aux différences.

Cependant, dans ses *Institutiones calculi integralis* [1768-1770], Euler n'aborde pas la question des équations aux différences finies ; ce sont d'autres mathématiciens continentaux qui vont assurer le développement d'un calcul intégral aux différences finies.

3. Équations aux différences finies

L'étude systématique de divers types d'équations aux différences finies apparaît dans la seconde moitié du XVIII^e siècle. Ces développements bénéficieront des analogies qui se présentent avec les méthodes déjà connues pour le calcul intégral ordinaire. Inversement, des progrès en matière de calcul aux différences finies pourront conduire, parfois, à de nouveaux résultats pour le calcul intégral.

En 1759, Lagrange¹¹ consacre le mémoire « Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes » à la résolution des équations aux différences finies linéaires. Il y montre en outre, comme le titre l'indique, que les suites récurrentes étudiées par ses prédécesseurs peuvent être considérées comme des solutions d'équations de ce type.

Lagrange considère d'abord l'équation aux différences finies linéaire du premier ordre

$$(1) \quad \Delta y + My = N,$$

où M et N sont des fonctions d'une variable x . Sa méthode de résolution est fondée sur l'analogie avec la méthode connue pour les équations différentielles linéaires du premier ordre

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} + yX = Z,$$

où, en se ramenant à l'équation sans second membre, la solution est obtenue par des quadratures. De même pour l'équation (1), en posant $y = uz$, on peut se ramener à la résolution de l'équation $\Delta u + Mu = 0$, et obtenir la solution à l'aide de la somme d'une fonction d'une variable.

En poursuivant l'analogie avec les équations différentielles, Lagrange parvient à résoudre l'équation aux différences finies linéaire d'ordre m à coefficients constants

$$(3) \quad y + A\Delta y + B\Delta^2 y + \dots + M\Delta^m y = X,$$

11. Pour une étude détaillée des travaux de Lagrange sur les équations aux différences finies et de leur application aux probabilités, voir [Borgato 2012].

où $A, B, \dots, M$ sont des constantes et X une fonction de la variable x . Pour cela, il utilise la méthode de d'Alembert, qui a montré que la résolution de l'équation linéaire à coefficients constants d'ordre m

$$(4) \quad y + A \frac{dy}{dx} + B \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + M \frac{d^my}{dx^m} = X,$$

peut se ramener à un système d'équations différentielles du premier ordre, puis à une seule équation du premier ordre. Lagrange applique alors ses résultats à la recherche des suites récurrentes définies par

$$y_m + Ay_{m-1} + By_{m-2} + \dots = X.$$

Il souligne, en conclusion, l'intérêt d'avoir ainsi placé la théorie des suites récurrentes dans le cadre uniforme et plus général du calcul aux différences, ce qui, pense-t-il, devrait permettre d'en étendre les applications, notamment au calcul des probabilités.

Dans la période suivante, le calcul intégral sur les équations aux différences finies va progresser de concert avec celui sur les équations différentielles. Ainsi, après que Lagrange [1766, § I-XI] ait montré que pour une équation de type (4) avec des coefficients variables, la connaissance de la solution générale de l'équation sans second membre permet de ramener la résolution de l'équation complète à un problème de quadratures, Laplace [1773] prouve le même résultat d'une autre manière et le transpose au cas des équations aux différences finies de type (3), à coefficients variables. Il situe son travail en ces termes : « Quoique le calcul intégral aux différences finies soit le fondement de toute la théorie des suites, cependant cette branche intéressante de l'analyse est encore bien loin du point de perfection où l'on a porté les autres » [1773, p. 299]. Ce constat vaut particulièrement pour l'intégration des équations aux différences, « partie absolument neuve » [*Ibid.*, p. 300]. Deux mémoires suivront, traitant des équations aux différences finies et de leur application à la « théorie des hasards » [1774, 1776]. Laplace y étend le champ de la théorie à l'étude des suites récurrentes à plusieurs variables en liaison avec les équations aux différences finies et partielles :

« Il n'étoit question jusqu'alors que des équations aux différences ordinaires, & des suites qui en dépendent ; mais la solution de plusieurs problèmes sur les hasards, m'a conduit à une nouvelle espèce de suites que j'ai nommées *récurro-récurrentes* [...]. Les équations dont ces suites dépendent, sont à peu-près dans les différences finies, ce que les équations aux différences partielles sont dans les différences infiniment petites » [Laplace 1776, p. 39].

Ces mémoires de Laplace conduisent Lagrange à reprendre le fil de son mémoire [1759]. Dans [1777], il présente sa célèbre méthode générale de variation des constantes permettant, dans le cas d'une équation linéaire

d'ordre quelconque, de passer de la solution de l'équation sans second membre à celle de l'équation complète. Cette fois-ci cependant, la démarche est inverse : la méthode est donnée d'abord pour les équations aux différences finies, avant d'être transposée, dans une remarque, au cas des équations différentielles ordinaires. Dans ce mémoire, Lagrange développe aussi le domaine ouvert par Laplace des « suites récurrentes doubles ou triples » et de l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles, ainsi que l'application à la « théorie des hasards ».

Quelques années plus tard, Laplace [1782] introduit une méthode qui jouera un grand rôle dans ses travaux ultérieurs, le calcul des fonctions génératrices, qu'il applique aux divers types d'équations différentielles linéaires, notamment aux équations aux différences finies partielles. Il étend aussi le champ du calcul intégral aux équations aux différences mêlées (incluant à la fois des différences finies et des dérivées) comme, par exemple

$$ay_{x,x'} + b\Delta y_{x,x'} - \frac{\partial y_{x,x'}}{\partial x'} = 0,$$

dans laquelle la différence finie Δ se rapporte à la variable x seulement, avec $\Delta x = 1$ [*Ibid.*, § XXIII].

Des problèmes théoriques relatifs à la forme des divers types de solutions sont aussi abordés dans cette période. La question s'est ainsi posée de savoir si, pour l'équation générale d'ordre n aux différences finies $f(y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^n y) = 0$, l'intégrale générale (« complète ») est caractérisée par la présence de n constantes arbitraires, comme pour une équation différentielle d'ordre n . Aussi longtemps que l'on s'intéresse aux seules équations linéaires, l'analogie avec le calcul différentiel ordinaire est sauvegardée, mais la situation change avec certaines équations aux différences finies non linéaires. Le problème est soulevé par Charles¹² [1786], qui exhibe « des équations en différences finies, qui ont deux intégrales complètes » [*Ibid.*, p. 560], puis par Monge [1786]. Considérant le cas de l'équation aux différences finies

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2,$$

qui correspond à l'équation différentielle de Clairaut $y = \frac{dy}{dx} x + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$, et suivant une méthode analogue à celle qui conduit à la solution singulière de cette dernière équation, Charles obtient une solution qui n'entre pas dans le

12. Pour des éléments biographiques sur ce mathématicien, voir [Hahn 1981].

cadre de la formule de la solution complète mais qui dépend aussi d'une constante arbitraire. Cette découverte et l'exemple d'équation aux différences finies exhibé par le savant figureront souvent dans les exposés du calcul aux différences finies. Par contre, les conséquences erronées qu'il voudra en tirer pour les solutions des équations différentielles ordinaires [Charles 1791] seront critiquées, notamment par Lagrange [1801, leçon 19], Lacroix [1800] et Biot [1802]¹³. Comme Condorcet [1774], Monge [1776, 1780] développe quant à lui l'idée selon laquelle la détermination des fonctions arbitraires figurant dans l'intégrale des équations aux dérivées partielles dépend souvent d'équations aux différences finies ; il souligne : « De nouveaux besoins exigent donc que l'on perfectionne ce genre de calcul auquel des très-célèbres Geomètres ont déjà travaillé, mais qui est encore trop imparfait » [Monge 1776, p. 306].

Un nouveau type de calcul se développe donc parallèlement au calcul différentiel et intégral au cours de la seconde moitié du XVIII^e siècle, s'éri-geant progressivement en une branche à part entière de l'analyse. Dans certains cas, le calcul aux différences finies est considéré comme une introduction au calcul différentiel, lorsqu'on fait tendre l'accroissement de la variable vers zéro. Son développement se nourrit aussi, nous l'avons vu, des analogies entre ses procédures et celles du calcul intégral ordinaire, bien que des interrogations finissent par poindre sur les limites entre lesquelles ces analogies doivent être contenues. Le calcul aux différences finies possède aussi des domaines d'application privilégiés, en particulier le calcul des probabilités.

4. Calcul symbolique et calcul numérique

Revenons un peu en arrière pour considérer un mémoire de Lagrange [1774] qui ne concerne pas seulement le calcul aux différences finies mais aussi le calcul différentiel et intégral. Dans cet écrit qui va constituer une référence durable en matière de calcul symbolique, le savant rapproche la formule de Taylor de celle du développement en série de l'exponentielle et adopte la notation formelle¹⁴

$$(5) \quad \Delta u = \frac{du}{e^{dx}} \xi - 1,$$

avec la convention consistant à remplacer les puissances $(du)^n$ par les différentielles $d^n u$ dans le développement du second membre. Par le

13. Voir [Caramalho Domingues 2008, § 7.2 ; Lubet 2013].

14. Les calculs sont écrits ici dans le cas d'une fonction d'une seule variable $u(x)$ alors que Lagrange les écrit d'emblée pour une fonction $u(x, y, z, t, \dots)$. Sur ce mémoire de Lagrange, voir [Lubet 2010].

moyen de cette analogie entre puissances et différences, il obtient plusieurs autres identités, dont nous résumons le mode de déduction par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (T_{-\lambda}) & \Sigma^{\lambda} u = \left(e^{\frac{du}{dx} \xi} - 1 \right)^{-\lambda} \\
 & \uparrow \\
 (T_{\lambda}) & \Delta^{\lambda} u = \left(e^{\frac{du}{dx} \xi} - 1 \right)^{\lambda} \\
 & \uparrow \\
 (T_1) & \Delta u = \left(e^{\frac{du}{dx} \xi} - 1 \right) \\
 & \swarrow \\
 (E_1) & \frac{du}{dx} \xi = \log(1 + \Delta u) \longrightarrow (G_1) & \Delta' u = (1 + \Delta u)^{\frac{\xi'}{\xi}} - 1 \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 (E_{\lambda}) & \frac{d^{\lambda} u}{dx^{\lambda}} \xi^{\lambda} = [\log(1 + \Delta u)]^{\lambda} & (G_{\lambda}) & \Delta'^{\lambda} u = \left[(1 + \Delta u)^{\frac{\xi'}{\xi}} - 1 \right]^{\lambda} \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 (E_{-\lambda}) & \frac{\int^{\lambda} u dx^{\lambda}}{\xi^{\lambda}} = [\log(1 + \Delta u)]^{-\lambda} & (G_{-\lambda}) & \Sigma'^{\lambda} u = \left[(1 + \Delta u)^{\frac{\xi'}{\xi}} - 1 \right]^{-\lambda}
 \end{array}$$

Ce formalisme permet de relier entre elles des formules qui concernent aussi bien le calcul différentiel et intégral que le calcul aux différences finies direct et inverse, et qui avaient déjà été appliquées dans des domaines numériques divers : (G_1) est la formule d'interpolation de Gregory-Newton, écrite ici pour passer des différences $\Delta x = \xi$ aux différences $\Delta' x = \xi'$; (T_{-1}) est la formule d'Euler-Maclaurin ; (E_1) a été utilisée par Euler [1770] pour calculer la vitesse de la Lune à partir de diverses observations ; (E_{-1}) est une formule de quadrature approchée due à James Gregory¹⁵.

Le point de vue formel ainsi adopté par Lagrange a une visée unificatrice, et permet de susciter des généralisations. Le mémoire ne comporte pas d'applications numériques immédiates, mais des pistes sont ouvertes en ce sens : des relations de récurrence sont établies pour le calcul effectif des coefficients apparaissant dans le développement des formules $(T_{\pm\lambda})$ et $(E_{\pm\lambda})$. Lagrange souligne en outre les avantages de (E_{-1}) pour le calcul

15. Voir [Goldstine 1977, p. 77, 170 ; Chabert 1994, p. 395-396].

approché des aires [1774, § 13], et s'attarde sur l'extension de la formule (G_1) au cas de deux variables, dans la mesure où elle permet le calcul d'interpolations dans les tables à double entrée¹⁶. Laplace [1782] utilise de son côté le calcul des fonctions génératrices pour retrouver le système des formules établi par Lagrange.

II. Exposés globaux du calcul aux différences finies en France

1. Articles d'encyclopédie

Alors que le calcul aux différences finies ne figurait pas dans l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert, Condorcet l'introduit dans le *Supplément* (1776-1777) par le biais de plusieurs articles (EQUATION AUX DIFFÉRENCES FINIES, POSSIBLES, LINÉAIRES...) dont le contenu fait directement écho aux recherches qu'il mène dans ce domaine.

L'importance croissante du calcul aux différences finies en mathématiques au cours de cette période est confirmée par sa place dans le dictionnaire de *Mathématiques* de l'*Encyclopédie méthodique* (1784-1789). Dans le « Discours préliminaire », Bossut le présente en effet comme « une nouvelle branche de l'Analyse, importante par sa difficulté & par ses applications à la Théorie des suites & à celle des probabilités » [*Ibid.*, t. I, p. cxij]. Plusieurs contributions de Bossut et de Charles viennent par ailleurs compléter les textes rédigés par Condorcet pour le *Supplément*. On notera notamment l'article très détaillé CALCUL AUX DIFFÉRENCES FINIES (sous-entrée de l'article DIFFÉRENCE) de Bossut et la sous-entrée CALCUL INTÉGRAL DES ÉQUATIONS EN DIFFÉRENCES FINIES de Charles dans le cadre de l'article INTÉGRAL. Dans la table de lecture du tome 3, publiée en 1789, les éditeurs placent le Calcul aux différences finies et les Équations aux différences finies au sein de la partie ANALYSE, comme le calcul différentiel et intégral¹⁷.

2. Traités et cours d'analyse

Nous avons précédemment souligné l'importance de l'exposé du calcul aux différences finies placé par Euler au début de son traité de calcul différentiel [1755] et que, par contre, son traité de calcul intégral [1768-1770] ne contient rien sur le sujet, en particulier sur ce qui aurait formé le complément logique de l'exposé de 1755 : l'étude des équations aux différences finies. Cependant, le calcul aux différences apparaît comme une

16. Lagrange publiera aussi un mémoire sur l'interpolation dans les tables astronomiques [1798], qu'il considérera comme un supplément à son mémoire [1774].

17. Sur la classification de l'analyse dans l'*Encyclopédie méthodique*, voir [Gilain 2010].

branche spécifique, bien identifiée, dans nombre de traités d'analyse à partir des années 1760 en France.

Dans l'ouvrage *Du calcul intégral* de Condorcet [1765], on trouve, après une première partie consacrée aux « équations différentielles aux différences infiniment petites », une seconde partie (plus courte), dont la première section est dédiée aux équations aux différences finies et la seconde aux équations aux différences partielles. Dans les *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral* de Cousin [1777], les différences finies tiennent une place importante. Dans le volume 1, le calcul direct et inverse des différences occupe le chapitre I et précède un chapitre sur la méthode des limites. Dans le volume 2 consacré au calcul intégral, le chapitre XI porte sur l'intégration des équations aux différences finies. Vingt ans plus tard, dans son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* [1796], la place des différences finies dans la structure du livre est analogue mais l'étude des équations aux différences finies se répartit à présent dans deux chapitres non consécutifs du calcul intégral. Bossut entame quant à lui son ouvrage *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* [1797] par une introduction de 90 pages consacrée entièrement au calcul aux différences finies, y compris les équations aux différences.

Dans certains de ces traités, le calcul aux différences finies joue un rôle de préparation à la présentation des fondements du calcul différentiel, mais il ne se réduit pas à cette fonction comme le montrent le contenu des chapitres sur les équations aux différences finies et les applications correspondantes. La constitution du calcul aux différences finies en une branche à part entière des mathématiques se manifeste aussi par l'extension de son champ d'application. Une introduction d'une vingtaine de pages lui est ainsi consacrée dans l'ouvrage d'algèbre *Théorie générale des équations algébriques* où Bézout [1779] utilise ce calcul pour l'une des démonstrations de son théorème principal [Alfonsi 2011, chap. 5].

LE COURS DE PRONY À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Pour les cours ordinaires de la première année de la future École polytechnique¹⁸, Prony est chargé, à partir de mars 1795, d'un cours d'analyse appliquée à la mécanique pour les 2^e et 3^e divisions. Il va consacrer la plupart de sa trentaine de leçons à présenter la « méthode directe et inverse des différences ». Ses leçons sont imprimées [Prony 1795a], distribuées aux élèves et une version proche¹⁹ paraît dans les quatre premiers cahiers du

18. Dénommée alors École centrale des Travaux publics.

19. Notons que le mémoire « Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques... », publié dans le *Journal de l'École polytechnique* (2^e cahier, 1796, p. 24-76), a été distribué aux élèves dans un « Supplément aux leçons n^{os} 20 et 21 » comme exemple d'application du calcul des différences finies à la physique.

Journal de l'École polytechnique [1795b, 1796a,b, 1797]. Prony y expose la plupart des résultats théoriques obtenus par les mathématiciens du Continent dans la seconde moitié du XVIII^e siècle : formules de sommation, résolution des équations linéaires, multiplicité des solutions des équations non linéaires.

Ce cours porte aussi la marque de l'entreprise pour laquelle Prony est mobilisé à la même époque, le calcul des tables trigonométriques et logarithmiques dites du cadastre²⁰. Les astronomes utilisaient depuis longtemps les règles pratiques énoncées sans démonstration par Gabriel Mouton (1618-1694), permettant de réaliser des interpolations au moyen de simples additions. Prony va considérablement améliorer la méthode, en établissant une procédure permettant un calcul effectif des coefficients qui apparaissent dans le développement des formules (G_λ) et (T_λ) du § I.4 ci-dessus. Pour une fonction f donnée, dont on connaît une suite de valeurs $z_p = f(x_0 + p\Delta x)$, ainsi que les différences $\Delta^n z_p$, il s'agit de compléter la table en intercalant entre deux valeurs consécutives $m - 1$ valeurs nouvelles correspondant à des accroissements $\Delta'x = \frac{1}{m}\Delta x$ de la variable. La formule (G_λ) fournit ainsi les nouvelles différences $\Delta'^\lambda z$ sous la forme générale²¹

$$\Delta'^\lambda z = \frac{1}{m^\lambda} \Delta^\lambda z + A_{\lambda+1} \Delta^{\lambda+1} z + \dots + A_{\lambda+p} \Delta^{\lambda+p} z + \dots$$

Quant à la formule (T_λ) , elle prend, une fois développée, la forme

$$(6) \quad \Delta^\lambda z_0 = z_0 u_{\lambda,0} + \frac{dz_0}{dx} \Delta x u_{\lambda,1} + \dots + \frac{d^k z_0}{dx^k} \frac{(\Delta x)^k}{k!} u_{\lambda,k} + \dots$$

Les coefficients $u_{\lambda,k}$ vérifient l'équation aux différences finies partielles

$$(7) \quad u_{\lambda,k} = \lambda(u_{\lambda,k-1} + u_{\lambda-1,k-1}),$$

avec les conditions $u_{0,0} = 1$, $u_{0,k} = 0$ si $k > 0$ et $u_{\lambda,0} = 0$ si $\lambda > 0$. Ce résultat fournit un calcul arithmétique simple des coefficients $u_{\lambda,k}$. Connaissant en effet la valeur de $z = f(x)$ et de ses dérivées en un point-pivot x_0 , les différences $\Delta^\lambda z_0$ peuvent être calculées au moyen de (6) et (7), les valeurs qui suivent dans la table s'en déduisant par de simples additions grâce aux formules

$$\begin{aligned} z_p &= z_{p-1} + \Delta z_{p-1} \\ \Delta^{k-1} z_p &= \Delta^{k-1} z_{p-1} + \Delta^k z_{p-1}. \end{aligned}$$

20. Voir [Grattan-Guinness 2003 ; Roegel 2011].

21. Prony indique que l'un des géomètres du cadastre a calculé l'expression précise des coefficients $A_{\lambda+p}$ en fonction de λ pour $p = 1, 2, \dots, 7$ [1797, p. 555].

On sait que le calcul des tables du cadastre a précisément été fondé sur un principe de division du travail qui visait à faire effectuer de simples additions à plusieurs dizaines de calculateurs recrutés à cet effet.

Dans le même cours, Prony donne en outre une expression des coefficients $u_{\lambda,k}$ ²²

$$u_{\lambda,k} = \sum_{p=0}^{\lambda} \left[(-1)^{\lambda-p} C_{\lambda}^p p^k \right],$$

procédant du développement de $\Delta^{\lambda} x^k$ obtenu en fixant $\Delta x = 1$

$$u_{\lambda,k} = \sum_{p=0}^{\lambda} \left[(-1)^{\lambda-p} C_{\lambda}^p (x+p)^k \right] \Big|_{x=0} = \Delta^{\lambda} x^k \Big|_{x=0}.$$

Cette expression va jouer un rôle important au XIX^e siècle dans les travaux des mathématiciens britanniques.

LES TRAITÉS DE LACROIX

L'ouvrage *Traité des différences et des séries*, publié en 1800, est la suite du *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix (1797-1798). Le premier chapitre, de 300 pages, intitulé « Calcul des différences », couvre l'ensemble des thèmes déjà rencontrés²³ : calcul direct aux différences finies, calcul inverse pour les fonctions explicites, intégration des équations aux différences, ainsi que les applications correspondant à l'interpolation, à la sommation des séries ou aux quadratures approchées²⁴. Dans son *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* [1802, 1806], le thème « Des différences et des séries » fait aussi l'objet d'un appendice d'une centaine de pages.

LA POSITION DE LAGRANGE DANS SON COURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Tandis que ces exposés systématiques de Prony et de Lacroix assurent une place importante au calcul aux différences finies parmi les diverses branches de l'analyse, Lagrange suit une voie très différente dans son cours contemporain à l'École polytechnique, publié dans sa *Théorie des fonctions analytiques* [1797] et ses *Leçons sur le calcul des fonctions* [1801]. Le thème est effectivement absent du premier ouvrage et n'est abordé

22. Nous utilisons ici des notations modernisées, en particulier C_n^p pour $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

23. On y trouve même un écho des travaux récents de Prony.

24. Pour une vue d'ensemble de ce traité de Lacroix, voir [Caramalho Domingues 2008, § 2.5].

dans une leçon du second que pour mettre en garde contre les dangers du passage des différences finies aux différences infiniment petites, ceci dans la lignée de sa critique de l'utilisation des infiniment petits ou des limites pour fonder l'analyse. Lagrange utilise pour cela l'exemple des solutions singulières des équations non linéaires étudiées par Charles où la situation est très différente dans le cas des équations aux différences finies de ce qu'elle est dans celui des équations différentielles. Lagrange affirme alors :

« Ayant réduit, comme nous l'avons fait, le calcul différentiel à ses véritables élémens, les fonctions dérivées, et l'ayant ainsi entièrement séparé du calcul aux différences finies, nous avons cru devoir dire deux mots de la nature et des usages de celui-ci qui n'est à proprement parler que l'analyse ordinaire appliquée à une suite de quantités qu'on suppose dépendre d'une même loi. » [1801, p. 397-398]

Cette thèse de la séparation forte du calcul différentiel et du calcul aux différences finies, avec une réduction de ce dernier au « calcul des suites », témoigne d'une réticence de Lagrange à considérer le calcul aux différences finies comme une nouvelle branche, à part entière, de l'analyse transcendante²⁵.

ARBOGAST

L'ouvrage *Du Calcul des dérivations* d'Arbogast [1800] représente un pas essentiel dans l'histoire du calcul symbolique²⁶. Le mathématicien y développe une « méthode de séparation des échelles d'opérations » qui consiste à calculer directement sur les symboles d'opérations tels que d , Δ , Σ (et leurs inverses) séparés des fonctions. Il retrouve ainsi les formules (voir § I.4) reliant des notions de calcul différentiel, calcul intégral et calcul direct et inverse des différences, ces mêmes formules que Lagrange [1774] avait précédemment obtenues en utilisant l'analogie entre les puissances et les différences [Arbogast 1800, p. 350-354]. Arbogast consacre la dernière section de l'ouvrage à un exposé de « la méthode directe et inverse des différences », dans lequel il recourt largement à sa méthode de séparation des échelles, en introduisant, notamment, le symbole E permettant de noter les états successifs d'une suite ou d'une fonction, en posant $Eu_n = u_{n+1}$ ou $E\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x)$. Le calcul symbolique avec cet opérateur $E = 1 + \Delta$ lui permet de retrouver nombre de résultats du calcul aux différences finies²⁷.

25. Auguste Comte explicite cette position, qu'il partage, dans la 9^e leçon de son *Cours de philosophie positive* [1830].

26. Voir [Friedelmeyer 1994] pour une étude générale de cet ouvrage. Voir aussi [Lubet 2010, § 3.1] pour ce qui concerne plus particulièrement le calcul intégral.

27. Par exemple, à l'aide de la formule du binôme, il retrouve ainsi la formule de Gregory-Newton.

Arbogast indiquait dans la préface : « J'ai lieu d'espérer que le lecteur sera content de voir avec combien de facilité les théorèmes généraux et des formules importantes de la méthode des différences découlent de principes aussi simples. » [*Ibid.*, p. x] Peu de mathématiciens du Continent²⁸ adopteront cependant sa méthode : ce ne sera le cas ni de Lagrange, ni de Laplace, ni de Lacroix²⁹ au début du XIX^e siècle.

III. Le renouveau du calcul aux différences finies en Grande-Bretagne

Dans la seconde moitié du XVIII^e siècle, le contraste est grand entre la Grande-Bretagne (voir § I.1) et la France quant à la place accordée à la théorie des différences finies aussi bien dans la recherche que dans la diffusion du savoir. Dans le supplément à la troisième édition de l'*Encyclopædia Britannica*, paru en 1801-1803, l'article INCREMENTS, très bref, cite Newton, Taylor, Stirling, Emerson, mais ne mentionne aucune recherche continentale, ni aucune recherche britannique plus récente. Très court également, l'article INTERPOLATION, qui débute avec l'évocation des travaux de Briggs et de Mouton, se termine avec ceux de Waring sans faire mention des travaux du Continent.

De premiers mémoires de Brinkley [1803, 1807], suivis par d'importantes contributions de Herschel, conduiront toutefois à une évolution décisive. Nous allons voir que l'ordre d'importance accordé en France et en Grande-Bretagne au calcul aux différences finies va s'inverser dans la première moitié du XIX^e siècle.

1. Brinkley

Ancien étudiant de Cambridge, professeur d'astronomie à l'Université de Dublin, John Brinkley se montre bien informé des mathématiques continentales. Dans un mémoire de 1803 sur le problème de Kepler, il qualifie la *Mécanique céleste* de Laplace d'« incomparable work » [Brinkley 1803, p. 91] et fait état du *Calcul des dérivations* d'Arbogast dans lequel il a retrouvé les objectifs d'un de ses propres mémoires de 1798 consacré aux développements en séries [*Ibid.*, p. 84].

Dans un mémoire de 1807 dont le but affirmé est d'obtenir un calcul effectif des coefficients obtenus en développant la formule $(T_{-\lambda})$ figurant

28. On peut citer, en France, Jacques-Frédéric Français et Servois : voir [Lubet 2010, § 3.3].

29. On note, cependant, une certaine évolution, dans la seconde édition du traité de Lacroix, publiée en 1819 (voir *infra* § III.5).

dans [Lagrange 1774], Brinkley cite Laplace, Arbogast et Lacroix [1800]. Les notations et le vocabulaire des fluxions hérités de Newton sont certes conservés, mais les différences finies sont à présent notées à l'aide de la lettre Δ , comme sur le Continent. Pour désigner $(\Delta x^n)|_{x=0}$, Brinkley introduit la notation $\Delta 0^n$ très largement utilisée ensuite par les mathématiciens britanniques. Chemin faisant, il donne aussi le développement de (T_λ) accompagné de la démonstration : si Brinkley ne cite pas ses sources sur ce point, le résultat et sa démonstration sont néanmoins précisément ceux que l'on trouve, aux notations près, dans les *Leçons* de Prony de 1795 et le *Traité* de Lacroix de 1800.

2. Herschel et l'Analytical Society

On sait qu'un événement important se produit en 1812 avec la fondation, à Cambridge, de *The Analytical Society*, une association dont le but est de réformer l'enseignement des mathématiques dans le pays. Elle est le fait d'un groupe d'étudiants, parmi lesquels Charles Babbage, John Herschel et George Peacock, auteurs de l'unique numéro des *Memoirs of the Analytical Society* (1813).

Manifeste en faveur des méthodes et des notations en usage sur le Continent, la préface [Babbage *et al.* 1813] dresse un tableau des développements récents des mathématiques dans lequel le calcul aux différences finies occupe environ un tiers. Taylor est salué comme son inventeur, les noms de Stirling, Moivre, Emerson sont cités, mais l'essentiel est consacré aux récents travaux du Continent. Un mémoire spécifique écrit par Herschel [1813] y est ensuite consacré aux équations aux différences finies. Le savant revient sur le résultat fondamental obtenu par Laplace [1773, 1776] et Lagrange [1777], qui permet de ramener la résolution d'une équation linéaire complète à celle de l'équation sans second membre. S'il suit une méthode très voisine de celle mise en œuvre par Laplace [1776], Herschel adopte cependant un point de vue plus global consistant, pour résoudre une équation d'ordre n , à se ramener à la résolution de n équations successives d'ordre un. On peut comprendre le principe de sa méthode à partir du cas de l'équation du second ordre

$$(8) \quad u_{x+2} + A_x \cdot u_{x+1} + B_x \cdot u_x = C_x,$$

et de l'équation sans second membre associée

$$(9) \quad u_{x+2} + A_x \cdot u_{x+1} + B_x \cdot u_x = 0.$$

Il introduit les suites auxiliaires α_x, β_x, v_x , soumises aux conditions

$$\begin{cases} u_{x+1} + \alpha_x \cdot u_x = v_x \\ v_{x+1} + \beta_x \cdot v_x = C_x. \end{cases}$$

L'élimination des v_x entre ces deux équations conduit en effet à l'équation linéaire

$$u_{x+2} + (\alpha_{x+1} + \beta_x).u_{x+1} + \alpha_x\beta_x.u_x = C_x.$$

La résolution de (8) est donc ramenée à la résolution de deux équations d'ordre un successives, pourvu que l'on sache trouver les suites α_x et β_x vérifiant $\alpha_{x+1} + \beta_x = A_x$ et $\alpha_x\beta_x = B_x$. Herschel donne, pour ce faire, une méthode utilisant deux solutions de (9) indépendantes.

Le même mémoire aborde aussi le thème des équations fonctionnelles, qui aura du succès chez les mathématiciens britanniques. Herschel s'appuie sur les travaux de Monge et Laplace, mais grâce à l'utilisation de la notation exponentielle pour les itérées de fonctions et de la notation F^{-1} pour les fonctions réciproques, dont il se fait le pionnier³⁰, ses propres calculs sont plus clairs et conduisent à des résultats plus généraux. Les équations fonctionnelles resteront chez lui un centre d'intérêt, proche des travaux effectués au même moment par Babbage³¹.

Herschel a aussi recours aux fonctions génératrices, qu'il présente, dans son mémoire « Consideration of Various Points of Analysis » [1814], à la fois comme la source de nouvelles découvertes et comme un point de vue unificateur permettant de rassembler de nombreux résultats connus. Il n'est cependant pas favorable à l'utilisation systématique que Laplace en fait dans ses écrits. Quand il s'agit par ailleurs de démontrer les identités (T), (E), (G) (voir § I.4), la méthode de Laplace suppose un passage du fini à l'infini, une démarche ayant l'inconvénient, pour Herschel, d'être étrangère au langage symbolique [Herschel 1816a, p. 25]. Herschel ne se satisfait pas non plus des méthodes combinatoires utilisées par Brinkley et s'attache donc à retrouver ses résultats par des méthodes plus générales. Il démontre, à cette occasion, l'identité souvent nommée *théorème de Herschel* par ses successeurs

$$f(e^t) = f(1) + tf(1 + \Delta)0^1 + \frac{t^2}{1.2}f(1 + \Delta)0^2 + \text{etc.},$$

et qui comporte selon lui un certain intérêt pour le calcul numérique [1816a, p. 30].

30. Les nouvelles notations qu'il utilise ont en fait été proposées par le mathématicien allemand Heinrich Bürrmann dès 1798 : voir [Lubet 2010, § 2.4 ; Noble 2011, § 4.2.2].

31. Voir [Ortiz 2007 ; Lubet 2010, p. 108-109].

3. Herschel : l'Appendice au traité de Lacroix (1816) et les Exemples (1820)

Afin de hâter la diffusion des mathématiques continentales en Grande-Bretagne, Herschel, Peacock et Babbage font paraître, en 1816, une traduction de la seconde édition du *Traité élémentaire* de Lacroix [1802/1806]. Ils ajoutent de nombreuses notes qui, notamment pour les premières (rédigées par Peacock), marquent leur désaccord avec le choix de Lacroix de la méthode des limites pour fonder le calcul différentiel ; leur choix se porte au contraire sur le point de vue de Lagrange basé sur le développement des fonctions en séries entières.

Par ailleurs, dans le traité initial de Lacroix, le calcul aux différences finies faisait l'objet d'un appendice à propos duquel les traducteurs annoncent une décision encore plus radicale : « The Appendix of Lacroix, on the Calculus of Differences and Series, has been replaced by an original Treatise, by Mr. Herschel, in which many important subjects are included, which had been either entirely omitted, or very imperfectly considered in the other. » [Lacroix 1816, p. iii]³² Cet appendice constitue un véritable nouveau traité, de 115 pages, où Herschel, outre les résultats de base de la théorie, traite plusieurs thèmes nouveaux, mêlant des méthodes ayant récemment vu le jour en Grande-Bretagne avec un calcul symbolique inspiré d'Arbogast³³, auquel Lacroix n'avait pas eu recours. Après avoir établi la formule classique de Gregory-Newton

$$u_{x+n} = u_x + \frac{n}{1} \Delta u_x + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u_x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 u_x + \text{etc.},$$

Herschel convient ainsi de l'écrire sous la forme

$$u_{x+n} = (1 + \Delta)^n u_x,$$

et souligne : « [this method of notation] seems to unite in the most perfect manner the properties of conciseness, simplicity and elegance, and appears peculiarly well adapted to open new and enlarged views of the extent and meaning of analytical operations » [1816b, p. 479].

À partir de la formule de Taylor écrite sous forme symbolique, les formules plus générales (T_λ) , $(T_{-\lambda})$, (E_λ) sont déduites selon des méthodes explicitement empruntées à Arbogast ou Brinkley. Parmi les sujets introduits figurent aussi les équations linéaires aux différences (et

32. Seuls un nombre réduit de passages sont précédés de la mention « translated from the French edition ».

33. Herschel l'indique explicitement : « This theorem is due to Arbogast, who first devised the method of separating the symbols of operation from those of quantity in researches of this kind. » [1816b, p. 489]

le cas de l'équation non linéaire de Charles), les équations aux différences mixtes, les équations fonctionnelles³⁴. L'*Appendix* contient par ailleurs plusieurs parties dédiées aux applications du calcul aux différences finies, notamment à la sommation des séries, aux séries récurrentes et à l'interpolation. Enfin, un passage aborde la relation avec le calcul différentiel où Herschel précise sa position : « The Differential Calculus, and that of Differences, although forming two distinct branches of analytical investigation, have still a very near relation to each other ; and when the former is considered in the light in which Leibnitz presented it, or as depending on the theory of limits³⁵, it becomes a particular case of the latter. » [*Ibid.*, p. 539-540]

Quelques années plus tard, Herschel [1820] publie un recueil d'exemples d'applications du calcul aux différences finies couvrant aussi des thèmes absents de son *Appendix* de 1816 : détermination de courbes, problèmes de mathématiques mixtes (intérêts et annuités, gains au jeu), etc. Souvent présentés sous forme d'exercices pour les étudiants de Cambridge, et articulés aux résultats de la théorie générale exposée dans l'*Appendix*, les exemples d'Herschel montrent que le calcul aux différences finies s'affirme en Grande-Bretagne comme une branche à part entière des mathématiques.

4. Une branche à part entière

Indépendamment des réformateurs de Cambridge, d'autres mathématiciens britanniques montrent une familiarité avec les publications du Continent³⁶. Tel est le cas de Thomas Knight qui, généralisant en 1817 une forme de la formule (T_λ) du § I.4, se réfère explicitement au *Traité des différences* de Lacroix, dans lequel il a pris connaissance de la méthode utilisée par Prony [Knight 1817b, p. 234]. Intéressé par le calcul des tables en général, Knight a lu la notice dans laquelle Prony résume la méthode de calcul des tables du cadastre [1817a, p. 218-219] ; il a aussi étudié les tables calculées par Borda et publiées par Delambre en 1801, dont il discute certains points, et propose divers types de développements en séries pour le calcul des logarithmes.

34. Bien qu'un passage lui soit consacré [*Ibid.*, p. 472-477], la théorie des fonctions génératrices ne constitue pas un élément essentiel dans la structure logique du traité. Herschel renvoie à la *Théorie analytique des probabilités* [Laplace 1812] pour une étude approfondie du sujet.

35. À l'appui de cette affirmation, Herschel montre, par passage à la limite, que la formule de Gregory-Newton conduit à la formule de Taylor qui fournit, pour lui, les clés du calcul différentiel.

36. Voir [Guicciardini 1989, chap. 7-9].

En 1820, Herschel et Babbage participent à la création de la *Royal Astronomical Society*, par laquelle ils sont chargés de réaliser de nouvelles tables astronomiques et logarithmiques. C'est dans cette perspective que Babbage va concevoir l'idée d'une machine aux différences. L'influence exacte des travaux de Prony dans l'émergence du projet est mal définie, mais dans une lettre de 1822 Babbage se réfère explicitement au mode de calcul mis en œuvre par le Français : il s'agit de recourir à des moyens mécaniques pour réaliser la grande masse d'additions et de soustractions nécessaires [Grattan-Guinness 2003, p. 110 ; Roegel 2011, p. 62]. On sait que Babbage n'a pas mené ce projet à son terme et que la table de logarithmes qu'il publie en 1827 ne s'appuie pas sur de nouveaux calculs mais sur l'utilisation de tables préexistantes [Campbell-Kelly 1988]. Occupé par d'autres centres d'intérêt, Babbage ne produira plus de travaux sur le calcul des fonctions, et Herschel abandonnera ses recherches sur les différences finies.

Le calcul aux différences ne se diffuse pas moins progressivement dans le courant de la décennie 1820, à la fois à Cambridge et au travers de publications destinées à un plus large public, comme les encyclopédies. Si, à Cambridge au début des années 1820, les sujets d'examen (*Senate House Problems*) s'inscrivent encore dans la tradition du XVIII^e siècle, il pourra être demandé, dès les années 1830, de comparer la façon dont se pose le problème des solutions singulières dans le calcul aux différences finies et le calcul différentiel, en suggérant une illustration à l'aide de l'équation de Charles³⁷.

Dans la *Cyclopædia* d'Abraham Rees figure un long article INCREMENTS, dans lequel la « Method of Increments » (ou le « Calcul des Différences Finies », en français dans le texte) est présentée comme « a branch of analysis » inventée par Taylor. L'article paraît dans le volume XIX, publié en 1819, mais son contenu montre que sa rédaction est antérieure à 1813, et donc aux travaux de Herschel. L'auteur, qui commence par un petit historique de cette branche et, après avoir cité Emerson [1763] se plaignant alors qu'elle fût négligée, ajoute : « and even now, near half a century after this date, the subject has not been advanced, may scarcely touched upon by any English mathematician, while foreign authors are filling quarto volumes with the theory of *differences finies* ». Parmi ces auteurs étrangers, il cite Bossut et Cousin et présente surtout le *Traité des différences* de Lacroix comme la plus complète de ces publications.

37. On trouve ces sujets à la fin des volumes du *Repository* édité par Leybourn [1814-1835], ainsi que dans le recueil spécialisé *Mathematical Problems and Examples Arranged According to Subjects from the Senate-House Examination Papers, 1821 to 1836 Inclusive* (1836), où la section relative aux différences finies occupe les pages 135 à 144 (la question relative aux solutions singulières se trouve page 143).

L'auteur s'en remet aux méthodes élémentaires de Nicole³⁸ pour introduire son article, mais propose ensuite un contenu assez semblable à ce que l'on trouvait sous la plume de Bossut dans l'*Encyclopédie méthodique de Mathématiques*.

En 1830, l'article MATHEMATICS de *The Edinburgh Encyclopædia* (t. 13) considère le calcul aux différences finies comme « a branch of analysis scarce inferior to the differential calculus in extent ». Il en décrit le développement historique, soulignant d'abord l'apport des savants britanniques dans la constitution de cette branche – Taylor, Newton, Moivre, Stirling, y compris Emerson – puis d'Euler pour la méthode directe aux différences et, surtout, de Lagrange, Laplace et Arbogast, le rôle de ce dernier étant souligné pour son « ingenious idea of separating the symbols of operation from those of quantity » [*Ibid.*, p. 376]. De façon étonnante, on peut noter là encore l'absence de référence aux travaux britanniques du XIX^e siècle, témoignant ainsi de la lenteur de leur diffusion.

Dans *The Penny Cyclopædia*, l'article DIFFERENCE, publié en 1837, indique que l'on a affaire à « a very wide branch of pure mathematics which must be considered under this term, namely, the method or calculus of differences » (vol. VIII, p. 487). L'article est très court, de même que les articles corrélés comme EQUATIONS OF DIFFERENCES qui ne comprend que la définition du terme. Une indication finale dans l'article DIFFERENCE – « The term difference is continental; the older English term was *increment*. » [*Ibid.*, p. 488] – met toutefois en évidence une évolution linguistique reflétant le poids de l'influence en Grande-Bretagne des travaux continentaux de la seconde moitié du XVIII^e siècle.

IV. France, Grande-Bretagne : des évolutions contrastées

1. La situation en France dans la première moitié du XIX^e siècle

Les méthodes d'analyse mathématique développées par Laplace depuis les années 1770 sont mises en œuvre dans ses deux grands ouvrages publiés au début du XIX^e siècle : *Traité de mécanique céleste* et *Théorie analytique des probabilités*³⁹. Dans le premier, on trouve notamment des calculs approchés de quadratures à l'aide de formules faisant intervenir des différences successives⁴⁰, mais c'est surtout dans le

38. Voir supra § I.1.

39. Sur la réception de ce dernier ouvrage en Grande-Bretagne, voir [Durand-Richard 2012].

40. Voir, par exemple, Laplace [1805, p. 205 et suiv.] sur la théorie des comètes. Dans le même sens, nous notons aussi l'usage de formules contenant des différences finies par Legendre dans sa construction des tables d'intégrales elliptiques [1816, 1826].

second qu'est utilisé le calcul aux différences finies. Dans l'introduction à la deuxième édition de sa *Théorie analytique des probabilités*, en 1814, Laplace souligne :

« L'application des principes que nous venons d'exposer aux diverses questions de probabilité exige des méthodes dont la recherche a donné naissance à plusieurs branches de l'Analyse, et spécialement à la Théorie des combinaisons et au Calcul des différences finies. [...] Mais la méthode la plus générale et la plus directe pour résoudre les questions de probabilité consiste à les faire dépendre d'équations aux différences. » [Laplace 1812/1814, *Œuvres* VII, p. xxi-xxiii]

L'intégration de divers types d'équations aux différences finies occupe en effet une place importante dans le livre I, où Laplace reprend et développe plusieurs de ses précédents résultats analytiques afin de les appliquer aux questions de probabilités dans le livre II.

Dans la seconde édition du grand traité de 1800 sur les différences et les séries, parue en 1819 comme troisième volume de son *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Lacroix introduit quelques éléments de calcul symbolique, malgré son jugement plutôt négatif sur les méthodes d'Arbogast⁴¹. Il s'y manifeste en fait une certaine influence des travaux des mathématiciens britanniques publiés depuis la première édition et eux-mêmes influencés par Arbogast : sont, par exemple, mentionnés les résultats obtenus par Brinkley sur les formules (T_λ) et $(T_{-\lambda})$, ainsi que le théorème de Herschel relatif au développement de $f(e^t)$.

En 1816, Cauchy avait proposé un programme pour le cours d'analyse de l'École polytechnique qui donnait une place substantielle au calcul aux différences finies. Il l'avait situé dès la première année d'étude, après l'analyse algébrique et avant le calcul différentiel et intégral⁴². Cette proposition, cohérente avec son choix de fonder le calcul différentiel et intégral sur la théorie des limites, n'a pas été acceptée et le calcul aux différences finies est resté l'objet de peu de leçons situées à la fin du cours d'analyse de seconde année⁴³.

Sur le plan de la recherche, Cauchy, influencé par des travaux de Barnabé Brisson, développe un calcul sur les opérateurs mais fondé sur une définition numérique de ceux-ci au moyen de l'intégrale de Fourier⁴⁴ ; il parvient à des méthodes de résolution uniformes pour les équations linéaires à coefficients constants qu'elles soient différentielles, aux dérivées partielles ou aux différences finies [Cauchy 1827]. Quant au champ du calcul

41. Voir [Lubet 2010, p. 102-103].

42. Voir [Belhoste 1991, p. 62, 304].

43. Voir [Gilain 1989].

44. Voir [Lubet 2010, § 4.2].

symbolique, il reste limité et sans réelle autonomie dans les travaux du mathématicien.

En somme, le rôle du calcul aux différences finies tant dans la recherche que dans l'enseignement semble donc s'estomper en France à partir des années 1820.

2. L'essor en Grande-Bretagne après 1830

Si les recherches initiées dans les deux premières décennies du XIX^e siècle connaissent une période de relative stagnation dans le courant des années 1820, après que Herschel se soit éloigné du sujet, le calcul aux différences finies est l'objet d'un regain d'intérêt dans les années 1830 avec l'entrée en scène d'une nouvelle génération de mathématiciens, parmi lesquels George Boole et Duncan Gregory, et la création, par ce dernier, du *Cambridge Mathematical Journal* en 1837⁴⁵. Ce périodique, comme d'autres revues et traités, vont se faire l'écho de nombreuses recherches sur le calcul aux différences, notamment sur les divers types d'équations linéaires.

Le premier numéro du *Cambridge Mathematical Journal* comporte une rubrique intitulée « Differential Calculus and Calculus of finite Differences ». Dans l'un des articles, Duncan Gregory [1839b] s'emploie à illustrer l'efficacité de la méthode de séparation des symboles sur plusieurs résultats déjà obtenus par d'autres moyens. Dans un autre article [Gregory 1839a], il se consacre à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Gregory y évoque les deux mémoires de Brisson, qu'il connaît par le biais des écrits de Cauchy. Mais il ne retient pas la définition numérique des opérateurs de ce dernier, reposant sur l'utilisation de l'intégrale de Fourier.

Dans le numéro suivant, Boole [1841] présente, à la fois pour les équations différentielles et pour les équations aux différences finies linéaires, un mode de résolution qui fait appel à la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{F(E)}$, où F est un polynôme selon l'opérateur E , comme dans l'algèbre ordinaire. Dans ses travaux ultérieurs, il envisagera de larges classes d'équations linéaires incluant comme cas particuliers les équations différentielles ou aux différences finies.

La diffusion du calcul aux différences finies se poursuit aussi grâce à la publication de plusieurs traités, souvent liés à l'enseignement de Cambridge. Sous l'égide de la *Society for the Diffusion of Useful Knowledge*, De Morgan publie en 1836 un volumineux traité de calcul différentiel et intégral dans lequel il entend faire reposer l'exposé sur la notion de limite, et

45. Voir [Koppelman 1971 ; Grattan-Guinness 2010].

non sur les développements en séries, ce qu'il souligne dès l'Avertissement [1836, p. 3]. La théorie des différences finies, qui apparaît dans deux chapitres, est utilisée pour obtenir des formules d'interpolation, de quadrature approchée ou pour l'accélération de convergence des séries⁴⁶. Les résultats sont très souvent suivis d'exemples numériques, accompagnés de commentaires sur les conditions d'approximation.

En 1839, John Hymers publie l'un des premiers traités anglais dédiés uniquement au calcul intégral. La seconde moitié de l'ouvrage est constituée par « A treatise on the calculus of finite differences » où la méthode de séparation des symboles d'opération est abondamment utilisée. En 1849, James Pearson publie un traité exclusivement consacré au calcul aux différences finies, reposant sur l'utilisation systématique des méthodes symboliques, ce qu'il justifie au début de sa préface : « The superiority of the method of Separation of Symbols, applied to the Calculus of Finite Differences, over all other mode of treating the subject, is now so generally admitted, that no apology need be introduced for making it the foundation of the present treatise. »

La place importante attribuée au calcul aux différences finies dans l'*Encyclopædia Metropolitana* où l'article rédigé par Thomas G. Hall [1845] occupe près de 80 pages, confirme son institutionnalisation en Grande-Bretagne comme une branche à part entière des mathématiques.

Un aboutissement de ce développement est le *Treatise on the Calculus of Finite Differences* que Boole publie en 1860 et qui restera une référence essentielle sur le sujet. Il y explicite sa conception des rapports du calcul aux différences finies avec le calcul différentiel et intégral. Dans sa préface, Boole insiste sur l'unité entre les deux branches de l'analyse : « In the following exposition of the Calculus of Finite Differences, particular attention has been paid to the connexion of its methods with those of the Differential Calculus – a connexion which in some instances involves far more than a merely formal analogy. » Il définit le calcul différentiel comme un calcul sur les limites et note que des résultats de ce calcul peuvent être obtenus à partir de formules en différences finies dans lesquelles Δx devient infinitésimal. Néanmoins, Boole souligne que le calcul différentiel ne peut être considéré comme un simple cas particulier du calcul aux différences finies⁴⁷. Après l'étude détaillée de l'exemple de l'équation non linéaire donné par Charles, déjà traité dans de nombreux ouvrages antérieurs, il peut affirmer : « it is not true that every result of the Calculus of Finite Differences merges when the increments are indefinitely diminished into a result of the Differential Calculus. » [Boole 1860, p. 137]

46. Comme pour le fondement du calcul différentiel, De Morgan adopte le point de vue de Cauchy pour la théorie des séries.

47. Position défendue notamment par Pearson [1849, p. 44].

Conclusion

L'histoire du statut du calcul aux différences finies dans la recherche et l'enseignement mathématiques, du XVIII^e siècle au milieu du XIX^e, est instructive à plus d'un titre. Le fil de cette histoire issue de la Grande-Bretagne connaît des bifurcations mais pas de véritable coupure. La première bifurcation se situe vers le milieu du XVIII^e siècle, quand le courant de recherches dans ce domaine se développe sur le Continent alors qu'il s'essouffle en Grande-Bretagne, la seconde bifurcation lorsqu'un mouvement inverse, de la France vers la Grande-Bretagne, se produit au début du XIX^e siècle. Chacune de ces bifurcations correspond à la fois à un développement substantiel du contenu du calcul aux différences finies, dans ses résultats et ses méthodes, et à une affirmation de son statut propre dans le cadre de l'analyse mathématique.

Dans le premier cas, avec Euler et les mathématiciens français, on voit apparaître sur le Continent des exposés systématiques et didactiques du calcul aux différences direct et inverse ainsi que des recherches conduisant à l'extension de ce dernier calcul aux équations aux différences finies. Dans le second cas, le renouveau du calcul aux différences finies en Grande-Bretagne repose sur l'assimilation de l'héritage global des travaux analytiques du Continent, mais plus particulièrement des méthodes symboliques d'Arbogast, jugées plutôt négativement par ses collègues français. Ce choix britannique du calcul symbolique constitue sans doute un élément important de la dynamique du calcul aux différences finies en Grande-Bretagne au XIX^e siècle.

Le développement du calcul aux différences finies en tant que branche à part entière de l'analyse concerne tout autant son contenu théorique que l'extension de son champ d'applications. Depuis l'origine, c'est un domaine où s'articulent formules analytiques et calculs numériques, ce que nous avons pu constater aussi bien dans les travaux continentaux que dans les travaux britanniques, au XVIII^e comme au XIX^e siècle.

BIBLIOGRAPHIE

- [Alfonsi 2011] Liliane Alfonsi, *Étienne Bézout (1730-1783), mathématicien des Lumières*, Paris : l'Harmattan, 2011.
- [Arbogast 1800] Louis-François-Antoine Arbogast, *Du calcul des dérivations*, Strasbourg : Levrault, an VIII (1800).
- [Babbage *et al.* 1813] Charles Babbage, John F. William Herschel, George Peacock, « Préface », *Memoirs of the Analytical Society*, 1, Cambridge, 1813, p. i-xxii.
- [Belhoste 1991] Bruno Belhoste, *Augustin-Louis Cauchy. A Biography*, Springer, 1991.
- [Bézout 1779] Étienne Bézout, *Théorie générale des équations algébriques*, Paris, 1779.

- [Biot 1802] Jean-Baptiste Biot, « Considérations sur les intégrales des équations aux différences finies », *Journal de l'École polytechnique*, 11^e cahier, t. IV (1802), p. 182-198.
- [Bonnycastle 1782] John Bonnycastle, *An Introduction to Algebra*, London : Johson, 1782.
- [Bossut 1797] Charles Bossut, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, t. I, Paris : Imprimerie de la République, an VI (1797).
- [Boole 1841] George Boole, « On the Integration of Linear Differential Equations with Constant Coefficients », *Cambridge Mathematical Journal (1839-1841)*, II (1841), p. 114-119.
- [Boole 1860] G. Boole, *A Treatise on the Calculus of Finite Differences*, Cambridge : Macmillan and Co, 1860.
- [Borgato 2012] Maria Teresa Borgato, « Lagrange e le equazioni alle differenze finite », dans S. Féry (dir.), *Aventures de l'analyse de Fermat à Borel*, Nancy : Presses universitaires de Nancy, 2012, p. 301-335.
- [Brinkley 1803] John Brinkley, « An Examination of various Solutions of Kepler's Problem, and a short practical Solution of that Problem pointed out », *Transactions of the Royal Irish Academy*, 9 (1803), p. 83-131.
- [Brinkley 1807] J. Brinkley, « An Investigation of the General Term of an Important Series in the Inverse Method of Differences », *Philosophical Transactions*, 97 (1807), p. 114-131.
- [Campbell-Kelly 1988] Martin Campbell-Kelly, « Charles Babbage's Table of Logarithms (1827) », *Annals of the History of Computing*, 10/3 (1988), p. 159-169.
- [Caramalho Domingues 2008] João Caramalho Domingues, *Lacroix and the calculus*, Basel : Birkhäuser, 2008.
- [Cauchy 1827] Augustin-Louis Cauchy, « Sur l'analogie des puissances et des différences », *Exercices de mathématiques*, 1827, p. 159-192 ; *Œuvres complètes*, 2^e série, t. 7, p. 198-235.
- [Chabert et al. 1994] Jean-Luc Chabert et al., *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, Paris : Belin, 1994.
- [Charles 1786] Jacques Charles, « Théorème sur les équations en différences finies », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1783 (1786), p. 560-562.
- [Charles 1791] J. Charles, « Recherches sur les principes de la différenciation et sur les intégrales connues jusqu'ici sous le nom d'intégrales particulières », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1788 (1791), p. 115-139.
- [Comte 1830] Auguste Comte, *Cours de philosophie positive*, t. 1, Paris, 1830.
- [Condorcet 1765] Condorcet, *Du calcul intégral*, Paris : Didot, 1765.
- [Condorcet 1774] Condorcet, « Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1771 (1774), p. 49-74.
- [Cousin 1777] Jacques-Antoine-Joseph Cousin, *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, 2 vol., Paris : Jombert, 1777.
- [Cousin 1796] J.-A.-J. Cousin, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris : Régent & Bernard, an IV (1796).
- The Cyclopædia ; or, Universal Dictionary of Arts, Sciences, and Literature*, A. Rees (éd.), vol. XIX, London : Longman, 1819.
- [De Morgan 1836] Augustus De Morgan, *The Differential and Integral Calculus*, London : Baldwin & Cradock, 1836 ; 2^e éd., 1842.

- [Durand-Richard 2012] Marie-José Durand-Richard, « La réception de la théorie des probabilités de Laplace chez les algébristes anglais (1812-1854) », *Journal électronique d'histoire des probabilités et de la statistique*, 8 (déc. 2012).
- The Edinburgh Encyclopædia*, vol. XIII, Edinburgh : Blackwood, 1830.
- [Emerson 1763] William Emerson, *The Method of Increments*, London : Nourse, 1763.
- [Emerson 1767] W. Emerson, *The Arithmetic of Infinites and the Differential Method illustrated by Examples*, London : Nourse (Cyclomathesis : or, An easy introduction to the several branches of the mathematics, vol. 5), 1767.
- Encyclopædia Britannica*, 3^e éd., *Supplement*, vol. 2, Edinburgh : Thomson Bonar, 1801.
- Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, Supplément*, 4 tomes, Paris, 1776-1777.
- Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, 3 tomes, Paris : Panckoucke, 1784-1789.
- [Euler Opera Omnia] Leonhard Euler, *Leonardi Euleri Opera Omnia*, Basel : Birkhäuser, 1911-...
- [Euler 1748] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, vol. I, 1748 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 8.
- [Euler 1755] L. Euler, *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Pétersbourg : Academiae imperialis scientiarum, 1755 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 10.
- [Euler 1768-1770] L. Euler, *Institutiones calculi integralis*, 3 vol., Pétersbourg, 1768-1770 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 11-13.
- [Euler 1770] L. Euler, « Nouvelle manière de comparer les observations de la lune avec la théorie », *Mémoires de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin* 19 (1770), p. 221-234 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 24, p. 90-100.
- [Feigenbaum 1985] Lenore Feigenbaum, « Brook Taylor and the Method of Increments », *Archive for History of Exact Sciences*, 34/1 (1985), p. 1-140.
- [Friedelmeyer 1994] Jean-Pierre Friedelmeyer, « Le calcul des dérivations d'Arbogast et le projet d'algébrisation de l'analyse à la fin du XVIII^e siècle », *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 43 (1994).
- [Gilain 1989] Christian Gilain, « Cauchy et le cours d'analyse de l'École polytechnique », *Bulletin de la Société des Amis de la Bibliothèque de l'École polytechnique*, 5 (1989), p. 3-145.
- [Gilain 2010] C. Gilain, « La place de l'analyse dans la classification des mathématiques : de l'Encyclopédie à la Méthodique », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 45 (2010), p. 109-128.
- [Goldstine 1977] Herman H. Goldstine, *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, New York : Springer-Verlag, 1977.
- [Grattan-Guinness 2003] Ivor Grattan-Guinness, « The computation factory : de Prony's project for making tables in the 1790s », dans M. Campbell-Kelly et al. (éd.), *The History of Mathematical Tables : From Sumer to Spreadsheets*, Oxford, 2003, p. 104-121.
- [Grattan-Guinness 2010] I. Grattan-Guinness, « D Company : the Rise and Fall of Differential Operator Theory in Britain, 1810s-1870s », *Archives internationales d'histoire des sciences*, 60 (2010), p. 477-528.
- [Gregory 1839a] Duncan Farquharson Gregory, « On the Solution of Linear Differential Equations with Constant Coefficients », *Cambridge Mathematical Journal*, I (1839), p. 22-31.

- [Gregory 1839b] D. F. Gregory, « Demonstrations of Theorems in the Differential Calculus and Calculus of Finite Differences », *Cambridge Mathematical Journal*, I (1839), p. 212-222.
- [Guicciardini 1989] Niccolò Guicciardini, *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800*, Cambridge : Cambridge University Press, 1989.
- [Hahn 1981] Roger Hahn, « More Light on Charles the Obscure », *ISIS*, 72 (1981), p. 83-86.
- [Hall 1845] Thomas G. Hall, THE CALCULUS OF FINITE DIFFERENCES, *Encyclopedia Metropolitana*, vol. 2, London, 1845, p. 227-304.
- [Herschel 1813] John F. William Herschel, « On Equations of Differences, and their Application to the Determination of Functions from Given Conditions », *Memoirs of the Analytical Society* 1, Cambridge, 1813, p. 65-114.
- [Herschel 1814] J. F. W. Herschel, « Consideration of Various Points of Analysis », *Philosophical Transactions*, 104 (1814), p. 440-468.
- [Herschel 1816a] J. F. W. Herschel, « On the Development of Exponential Functions ; together with Several New Theorems relating to Finite Differences », *Philosophical Transactions*, 106 (1816), p. 25-45.
- [Herschel 1816b] J. F. W. Herschel, *Appendix : On Differences and Series*, dans [Lacroix 1816, p. 465-579].
- [Herschel 1820] J. F. W. Herschel, *A Collection of Examples of the Applications of the Calculus of finite Differences*, Cambridge : Smith, 1820.
- [Hymers 1839] John Hymers, *A Treatise of Differential Equations and on the Calculus of Finite Differences*, Cambridge : Deighton, 1839.
- [Knight 1817a] Thomas Knight, « Of the Construction of Logarithmic », *Philosophical Transactions*, 107 (1817), p. 217-233.
- [Knight 1817b] T. Knight, « Two General Propositions in the Method of Differences », *Philosophical Transactions*, 107 (1817), p. 234-244.
- [Koppelman 1971] Elaine Koppelman, « The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra », *Archive for the History of Exact Sciences*, 8 (1971), p. 155-242.
- [Lacroix 1800] Sylvestre-François Lacroix, *Traité des différences et des séries*, Paris : Duprat, an VIII (1800).
- [Lacroix 1802] S.-F. Lacroix, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris : Crapelet, an X (1802) ; 2^e éd., 1806.
- [Lacroix 1816] S.-F. Lacroix, *An Elementary Treatise of the Differential and Integral Calculus, Translated from the French with Appendix and Notes*, Cambridge : Deighton and sons, 1816.
- [Lacroix 1819] S.-F. Lacroix, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, 2^e éd., t. 3, Paris : Courcier, 1819.
- [Lagrange *Œuvres*] Joseph-Louis Lagrange, *Œuvres de Lagrange*, J.-A. Serret et G. Darboux (éd.), 14 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1867-1892.
- [Lagrange 1759] J.-L. Lagrange, « Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies qui contient la théorie des suites récurrentes », *Miscellanea Taurinensia*, I (1759), p. 33-42 ; *Œuvres* I, p. 23-36.
- [Lagrange 1766] J.-L. Lagrange, « Solution de différens problèmes de calcul intégral », *Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société royale de Turin*, années 1762-1765, III (1766), p. 179-380 (2^e pag.) ; *Œuvres* I, p. 471-668.
- [Lagrange 1774] J.-L. Lagrange, « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables », *Nouveaux mémoires de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1772 (1774), p. 185-221 ; *Œuvres* III, p. 441-476.

- [Lagrange 1777] J.-L. Lagrange, « Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards », *Nouveaux mémoires de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1775 (1777), p. 183-272 ; *Œuvres* IV, p. 151-251.
- [Lagrange 1797] J.-L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris : Imprimerie de la République, an V (1797) ; *Œuvres* IX.
- [Lagrange 1798] J.-L. Lagrange, « Sur la méthode d'interpolation », *Nouveaux mémoires de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin*, années 1792 et 1793 (1798), p. 271-288 ; *Œuvres* V, p. 663-684.
- [Lagrange 1801] J.-L. Lagrange, « Leçons sur le calcul des fonctions », *Séances des Écoles normales*, t. 10, (an IX), 1801, Paris : Imprimerie du Cercle Social. Nouvelle éd., 1806 ; *Œuvres* X.
- [Laplace *Œuvres*] Pierre-Simon Laplace, *Œuvres complètes de Laplace*, 14 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1878-1912.
- [Laplace 1773] P.-S. Laplace, « Recherches sur le calcul intégral aux différences infiniment petites, et aux différences finies », *Miscellanea Taurinensia*, 1766-1769, IV, 1773, p. 273-345 (2^e pag.).
- [Laplace 1774] P.-S. Laplace, « Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards », *Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie des sciences par divers savans*, VI (1774), p. 353-371 ; *Œuvres* VIII, p. 5-24.
- [Laplace 1776] P.-S. Laplace, « Recherches 1^o sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards [...] », *Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie des sciences par divers savans*, VII (1776), p. 37-232 ; *Œuvres* VIII, p. 69-197.
- [Laplace 1782] P.-S. Laplace, « Mémoire sur les suites », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1779 (1782), p. 207-309 ; *Œuvres* X, p. 1-89.
- [Laplace 1805] *Traité de mécanique céleste*, Paris : Duprat, vol. 4, an XIII (1805) ; *Œuvres* IV.
- [Laplace 1812] P.-S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Paris : V^oe Courcier, 1812 ; 2^e éd., 1814 ; *Œuvres* VII.
- [Legendre 1816] Adrien-Marie Legendre, *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur des quadratures*, t. 3, Paris : V^oe Courcier, 1816.
- [Legendre 1826] A.-M. Legendre, *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes, avec des tables pour en faciliter le calcul numérique*, t. 2, Paris : Huzard-Courcier, 1826.
- [Leybourn 1814-1835] Thomas Leybourn (éd.), *New Series of the Mathematical Repository*, London : Glendinnig, vol. 3, 1814 ; vol. 4, 1819 ; vol. 5, 1830 ; vol. 6, 1835.
- [Lubet 2010] Jean-Pierre Lubet, « Calcul symbolique et calcul intégral de Lagrange à Cauchy », *Revue d'histoire des mathématiques*, 16/1 (2010), p. 63-131.
- [Lubet 2013] J.-P. Lubet, « Faut-il étudier le calcul aux différences finies avant d'aborder le calcul différentiel et intégral ? Un état de la question dans la deuxième moitié du XVIII^e siècle », dans E. Barbin et M. Moyon (éd.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges : PULIM, 2013, p. 133-148.
- Mathematical Problems and Examples Arranged According to Subjects from the Senate-House Examination Papers, 1821 to 1836 Inclusive*, Cambridge : Grant and Whittaker, 1836.

- [Moivre 1738] Abraham de Moivre, *The Doctrine of Chances*, London : Woodfall, 1738.
- [Monge 1776] Gaspard Monge, « Mémoire sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie des sciences par divers savans et lus dans ses assemblées*, VII (1776), p. 305-327.
- [Monge 1780] G. Monge, « Mémoire sur les fonctions arbitraires continues ou discontinues qui entrent dans les intégrales des équations aux différences finies », *Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie des sciences par divers savans et lus dans ses assemblées*, IX (1780), p. 345-381.
- [Monge 1786] G. Monge, « Mémoire sur l'intégration des équations aux différences finies, qui ne sont pas linéaires », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1783 (1786), p. 725-730.
- [Newton 1711] Isaac Newton, « Methodus differentialis », dans W. Jones (éd.), *Analysis per quantitatum, series, fluxiones, ac differentias*, London, 1711, p. 93-101.
- [Nicole 1719] François Nicole, « Traité du calcul des différences finies », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1717 (1719), p. 7-21.
- [Nicole 1725a] F. Nicole, « Seconde partie du calcul des différences finies », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1723 (1725), p. 20-37.
- [Nicole 1725b] F. Nicole, « Seconde section de la seconde partie du calcul aux différences finies où l'on traite des grandeurs exprimées par des fractions », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1723 (1725), p. 181-198.
- [Nicole 1726] F. Nicole, « Addition aux deux mémoires sur le calcul des différences finies, imprimés l'année dernière », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1724 (1726), p. 138-158.
- [Noble 2011] Eduardo Noble, *L'Analyse combinatoire allemande. Un projet de fondation des mathématiques à la fin du XVIII^e siècle*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot-Paris 7, 2011.
- [Ortiz 2007] Eduardo L. Ortiz, « Babbage and French Idéologie : Functional Equations, Language, and the Analytical Method », dans J. Gray & K. Parshall (éd.), *Episodes in the History of Modern Algebra (1800-1950)*, AMS / LMS, 2007, p. 13-47.
- [Pearson 1849] James Pearson, *The Elements of the Calculus of Finite Differences, Treated on the Method of Separation of Symbols*, Cambridge : Johnson, 1849.
- The Penny Cyclopædia of the Society for the Diffusion of Useful Knowledge*, vol. VIII, London : Knight, 1837.
- [Prony 1795a] Gaspard-Marie Riche de Prony, *Leçons d'analyse données à l'École centrale des Travaux publics*, an III [feuilles imprimées distribuées aux élèves].
- [Prony 1795b] Prony, « Cours d'Analyse appliquée à la Mécanique », *Journal de l'École polytechnique*, 1^{er} cahier (1795), p. 92-119.
- [Prony 1796a] Prony, « Suite des leçons d'Analyse », *Journal de l'École polytechnique*, 2^e cahier (1796), p. 2-23.
- [Prony 1796b] Prony, « Suite des leçons d'Analyse », *Journal de l'École polytechnique*, 3^e cahier (1796), p. 209-273.
- [Prony 1797] Prony, « Suite des leçons d'Analyse », *Journal de l'École polytechnique*, 4^e cahier (1797), p. 459-569.
- [Roegel 2011] Denis Roegel, *The Great Logarithmic and Trigonometric Tables of the French Cadastre : a Preliminary Investigation* (LOCOMAT project).
- [Stirling 1730] James Stirling, *Methodus differentialis sive tractatus de summatione & interpolatione serierum infinitarum*, London : Strahan, 1730.

- [Stirling 1749] J. Stirling, *The Differential Method, or a Treatise Concerning Summation and Interpolation of Infinite Series*, translated by F. Holliday, London : Cave, 1749.
- [Stirling / Tweddle 2003] Ian Tweddle, *James Stirling's Methodus Differentialis. An Annotated Translation of Stirling's Text*, Springer, 2003.
- [Taylor 1715] Brook Taylor, *Methodus incrementorum directa & inversa*, London : Gulielmi Innys, 1715.
- [Vandermonde 1775] Alexandre-Théophile Vandermonde, « Mémoire sur des irrationnelles de différens ordres avec une application au cercle », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1772 I (1775), p. 489-498.
- [Waring 1779] Edward Waring, « Problems concerning Interpolations », *Philosophical Transactions*, 69 (1779), p. 59-67.

Sur la résolution numérique des équations

Jean-Luc CHABERT

Précisons pour commencer que nous nous intéressons ici à la résolution d'équations ordinaires, le plus souvent algébriques, c'est-à-dire polynomiales

$$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + \dots + u = 0,$$

il ne sera donc pas question d'équations différentielles ou encore d'équations aux dérivées partielles.

Au XVIII^e siècle, il y a plusieurs façons de considérer la résolution d'une équation. On trouve tout d'abord la *résolution algébrique* à l'aide de formules donnant la valeur exacte des racines à partir des coefficients de l'équation, à l'instar des formules de Cardan. Obtenir de telles formules pour des équations générales relevait de l'algèbre. En contrepoint, il y a la résolution approchée, ou *résolution numérique*, d'une équation déterminée dont les coefficients sont des nombres réels donnés. En règle générale, cette résolution n'est pas exacte, elle est obtenue par approximation, le plus souvent par approximations successives, fournissant des suites de nombres convergeant plus ou moins vite vers les racines de l'équation. Outre ces deux principaux types de résolution, on peut citer la résolution en nombres entiers ou en nombres rationnels d'équations indéterminées à coefficients entiers, actuellement appelées *équations diophantiniennes*, comme l'équation de Pell-Fermat $x^2 - ay^2 = 1$, et enfin la résolution d'équations littérales au moyen de séries, technique formelle au départ mais permettant le cas échéant des applications numériques. Lagrange notamment s'est occupé de ces quatre types de résolution et sa contribution pour chacun d'eux peut être considérée comme majeure.

Nous considérerons ici essentiellement la résolution numérique des équations car les questions d'approximation et de convergence y sont centrales, nous pourrions ainsi en saisir l'évolution au cours de la période 1750-1850¹. Toutefois, dans le cadre de la confrontation entre analyse

1. L'historiographie sur ce sujet précis est assez restreinte. On trouve un important mémoire de F. Cajori intitulé *A history of the arithmetical methods of approximation to the roots of numerical equations of one unknown quantity* [1910a]. En revanche, dans son ouvrage, *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*, H. Goldstine n'évoque que très ponctuellement la question [1977, p. 143, 278 et 284].

numérique et formalisme algébrique, le quatrième type de résolution au moyen de séries sera lui aussi riche d'enseignements. D'ailleurs, l'absence de formules générales de résolution et les obstacles rencontrés pour en obtenir, ajoutés à la complication des calculs numériques effectifs même en présence de formules explicites – et ceci dès le troisième degré – incitent à la recherche de techniques de résolution approchée performantes et sûres, fournissant des valeurs sous forme décimale. La façon dont la convergence sera traitée au fil de la période qui nous occupe constitue le leitmotiv de notre étude.

Essentiellement quatre méthodes de résolution numérique sont développées entre les milieux du XVIII^e et du XIX^e siècles : celle des approximations par fractions continues décrite par Lagrange ; la méthode des séries récurrentes suggérée par Daniel Bernoulli, développée par Euler et améliorée par Lagrange, puis Fourier ; une méthode d'approximation formulée par Lagrange dans son mémoire « Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries » [1770b], où les questions de convergence s'avèrent particulièrement délicates ; enfin, on assiste à un retour à la méthode de Newton-Raphson grâce à des avancées concernant la convergence avec Fourier et Cauchy.

En abordant ces différentes méthodes, nous serons conduits à évoquer plusieurs questions connexes, notamment : la place du théorème fondamental de l'algèbre qui, bien qu'*a priori* non concerné par la question, est très souvent implicitement utilisé dans les techniques mises en œuvre ; la localisation des racines réelles qui comporte elle-même deux aspects, leurs bornes et leur séparation ; enfin, la détermination du nombre de racines réelles qui prend sa source dans la règle des signes de Descartes.

Les travaux de Lagrange relatifs à la résolution numérique des équations sont essentiellement rassemblés dans trois mémoires [Lagrange 1769, 1770a, 1770b]. Les deux premiers sont repris dans l'ouvrage *De la résolution des équations numériques de tous les degrés* [Lagrange 1798], où de très nombreuses et riches notes sont adjointes. Entre-temps, Lagrange n'est revenu sur le sujet que dans sa quatrième leçon à l'École normale de l'an III [Lagrange 1795]. Les travaux de Fourier relatifs aux équations, entrepris dès la fin du XVIII^e siècle, seront publiés assez tardivement, puis rassemblés dans son ouvrage posthume et inachevé, *Analyse des équations déterminées* [Fourier 1831]. Enfin, les travaux de Cauchy sur les équations qui, on le verra, s'attachent moins aux méthodes de résolution qu'aux preuves théoriques rigoureuses, s'échelonnent entre 1815 et 1850, les travaux des années 1820 étant développés dans ses cours à l'École polytechnique.

I. La situation au milieu du XVIII^e siècle

En dehors des calculs spécifiques de racines n -ièmes qui ne sont pas à proprement parler des recherches de racines d'équations, en ce qui concerne « the arithmetical methods of approximation », selon le titre du mémoire de Cajori [1910a], il n'y a jusqu'au XVI^e siècle, avant Viète, que des tentatives isolées d'approximation numérique des racines. Les techniques proposées par Viète s'apparentent d'ailleurs à celles mises en œuvre dans l'extraction des racines n -ièmes. Mais la multiplicité des opérations qu'elles nécessitent et l'incertitude dans l'obtention du résultat dans un grand nombre de cas les ont fait abandonner au profit de la méthode de Newton. Ainsi, selon Lagrange : « celle que l'on suit communément est due à Newton, et elle est très facile et très simple » [1769 ; *Œuvres* II, p. 539].

C'est dans le *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* [Newton 1711], écrit dans les années 1660, et dans le *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* [1736], que Newton explicite sa méthode arithmétique en omettant les puissances non linéaires des petits termes. Bien que ces textes aient été publiés tardivement, la méthode est connue dès la fin du XVII^e siècle car exposée dans l'*Algebra* de John Wallis parue en 1685. Notons que, si Newton applique sa méthode de linéarisation de façon itérative, en revanche il n'utilise à aucun moment la formule de récurrence que nous utilisons aujourd'hui de façon systématique. C'est Joseph Raphson [1690] qui l'introduit dans son *Analysis æquationum universalis*. Edmond Halley, pour sa part, applique en 1694 une technique analogue mais au lieu d'approximations linéaires, il utilise des approximations quadratiques. Plus tard, Thomas Simpson l'expose en tant que « a new method » [1740, p. 81-86] où, mettant clairement en évidence le rôle de la dérivée, il peut appliquer la formule d'itération aux équations transcendentes². Pendant longtemps, les deux méthodes, celle de Newton et celle de Raphson, sont exposées de façons distinctes. Il semble que Lagrange [1798, Note V] ait été le premier à mettre en évidence le fait qu'elles « ne sont au fond que la même présentée différemment ». Finalement, la méthode restera néanmoins communément attribuée à Newton, suivant en cela la pratique de Fourier³.

La question des conditions de convergence n'est pas vraiment posée chez Newton. Celui-ci demande simplement de partir d'une valeur approchée à 0, 1 près et évoque le fait empirique qu'on double, à chaque étape, le nombre de décimales exactes. À ce propos Lagrange se montre critique :

2. Voir [Cajori 1910a, p. 191-195 et 199 ; Chabert *et al.* 1994, chap. VI].

3. Voir [Cajori 1910a, p. 195].

« La première et la principale de ces imperfections consiste en ce qu'il faut supposer qu'on ait déjà trouvé la valeur de la racine cherchée, approchée jusqu'à sa dixième partie [...] Une seconde imperfection regarde la nature même de la méthode [...] il est impossible de pouvoir juger de la quantité de l'approximation, et de s'assurer du degré d'exactitude qui doit résulter de chaque correction. D'ailleurs, ne pourrait-il pas arriver que la série qui donne la racine cherchée fût très-peu convergente, ou même qu'elle devint divergente après avoir été convergente dans ses premiers termes ? » [1769 ; *Œuvres* II, p. 540-541]

II. La localisation des racines réelles

Comme le signale Lagrange à propos de la méthode de Newton, l'une des premières choses à faire, sinon la première, consiste à donner une première approximation, même grossière : c'est la localisation des racines réelles, qui comprend elle-même deux aspects. En premier lieu, la détermination de ce qui, à cette époque, est couramment appelé les « limites » des racines, notion correspondant aux bornes d'un intervalle contenant toutes les racines réelles ; il n'y faut donc chercher aucune idée de convergence. Il faut ensuite, à l'intérieur de cet intervalle, déterminer des sous-intervalles qui contiennent une et une seule de ces racines ; c'est la séparation des racines qui sera, pour Lagrange lui-même, la première des préoccupations.

1. Les « limites » des racines

On trouve dans l'*Arithmétique universelle* de Newton [1707] la majoration suivante. Lorsque l'équation $P(x) = 0$ de degré n a toutes ses racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ réelles, Newton exprime la somme des puissances k -ièmes des racines $S_k = \alpha_1^k + \dots + \alpha_n^k$ comme fonction rationnelle des coefficients de P . Le nombre $\sqrt[k]{S_{2k}}$ est alors un majorant de la plus grande des racines de P en valeur absolue. Avec $k = 1$ déjà, on dispose d'une borne, mais plus k est grand, meilleure est la majoration.

Toutefois Newton préfère la technique suivante plus simple et valable sans avoir à supposer *a priori* que les racines sont toutes réelles. Lorsqu'un nombre positif b , substitué à x , fournit, pour le polynôme P et ses dérivées, des valeurs $P(b)$, $P'(b)$, $P''(b)$, ..., $P^{(n-1)}(b)$ toutes positives, alors b est supérieur aux racines positives de P . En effet, cette propriété équivaut au fait que tous les coefficients du polynôme $Q(x) = P(x - b)$ obtenu en effectuant une translation de b sur x sont positifs, et ce polynôme ne peut admettre de racine positive.

Dans le *Traité d'algèbre* de Michel Rolle [1690], pour une équation

$$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + \dots + u = 0,$$

on trouve un majorant des racines positives en ajoutant 1 à la plus grande des valeurs absolues B des coefficients négatifs de l'équation. Une telle majoration est démontrée par Maclaurin dans son *Treatise of Algebra* [1748, p. 172]. C'est une conséquence immédiate de la condition donnée précédemment en utilisant l'artifice de calcul proposé par Newton :

$$\begin{aligned} x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + \dots + u \\ = ((\dots(((x+p)x+q)x+r)x+\dots)x+u). \end{aligned}$$

Ainsi que le remarque Lagrange dans sa quatrième leçon à l'École normale de l'an III [1795], en remplaçant successivement x par $-x$, $\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x}$, on obtient de façon analogue un minorant de toutes les racines réelles, un minorant des racines positives et un majorant des racines négatives. Lagrange perfectionne d'ailleurs cette majoration de Rolle⁴ : pour une équation sous la forme $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, si a_{n-k} désigne le premier coefficient négatif rencontré, on peut remplacer le précédent majorant $1 + B$ par $1 + \sqrt[k]{B}$.

2. La séparation des racines

Le théorème des valeurs intermédiaires⁵ est l'outil fondamental pour séparer les racines : si le polynôme P prend en a et b des valeurs de signes contraires, alors P possède au moins une racine entre a et b . Ainsi, un intervalle contenant toutes les racines étant déterminé, la séparation des racines et l'obtention de valeurs approchées peuvent être effectuées par tâtonnements répétés en essayant les entiers les uns après les autres, puis en raffinant de plus en plus à l'aide des décimaux⁶.

4. Voir [Dahan Dalmedico 1992].

5. Le théorème des valeurs intermédiaires est alors admis comme une évidence géométrique, en termes d'intersection d'une courbe et d'une droite horizontale. Lagrange, qui en fait le premier énoncé de son mémoire [1769], prétend en donner une preuve algébrique simple. Dans ses leçons à l'École normale de l'an III [1795], il reconnaîtra cependant un « cercle vicieux » dans sa preuve qui utilise, sans le dire, le théorème fondamental de l'algèbre dont la démonstration nécessite elle-même le théorème des valeurs intermédiaires. La première démonstration sérieuse, à la construction près de l'ensemble des réels, est due à Bolzano [1817].

6. À ce propos, au début du XVIII^e siècle, l'antet de Lagny met en œuvre ce principe à l'aide de la méthode des différences, qui permet de calculer rapidement les différentes valeurs d'un polynôme pour des valeurs de la variable en progression arithmétique. Il transforme l'équation en une équation dont les racines sont multipliées par 100, puis localise les racines entre deux entiers successifs ce qui fournit les racines de l'équation initiale avec une approximation de 0,01 [Cajori 1910a].

La séparation des racines commence véritablement à être théorisée avec la méthode des cascades de Rolle [1690] où l'on voit aussi à l'œuvre une sorte de pendant du théorème des valeurs intermédiaires⁷ : entre deux racines a et b du polynôme dérivé P' , il y a au plus une racine de P , de sorte que, pour une équation $P = 0$ ayant toutes ses racines réelles et distinctes, les racines de P sont séparées par les racines du polynôme dérivé P' . Toutefois, selon Lagrange, la méthode que Rolle en déduit « pour approcher des racines des équations numériques aussi près que l'on veut [...] n'est pas toujours sûre, surtout lorsqu'il y a dans l'équation des racines imaginaires » [1769 ; *Œuvres* II, p. 540].

Aussi, dans le cas général, on ne pourra être certain d'avoir effectivement séparé les racines que si l'on peut s'assurer que les intervalles utilisés sont inférieurs au plus petit écart entre deux racines consécutives. C'est pourquoi Lagrange se propose de localiser les racines réelles simples par des substitutions successives de l'inconnue par des nombres en progression arithmétique de raison Δ , où la quantité Δ est inférieure aux écarts entre les racines réelles. Comment obtenir un tel Δ ? C'est l'une des avancées de Lagrange sur ce sujet de la résolution numérique avec l'équation aux différences.

3. L'équation aux différences de Lagrange

Dans son mémoire de 1769, dans l'optique de la séparation des racines, Lagrange considère le problème suivant : « Une équation quelconque étant donnée, trouver une autre équation dont les racines soient les différences entre les racines de l'équation donnée. » [1769 ; *Œuvres* II, p. 546] Partant de l'équation initiale

$$P(x) = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \dots = 0,$$

et désignant par u l'inconnue de cette équation aux différences, Lagrange note que l'équation cherchée est une équation en $u^2 = \nu$

$$\nu^n - a\nu^{n-1} + b\nu^{n-2} - c\nu^{n-3} + \dots = 0$$

de degré $n = \frac{m(m-1)}{2}$. Ce faisant, il utilise implicitement le théorème fondamental de l'algèbre⁸. Il montre comment les coefficients $a, b, c, \dots$

7. Voir [Verley 1988].

8. En fait, il n'a besoin ici que de ce que C. Gilain [1991] appelle le « théorème de factorisation linéaire », à savoir l'existence de m racines dans un certain *corps*. Mais on verra un peu plus loin que Lagrange raisonne sur des racines de la forme $a + b\sqrt{-1}$, aussi ce corps est-il bien celui des complexes. Il semble toutefois que, si la question de l'amélioration de la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre s'est constamment posée aux mathématiciens de l'époque (et notamment à Lagrange), en revanche la

de l'équation cherchée s'obtiennent en fonction des coefficients $A, B, C, \dots$ de l'équation initiale. En posant

$$A_k = \sum_{i=1}^m x_i^k \quad \text{et} \quad a_k = \sum_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j)^{2k},$$

où $x_1, x_2, \dots, x_m$ désignent les racines supposées de l'équation initiale, puis en utilisant les relations entre coefficients et racines, on connaît les liens entre $A, B, C, \dots$ et les A_k d'une part, entre $a, b, c, \dots$ et les a_k d'autre part. Il suffit donc d'exprimer les a_k en fonction des A_k et, pour cela, Lagrange obtient la formule

$$a_\mu = mA_{2\mu} - 2\mu A_1 A_{2\mu-1} + \frac{2\mu(2\mu-1)}{2} A_2 A_{2\mu-2} \\ - \dots \pm \frac{2\mu(2\mu-1) \dots (\mu+1) A_\mu^2}{1.2.3 \dots \mu} \frac{A_\mu^2}{2}.$$

Ayant ainsi l'équation en ν , après une éventuelle division par une puissance de ν (dans le cas de racines multiples en x), on considère l'équation en $y = \frac{1}{\nu}$. « Qu'on cherche par les méthodes connues », dit Lagrange, « la limite des racines positives de cette équation, et soit l cette limite »⁹, alors toute racine de l'équation en u vérifie

$$0 < \frac{1}{\sqrt{l}} < u.$$

Ainsi, en choisissant $\Delta \leq \frac{1}{\sqrt{l}}$, on pourra encadrer les racines réelles et inégales. Lagrange remarque alors que :

- si l'on souhaite se ramener au cas où le polynôme P est sans racine multiple, il suffit de diviser P par le pgcd de P et de P' ;
- si les racines sont toutes réelles, l'équation aux différences n'a que des racines réelles et positives, donc d'après la règle des signes de Descartes, il y aura alternance des signes positifs et négatifs ;
- s'il y a des racines imaginaires (donc de la forme $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ d'après le théorème fondamental de l'algèbre) l'équation aux différences aura au moins autant¹⁰ de racines réelles négatives ($\nu = u^2 = -4\beta^2$) qu'il y aura de couples de racines imaginaires ;

question de la validité de son énoncé ne se posait déjà plus. On trouvera les références essentielles sur le sujet dans [Gilain 2007, p. lxxviii-xxii].

9. [Lagrange 1769 ; *Œuvres* II, p. 551].

10. Dans [Lagrange 1770a], on trouve *autant* au lieu de *au moins autant*. L'erreur est rectifiée dans [Lagrange 1798].

– si l'on a calculé les racines réelles négatives de l'équation aux différences, on connaît les β . On trouve alors les α en remplaçant x par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, d'où deux équations en α dont les coefficients dépendent de β , et en donnant à β l'une des valeurs calculées, les deux équations auront un diviseur commun.

À vrai dire, Lagrange, comme il le reconnaît lui-même, n'est pas le premier à introduire et utiliser cette équation aux différences :

« Je dois, au reste, observer ici que Waring avoit déjà remarqué dans ses *Miscellanea analytica*, imprimés en 1762, l'usage de l'équation, dont les racines seroient $\frac{1}{\alpha - \beta}, \frac{1}{\alpha - \gamma}, \frac{1}{\beta - \gamma}, \&c.$ pour trouver les limites des racines réelles de l'équation, dont les racines sont $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$ Mais je ne connoissois pas cet Ouvrage [...] le même Auteur a aussi remarqué avant moi les caractères qu'on peut tirer des signes de l'équation, dont les racines sont les carrés des différences entre les racines d'une équation donnée, pour juger des racines imaginaires de cette équation. » [Lagrange 1798, Note III, p. 121]

Dans cette même note III de son traité de 1798, Lagrange explicite l'équation aux différences pour le degré 5, équation déjà donnée sans démonstration par Waring [1763]¹¹. On peut dire à sa décharge que, bien que développés et republiés dans les *Meditationes algebraicae* [Waring 1770], ces travaux de Waring restaient très abscons et peu connus.

Dans la note IV, Lagrange revient sur l'obtention de l'écart Δ et, pour remédier à la difficulté liée au degré élevé $\frac{m(m-1)}{2}$ de l'équation aux différences pour un polynôme P de degré m , il propose de considérer un ensemble de m équations de degré $m-1$ dont les racines sont les différences de chacune des m racines cherchées avec les $m-1$ autres. Il s'agit alors de trouver un minorant des valeurs absolues des racines de toutes ces équations. Le calcul reste encore assez fastidieux, mais se simplifie tout de même grâce aux techniques suggérées par Lagrange, techniques qui, dans une certaine mesure, peuvent actuellement s'interpréter comme des calculs effectués dans l'anneau quotient de $\mathbb{R}[X]$ par l'idéal engendré par le polynôme P [Laubenbacher *et al.* 2001, § 4].

Malgré ces améliorations, la mise en œuvre de l'équation aux différences reste lourde¹². En revanche, les perfectionnements de la règle des signes de Descartes vont fournir des moyens plus commodes pour séparer les racines.

11. Voir [Hamburg 1976, p. 32-33].

12. Ruffini [1804] propose une autre amélioration en déterminant un minorant des différences entre les racines positives d'une part et négatives d'autre part. Voir [Houzel 2002, chap. VI].

4. La détermination du nombre de racines réelles contenues dans un intervalle donné

La première avancée tient dans la fameuse règle des signes énoncée sans démonstration par Descartes dans sa *Géométrie* en 1637 : une équation ne peut avoir plus de racines positives qu'il n'y a de variations de signe dans la suite de ses coefficients, ni plus de racines négatives qu'il n'y a de permanences de signe. La première preuve de cette règle est donnée par l'abbé de Gua [1744] dans un mémoire présenté à l'Académie des sciences de Paris. On a vu que Lagrange [1770a] a l'idée d'utiliser cette règle pour montrer l'absence, ou la présence, de racines imaginaires selon que, dans l'équation aux différences, il y a une totale alternance de signes ou non.

Des résultats plus précis sont obtenus après 1800. Ainsi, François-Désiré Budan présente à l'Institut, en 1803, un mémoire où l'on trouve notamment : « Une équation en x , dont toutes les racines sont réelles, a autant de racines comprises entre zéro et p , qu'il y a de permanences de signe dans la transformée en $(x - p)$, de plus que dans l'équation en x . » [Budan 1807, p. 26]¹³ Des algorithmes de transformations du polynôme en x en un polynôme en $x - p$ sont par ailleurs fournis par Budan dans ce même mémoire [1807], ainsi que par Paolo Ruffini [1804] et William Horner [1819]¹⁴. Cet énoncé de Budan est ensuite amélioré par Fourier [1820] : si dans la suite formée par le polynôme P et ses dérivées successives $P, P', P'', \dots, P^{(m)}$ on substitue à l'inconnue x des valeurs A et B et que l'on compte le nombre de changements de signes dans chacune des suites de valeurs $P(A), P'(A), \dots$ et $P(B), P'(B), \dots$, l'écart entre ces deux nombres est un majorant du nombre de racines réelles, comptées avec leur multiplicité, comprises dans l'intervalle $[A, B]$ ¹⁵. Mais, à l'instar de la règle de Descartes, il ne s'agit toujours que d'une majoration du nombre de racines.

À vrai dire, dès 1813, Cauchy présentait à l'Académie des sciences une solution complète à la question de la détermination du nombre de racines réelles [Legendre 1814 ; Cauchy 1815]. Mais sa méthode, qui nécessite des calculs d'élimination en grand nombre ainsi que la considération de multiples cas particuliers, est du coup peu utilisable et peu utilisée¹⁶. En revanche, l'algorithme que Sturm présente à l'Académie des sciences en

13. Voir [Borowczyk 1991] et [Lagrange 1798/1808, Note VIII, § 14].

14. Voir [Cajori 1911 ; Borowczyk 1991].

15. Fourier avait déjà exposé son énoncé publiquement à diverses reprises, notamment à l'École polytechnique dès 1797, et aussi, alors qu'il était préfet de l'Isère, en 1804 comme en atteste André-Laurent Chabert, doyen de la faculté des sciences de l'Académie de Grenoble [Fourier 1831, Avertissement de Navier, p. xvii-xx].

16. « Les calculs deviendront extrêmement compliqués et presque inexécutables, quand il s'agira d'équation d'un degré un peu élevé » [Legendre 1814, p. 192-193].

1829, et qui s'inspire de l'énoncé de Fourier¹⁷, est très performant. Énoncé dans [Sturm 1829], il est développé dans [Sturm 1835]. Au polynôme P de degré m on associe une suite de polynômes $P_0, P_1, \dots$, où $P_0 = P, P_1 = P'$ et, pour $k \geq 2$, P_k désigne l'opposé du reste dans la division euclidienne de P_{k-2} par P_{k-1} . Si, dans l'énoncé de Fourier rappelé ci-dessus, on remplace la suite $P^{(k)}$ des dérivées successives par la suite P_k des opposés des restes successifs, on obtient cette fois une égalité au lieu d'une majoration du nombre de racines réelles comprises entre A et B ¹⁸.

Après avoir fait le point sur la localisation des racines, nous pouvons nous engager, avec Lagrange, dans les techniques de résolution approchée.

III. Résolution à l'aide des fractions continues

Ayant séparé les racines d'une équation à l'aide de son équation aux différences, Lagrange [1769] exprime ces racines sous forme de fractions continues. Cette méthode était déjà utilisée pour extraire des racines carrées mais, dans le cadre des équations numériques en général, Lagrange est un initiateur. D'ailleurs, il s'en était déjà servi de façon essentielle dans son ingénieuse résolution de l'équation de Pell-Fermat [Lagrange 1768].

Si l'on peut en trouver les prémices chez Wallis dans l'*Arithmetica infinitorum* de 1656 ou l'*Algebra* de 1685, la théorie des fractions continues est véritablement élaborée par Euler [1744 ; 1748, t. I, chap. 18], puis par Lagrange pour la résolution des équations numériques [1769, 1770a] et, de façon systématique, dans une addition aux *Éléments d'algèbre* d'Euler [Lagrange 1774].

De prime abord, les fractions continues se présentent comme un outil parfaitement adapté à la résolution approchée des équations. En effet, si k désigne un entier $\geq \frac{1}{\Delta}$ (où Δ est un écart permettant de séparer les racines), en remplaçant x par $\frac{x}{k}$, on obtient une équation dont les racines réelles sont séparées par des nombres entiers. Par suite, pour peu que l'on se soit débarrassé des racines multiples, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de connaître la valeur entière p de chaque racine réelle x ($p < x < p + 1$). En posant $x = p + \frac{1}{y}$, on est conduit à une équation en y de même degré. Par construction, cette équation admet une et une seule racine réelle $y > 1$. Aussi, est-il facile de trouver la valeur entière q

17. « C'est en m'appuyant sur les principes qu'il a posés et en imitant ses démonstrations que j'ai trouvé les nouveaux théorèmes que je vais énoncer. » [Sturm 1829]

18. Sur le théorème de Sturm et sa postérité, voir [Sinaceur 1991].

de cette racine $y > 1$. On pose ensuite $y = q + \frac{1}{z}$, d'où une équation en z , et on itère le processus... « Ainsi la valeur de x [...] sera exprimée par une fraction continue [...] », écrit Lagrange, qui précise : « on n'avait pas encore pensé, ce me semble, à s'en servir dans la résolution des équations. » [Lagrange 1769 ; *Œuvres* II, p. 565]

Or, les fractions réduites sont toujours convergentes vers x : elles en fournissent un encadrement sous la forme de deux suites adjacentes. En effet, rappelons que par ce processus on obtient des fractions successives, appelées les réduites, à savoir

$$p, p + \frac{1}{q}, p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}}, p + \frac{1}{q + \frac{1}{r + \frac{1}{s}}}, \dots$$

Et, si $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\beta}{\beta'}$ sont deux réduites consécutives alors, non seulement elles encadrent x , mais on a aussi l'égalité

$$\left| \frac{\alpha}{\alpha'} - \frac{\beta}{\beta'} \right| = \frac{1}{\alpha'\beta'}.$$

Par suite, on a une majoration connue de l'erreur faite en prenant comme approximation la réduite $\frac{\alpha}{\alpha'}$:

$$\left| x - \frac{\alpha}{\alpha'} \right| < \frac{1}{\alpha'^2}.$$

La méthode semble parfaite dans la mesure où l'on a à la fois la certitude que la suite des approximations est bien convergente vers la racine comprise dans l'intervalle considéré, et une bonne maîtrise de l'erreur commise : si $\frac{\alpha}{\alpha'}$ est l'une de ces approximations écrite sous forme de fraction irréductible, alors l'erreur est majorée par $\frac{1}{\alpha'^2}$.

Toutefois, la mise en œuvre de cette méthode idéale s'avère concrètement fastidieuse. De plus, la convergence est lente car, si l'approximation est bonne, optimale même pour un rationnel de dénominateur donné – de toutes les fractions rationnelles de dénominateur α' , la réduite $\frac{\alpha}{\alpha'}$ est celle qui approche le mieux la racine cherchée –, elle progresse peu d'une réduite à la suivante.

Sensible à ce dernier argument, dans le cas où x s'avère plus proche de $p + 1$ que de sa partie entière p , au lieu d'écrire $x = p + \frac{1}{y}$, Lagrange [1770a, § II, Remarque III] propose de poser

$$x = p + 1 - \frac{1}{y}.$$

La technique conduit à des fractions continues généralisées où les dénominateurs peuvent être négatifs. La convergence est un peu plus rapide, mais, du coup, la théorie développée par Lagrange est bien moins simple.

D'un autre côté, pour remédier à l'aspect fastidieux du calcul des équations successives en $y, z, \dots$, Lagrange [*Ibid.*, Remarque IV] propose le procédé suivant¹⁹ : si $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\beta}{\beta'}$ sont deux réduites consécutives, alors la racine x peut s'écrire

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{\alpha' t + \beta'} \quad \text{où } t > 0$$

et, par substitution de cette expression de x , on obtient une équation en t qui n'est autre que celle que l'on aurait obtenu par les substitutions successives $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{z}$, $\dots$. De sorte que, note Lagrange, la réduite suivante est donnée par la formule

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{k\alpha + \beta}{k\alpha' + \beta'},$$

où k correspond à la partie entière de la racine $t > 1$.

Citons enfin le commentaire suivant dû à Fourier, peu enthousiaste sur la méthode :

« Quand à l'usage des fractions continues pour l'expression des racines, ce procédé n'est pas un élément essentiel de l'algèbre ; il peut être remplacé par un mode quelconque de développement arithmétique [...] Quelle que soit la forme du développement que l'on a choisi, on obtient toujours pour la racine deux valeurs de plus en plus approchées, et entre lesquelles on est assuré qu'elle est comprise, car il suffit de faire varier d'une unité chaque dénominateur. Ainsi la convergence n'est pas moins démontrée que pour les fractions continues, et en général cette convergence est du même ordre. » [Fourier 1831, p. 11 et 39]

Ainsi, une bonne méthode de résolution numérique ne doit pas seulement être parfaite sur le plan de la rigueur – à savoir, donner d'une part des approximations successives qui convergent vers la valeur cherchée, et fournir, d'autre part, une majoration de l'erreur commise à chaque pas de

19. « It appears that this improvement of Lagrange's algorithm has not been investigated before, even though it is analogous to the improvement that Raphson made [...] to Newton's method. » [Laubenbacher *et al.* 2001, p. 230]

façon à disposer d'encadrements de la valeur exacte –, elle doit aussi être facile à mettre en œuvre, sans calculs fastidieux, et performante, c'est-à-dire que la convergence doit être suffisamment rapide pour limiter le nombre des approximations à calculer.

IV. La méthode des séries récurrentes de Bernoulli

Dans ses « Observationes de seriebus » [1732], Daniel Bernoulli avait exposé une technique pour approcher la plus grande ou la plus petite racine d'une équation algébrique. À cet effet, il considère une suite récurrente où les coefficients de la récurrence sont liés à ceux de l'équation. Bernoulli sait que sa méthode ne converge pas nécessairement vers une solution dans le cas de racines multiples ou de racines complexes. Il explicite sa méthode sur divers exemples, mais n'en fournit pas de véritable démonstration.

1. Euler

Dans son *Introductio in analysin infinitorum*, Euler expose la méthode de Bernoulli et en donne la preuve [1748, t. I, chap. 17]. Il démontre clairement la convergence du processus dans le cas d'une équation à racines réelles simples, mais sans donner de majoration de l'erreur de l'approximation obtenue. Si l'équation donnée s'écrit

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \&c. = 0,$$

Euler considère une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \&c.}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \&c.}$$

« en prenant à volonté le numérateur » et, pour dénominateur, le polynôme réciproque du polynôme initial (les racines du premier correspondant ainsi aux inverses des racines du second). Cette fraction rationnelle peut être développée en une série en z

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + Pz^n + Qz^{n+1} + \&c.,$$

dont les coefficients se calculent aisément de proche en proche puisqu'ils vérifient une relation de récurrence déterminée par les coefficients du dénominateur, c'est-à-dire ceux de l'équation donnée. Dans le cas où l'équation initiale n'a que des racines réelles et simples, $p, q, r, \dots$, ce dénominateur s'écrit

$$1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \&c. = (1 - pz)(1 - qz)(1 - rz) \&c.,$$

la fraction rationnelle peut se mettre sous la forme

$$\frac{A}{1-pz} + \frac{B}{1-qz} + \frac{C}{1-rz} + \&c.$$

et, par suite, le terme général de la série récurrente est égal à

$$(Ap^n + Bq^n + Cr^n + \&c.)z^n.$$

Si p désigne « la » plus grande racine (en valeur absolue) de l'équation donnée alors, lorsque n est grand, le terme général P de la série en z vaut « à peu près » Ap^n et le quotient $\frac{Q}{P}$ de deux termes consécutifs fournit donc une valeur approchée de la racine p . Pour obtenir la plus petite racine, il suffit bien sûr de changer x en $\frac{1}{x}$.

Désignant par P et Q les coefficients de z^n et z^{n+1} respectivement dans la série, dire que le processus converge signifie que l'écart $\frac{Q}{P} - p$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et cette convergence sera d'autant plus rapide que la valeur de p sera prédominante, ce qu'Euler formule : « [...] on aura la valeur de p d'autant plus approchée, que le nombre des termes [calculés] sera plus grand, et que cette lettre p surpassera en grandeur les autres q, r, s , etc. » [Euler 1748, § 336] Cette dernière remarque lui suggère d'accroître la convergence du processus en remplaçant x par $y = x - k$ où k est une valeur approchée de la racine voulue et en cherchant la plus petite racine de l'équation en y , c'est-à-dire, la plus grande racine de l'équation en $\frac{1}{y}$ (qui du coup sera prépondérante). Ce même procédé permet d'ailleurs d'utiliser la technique des séries récurrentes pour calculer numériquement n'importe quelle racine pour peu que l'on en ait déjà une valeur suffisamment approchée.

Enfin Euler montre que le processus fonctionne encore dans le cas de racines multiples, mais la convergence y est beaucoup plus lente (elle n'est plus géométrique). Il fonctionne même en présence de racines imaginaires pourvu que leurs modules soient strictement inférieurs à la valeur absolue de la racine réelle cherchée²⁰.

Pour sa part, Lagrange [1798, Note IV] utilise ce choix arbitraire du numérateur pour remédier à la présence de racines multiples en prenant tout naturellement pour numérateur la dérivée du dénominateur de sorte que la convergence devient géométrique. Mais, là encore, si le processus fonctionne bien parce qu'il converge, il n'y a chez Lagrange, pas plus que chez Euler, de mesure de l'approximation, c'est-à-dire d'indications explicites permettant d'affirmer que l'approximation obtenue fournit tant de

20. Notons encore l'utilisation implicite du théorème fondamental de l'algèbre.

décimales exactes ou que, pour obtenir tant de décimales exactes, il faut poursuivre les calculs jusqu'à tel rang.

2. Fourier

Fourier prévoyait de traiter la méthode des séries récurrentes dans le sixième livre de son *Analyse des équations déterminées*. Dans l'« exposé synoptique »²¹, on trouve toutefois une annonce des résultats à venir, ceux du livre 6 notamment [Fourier 1831, p. 68-75]. Ainsi, selon Fourier, la méthode n'exige pas d'avoir préalablement séparé les racines. En supposant, pour fixer les idées, que les racines $p, q, r, \dots$ sont ordonnées par valeurs absolues décroissantes, Fourier annonce les résultats suivants :

– À propos de la convergence de la suite des quotients vers la première racine p , « les erreurs finales des approximations diminuent comme les termes d'une progression géométrique » dont le rapport est égal à $\frac{q}{p}$, rapport

de la seconde racine à la première. De plus, si « la première racine et la seconde ont des signes différents, [...] les valeurs approchées sont alternativement trop grandes et trop petites. Ainsi, les chiffres communs à deux valeurs consécutives appartiennent nécessairement à la racine cherchée. » [Fourier 1831, p. 71]

– On peut trouver la seconde racine : en notant $\dots, P, Q, R, S, T, \dots$, les termes consécutifs de la suite récurrente, la suite des termes de la forme $PR - Q^2$ est encore une série récurrente et la suite des quotients correspondants $\frac{QS - R^2}{PR - Q^2}$ a pour limite le produit pq des deux premières racines.

Ou bien encore, Fourier propose de considérer la suite des termes de la forme $\frac{PS - QR}{PR - Q^2}$ dont la suite des quotients successifs a cette fois pour limite la somme $p + q$ des deux premières racines²². Il annonce sans autres précisions que l'on pourra « pareillement » construire des suites convergeant vers $pqr, p + q + r$ et même $pq + qr + rp$.

21. L'ouvrage édité de façon posthume était prévu en deux parties : la première presque entièrement rédigée par Fourier comporte un « Exposé synoptique des résultats démontrés dans cet ouvrage » et les deux premiers livres ; la seconde partie devait comporter cinq autres livres.

22. À vrai dire, dans son « exposé synoptique », au lieu de la suite des fractions $\frac{PS - QR}{PR - Q^2}$, Fourier considère seulement la suite des $PS - QR$ et la suite de leurs quotients qui ne tend pas vers $p + q$. Mais on peut trouver les bonnes fractions dans certains manuscrits de Fourier : voir, par exemple, le manuscrit 22.510, Fourier X. Equations Numériques, p. 99, consultable sur Gallica (BnF, Paris).

– Enfin, Fourier remarque que son procédé s'applique même dans le cas de racines imaginaires car si, par exemple, p est imaginaire, et donc que q est son imaginaire conjugué, alors le procédé dans sa première étape ne fournira pas p , mais la deuxième étape fournira à la fois $p + q$ et pq , donc p et q .

Notons qu'outre un manque d'indications sur la façon de passer de 2 racines à 3 racines et plus, les conditions de validité de la procédure sont peu argumentées (il est vrai qu'il s'agit d'un résumé préliminaire). Enfin, il n'y a toujours pas de majoration de l'erreur si ce n'est celle que l'on a d'emblée, comme le signale Fourier, grâce aux encadrements obtenus lorsque les deux plus petites racines sont de signes contraires.

Un siècle plus tard, A. Aitken [1926] clarifiera les choses avec le formalisme des déterminants. Considérons à titre d'exemple le cas des 4 premières racines où nous supposons $|p| \geq |q| \geq |r| > |s|$. Si (u_n) désigne la suite récurrente associée, alors

$$pqr = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} \quad \text{où} \quad U_n = \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ u_{n-1} & u_n & u_{n+1} \\ u_{n-2} & u_{n-1} & u_n \end{vmatrix}.$$

C'est dans cet article qu'Aitken exposera son procédé pour accélérer la convergence de la suite, appelé « méthode du Δ^2 d'Aitken »²³.

V. Résolution par développement en série ou le « retour des suites »

La formule de Taylor suggère l'obtention des racines d'un polynôme comme sommes de séries. Ainsi, le développement des racines cubiques dans les formules de Cardan à l'aide de la formule du binôme permet à Nicole [1740] d'exprimer les racines des équations cubiques $x^3 + px + q = 0$ sous forme de sommes de séries. Ces séries sont reprises dans les *Éléments d'algèbre* de Clairaut [1746, p. 270–272] qui s'assure de leur convergence pour en déduire des approximations des racines. Ainsi, dans le cas où $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, Clairaut pose $\frac{q}{2} = a$ et $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -b^2$, le développement de la formule $\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$ conduit alors essentiellement à une série entière en $\frac{b^2}{a^2}$, ce qui, précise-t-il, permet d'obtenir une valeur approchée de la racine car, « en supposant a plus grand que b , les termes de cette série iront en diminuant, par conséquent on pourra négliger

23. Voir [Chabert *et al.* 1994, § 7.7].

les derniers quand ils seront parvenus à n'être que de très-petites quantités. ». Lorsque b est plus grand que a , Clairaut propose de permuter les rôles de a et de $b\sqrt{-1}$ dans les binômes afin d'obtenir une série convergente en $\frac{a^2}{b^2}$.

De même, en utilisant le développement de Taylor, Euler [1755, chap. IX, § 231] obtient les racines d'un polynôme $F(x)$ comme sommes de séries numériques, à savoir, avec les notations de Lagrange [1798, Note XI]

$$a - \frac{1}{F'(a)}F(a) - \frac{F''(a)}{2F'^3(a)}F^2(a) + \frac{F'(a)F'''(a) - 3F''^2(a)}{2.3F'^5(a)}F^3(a) + \dots,$$

où a désigne une valeur approchée de la racine. Mais on ne trouve pas d'étude de la convergence effective du processus.

1. La « formule d'inversion » de Lagrange (1770)

C'est par le procédé de retour des suites²⁴ que, dans sa « Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries » [1770b], Lagrange résout l'équation

$$(1) \quad \alpha - x + \varphi(x) = 0,$$

où φ désigne une « fonction quelconque » de x et α est un paramètre variable²⁵. Mieux, il exprime la valeur d'une « fonction quelconque » ψ d'une solution x , elle-même fonction de α , à l'aide de la série

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) + \varphi(\alpha)\psi'(x) &+ \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\varphi(x)^2 \psi'(x) \right) \\ &+ \frac{1}{2.3} \frac{d^2}{dx^2} \left(\varphi(x)^3 \psi'(x) \right) + \dots \\ &+ \frac{1}{2.3 \dots i} \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} \left(\varphi(x)^i \psi'(x) \right) + \dots, \end{aligned}$$

24. Les fonctions à propos desquelles on calculait à l'époque étaient *a priori* développables en série de sorte que, pour expliciter une fonction *implicite* y de la variable x définie par une équation $F(x, y) = 0$, on substituait à y une série entière en x dont les coefficients étaient déterminés de proche en proche par annulations successives des coefficients de la série en x obtenue à la suite de cette substitution. Le retour des suites fait référence à la résolution de l'équation particulière $F(x, y) = x - g(y) = 0$.

25. On sort donc ici du strict cadre des équations polynomiales : le polynôme est remplacé par la série correspondant au développement de la « fonction quelconque » $\varphi(x)$. D'ailleurs, à l'exception de la méthode de Bernoulli, les techniques de résolution approchée considérées ici s'appliquent toutes aux équations transcendentes.

où l'on change x en α après les différentiations. Cette célèbre formule d'inversion de Lagrange lui a été inspirée par ses calculs « formels » de résolution d'une équation algébrique littérale, c'est-à-dire avec des coefficients indéterminés. Il en obtient les racines sous forme de séries grâce à l'utilisation extensive de transformations algébriques formelles mimant les calculs sur les polynômes, de passage aux logarithmes, de dérivations et de développements en série aboutissant effectivement à des expressions en séries formelles dont la loi de formation du terme général se décrit bien. Ainsi, pour l'équation générale

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \dots = 0,$$

Lagrange obtient

$$\begin{aligned} x = & \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} - \frac{a^3d}{b^4} + \frac{a^4e}{b^5} - \frac{a^5f}{b^6} + \dots \\ & + \frac{2a^3c^2}{b^5} - \frac{5a^4cd}{b^6} + \frac{3a^5(d^2 + 2ce)}{b^7} - \dots \\ & + \frac{5a^4c^3}{b^7} - \frac{21a^5cd}{b^8} + \dots + \frac{14a^5c^4}{b^9} + \dots \end{aligned}$$

et conclut : « c'est la formule connue de Newton pour le retour des suites » [1770b ; *Œuvres* II, p. 24].

La technique n'est pas entièrement nouvelle. Ainsi, Johann Heinrich Lambert [1758] avait déjà donné un développement en série pour résoudre l'équation $x^n + px - q = 0$ en précisant la condition de convergence

$$(n-1)^{n-1}p^n > n^nq^{n-1}.$$

D'ailleurs, dans le cas particulier de l'équation $ax^n - bx^{n-1} + c = 0$, Lagrange retrouve la formule que Lambert lui avait « communiquée il y a quelque temps sans démonstration » [Lagrange 1770b ; *Œuvres* II, p. 22] et qui a peut-être été son inspiration première, à savoir

$$\begin{aligned} x^m = & \frac{b^m}{a^m} - m \left[\frac{cb^{m-n}}{a^{m-n+1}} - \frac{(m-2n+1)c^2b^{m-2n}}{2a^{m-2n+2}} \right. \\ & \left. + \frac{(m-3n+1)(m-3n+2)c^3b^{m-3n}}{2.3.a^{m-3n+3}} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Même en nous plaçant du point de vue des séries formelles, ces calculs, tels que développés chez Lagrange, relèvent pour nous plus de l'heuristique que de la rigueur, étant donné notamment la multiplicité tant des développements en série que des indéterminées qui y interviennent, et donc des commutations de termes susceptibles d'avoir une incidence déterminante sur la convergence. Mais la formule est belle par sa simplicité et son

application fructueuse. Ainsi, sans toutefois s'inquiéter des conditions de convergence²⁶, Lagrange [1771] l'utilise avec succès pour résoudre l'équation de Kepler²⁷

$$x = t - e \sin x.$$

Il obtient l'anomalie excentrique x en fonction de l'anomalie moyenne t au moyen de la série

$$x = t - e \sin t + \frac{e^2}{2} \frac{d \sin^2 t}{dt} - \frac{e^3}{2.3} \frac{d^2 \sin^3 t}{dt^2} + \dots$$

D'après l'introduction de Lagrange [1770b], la méthode présente de très grands avantages puisqu'on va voir qu'elle « donne l'expression de chaque racine de l'équation proposée, au lieu que les autres méthodes ne donnent ordinairement que l'expression d'une seule racine » ; elle les donne de plus « par des séries régulières, c'est-à-dire telles, que leurs termes suivent une loi générale et connue, de sorte qu'il est très facile de les continuer autant qu'on le veut », ce qui permet d'en « déduire les conditions qui les rendent convergentes ou divergentes. »

C'est l'application de la technique à une équation mise sous la forme $\alpha - x + \varphi(x) = 0$ qui, par un cheminement inverse, suggère à Lagrange la façon d'obtenir le développement de toutes les racines d'une équation algébrique : ici, deux termes, à savoir α et x , jouent un rôle particulier. Il suffit de faire varier les couples de termes dans l'équation algébrique qui joueront ce rôle particulier : Lagrange choisit deux termes quelconques de l'équation $Mx^\mu - Nx^{\mu+\nu}$ et note X les autres termes, de sorte que l'équation devient

$$Mx^\mu - Nx^{\mu+\nu} + X = 0.$$

Celle-ci peut s'écrire $\frac{M}{N} - x^\nu + \frac{Xx^{-\mu}}{N} = 0$ et, en posant $x^\nu = t$, on obtient une équation, en t cette fois, de la forme voulue

$$\frac{M}{N} - t + \psi\left(t^{\frac{1}{\nu}}\right) = 0.$$

Lagrange remarque que « les ν séries ou expressions de x qui résultent de la considération des termes $Mx^\mu - Nx^{\mu+\nu}$ de l'équation proposée, c'est-à-dire

26. Lagrange développe des calculs algébriques virtuoses à propos de séries issues de sa formule d'inversion appliquée à l'équation de Kepler. La seule occurrence du mot « convergent » apparaît en fin de mémoire sous la forme suivante : « si l'on suppose l'excentricité $[e]$ fort petite, ce qui est nécessaire pour que les séries soient convergentes » [1771 ; *Œuvres* III, p. 136] ; elle n'est accompagnée d'aucune justification.

27. Voir [Bottazzini 1989].

celles qu'on trouve en prenant ces deux termes pour les premiers termes de la formule générale [(1)], représentent nécessairement ν racines différentes de cette équation » [1770b ; *Œuvres* II, p. 49-50].

Lagrange consacre enfin la dernière section de son mémoire à la convergence des séries obtenues, point fondamental pour le passage au numérique :

« Il ne suffit pas de pouvoir exprimer les racines des équations, ou leurs fonctions quelconques, par des séries régulières, et dont la loi soit bien développée ; il faut surtout pouvoir reconnaître par la loi même de ces séries si elles sont convergentes à l'infini ou non [...] c'est-à-dire que ses derniers termes soient infiniment petits, de sorte que l'erreur puisse devenir moindre qu'aucune quantité donnée. » [*Ibid.*, p. 60-61]

On ne peut donc dire avec J. Itard que « les conditions de convergence [sont] complètement passées sous silence » [1984, p. 321] ; elles sont toutefois mal traitées comme on va le voir. En effet, si l'on considère pour simplifier le cas particulier de la fonction $\psi(x) = x$, le terme général de la série exprimant x en fonction de la variable α est de la forme

$$(2) \quad \frac{1}{i!} \frac{d^{i-1}[\varphi(x)^i]}{dx^{i-1}},$$

où l'on remplace x par α après différentiation. Ces termes (2) sont décrits par Lagrange sous forme de sommes de termes provenant des développements en série de $\varphi(x)$ et des différentiations des puissances $\varphi(x)^i$. Pour en étudier la convergence, Lagrange remplace chaque terme (2) par le plus grand des termes apparaissant dans la somme en question, sans prendre garde au fait que le nombre de termes dans ces sommes n'est pas borné en général lorsque l'indice i tend vers l'infini, si bien que la convergence n'est pas assurée.

Lagrange termine toutefois son mémoire par le cas où $\varphi(x)$ se réduit à un seul terme, ce qui, à l'instar de l'équation étudiée par Lambert, permet de traiter toutes les équations trinômes $a - bx^m + cx^{m+n} = 0$ pour lesquelles Lagrange, comme Lambert avant lui, obtient des conditions de convergence correctes. Ainsi, pour l'équation $\alpha - x + Ax^a = 0$, il donne la condition

$$A \leq \frac{1}{a} \left(\frac{a-1}{\alpha a} \right)^{a-1}.$$

2. Après 1770

Au cours de la décennie 1770, Euler écrit plusieurs articles prolongeant le travail de Lambert sur le développement en série des solutions des équations trinômes, mais il n'y fait pas référence au mémoire de Lagrange [1770b], pas plus qu'il ne traite des questions de convergence.

De nombreux mathématiciens s'intéressent cependant à la formule d'inversion de Lagrange²⁸, notamment Laplace [1780] qui publie une preuve plus simple et plus convaincante d'un point de vue strictement formel. Pour cela, il réécrit l'équation sous la forme $x = t + \alpha\varphi(x)$ où α est un paramètre et utilise l'équation aux dérivées partielles alors vérifiée par la fonction solution $x(t, \alpha)$:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \varphi(x) \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Plus tard, dans le cas de l'équation de Kepler, Laplace [1827] étudiera la convergence et démontrera que le développement du rayon vecteur $r = 1 - e \cos x$ exprimé en fonction du temps t , auquel conduit la formule de Lagrange, converge dès que l'excentricité vérifie $e \leq 0,66195$.

Lagrange [1798] revient sur sa formule dans la note XI de son traité sur la résolution des équations numériques. S'inspirant des techniques vues à propos des séries récurrentes, il développe la fraction $\frac{1 - f'(x)}{u - x + f(x)}$ et obtient :

« Si α est la plus petite des racines de l'équation

$$u - x + f(x) = 0,$$

on aura

$$\alpha^r = u^r + (u^r)' f(u) + \frac{1}{2} ((u^r)' f^2(u))' + \frac{1}{2.3} ((u^r)' f^3(u))'' + \dots$$

r étant un nombre quelconque positif ou négatif. » [1798, p. 248]

Pour $r = 1$, il retrouve ainsi une formule « qu'on n'avait encore trouvée que par la méthode des indéterminées ».

En 1846, Félix Chio montrera toutefois, dans un mémoire présenté à l'Académie et dont Cauchy [1846] est rapporteur, que la racine obtenue par la méthode n'est pas toujours la plus petite des racines en valeur absolue, mais la plus proche de u inférieurement ou supérieurement selon les cas. Un peu plus tard, le même Chio montrera dans un autre mémoire, dont Cauchy [1852] est à nouveau rapporteur, que la condition de convergence donnée par Lagrange [1770a] peut être en défaut, mais qu'elle s'avère néanmoins correcte dans le cas d'une équation de la forme

$$u - x + Bx^2 + \dots + Mx^m = 0,$$

cas qui nous concerne ici, à condition de supposer que les coefficients $B, \dots, M$ sont tous de même signe.

28. Sur la formule d'inversion de Lagrange depuis Lambert [1758] jusqu'à Cauchy [1841], voir [Lubet 1998].

D'après son « exposé synoptique » [1831, p. 47-59], Fourier projetait quant à lui de traiter de la résolution des équations littérales dans le quatrième livre de son *Analyse des équations déterminées* : « À la vérité on a toujours considéré cette recherche comme un élément de la doctrine des séries, mais on verra bientôt qu'elle se rapporte directement à l'analyse algébrique. » [*Ibid.*, p. 48] À vrai dire, Fourier considère des équations polynomiales dont les coefficients sont des monômes en des lettres $a, b, c, \dots$ désignant des quantités connues. Il décrit alors une règle de résolution consistant à développer les racines sous forme de sommes de monômes de degrés croissants (ou décroissants) relativement à l'une des lettres « prise à volonté » au départ. Mais cette règle n'est autre que celle du parallélogramme inventée par Newton ; à propos de la convergence de l'approximation, Fourier écrit seulement : « Cette convergence est [...] celle qui résulte de l'approximation linéaire numérique » [*Ibid.*, p. 52] !

Non convaincu par la preuve de la formule de Lagrange donnée par Laplace, Cauchy [1841] propose une démonstration utilisant les fonctions de variable complexe dans un mémoire présenté à Turin en 1831. À cet effet, il expose son « Calcul des limites », c'est-à-dire la méthode des séries majorantes, qui « sert, non seulement à fournir des règles relatives à la convergence des séries qui représentent les développements de fonctions explicites ou implicites d'une ou plusieurs variables, mais encore à fixer des *limites* supérieures aux erreurs qu'on commet, quand on arrête chaque série après un certain nombre de termes » [1841, p. 48]. Cauchy montre notamment que, si l'équation $f(x, y) = 0$ possède m racines distinctes y pour $x = 0$, alors, pour x suffisamment proche de 0, l'équation considérée détermine m fonctions implicites $y(x)$. Dans le cas de la série de Taylor, Lagrange [1801] avait donné une évaluation de l'approximation obtenue lorsqu'on tronque la série. Ici, de façon analogue, dans le cas de la série de Lagrange représentant une fonction implicite, Cauchy fournit à son tour une majoration de l'erreur, mais en ayant recours à l'intégration de fonctions de variables complexes. Par suite, il est possible de préciser le nombre de termes à considérer dans la série pour obtenir toute approximation fixée à l'avance.

VI. Retour sur la méthode de Newton

Lagrange [1769] avait évoqué la méthode de Newton en signalant la non-maîtrise de la convergence du processus – probablement avec l'idée de mettre en valeur la fiabilité de sa propre méthode à l'aide des fractions continues. À l'inverse, dans l'article APPROXIMATION de l'*Encyclopédie méthodique* de mathématiques, Bossut [1784] reprend à sa manière la contribution de d'Alembert [1751] dans l'*Encyclopédie* sur la méthode

de Newton et semble curieusement assuré que le processus converge toujours vers une racine.

Lagrange revient sur la méthode de Newton dans la note V de son traité [1798] et reprend l'idée que l'on ne peut être assuré de ce que le processus converge toujours même en démarrant avec une valeur a très proche d'une racine. Il remarque toutefois et prouve que « cette méthode ne peut être employée sans scrupule que pour trouver la plus grande ou la plus petite racine d'une équation qui n'a que des racines réelles, ou qui en a d'imaginaires, mais dont les parties réelles sont moindres que la plus grande racine réelle, ou plus grandes que la plus petite de ces racines » [1798, p. 141]. Il faut aussi que la valeur approchée a soit choisie ou bien plus grande que la plus grande racine ω , ou bien plus petite que la plus petite racine α . En effet, dans ce cas, la valeur approchée suivante $a + p$ vérifie ou bien $\omega < a + p < a$, ou bien $a < a + p < \alpha$. On notera que, pour Lagrange, ces inégalités suffisent à assurer la convergence du processus.

En fait, trente ans auparavant, Jean-Raymond Mouraille²⁹ dans son *Traité de la résolution des équations* [1768] étudiait pour la première fois, et de façon systématique, les conditions de convergence de la méthode. Il développait une approche géométrique basée sur le fait que les approximations correspondent au remplacement de la courbe par sa tangente, ce qui permet de visualiser le comportement de la suite des approximations dans l'itération de la méthode. Mouraille note l'importance de la concavité de la courbe dans le processus et met en évidence la multiplicité des comportements possibles : osciller, s'éloigner à l'infini, tendre vers une autre racine. Il repère aussi que, selon l'emplacement de la valeur approchée choisie, la convergence lorsqu'elle a lieu est plus ou moins rapide. Mais surtout, Mouraille précise qu'il convient toujours de prendre la valeur approchée a de la racine cherchée x telle que, dans l'intervalle déterminé par a et x , la courbe soit « convexe vers l'abscisse » – on est sûr alors que l'approximation suivante sera meilleure et que l'itération pourra se poursuivre. Mouraille envisage aussi le cas particulier de racines multiples, ainsi que celui où la racine correspondrait à un point d'inflexion³⁰. Toutefois, restant dans le cadre d'une description géométrique, Mouraille ne fournit pas d'encadrements et donc pas de mesure de convergence. D'ailleurs, tout comme le fera Lagrange, Mouraille se contente de savoir que les approximations seront constamment améliorées, ce qui ne suffit pas à prouver la convergence. Malgré ses apports novateurs, son traité semble être passé

29. Mouraille (1720-1808), mathématicien et astronome, est membre de l'Académie de Marseille dont il est le secrétaire perpétuel pour les sciences. Il sera maire de Marseille de novembre 1791 à avril 1793.

30. À propos de Mouraille et de la méthode de Newton-Raphson, voir [Cajori 1910b ; Chabert 1994, § 6.3].

totallement inaperçu. Ainsi Lagrange, pourtant sensible à l'aspect historique, ne le mentionne pas, pas plus que Fourier, ni même Montucla dans son *Histoire des mathématiques* [1802].

Ce sont Fourier³¹, puis Cauchy qui traiteront avec précision de la mesure de la convergence de cette méthode. Fourier [1818] aborde le premier la question dans une note intitulée « Question d'analyse algébrique » dans laquelle il avance un certain nombre d'énoncés dont les démonstrations sont seulement esquissées. Ainsi, considérant un intervalle de bornes α et β dans lequel il est assuré de la présence d'une racine et d'une seule de l'équation $f(x) = 0$ et de la non-annulation de f' et f'' , il retrouve le résultat donné cinquante ans plus tôt par Mouraille, sous la forme suivante : la méthode de Newton conduira à des valeurs convergentes si l'on choisit pour valeur approchée initiale la borne α pour laquelle $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe³². La difficulté pour obtenir une « mesure du degré de l'approximation, c'est-à-dire [...] combien il y a de chiffres qui sont exacts »³³ tient dans le fait que « le propre de la méthode [...] est de ne jamais donner des valeurs alternativement plus grandes ou plus petites »³⁴ de la racine, et par suite de ne jamais donner d'encadrement. Aussi, Fourier propose de considérer les quantités $\alpha' = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ et

$\beta' = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$. La première valeur α' est la nouvelle approximation

donnée par la méthode de Newton, la seconde β' fournit avec α' un nouvel encadrement de la racine. Fourier en déduit que « si le nombre des chiffres déjà connu est n , une seule opération en fera connaître plusieurs autres en nombre n' , et n' est égal à n plus ou moins un nombre constant k , qui est le même pour toutes les opérations. »³⁵ En effet, pour peu que la racine cherchée soit simple, on a

$$|\beta' - \alpha'| \leq Q |\beta - \alpha|^2,$$

où Q est une constante que l'on peut prendre égale à

$$\frac{\sup |f''(x)|}{2 \inf |f'(x)|}.$$

31. Voir [Cajori 1910b].

32. Germinal Dandelin [1826] retrouvera cette condition sans supposer la non-annulation de f' . Voir [Cajori 1910a, p. 232].

33. [Fourier 1818, p. 244].

34. [*Ibid.*, p. 245].

35. [*Ibid.*, p. 249-250].

L'assertion de Fourier relative à la convergence quadratique du processus valide *a posteriori* l'affirmation de Newton³⁶ : « Tu gagneras deux fois plus de chiffres dans l'approximation à chaque opération. »

Ces résultats seront repris et développés avec leurs démonstrations dans le Livre II de l'*Analyse des équations déterminées* [Fourier 1831]. De son côté, Cauchy, en annexe de son *Cours d'analyse* [1821], retrouve la convergence énoncée par Fourier en 1818. Il intègre ensuite le résultat et sa preuve dans ses *Leçons sur le calcul différentiel* [Cauchy 1829]³⁷.

Terminons ce panorama avec une intéressante méthode restée méconnue, due à Alexandre Vincent³⁸ qui, de façon assez étonnante, met en œuvre successivement les techniques de Budan, Lagrange, Fourier et Newton. Cette méthode, contemporaine du théorème de Sturm sur la séparation des racines, est publiée dans les *Mémoires de la Société royale de Lille* de 1834 et reprise dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* [Vincent 1836].

L'approximation des racines s'effectue dans un premier temps selon la méthode des fractions continues de Lagrange, mais sans utiliser la fastidieuse équation aux différences. Partant d'une équation $f(x) = 0$ sans racines multiples, on détermine, à l'aide des techniques de Budan-Fourier, les entiers *a susceptibles* de représenter la partie entière d'une racine (positive pour commencer), ceux pour lesquels $f(x - a)$ et $f(x - a - 1)$ n'ont pas le même nombre de variations de signe. Puis, tout comme chez Lagrange, on effectue le changement de variable $x - a = \frac{1}{x'}$. À partir de l'équation en x' , de la même façon, on détermine les entiers *b susceptibles* de représenter la partie entière d'une racine de cette nouvelle équation. Il se peut que l'on ne trouve aucune valeur de *b* possible, auquel cas le processus démarré avec *a* s'arrête. Sinon, on continue... et on itère le processus. Or, et c'est là l'apport intéressant de Vincent, quels que soient les choix d'entiers *a, b, ...* ≥ 1 , au bout d'un nombre fini d'étapes, on parvient toujours « à une équation en $x^{(n)}$, telle que la transformée en $(x^{(n)} - 1)$, qui s'en déduit, ou n'ait plus que des permanences [de signe], ou ne présente plus qu'une seule variation » [Vincent 1836, p. 352]. Dans le premier cas, la série d'opérations se termine sans conduire à une racine. Dans le second, l'équation en $x^{(n)}$ possède une racine > 1 et une seule, ainsi : « les valeurs déjà obtenues [...]

36. Traduction de la phrase latine originale : « Isto enim modo figuras duplo plures in quotiente qualibet vice lucraberis » [1711/1968, p. 220].

37. Cauchy [1829] montre aussi comment adapter les résultats précédents pour s'assurer de la convergence du processus dans le cas du calcul de racines imaginaires.

38. A. Vincent (1797-1868) est professeur de mathématiques dans divers lycées à Reims et à Paris, il collabore au *Bulletin de Férussac* et devient membre de l'Académie des inscriptions et belles-lettres en 1850. Voir [Cournot 2010, p. 548].

pour $x, x', x'', x''', x^{iv}, \dots$, forment une fraction continue dont les réduites successives représentent des valeurs de plus en plus approchées de l'une des racines » [*Ibid.*].

Du coup, les racines (positives) se trouvent automatiquement séparées sans le recours à une équation aux différences ou à la méthode de Sturm. Vincent abandonne alors la méthode lagrangienne : « les approximations successives fournies par la réduction en fraction continue ne croissant que très lentement, changeons maintenant notre marche, et exprimons en décimales la valeur cherchée [...] suivant le procédé de Newton » [*Ibid.*, p. 353]. Bien sûr, il y a des conditions à vérifier pour être assuré de la convergence du procédé. Vincent connaît les travaux de Fourier et propose, si nécessaire, de déterminer d'abord une ou plusieurs décimales de cette unique racine > 1 jusqu'à l'obtention des conditions voulues. Il obtient ensuite une majoration de l'erreur commise sur $x^{(n)}$ dans l'application de la méthode de Newton, erreur qu'il faut ensuite reporter pour obtenir celle commise sur la racine correspondante de l'équation initiale.

Nous l'avons dit, cette méthode a été mal connue, puis oubliée jusqu'à sa reprise par J. Uspensky [1948]. Selon A. Akritas et S. Danielopoulos, « its most significant application is in the area of computerized algebra otherwise known as *symbolic and algebraic manipulation*, in which the exact computation of the roots of polynomials is required » [1978, p. 433].

VII. Rigueur et approximation

Au terme de ce tour d'horizon des méthodes de résolution approchée des équations numériques entre 1750 et 1850, deux grandes figures dominent : Lagrange et Fourier avec leurs traités respectifs de 1798 et 1831, qui présentent chacun la synthèse de travaux initiés trente ans auparavant. Mais, que peut-on conclure du point de vue des canons de la rigueur mathématique ? Au-delà des questions théoriques auxiliaires, comme le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème fondamental de l'algèbre, qui ne peuvent être définitivement résolues sans une axiomatisation suffisante de l'ensemble des nombres réels, se posent, on l'a vu, deux questions successives : le processus itératif converge-t-il bien vers la racine cherchée ? Et, dans ce cas, comment maîtrise-t-on le degré de l'approximation ?

Bien évidemment, on observe, au fil du temps, des progrès dans le développement des différentes techniques et donc, du même coup, dans leur rigueur. Qu'en est-il plus précisément à propos de chacune des quatre méthodes principales passées en revue ? La résolution à l'aide des fractions continues proposée par Lagrange en 1769 est d'emblée parfaitement rigoureuse : dès que l'on se place dans un intervalle contenant une racine réelle et

une seule, la méthode converge à coup sûr vers cette racine et, de plus, la majoration de l'erreur est clairement maîtrisée. Mais ici, la rigueur semble être obtenue aux dépens de l'efficacité.

En ce qui concerne la méthode de Bernoulli des séries récurrentes, on peut convenir que la convergence est d'emblée justifiée dès l'exposition qui en est donnée par Euler en 1748 puisque, lorsque la valeur absolue de la racine p domine celles des autres, la quantité $Ap^n + Bq^n + Cr^n + \&c.$ est bien « équivalente » à Ap^n quand n tend vers l'infini quoique l'expression utilisée soit « vaut à peu près ». Même si notre notion d'équivalence n'est pas formellement identifiée, on peut faire crédit à Euler d'utiliser ses propriétés à bon escient. En revanche, si la théorie progresse en 1831 avec Fourier, la convergence n'est pas davantage formalisée ; quant à la mesure de l'approximation, elle est à peine évoquée par Fourier.

Avec la formule d'inversion de Lagrange, cette fois, on observe vraiment une évolution au fil du temps. Si Lagrange généralise en 1770 un procédé dont, en 1758, Lambert maîtrisait la convergence dans le cas des équations trinômes, en revanche il perd cette maîtrise pour les équations ayant plus de termes. Et les manipulations effectuées par Lagrange ne sont pas valides en général, même d'un point de vue strictement formel. De plus, si Lagrange consacre une partie importante de son mémoire aux conditions de convergence, leur traitement apparaît comme superficiel ou, du moins, incorrect. Ce qui fait dire à Laplace que la belle formule de Lagrange n'a, pour l'instant, été obtenue que « par induction », c'est-à-dire, par des arguments qui relèvent plus de l'intuition que d'une vraie démonstration. Laplace, pour sa part, améliore en 1780 la preuve formelle de la formule, mais pas le traitement de la convergence. Lagrange revient sur la question en 1798 et, s'inspirant des séries récurrentes, il donne une preuve mieux argumentée de sa formule permettant d'approcher, dit-il, la plus petite des racines de l'équation, même si, cinquante ans plus tard, Chio mettra son énoncé en défaut en ce qui concerne la « plus petite » racine. Finalement, c'est au cours des années 1830 que Cauchy résout entièrement la question, puisqu'il obtient non seulement les conditions de la convergence de la série dans la formule de Lagrange, mais donne aussi une majoration explicite de l'erreur commise en tronquant la série à un rang donné.

Enfin, à propos de la méthode de Newton, commençons avec cette étonnante citation de Bossut [1784] qui énonce, sans aucun garde-fou, en dépit des réserves de Lagrange : « Quand on a trouvé, à moins de $\frac{1}{10}$ près, l'une des racines d'une équation, la méthode suivante, dûe à Newton, donne par un calcul très-expéditif la valeur de cette racine, approchée aussi près qu'on voudra » [1784, p. 100a]. Tout ceci, en dépit des travaux, il est vrai peu connus, de Mouraille qui, dès 1768, indique clairement comment procéder pour s'assurer de la convergence vers la racine cherchée. Son résultat est retrouvé par Fourier en 1818, avec de plus, et c'est important, un calcul de

majoration de l'erreur mettant en évidence une convergence quadratique du processus. Les résultats de Fourier sont repris par Cauchy dès 1821.

Ainsi, pour la méthode des fractions continues, sans doute parce que peu susceptible d'avancées majeures, on observe une sorte de statu quo au cours de toute la période étudiée depuis son invention par Lagrange en 1769. En ce qui concerne la méthode des séries récurrentes, là encore, peu de changements importants depuis sa mise au point par Euler en 1748 alors que cette fois-ci, au contraire, convergence et erreur sont non explicitées. C'est donc seulement avec les deux dernières méthodes que l'on peut observer un saut important. Pour la méthode de Newton, on dispose des conditions de convergence dès 1768 avec Mouraille, mais il faut attendre cinquante ans pour obtenir avec Fourier en 1818 la mesure de la convergence. Enfin, la méthode par développement en série offre l'exemple d'une évolution progressive qui débute avec l'invention de la belle formule de Lagrange en 1770 et se poursuit jusque vers 1850 avec les travaux de Chio, en passant principalement par Laplace et Cauchy surtout, ce dernier validant la méthode en 1831 en obtenant les majorations nécessaires.

Pour conclure cette étude de Lagrange à Cauchy, remarquons que, si nous nous sommes attachés à effectuer un repérage de la mise en évidence éventuelle par les auteurs d'une part de la convergence des processus, d'autre part de la possible maîtrise de l'erreur commise, ce repérage a pu être pratiqué malgré l'absence de définitions précises de limite ou de continuité et des preuves « rigoureuses » qu'elles permettent, donc sans attendre Cauchy et ses successeurs. Cette remarque semble devoir être mise en relation avec l'intéressant commentaire de J. Grabiner [1981, chap. 3] selon lequel la rigueur en analyse introduite par Cauchy s'est constituée à partir d'une « algèbre des inégalités », et, ces techniques sur les inégalités proviennent en premier lieu des travaux du XVIII^e siècle sur l'approximation des solutions des équations et, notamment, de ces questions de convergence et de majoration de l'erreur. Nous pouvons conclure donc avec elle : « it was algebra that paved the way for the recognition of the link between approximation and rigor ».

BIBLIOGRAPHIE

Sources primaires

- [Aitken 1926] Alexander Aitken, « On Bernoulli's Numerical Solution of Algebraic Equations », *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 46 (1926), p. 289-305.
- [d'Alembert 1751] Jean le Rond d'Alembert, article APPROXIMATION, *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*, t. I, 1751.
- [Bernoulli 1732] Daniel Bernoulli, « Observationes de seriebus quae formantur ex additione vel subtractione quacunque terminorum se mutuo consequentium », *Commentarii*

- academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, année 1728, 3 (1732), p. 85-100; *Die Werke von Daniel Bernoulli*, vol. II, Birkhäuser, 1982, p. 49-64.
- [Bolzano 1817] Bernhard Bolzano, « Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege », Prague : Haase, 1817. Trad. fr. : *Revue d'histoire des sciences*, 17 (1964), p. 136-164.
- [Bossut 1784] Charles Bossut, article APPROXIMATION, *Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, t. I, Paris, 1784.
- [Budan 1807] François-Désiré Budan, *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque*, Paris : Courcier, 1807. Rééd. augmentée, Paris : Dondey-Dupré, 1822.
- [Cauchy *Œuvres*] Augustin-Louis Cauchy, *Œuvres complètes*, 27 vol. en 2 séries, Paris : Gauthier-Villars, 1882-1974.
- [Cauchy 1815] A.-L. Cauchy, « Mémoire sur la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques », *Journal de l'École polytechnique*, 10 (1815), p. 457-548; *Œuvres*, 2^e série, t. I, p. 170-257.
- [Cauchy 1821] A.-L. Cauchy, « Sur la résolution numérique des équations », Note III dans *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. 1^{re} Partie, Analyse algébrique*, Paris : Imprimerie royale, 1821, p. 460-520; *Œuvres*, 2^e série, t. III, p. 378-425.
- [Cauchy 1829] A.-L. Cauchy, « Sur la détermination approximative des racines d'une équation algébrique ou transcendante », Note aux *Leçons sur le calcul différentiel*, Paris : Debure, 1829; *Œuvres*, 2^e série, t. IV, p. 573-609.
- [Cauchy 1841] A.-L. Cauchy, « Résumé d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites, lu à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831 », *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, t. II, 1841; *Œuvres*, 2^e série, t. XII, p. 48-112.
- [Cauchy 1846] A.-L. Cauchy, « Rapport sur un Mémoire qui a été présenté à l'Académie par M. Félix Chio, et qui a pour titre : Recherches sur la série de Lagrange, suivi d'une Note de M. Cauchy, rapporteur », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. XXIII (1846), p. 490-493; *Œuvres*, 1^{re} série, t. X, p. 110-123.
- [Cauchy 1852] A.-L. Cauchy, « Rapport sur de nouvelles recherches relatives à la série de Lagrange, et présentées à l'Académie par M. Félix Chio, suivi de Notes jointes au Rapport et rédigées par le rapporteur », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. XXXIV (1852), p. 304-319; *Œuvres*, 1^{re} série, t. XI, p. 414-437.
- [Clairaut 1746] Alexis-Claude Clairaut, *Éléments d'algèbre*, Paris, 1746.
- [Cournot 2010] Antoine-Augustin Cournot, *Œuvres complètes*, t. XI, B. Bru et Th. Martin (éd.), Paris : Vrin & Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté, 2010.
- [Dandelin 1826] Germain Dandelin, « Recherches sur la résolution des équations numériques », *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles*, 3 (1826), p. 7-71.
- [Euler 1744] Leonhard Euler, « De fractionibus continuis dissertatio », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, année 1737, 9 (1744), p. 98-137; *Opera Omnia*, série I, vol. 14, p. 187-215.
- [Euler 1748] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, t. I, Lausanne, 1748. Trad. fr. J.-B. Labey, *Introduction à l'analyse infinitésimale*, Paris : Barrois, 1796.
- [Euler 1755] L. Euler, *Institutiones calculi differentialis*, Pétersbourg, 1755; *Opera Omnia*, série I, vol. 10.

- [Fourier 1818] Joseph Fourier, « Question d'analyse algébrique », *Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris* (avril 1818), p. 61-67 ; *Œuvres*, t. II, Paris : Gauthier-Villars, 1890, p. 241-253.
- [Fourier 1820] J. Fourier, « Sur l'usage du Théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines », *Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris* (oct. 1820), p. 156-165 et (déc. 1820), p. 181-187 ; *Œuvres*, t. II, Paris : Gauthier-Villars, 1890, p. 289-309.
- [Fourier 1831] J. Fourier, *Analyse des équations déterminées*, Première Partie, Paris : Firmin Didot, 1831.
- [Gua 1744] Jean-Paul de Gua, « Recherche du nombre des Racines Réelles ou Imaginaires, Réelles positives ou Réelles négatives, qui peuvent se trouver dans les Équations de tous les degrés », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1741 (1744), p. 435-494.
- [Horner 1819] William Horner, « A new method of solving numerical equations of all orders by continuous approximation », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 109 (1819), p. 308-335.
- [Lagrange *Œuvres*] Joseph-Louis Lagrange, *Œuvres*, 14 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1867-1892.
- [Lagrange 1768] J.-L. Lagrange, « Solution d'un problème d'arithmétique », *Miscellanea Taurinensia*, années 1766-1769, IV, 1773, p. 41-97 ; *Œuvres*, t. I, p. 671-731 [daté du 20 sept. 1768].
- [Lagrange 1769] J.-L. Lagrange, « Sur la résolution des équations numériques », *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1767, 23 (1769), p. 311-352 ; *Œuvres*, t. II, p. 539-578.
- [Lagrange 1770a] J.-L. Lagrange, « Additions au Mémoire sur la résolution des équations numériques », *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1768, 24 (1770), p. 111-180 ; *Œuvres*, t. II, p. 581-652.
- [Lagrange 1770b] J.-L. Lagrange, « Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries », *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1768, 24 (1770), p. 251-326 ; *Œuvres*, t. III, p. 3-73.
- [Lagrange 1771] J.-L. Lagrange, « Sur le problème de Kepler », *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1769, 25 (1771), p. 204-233 ; *Œuvres*, t. III, p. 113-138.
- [Lagrange 1774] J.-L. Lagrange, « Additions à l'analyse indéterminée », dans L. Euler, *Éléments d'Algèbre*, traduits de l'allemand, t. II, p. 369-658, Lyon : Bruyset & Paris : V^{re} Desaint, 1774 ; *Œuvres*, t. VII, p. 5-180 [paru en 1773].
- [Lagrange 1795] J.-L. Lagrange, *Leçons données à l'École Normale de l'an III*, Leçon quatrième, « Sur la résolution des équations numériques », dans *Séances des Écoles Normales recueillies par des sténographes et revues par les Professeurs*, Paris : Reynier, an III (1795), reproduites dans [Dhombres 1992] ; *Œuvres*, t. VII, p. 249-271.
- [Lagrange 1798] J.-L. Lagrange, *De la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Paris : Duprat, an VI (1798). Nouvelle éd., *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Paris : Courcier, 1808 ; *Œuvres*, t. VIII.
- [Lagrange 1801] J.-L. Lagrange, *Leçons sur le calcul des fonctions, professées à l'École polytechnique en 1799*, *Séances des Écoles Normales*, t. X (1801). Nouvelle éd., 1806 ; *Œuvres*, t. X.
- [Lambert 1758] Johann Heinrich Lambert, « Observationes variae in mathesis puram », *Acta helvetica*, 3 (1758), p. 128-168 ; *Opera Mathematica*, vol. I, Zurich : Orell Füssli, 1946, p. 16-51.

- [Laplace 1780] Pierre-Simon Laplace, « Mémoire sur l'usage du calcul aux différences partielles dans la théories des suites », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1777 (1780), p. 99-122 ; *Œuvres complètes*, t. IX, Paris : Gauthier-Villars, 1893, p. 313-335.
- [Laplace 1827] P.-S. Laplace, « Mémoire sur le développement de l'anomalie vraie et du rayon vecteur elliptique en séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité », *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, VI (1823), p. 61-80 ; *Œuvres complètes*, t. XII, Paris : Gauthier-Villars, 1898, p. 548-566.
- [Legendre 1814] Adrien-Marie Legendre, « Mémoires sur la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques », *Bulletin de la Société Philomatique* (1814), p. 95-100 ; *Œuvres de Cauchy*, 2^e série, t. II, p. 187-193. [Analyse de mémoires de Cauchy.]
- [Maclaurin 1748] Colin Maclaurin, *Treatise of Algebra*, London, 1748.
- [Montucla 1802] Jean-Étienne Montucla, « De la résolution des équations par approximations », dans *Histoire des mathématiques*, t. 3, Paris : Agasse, an X (1802), p. 57-63.
- [Mouraille 1768] Jean-Raymond Mouraille, *Traité de la résolution des équations en général*, Marseille, 1768.
- [Newton 1707] Isaac Newton, *Arithmetica universalis*, Cambridge, 1707. Traduction fr. N. Beaudeau, Paris, 1802.
- [Newton 1711/1968] I. Newton, *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, London, 1711. D. T. Whiteside, *The mathematical papers of Isaac Newton*, t. II, Cambridge University Press, 1968, p. 206-247.
- [Newton 1736] *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, écrit vers 1670, 1^{re} éd. en anglais, 1736. Trad. fr. de Buffon, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, Paris, 1740 ; réimp., Paris : Blanchard, 1994.
- [Nicole 1740] François Nicole, « Sur le cas irréductible du troisième degré », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1738 (1740), p. 97-102.
- [Raphson 1690] Joseph Raphson, *Analysis æquationum universalis*, London, 1690.
- [Rolle 1690] Michel Rolle, *Traité d'algèbre*, Paris : Michallet, 1690.
- [Ruffini 1804] Paolo Ruffini, *Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado*, Modena, 1804 ; *Opere matematiche*, t. II, Rome : Edizioni Cremonese, 1953.
- [Simpson 1740] Thomas Simpson, *Essays on several Curious and Useful Subjects in Speculative and Mix'd Mathematicks*, London : H. Woodpall, 1740.
- [Sturm 1829] Charles Sturm, « Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques », *Bulletin de Férussac*, t. XI (juin 1829), p. 419-422 ; *Collected Works*, Basel : Birkhäuser, 2009, p. 323-326.
- [Sturm 1835] C. Sturm, « Mémoire sur la résolution des équations numériques », *Mémoires présentés par divers savans à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, 6 (1835), p. 273-318 ; *Collected Works*, Basel : Birkhäuser, 2009, p. 345-390.
- [Uspensky 1948] James Uspensky, *Theory of Equations*, New York : McGraw-Hill Co., 1948.
- [Vincent 1836] Alexandre Vincent, « Sur la résolution des équations numériques », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1 (1836), p. 341-372.
- [Waring 1762] Edward Waring, *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus*, Cambridge : 1762.
- [Waring 1763] E. Waring, « Problems », *Philosophical Transactions*, 53 (1763), p. 294-299.
- [Waring 1770] E. Waring, *Meditationes algebraicae*, Cambridge : Archdeacon, 1770.

Sources secondaires

- [Akritas & Danielopoulos 1978] Alkiviadis Akritas et Stylianos Danielopoulos, « On the forgotten theorem of Mr Vincent », *Historia Mathematica*, 5 (1978), p. 427-435.
- [Borowczyk 1991] Jacques Borowczyk, « Sur la vie et l'œuvre de François Budan », *Historia Mathematica*, 18 (1991), p. 129-157.
- [Bottazzini 1989] Umberto Bottazzini, « Lagrange et le problème de Kepler », *Revue d'histoire des sciences*, 42 (1989), p. 27-42.
- [Cajori 1910a] Florian Cajori, *A history of the arithmetical methods of approximation to the roots of numerical equations of one unknown quantity*, Colorado College Publications, General Series n° 51-52, Sciences vol. 12, p. 171-287.
- [Cajori 1910b] F. Cajori, « Fourier's improvment of the Newton-Raphson method of approximation anticipated by Mourraille », *Bibliotheca Mathematica*, 11 (1910), p. 132-137.
- [Cajori 1911] F. Cajori, « Horner's method of approximation anticipated by Ruffini », *Bulletin of the American Mathematical Society*, 17 (1911), 409-414.
- [Chabert et al. 1994] Jean-Luc Chabert et al., *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, Paris : Belin. Trad. angl. : *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip*, Springer, 1999. Seconde édition fr. revue et augmentée, Paris : Belin, 2010.
- [Dahan Dalmedico 1992] Amy Dahan Dalmedico, « Lagrange et la résolution numérique des équations », dans [Dhombres, 1992, Annexe 9, p. 496-498].
- [Dhombres 1992] Jean Dhombres (dir.), *L'École Normale de l'An III, Leçons de Mathématiques*, Paris : Dunod, 1992.
- [Gilain 1991] Christian Gilain, « Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral », *Archive for History of Exact Sciences*, 42 (1991), p. 91-136.
- [Gilain 2007] C. Gilain, « Introduction générale », dans d'Alembert, *Œuvres complètes*, série I, vol. 4a, *Textes de mathématiques pures, 1745-1752*, Paris : CNRS Éditions, 2007.
- [Grabiner 1981] Judith Grabiner, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, Cambridge (Mass.) & London : the MIT Press, 1981.
- [Goldstine 1977] Herman H. Goldstine, *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, New York : Springer, 1977.
- [Hamburg 1976] Robin Rider Hamburg, « The Theory of Equations in the 18th Century : The Work of Joseph Lagrange », *Archive for History of Exact Sciences*, 16 (1976), p. 17-36.
- [Houzel 2002] Christian Houzel, *La Géométrie algébrique. Recherches historiques*, Paris : Blanchard, 2002.
- [Itard 1984] Jean Itard, « Lagrange (Joseph-Louis) » dans *Essais d'histoire des mathématiques*, réunis et introduits par R. Rashed, Paris : Blanchard, 1984. Version anglaise dans *Dictionary of Scientific Biography*, vol. VII, 1973.
- [Laubenbacher et al. 2001] Reinhard Laubenbacher, Gary McGrath et David Pengelley, « Lagrange and the Solution of Numerical Equations », *Historia Mathematica*, 28 (2001), p. 220-231.
- [Lubet 1998] Jean-Pierre Lubet, « De Lambert à Cauchy : la résolution des équations littérales par le moyen des séries », *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 (1998), p. 73-129.

- [Sinaceur 1991] Hourya Sinaceur, *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*, Paris : Vrin, 1991.
- [Verley 1988] Jean-Luc Verley, « Techniques de séparation de racines au XVII^e siècle », dans *L'à-peu-près, aspects anciens et modernes de l'approximation*, p. 67-77, Paris : Éditions de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales, 1988.

Résidus et congruences de 1750 à 1850 : une diversité de pratiques entre algèbre et théorie des nombres

Jenny BOUCARD

Entre 1750 et 1850, la théorie des nombres est radicalement transformée, tant du point de vue des contenus que de son statut dans la communauté mathématique¹. Ainsi, au milieu du XVIII^e siècle, les publications de nature arithmétique sont marginales ; les questions et outils en jeu sont élémentaires et les résultats semblent déconnectés les uns des autres. L'auteur le plus prolifique est Leonhard Euler. Même s'il publie de nombreux textes, la théorie des nombres reste pour lui un thème secondaire. Il regrette d'ailleurs à plusieurs reprises que ce domaine soit négligé par la plupart de ses contemporains. Le contraste avec le milieu du XIX^e siècle est frappant : vers 1850, le nombre d'articles en lien avec la théorie des nombres a considérablement augmenté et des cours complets sont dédiés à ce domaine dans plusieurs universités allemandes. Les auteurs de travaux arithmétiques, qui y consacrent parfois une majorité de leurs recherches, se concentrent sur quelques thèmes principaux et s'appuient sur un langage, des méthodes et des outils spécifiques. Certains, comme Gotthold Eisenstein ou Ernst Eduard Kummer, ont acquis leur reconnaissance institutionnelle sur la base de leurs recherches en théorie des nombres.

Deux traités consacrés à ce domaine paraissent au tournant du XIX^e siècle : l'*Essai sur la théorie des nombres* d'Adrien-Marie Legendre [1798] et les *Disquisitiones arithmeticae*² de Carl Friedrich Gauss [1801]. Le premier offre une synthèse de résultats centrés sur l'analyse diophantienne déjà énoncés voire démontrés par Pierre de Fermat, Euler ou encore Joseph-Louis Lagrange. Le second est organisé autour d'un nouvel objet arithmétique – les congruences – et des formes quadratiques ; décrit comme novateur et fondamental par de nombreux savants du XIX^e siècle et par les historiens de la théorie des nombres³, sa publication a souvent été présentée comme constituant une rupture radicale dans l'histoire de la théorie des nombres.

1. [Goldstein 1989 ; Goldstein & Schappacher 2007a].

2. Titre abrégé en *D.A.*

3. Sur cet ouvrage et sa réception, voir [Goldstein *et al.* 2007].

L'objectif de cet article est de saisir l'évolution de la théorie des nombres de 1750 à 1850, tout particulièrement en France⁴, à partir de l'étude d'un corpus de travail centré sur les congruences. Cette approche nous permettra notamment de souligner des éléments de continuité sur cette période et de montrer la diversité des réceptions des recherches arithmétiques du second XVIII^e siècle par les acteurs du premier XIX^e. Nous mettrons également en évidence l'existence de pratiques arithmétiques spécifiques fondées sur un rapprochement entre algèbre et théorie des nombres au cours de la période considérée.

I. La théorie des nombres de 1750 à 1850 : quelques éléments historiographiques

Cette idée de rupture radicale matérialisée par les *D.A.* est avancée dans plusieurs histoires de la théorie des nombres publiées au XX^e siècle. Celles-ci proposent un développement du domaine par à-coups jusqu'au XIX^e siècle, avec un XVII^e siècle essentiellement centré sur Fermat, dont le travail est ensuite repris par Euler à partir des années 1730. Lagrange et Legendre, dont le rôle et l'importance varient d'une étude à l'autre, interviennent le plus souvent comme des acteurs intermédiaires, avant l'avènement d'une « nouvelle ère » de la théorie des nombres avec Gauss⁵. Ceci est par exemple bien illustré par M. Kline [1972], dans son introduction au chapitre « The Theory of Numbers in the Nineteenth Century » :

« Up to the nineteenth century the theory of numbers was a series of isolated though often brilliant results. A new era began with Gauss's *Disquisitiones Arithmeticae* which he composed at the age of twenty. [...] In this book he standardized the notation ; he systematized the existing theory and extended it ; and he classified the problems to be studied and the known methods of attack and introduced new methods. In Gauss's work on the theory of numbers there are three main ideas : the theory of congruences, the introduction of algebraic numbers, and the theory of forms as the leading idea in Diophantine analysis. This work not only began the modern theory of numbers but determined the directions of work in the subject up to the present time. » [*Ibid.*, p. 813]

4. Nous justifierons cette restriction lors de l'analyse globale de notre corpus de travail pour la première moitié du XIX^e siècle.

5. Selon A. Weil [1984, p. xii], par exemple, Lagrange et Legendre participent à un « âge de transition ». Weil caractérise l'apport de Gauss de la façon suivante : « The greatness of Gauss lies in his having brought to completion what his predecessors had initiated, no less than in his inaugurating a new era in this history of subject. » [*Ibid.*, p. ix] L'œuvre de Gauss se situe donc, d'après lui, dans la continuité des travaux de ses prédécesseurs, tout en constituant une rupture avec eux.

Trois aspects récurrents de l'historiographie de la théorie des nombres transparaissent dans cette citation. Avant Gauss, la théorie des nombres est un ensemble de résultats disparates⁶, intéressant quelques rares auteurs (Fermat, Euler, Lagrange, Legendre), dont les travaux sont le plus souvent étudiés à la lumière de développements ultérieurs. Gauss introduit ensuite la notion de congruence, avec sa notation associée⁷, permettant ainsi de standardiser les notations arithmétiques. Son ouvrage inaugure enfin trois branches principales pour la théorie des nombres : les congruences, la théorie des nombres algébriques et la théorie des formes. Ce dernier aspect a alors des conséquences importantes dans la structure des récits historiques proposés⁸, qui prennent souvent comme point de départ des catégories qui ne sont pas (ou seulement partiellement) adaptées à la période considérée ici. Comme le soulignent C. Goldstein et N. Schappacher [2007a], plusieurs ouvrages présentent par exemple une histoire de la théorie des nombres principalement limitée à celle de la théorie algébrique des nombres :

« In this history modern algebraic number theory appears as the natural outgrowth of the discipline founded by the *Disquisitiones Arithmeticae*. Historical studies have accordingly focused on the emergence of this branch of number theory, in particular on the works of Dirichlet, Ernst Eduard Kummer, Richard Dedekind, Leopold Kronecker, and on the specific thread linking the D. A. to the masterpiece of algebraic number theory, David Hilbert's *Zahlbericht* of 1897. » [*Ibid.*, p. 4]

Nous sommes donc face à une histoire presque exclusivement germanique, initiée par Gauss et centrée sur quelques acteurs et résultats précis identifiés rétrospectivement, tels les lois de réciprocité⁹ ou les nombres

6. Notons que cette image de la théorie des nombres est aussi véhiculée par des contemporains de Gauss. Ainsi, dans son commentaire des *D.A.*, Delambre indique : « Cette analyse se composant d'un grand nombre de propositions isolées et assujetties à des limitations particulières, il seroit difficile d'entrer ici dans le détail des résultats nouveaux annoncés dans l'ouvrage de M. Gauss » [1810, p. 70].

7. Deux nombres entiers a et b sont dits congrus modulo un nombre entier p si leur différence est divisible par p . Autrement dit, a et b sont congrus modulo p s'ils admettent le même reste après division euclidienne par p . Gauss note $a \equiv b \pmod{p}$. Notons que les congruences sont donc liées directement aux résidus, particulièrement étudiés par Euler dans le second XVIII^e siècle.

8. On trouve un récit n'intégrant que cet aspect de la réception des recherches arithmétiques de Gauss dans [W. Ellison & F. Ellison 1978].

9. Legendre introduit l'expression « loi de réciprocité » dans un mémoire présenté à l'Académie des sciences de Paris en 1785 [1788]. À l'aide des congruences, son énoncé de la loi de réciprocité quadratique affirme que, pour des nombres premiers p et q , p est un résidu quadratique modulo q – c'est-à-dire qu'il existe un entier x tel que $p \equiv x^2 \pmod{q}$ – si et seulement si q est un résidu quadratique modulo p , sauf lorsque p et q sont de la forme $4n + 3$. Des savants comme Gauss, Jacobi, Kummer, Eisenstein ont énoncé des

idéaux. Cette forme de lecture historique conduit à la mise en place d'un récit linéaire, négligeant certains aspects substantiels de l'histoire de la théorie des nombres. Elle induit également des manques dans la contextualisation des travaux de certains auteurs, tels que ceux d'Évariste Galois ou d'Augustin-Louis Cauchy pour le XIX^e siècle. Le travail sur les racines imaginaires de congruences de Galois [1830] est souvent décrit comme isolé, alimentant ainsi l'image du génie maudit qui lui est traditionnellement associée¹⁰. À l'exception de sa théorie symbolique des imaginaires [Dahan Dalmedico 1997 ; Flament 2003], les recherches arithmétiques de Cauchy sont pour la plupart oubliées ou évaluées négativement dans la mesure où elles n'entrent pas dans le cadre de la théorie algébrique des nombres ou de la théorie des formes quadratiques telle qu'elle est exposée dans les *D.A.* Ainsi, lorsque l'historien F. Lemmermeyer lit les travaux arithmétiques de Cauchy publiés autour de 1840 à travers le prisme des lois de réciprocité et des sommes de Gauss¹¹, il les met en regard de ceux de Carl Gustav Jakob Jacobi et commente : « Cauchy also studied these sums, but his lack of understanding higher reciprocity kept him from going as far as Jacobi did » [2009, p. 171].

Une double remise en cause de cette lecture a eu lieu dans les dernières décennies. Des études récentes ont, d'une part, souligné l'importance de l'organisation humaine et matérielle de la recherche et de l'enseignement pour saisir la circulation effective des idées. Au-delà d'Euler, de Lagrange et de Legendre, M. Bullynck [2006, 2009b] met par exemple en évidence l'influence sur Gauss d'une lignée de manuels arithmétiques germaniques et des travaux de Johann Heinrich Lambert autour de la construction de tables numériques. D'autre part, la complexité de la réception des *D.A.* jusque dans les années 1860 a pu être mise au jour à partir d'un relevé systématique des références à l'ouvrage pour la période 1801-1860. Dans cette étude, C. Goldstein et N. Schappacher [2007a] montrent notamment la mise en place d'un champ de recherche, qu'ils nomment *Analyse arithmétique algébrique*, constitué de recherches articulant les congruences, les fonctions elliptiques, les séries infinies et les équations algébriques [*Ibid.*, p. 52]. Ils pointent en outre la part relativement faible des textes contenant des résultats arithmétiques en lien avec la théorie algébrique des nombres dans le second XIX^e siècle¹², ce qui offre un contraste notable avec les récits

lois de réciprocité d'ordre supérieur, c'est-à-dire des lois donnant une condition pour qu'un nombre p soit une puissance n^e modulo q lorsque q est une puissance n^e modulo p [Lemmermeyer 2000].

10. Pour une analyse de la construction de cette image, voir [Ehrhardt 2011a].

11. Les sommes de Gauss sont des cas particuliers de sommes pondérées de racines de l'unité.

12. [Goldstein 1999 ; Goldstein & Schappacher 2007b].

précédents. Plusieurs travaux historiques récents établissent ainsi comment certains transferts, filiations et pratiques ont été masqués par une historiographie fondée sur une identification rétrospective des résultats importants à considérer.

Notre objectif consiste ici à contribuer à mettre en lumière ces différentes zones d'ombre pour la période 1750-1850. Nous nous appuyons, pour ce faire, sur une analyse systématique menée pour la première moitié du XIX^e siècle, qui correspond à la fois à la période suivant directement la publication des traités de Legendre et de Gauss et à celle de l'essor des journaux mathématiques et, par là même, à une diversification des supports de diffusion pour les auteurs. Nous souhaitons, dans ce cadre, pouvoir capturer la multiplicité des pratiques arithmétiques déployées par les différents acteurs de la période. Mais déterminer méthodiquement ce qui relève de ce domaine suppose de pouvoir nous appuyer sur une catégorie « théorie des nombres » relativement stabilisée. Or, cela n'est pas envisageable, que l'on considère le point de vue des acteurs ou les classifications construites dans le second XIX^e siècle dans le cadre de journaux de recension comme le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*¹³. Les définitions de la théorie des nombres données par Legendre et Gauss dans leurs traités respectifs témoignent par exemple de présupposés très différents de la part des deux mathématiciens. Legendre identifie ainsi la théorie des nombres à l'analyse indéterminée :

« Je ne sépare point la théorie des nombres de l'analyse indéterminée, et je regarde ces deux parties comme ne faisant qu'une seule et même branche de l'analyse algébrique. En effet, il n'est pas de Théorème sur les nombres qui ne soit relatif à la résolution d'une ou de plusieurs équations indéterminées. » [1798, p. ix]

Pour Gauss, au contraire, l'« arithmétique transcendante » ne se réduit pas à l'analyse indéterminée :

« Les Recherches contenues dans cet Ouvrage appartiennent à cette partie des Mathématiques où l'on considère particulièrement les nombres entiers, quelquefois les fractions, mais où l'on exclut toujours les nombres irrationnels. L'Analyse *indéterminée* ou de *Diophante*, qui apprend à distinguer, parmi les solutions d'un problème indéterminé, celles qui sont entières, ou du moins rationnelles et le plus souvent positives, ne constitue pas cette doctrine, mais elle en est une partie très-distincte ; elle a avec elle à-peu-près le même rapport que l'Algèbre, c'est-à-dire, l'art de réduire ou de résoudre les équations, avec l'Analyse universelle. » [1801/1807, Préface]

Notre stratégie a donc consisté en la constitution d'un corpus d'étude grâce au suivi systématique, dans les différentes publications de la première

13. Cette question est précisément discutée dans [Goldstein 1999, p. 194-199].

moitié du XIX^e siècle, des différentes occurrences de l'objet arithmétique introduit par Gauss en 1801 (les congruences) et de la notion associée de résidu, le tout en tenant compte des différentes formes d'utilisation de ces objets. En effet, l'appropriation de la notion de congruence de Gauss n'est ni immédiate, ni uniforme : selon les auteurs et les supports de publication utilisés, les résidus et les congruences apparaissent sous différentes formes, dénominations et notations. Les *congruences* de Gauss sont des *équivalences* chez Cauchy, des *équations* chez Poinso et des *équations indéterminées* chez Legendre. De même, les *résidus* sont parfois des *restes* ou encore des *nombres de même forme*. Du point de vue des notations, les habitudes sont également diverses, comme nous le verrons avec Legendre. Nous avons donc établi un ensemble de mots et symboles clés pour construire notre corpus¹⁴, et ainsi relevé 254 textes¹⁵ (incluant rééditions et traductions) et 56 auteurs¹⁶ pour la période 1801-1850, auxquels nous avons appliqué une double grille de lecture : les références explicites des auteurs et l'analyse de leurs pratiques arithmétiques. C'est à l'aune des références ainsi relevées que nous proposons, dans la partie suivante, une lecture du second XVIII^e siècle centrée sur Euler, Lagrange, Legendre et Gauss, cette restriction à quatre auteurs pour la période constituant le reflet des choix des acteurs du premier XIX^e siècle¹⁷. Notre troisième partie, consacrée à l'analyse du corpus de textes sur les congruences, nous permettra ainsi de broser un portrait des pratiques arithmétiques pour la période 1750-1850 et de souligner une diversité de filiations et de circulations entre les différents acteurs impliqués.

II. Deux approches arithmétiques au tournant du XIX^e siècle

1. Euler, Lagrange et le théorème des quatre carrés

Euler est sans conteste l'auteur qui produit le plus de mémoires arithmétiques au XVIII^e siècle. C'est dans les années 1730 qu'il entame un échange épistolaire avec Christian Goldbach, dans lequel les questions de nombres occupent une place de choix. De son côté, Lagrange publie une

14. La méthodologie employée est détaillée dans [Boucard 2011b, chap. 1].

15. Signalons par exemple que, parmi ces textes, 40% environ ne contiennent aucune référence explicite aux *D.A.* : nous obtenons ainsi un ensemble d'écrits sensiblement différent de celui analysé dans [Goldstein & Schappacher 2007a].

16. Parmi ces 56 auteurs pour 254 textes, nous dénombrons 19 auteurs allemands, pour 123 textes, et 24 français, auteurs de 110 textes. Parmi les 13 autres auteurs, 6 sont britanniques, 2 sont belges, 2 sont italiens et 3 sont russes.

17. Comme nous le verrons plus loin, d'autres acteurs (Hindenburg et Lambert) et d'autres travaux doivent cependant être pris en considération afin de saisir le développement de la théorie des nombres au XVIII^e siècle [Bullynck 2006, 2009a, 2010].

dizaine de mémoires sur une période réduite (1768-1777) correspondant à son arrivée à l'Académie de Berlin. Euler et Lagrange échangent régulièrement par lettres et travaillent sur des questions similaires. Au début des années 1770, ils proposent ainsi des preuves, fondées sur des approches différentes, de deux théorèmes laissés sans démonstration jusque-là : le théorème des quatre carrés et le théorème de Wilson¹⁸. L'analyse des différents outils et méthodes mis en œuvre par les deux savants pour le théorème des quatre carrés est particulièrement éclairante quant à leurs pratiques arithmétiques respectives¹⁹. C'est donc sur ce point que nous nous concentrerons ici.

Entre 1749 et 1751, Euler présente à l'Académie de Berlin plusieurs mémoires sur les sommes de carrés, dont une démonstration du théorème des deux carrés²⁰, dans lesquels il recourt à des outils variés : différences finies, manipulations algébriques, ainsi que ce que l'on appelle aujourd'hui le petit théorème de Fermat²¹. Le fait que les diviseurs de sommes de deux carrés premiers entre eux sont également des sommes de deux carrés constitue une étape fondamentale de cette preuve. Pour démontrer ce résultat, Euler s'appuie sur la méthode de descente infinie²² dans le cadre d'un raisonnement par l'absurde : il suppose d'abord qu'il existe une somme de deux carrés premiers entre eux divisible par un nombre premier p qui n'est pas une somme de deux carrés, avant d'aboutir à une suite strictement décroissante de sommes de deux carrés possédant cette propriété, ce qui est impossible. En 1751, Euler présente un mémoire [1760] contenant une preuve de la version faible du théorème des quatre carrés. Il introduit pour ce faire un ensemble de résultats sur ce qu'il nomme les *residua*²³, qui désignent les restes de carrés après division par un nombre p , composé ou premier. Il énonce plusieurs propriétés opératoires de ces résidus, qu'il utilise ensuite dans sa preuve, toujours fondée sur un raisonnement par l'absurde. La méthode des différences finies n'est plus utilisée,

18. D'après le théorème de Wilson, si un nombre p est premier, alors $(p-1)! + 1$ est divisible par p . Celui des quatre carrés énonce que tout nombre entier est somme d'au plus quatre carrés entiers (ou rationnels dans la version faible de ce résultat).

19. Cette analyse est développée dans [Boucard 2011b, chap. 5 ; 2014].

20. Ce théorème énonce que tout nombre premier de la forme $4n+1$ est somme de deux carrés.

21. Selon le petit théorème de Fermat, pour tout nombre premier p , l'expression $a^{p-1} - 1$ est divisible par p si a est premier avec p .

22. Sur l'utilisation de la méthode de descente infinie en théorie des nombres, voir [Goldstein 1993 ; Bussotti 2006].

23. Le terme *residus*, ou *residua* en latin, n'est pas utilisé par Euler sous une forme stabilisée. Dans [Euler 1761], les *residua* désignent par exemple les résidus de puissances.

Euler indiquant explicitement chercher à construire des preuves fondées uniquement sur des arguments arithmétiques.

La nature des démonstrations est régulièrement évoquée par Euler dans ses travaux arithmétiques. Entre 1741 et 1761, ce dernier publie quatre démonstrations du petit théorème de Fermat construites avec des outils différents. Les deux premières [1741, 1750] s'appuient sur les propriétés de divisibilité des coefficients du binôme de Newton. Dans le mémoire de 1750, Euler montre par exemple que, pour tout nombre premier p , $(a + b)^p - a - b$ est divisible par p , puis en déduit le petit théorème de Fermat par itération. Dans la suite, il utilise ce dernier pour établir des résultats sur les diviseurs premiers des nombres de la forme $a^{2n} + b^{2n}$, qu'il exprime progressivement en termes de restes de division euclidienne. En 1761, Euler commence au contraire par démontrer des résultats sur les résidus de puissances après division par un nombre premier p avant d'obtenir une nouvelle démonstration du petit théorème de Fermat à partir de considérations sur la répartition des résidus de puissance parmi les nombres entiers compris entre 1 et $p - 1$. Il qualifie cette preuve de « plus naturelle » [Euler 1761, § 53], témoignant ainsi de sa volonté de construire des raisonnements seulement fondés sur la considération d'outils arithmétiques comme les résidus.

C'est en 1772 que Lagrange publie sa propre démonstration du théorème des quatre carrés – et c'est d'ailleurs l'unique mémoire qu'il consacre à ce résultat. Il y reprend l'architecture de la démonstration proposée par Euler pour sa version faible du théorème des quatre carrés. Pour chaque théorème démontré par Euler à l'aide des résidus, Lagrange propose en revanche de nouvelles preuves construites à partir de méthodes et d'outils qu'il a déjà utilisés dans des écrits sur les problèmes indéterminés du second degré, sans aucune mention de la théorie des résidus d'Euler [Lagrange 1769, 1770, 1773, 1774]. Comme ce dernier, Lagrange recourt à des manipulations algébriques et à la méthode des différences finies. Nous retrouvons aussi chez lui la méthode de descente infinie, mais sous une autre forme : Lagrange construit une suite décroissante d'entiers positifs afin d'aboutir à une équation dont la résolution, triviale, lui permet de démontrer l'existence d'une solution. C'est également sous cette forme qu'il applique la méthode dans sa démonstration du théorème des quatre carrés.

Euler réagit très rapidement en soumettant, dès 1772, sa propre démonstration à l'Académie de Pétersbourg [1780]. Il y reprend certaines simplifications algébriques de Lagrange ainsi que sa façon d'utiliser la méthode de descente infinie. Des spécificités se dégagent néanmoins. Le mémoire d'Euler ne se borne pas aux quatre carrés : il contient au contraire des preuves d'autres théorèmes portant sur la décomposition de nombres entiers en sommes de carrés et reposant sur la même structure argumentative, ce qui semble témoigner d'une volonté de systématisation des raison-

nements pour un ensemble donné de résultats. Par ailleurs, Euler ne reprend pas les démonstrations de certains résultats intermédiaires par Lagrange, mais en propose de nouvelles, fondées principalement sur les résidus.

Ce bref survol des outils et méthodes utilisés par les deux hommes pour démontrer un même résultat témoigne non seulement de leurs influences réciproques – une trame de démonstration qui circule, des usages évolutifs de la méthode de descente infinie –, mais aussi de l'existence de pratiques arithmétiques différentes²⁴ permettant *in fine* d'obtenir les mêmes résultats. Lorsque Lagrange applique une diversité d'outils analytiques, algébriques, arithmétiques à ses recherches arithmétiques – ce qu'il fait également dans ses travaux arithmétiques ultérieurs –, Euler présente des démonstrations de plus en plus centrées sur les résidus, qui deviennent progressivement un objet d'étude à part entière.

Euler utilise de fait les résidus dans un contexte plus large que celui du théorème des quatre carrés. Dès les années 1730, il étudie différents problèmes de restes issus d'ouvrages de mathématiques récréatives²⁵ et de manuels d'arithmétique (*Rechenbücher*) dans lesquels les solutions proposées sont le plus souvent construites sur des règles de calculs particulières. Il propose une approche générale pour cet ensemble de problèmes dans un mémoire [1740] où il considère par exemple des nombres négatifs pour restes [Bullynck 2009a,b]. À partir des années 1750 au moins, les résidus semblent constituer pour Euler un outil mathématique approprié pour construire des preuves arithmétiques : nous avons par exemple déjà évoqué la démonstration « plus naturelle » [1761, § 53] qu'il propose du petit théorème de Fermat. Dans ce même texte, Euler souligne également la nature particulière d'un résidu, comme représentant d'une infinité de nombres [*Ibid.*, § 3]. Il projette de surcroît la publication d'un traité de théorie des nombres, dont une version inachevée paraîtra finalement de manière posthume [1849]. Les chapitres 5 à 14 sont consacrés aux résidus (de puissances, quadratiques, cubiques, biquadratiques, quintiques) ; les deux derniers, 15 et 16, contiennent des études des formes $x^2 + y^2$ et $x^2 + 2y^2$. D'« instruments de recherche », les résidus deviennent ainsi progressivement des « objets d'étude »²⁶ dans l'œuvre d'Euler.

Ces différents travaux d'Euler ne sont pas isolés. La place de l'arithmétique élémentaire dans l'éducation devient en effet de plus en plus importante et Christian Wolff, dont la philosophie a un impact fondamental au

24. L'étude de leurs démonstrations respectives du théorème de Wilson permet également de mettre en évidence ces similarités et spécificités dans leurs pratiques.

25. Sur les ouvrages de mathématiques récréatives publiés entre le XVI^e et le XVIII^e siècle, leurs sources et l'impact de l'avènement de l'algèbre sur ces problèmes, voir [Heeffer 2014].

26. Nous empruntons ces expressions à E. Guisti [2000].

xviii^e siècle, souligne la nécessité de systématiser l'arithmétique, en proposant des démonstrations et en limitant le recours à des règles particulières [Bullynck 2008, 2009a]. D'autres auteurs, comme Abraham Kästner et Carl Friedrich Hindenburg, poursuivent ce travail de généralisation sur les problèmes de restes. Dans ce contexte, la théorie des congruences de Gauss permet de penser cet ensemble de problèmes de façon cohérente :

« Finally, Gauss's congruences, functioning as an equation, a relationship and a tool for abbreviating calculation, reshaped this fragmented field of mathematics (which had come from old algebra books, *Rechenbücher*, recreational mathematics, equation theory, and Diophantus) into a coherent theory. All singular problems, previously treated by Euler and Hindenburg, appear in Section II of the *Disquisitiones Arithmeticae* and are aptly solved using congruences » [Bullynck 2009a, p. 68].

La théorie des nombres est également au cœur de discussions académiques dans les années 1770, engagées par Lambert qui projette de mener une entreprise de constitution de tables de facteurs et qui souligne le besoin, à cet effet, d'une théorie des nombres cohérente. Plusieurs géomètres publient alors des recherches arithmétiques sur des méthodes de factorisation : Johann III Bernoulli, qui fait paraître dès 1771 un mémoire sur les fractions décimales périodiques, utiles pour la factorisation de certains grands nombres, et Euler, qui présente également des recherches à ce sujet l'année suivante devant l'Académie de Pétersbourg. Il est ainsi possible de comprendre certains mémoires d'Euler en lien avec la théorie des résidus comme des réactions aux méthodes proposées par Bernoulli, qui s'est lui-même inspiré de ses précédents travaux [Bullynck 2010].

À partir de la comparaison des preuves d'Euler et de Lagrange du théorème des quatre carrés, nous pouvons donc identifier deux approches distinctes de la théorie des nombres, que nous retrouverons, dans une certaine mesure, chez Gauss et Legendre au tournant du xix^e siècle.

2. Les traités arithmétiques de Legendre (1798) et Gauss (1801)

Au moment où leurs ouvrages paraissent, Legendre est académicien (depuis 1783), tandis que Gauss est un jeune savant de 24 ans. Ils publient à trois années d'intervalle un traité centré sur la théorie des nombres, dont les présupposés, l'organisation et les contenus sont très différents.

Le traité de Legendre est composé de quatre parties : la première et la quatrième portent sur la résolution d'équations indéterminées, les deuxième et troisième contiennent des résultats sur la loi de réciprocité quadratique, puis sur certaines formes quadratiques et les sommes de trois carrés. Nous retrouvons donc ici, comme chez Lagrange, une théorie des nombres centrée sur l'analyse diophantienne. Legendre produit aussi quelques observations sur les restes de division mais n'énonce ou n'utilise

aucune propriété opératoire sur les restes. Il est par exemple reconnu pour son travail sur la loi de réciprocité quadratique et pour avoir introduit ce que l'on qualifie aujourd'hui de *symbole de Legendre*, mais il aborde principalement ces thèmes en termes de divisibilité²⁷. Dès son premier mémoire de théorie des nombres [1788], Legendre reprenait des résultats énoncés par Euler sur les résidus, ou démontrés à l'aide de la théorie des résidus, tout en les traduisant en termes de divisibilité. La première édition de son traité se situe donc dans la lignée des travaux de Lagrange : ses recherches portent principalement sur les équations indéterminées et les formes quadratiques ; Legendre considère très ponctuellement des restes de division afin de simplifier la formulation de certains énoncés, mais il n'applique pas les propriétés propres aux résidus données précédemment par Euler. Comme Lagrange, il reformule également en termes de divisibilité et d'équations indéterminées certains résultats énoncés par Euler à l'aide des résidus (les théorèmes de Fermat et de Wilson par exemple).

Le positionnement de Gauss dans les *D.A.* est radicalement différent²⁸. L'ouvrage débute précisément par l'introduction de la notion de congruence et de la notation associée, que Gauss justifie par l'analogie avec l'égalité²⁹.

27. Voici, par exemple, le paragraphe contenant la définition du symbole de Legendre : « Nous avons démontré que N étant un nombre quelconque, et c un nombre premier qui ne divise pas N , la quantité $N^{c-1} - 1$ est toujours divisible par c ; cette quantité est le produit de deux facteurs $N^{\frac{c-1}{2}} + 1$, $N^{\frac{c-1}{2}} - 1$; il faut donc que l'un ou l'autre de ces deux facteurs soit divisible par c ; d'où nous concluons que la quantité $N^{\frac{c-1}{2}}$ divisée par c , laissera toujours le reste $+1$ ou le reste -1 . [...] Comme les quantités analogues à $N^{\frac{c-1}{2}}$ se rencontreront fréquemment dans le cours de nos recherches, nous emploierons le caractère abrégé $\left(\frac{N}{c}\right)$, pour exprimer le reste que donne $N^{\frac{c-1}{2}}$ divisée par c ; reste qui, suivant ce qu'on vient de voir, ne peut être que $+1$ ou -1 » [Legendre 1798, art. 134-135]. Cet extrait reflète la forme des énoncés de Legendre : le petit théorème de Fermat est présenté en termes de divisibilité, contrairement à ce que nous trouvons chez Euler. Legendre utilise le mot « reste » au sens de la division euclidienne. Il n'applique aucune opération sur les restes.

28. Pour une analyse détaillée du contenu et de la structure de l'ouvrage de Gauss, voir [Goldstein & Schappacher 2007a, p. 5-18].

29. Gauss était familiarisé dès son plus jeune âge aux raisonnements sur les restes de nombres, bien avant d'avoir eu accès aux travaux d'Euler ou de Lagrange. Dès l'âge de huit ans, le jeune Gauss a eu accès à un *Rechenbuch*, offert par son oncle, et qu'il qualifiait de *Liebes Büchlein* [Siebeneicher s.d.] : le manuel *Arithmetica theoretico-practica* de Christian Stephan Remer [1737], dans lequel les astuces pratiques pour simplifier les calculs à partir de nombreux cas particuliers sont particulièrement mises en avant. L'ouvrage contient également des résultats sur les diviseurs de nombres, les nombres premiers, les méthodes de factorisation et les restes de division. Remer écrit par exemple « de[r] Reste von $10 : 7 = 3$ » (le reste de $10 : 7 = 3$) pour signifier que le reste de la division de 10 par 7 est 3 [1737, p. 260]. Il détermine ensuite les différents restes des puissances successives de 3 après division par 7 et note que l'on obtient le

Les quatre premières sections des *D.A.* sont dédiées aux congruences et à leurs propriétés fondamentales, résidus de puissances et résidus quadratiques. Contrairement à Legendre qui ne réutilise pas les raisonnements d'Euler sur les résidus, Gauss les cite, les reprend, les développe et les approfondit à l'aide des congruences³⁰. La section V, de loin la plus volumineuse, est consacrée aux formes quadratiques, et traite de deux questions centrales : déterminer les nombres représentés par une forme quadratique donnée et classer les formes quadratiques en fonction de leur déterminant. Comme nous l'avons signalé, Lagrange est également reconnu pour avoir produit des recherches sur ce sujet. Il est toutefois important de remarquer que l'approche de Gauss est originale par rapport à ses prédécesseurs :

« Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, and Adrien-Marie Legendre had forged tools to study the representation of integers by quadratic forms. Gauss, however, moved away from this Diophantine aspect towards a treatment of quadratic forms as objects in their own right, and, as he had done for congruences, explicitly pinpointed and *named* the key tools. » [Goldstein & Schappacher 2007a, p. 8]

Nous retrouverons d'ailleurs ces deux approches de la théorie des formes dans la première moitié du XIX^e siècle. La section VI contient des applications des sections précédentes, dont des tests de primalité et des exemples de résolution d'équations indéterminées. Enfin, la septième section est consacrée à la cyclotomie, c'est-à-dire au problème de la division du cercle en parties égales à la règle et au compas. C'est principalement cette section qui fait connaître les *D.A.* dans un premier temps. Gauss y expose une méthode de résolution algébrique des équations binômes $x^n = 1$, où n est un nombre premier, et en déduit des conditions de constructibilité pour la division du cercle. Comme il le note lui-même, cette section relève *a priori* de l'algèbre et de la géométrie : « La théorie de la division du cercle, ou des polygones réguliers, qui compose la section VII, n'appartient pas *par elle-même* à l'Arithmétique, mais ses *principes* ne peuvent être puisés que dans l'Arithmétique transcendante. » [Gauss 1801/1807, préface]. En effet, la méthode développée repose sur les racines primitives, qui sont des objets arithmétiques introduits dans la troisième section³¹. L'analyse générale que donne Gauss sur la résolubilité de ces équations binômes a constitué un

reste de la quatrième puissance à partir du produit du reste (égal à 6) de la troisième puissance par 3 ; il écrit « $3.6 = 7 + 7 + 4 = 4$ » [*Ibid.*, p. 261].

30. Dans la section sur les résidus de puissances par exemple, Gauss réutilise sous la même forme des raisonnements exposés par Euler dans différents mémoires.

31. Une racine primitive d'un nombre premier p est un nombre tel que les restes de ses puissances successives après division par p donnent tous les nombres entiers compris entre 1 et $p - 1$. Cette notion est introduite par Euler [1774].

modèle pour la théorie des équations au début du XIX^e siècle. L'équation cyclotomique joue le rôle de paradigme pour les différents savants engagés dans le champ de l'analyse arithmétique algébrique [Goldstein & Schappacher 2007a, p. 54]. Nous verrons qu'elle fait également office d'exemple clé dans une autre approche liée à la théorie des nombres développée dans le premier quart du XIX^e siècle, celle de Louis Poincot.

Bien qu'aucun dialogue ne s'instaure entre Gauss et Legendre à travers leurs publications, les écrits ultérieurs du second permettent de saisir son point de vue sur les congruences. Dans les deux éditions suivantes de son traité, ainsi que dans ses mémoires arithmétiques, Legendre témoigne d'une connaissance approfondie du contenu des *D.A.* Dès l'édition de 1808, il indique avoir repris la théorie de la cyclotomie et l'une des démonstrations de la loi de réciprocité quadratique proposées par Gauss, mais note l'écart existant entre leurs deux approches :

« On aurait désiré enrichir cet Essai d'un plus grand nombre des excellents matériaux qui composent l'ouvrage de M. Gauss : mais les méthodes de cet auteur lui sont tellement particulières qu'on n'aurait pu, sans des circuits très-étendus, et sans s'assujétir au simple rôle de traducteur, profiter de ses découvertes. » [1808, Avertissement, p. vj]

Legendre intègre donc la méthode de résolution des équations binômes de Gauss, mais sans reprendre la terminologie associée aux congruences et aux résidus. Il introduit par contre une nouvelle notation, qui sera reprise par plusieurs auteurs tout au long du XIX^e siècle : les équations indéterminées de la forme $x^n - b = ay$, qui correspondent en fait à des congruences binômes, sont progressivement notées $x^n - b = M(a)$, où $M(a)$ désigne un multiple de a . Plus tard, Legendre se positionne explicitement vis-à-vis des congruences dans un mémoire sur le dernier théorème de Fermat, à l'occasion d'un commentaire vraisemblablement destiné à Gauss et Sophie Germain :

« Ces équations entre les restes provenant de la division de plusieurs nombres par un même nombre premier θ , se traitent comme les équations ordinaires, sans qu'il soit besoin des signes nouveaux d'égalité ni des dénominations nouvelles assez *incongrues*, dont quelques géomètres font usage. » [1823, p. 15].

Avec Euler et Lagrange, nous avons repéré deux pratiques arithmétiques différentes. Cette alternative subsiste avec les traités de Legendre et de Gauss : ce dernier fonde sa théorie des nombres sur les résidus et les congruences, tandis que Legendre assimile la théorie des nombres à l'analyse indéterminée et utilise des méthodes fondées sur des manipulations algébriques et des outils analytiques. Les deux savants s'appuient au moins partiellement sur des résultats et des preuves déjà obtenus par Euler et Lagrange, mais en les adaptant à leur propre pratique arithmétique. Avec

leurs traités, ils proposent une synthèse de la théorie des nombres au tournant du XIX^e siècle, chacun étant porteur d'une façon de penser ce domaine. Ces ouvrages deviennent ensuite des références fondamentales dans la première moitié du XIX^e siècle, au cours de laquelle nous retrouvons des filiations diverses parmi les différentes publications arithmétiques : c'est ce que nous mettons en avant dans la partie suivante.

III. Réceptions des congruences dans la première moitié du XIX^e siècle

1. Les congruences de 1801 à 1850 : tendances générales

Un premier examen de notre corpus montre que le nombre de textes et d'auteurs augmente sensiblement, tout particulièrement à partir du second quart du XIX^e siècle qui voit le lancement de plusieurs journaux mathématiques. Le découpage (1801-1825, 1825-1835 et 1835-1850) que nous adoptons répond donc à l'évolution du paysage éditorial à cette époque³². Ces bornes temporelles correspondent en outre à des transformations de certaines pratiques arithmétiques dans les publications. Parmi les 254 textes de notre corpus, 123 et 110 sont respectivement l'œuvre de 19 auteurs allemands et 24 auteurs français, ce qui contraste avec l'historiographie évoquée précédemment, concentrée sur un petit nombre d'acteurs allemands. Ce constat nous incite à orienter notre analyse sur les travaux des auteurs évoluant principalement en France³³, en les mettant en regard des autres textes du corpus.

Tout au long du premier XIX^e siècle, les traités de Gauss et Legendre constituent des références fondamentales ; les textes d'Euler et Lagrange sont aussi très souvent cités. Ces quatre auteurs sont alors les références obligées de nombre de mathématiciens souhaitant se former à la théorie des nombres : si des cours sont dédiés à la théorie des nombres dans certaines universités germaniques au moins à partir des années 1830³⁴, les programmes officiels français ne contiennent aucun *item* en lien explicite avec les résidus et les congruences³⁵ et seuls quelques manuels d'algèbre,

32. Sur les journaux mathématiques au cours de cette période, voir [Verdier 2009a].

33. Cet ensemble d'auteurs forme ce que nous appellerons la « scène française ».

34. Tel est le cas d'un cours sur la cyclotomie dispensé par Jacobi [2007] pendant le semestre d'hiver de l'année 1836-1837 à l'Université de Königsberg, ou de cours magistraux programmés par Eisenstein à l'Université de Berlin en 1848 [Goldstein & Schappacher 2007a, p. 37].

35. Seule la résolution des équations indéterminées du premier degré est inscrite au programme du concours d'admission à l'École polytechnique à partir de 1828 [Belhoste 1995].

référant le plus souvent à Gauss et à Legendre, évoquent la théorie des nombres³⁶.

L'étude de notre corpus pour le premier quart du XIX^e siècle confirme les conclusions de C. Goldstein et N. Schappacher [2007a, p. 18-24] : le nombre de textes en lien avec les congruences est réduit et les publications françaises se concentrent essentiellement sur la section VII des *D.A.*, dans laquelle la théorie des nombres est appliquée à une question d'algèbre. Les quelques traités français contenant des références aux résidus et congruences sont en fait des traités d'algèbre [Lacroix 1804 ; Lagrange 1808] et de théorie des nombres [Legendre 1808] reprenant de manière plus ou moins fidèle la méthode de résolution des équations binômes proposée par Gauss. À côté des livres coexistent plusieurs périodiques institutionnels paraissant à intervalles plus ou moins réguliers (comme les publications liées à l'Académie des sciences ou à l'École polytechnique), ainsi qu'un journal mathématique principalement destiné à la communauté enseignante : les *Annales de mathématiques pures et appliquées*, lancées par Joseph-Diez Gergonne en 1810. Ces dernières ne contiennent aucun texte en lien avec notre thématique, ce qui recoupe nos remarques précédentes sur l'absence des résidus et congruences dans les programmes d'enseignement français. Au cours de ce premier quart de siècle, seuls deux auteurs publient des textes directement liés à notre thématique : Gauss et Poincot. Le premier consacre plusieurs mémoires à de nouvelles démonstrations de la loi de réciprocité quadratique et aux sommes de Gauss, qui constitueront ensuite des textes de référence pour plusieurs auteurs. Le second s'appuie principalement sur la section VII des *D.A.* : nous y reviendrons plus loin.

En sus des *Annales de Gergonne* et des périodiques académiques, qui continuent de paraître, trois journaux mathématiques sont créés en Europe en 1825 et 1826 : le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ou *Journal de Crelle*, du nom de son créateur, la *Correspondance mathématique et physique* et le *Zeitschrift für Physik und Mathematik* [Verdier 2009b]. Chacun à leur mesure, ces nouveaux journaux constituent autant de supports de diffusion permettant de pallier les lenteurs ou les blocages académiques. Le principal pourvoyeur d'articles de théorie des nombres est, dès son lancement, le *Journal de Crelle*. C'est dans ce journal que paraissent des articles considérés comme fondamentaux dans l'histoire de la théorie des nombres et dans la continuité des travaux de Gauss, en lien avec les résidus cubiques [Jacobi 1827], biquadratiques [Dirichlet 1828], ou la loi de réciprocité quadratique pour les entiers de Gauss [Dirichlet 1832].

36. Signalons cependant la publication de l'ouvrage de Christian Kramp [1808] et de celui de Heinrich August Rothe [1811], qui intègrent les congruences. Il est difficile d'évaluer la circulation en France de ces écrits dont les auteurs ont participé à l'école combinatoire de Hindenburg.

Jacobi et Dirichlet font partie des quelques jeunes auteurs à reprendre les recherches de Gauss (ses *D.A.* et mémoires publiés avant 1820) sans se focaliser sur la seule section VII. Ils sont tous les deux en contact avec le milieu savant parisien : Dirichlet séjourne à Paris dans les années 1820 et Jacobi correspond très régulièrement avec Legendre et échange avec lui sur la théorie des nombres. La notation introduite par Gauss pour les congruences est quasiment toujours utilisée par les différents auteurs, à une exception près : Crelle, qui reprend la notation de Legendre dans des mémoires principalement centrés sur les équations indéterminées. Ce n'est pas le cas des périodiques français, dans lesquels plusieurs auteurs optent pour la notation de Legendre.

Au sein de cet espace éditorial, le *Bulletin universel des sciences et de l'industrie*, ou *Bulletin de Férussac*, journal scientifique créé en 1823 par le baron de Férussac, fait figure de ressource générale pour la scène française³⁷. En effet, toutes les publications en lien avec les résidus et les congruences parues dans le cadre de l'Académie des sciences ou dans le *Journal de Crelle* donnent lieu à un compte rendu dans le *Bulletin*, systématiquement rédigé par Augustin Cournot. Ce dernier, s'il ne produit aucun travail original de théorie des nombres, participe néanmoins de manière importante à sa diffusion³⁸. Le *Bulletin* permet également à plusieurs auteurs, comme Galois, Lebesgue, Libri et Cauchy, de faire paraître des recherches inédites. Sa parution s'arrête en 1831 et celle des *Annales de Gergonne* en 1832. C'est à ce moment que deux auteurs de la scène française, Libri et Germain³⁹, publient pour la première fois un travail de théorie des nombres dans le *Journal de Crelle*.

En 1835 et 1836, deux nouveaux périodiques pertinents pour notre étude sont créés en France : les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* et le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, ou *Journal de Liouville*⁴⁰. Les *Nouvelles annales de mathématiques*, dont le public visé est lié à l'enseignement, paraissent à partir de 1842. Avec la multiplication des supports de publication, le nombre d'articles de recherche de notre corpus augmente sensiblement ; ceux-ci sont pour la plupart publiés dans les journaux mathématiques et périodiques académiques français, le *Journal de Crelle* et les productions de l'Académie de Berlin. Entre 1835 et 1850, 58 articles principalement dus à Dirichlet, Eisenstein et Kummer

37. Sur le *Bulletin de Férussac*, voir [Taton 1947 ; Bru & Martin 2005].

38. Des auteurs comme Victor-Amédée Lebesgue se réfèrent à plusieurs reprises à ses commentaires plutôt qu'aux textes originaux, auxquels ils n'ont pu avoir accès.

39. Germain [1831] y publie une note sur le dernier théorème de Fermat. Libri y insère un mémoire [1832] sur lequel nous reviendrons.

40. D'autres journaux contenant des écrits de mathématiques sont publiés sur des périodes courtes [Verdier 2009a, chap. 5].

paraissent ainsi dans le *Journal de Crelle*. Ils contiennent les résultats fondamentaux de la théorie des nombres de cette période sur les congruences supérieures, la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers réels ou complexes, les lois de réciprocité, la cyclotomie. Parmi les articles français, trois principaux ensembles de textes se dégagent : une série d'articles publiés dans les *Nouvelles annales* à destination d'un public majoritairement étudiant et enseignant, des mémoires de Lebesgue, et une série très volumineuse de notes et mémoires de Cauchy.

2. 1801-1825 : premières utilisations des congruences dans un espace éditorial restreint

Poinsot⁴¹, qui remplace Lagrange à l'Académie des sciences en 1813, est le seul français à publier plusieurs textes en lien avec les congruences dans ce premier quart de siècle. Il est l'auteur de deux mémoires, « Extrait de quelques recherches nouvelles sur l'algèbre et la théorie des nombres » [1818]⁴² et « Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres » [1820], d'un commentaire publié dans le *Moniteur universel* du 21 mars 1807 à l'occasion de la traduction française des *D.A.* par son ami Antoine-Charles-Marcellin Pouillet-Delisle, ainsi que d'une analyse du *Traité de la résolution des équations numériques* de Lagrange [1808]. Dans cette dernière analyse, Poinsot [1808] reformule les principes généraux de la méthode de résolution algébrique des équations binômes de Gauss revue par Lagrange⁴³. Il est donc familier des travaux de Gauss et de leur reprise par Lagrange, qui constituent des références fondamentales pour ses écrits. Il connaît par ailleurs l'ouvrage de théorie des nombres de Legendre, dont il reprend la notation Mp pour désigner les congruences. Nous retrouvons, dans ces recherches de Poinsot, des traces des auteurs étudiés dans la partie précédente, ainsi que des deux pratiques arithmétiques évoquées.

Comme le titre de ses mémoires le suggère, l'algèbre comprise comme théorie des équations⁴⁴ et la théorie des nombres sont étroitement asso-

41. Les publications d'algèbre et de théorie des nombres de Poinsot sont analysées de manière détaillée dans [Boucard 2011a].

42. Ce mémoire permet à Poinsot de revenir sur ses recherches sur les polygones et les polyèdres (1810) ainsi que sur la théorie des permutations (présentées à l'Académie en 1813). Il y annonce également de nouvelles recherches arithmétiques [1820].

43. Cette partie de l'analyse de Poinsot sera mobilisée par Joseph Liouville trente-cinq ans plus tard dans le cadre d'une controverse avec Libri [Belhoste & Lützen 1984 ; Ehrhardt 2011b]. L'intégralité de son commentaire paraîtra au début de la troisième édition de ce traité de Lagrange (1826).

44. Comme la théorie des nombres, l'algèbre n'est pas une catégorie stabilisée au XIX^e siècle et sa définition évolue avec le temps et selon les contextes : voir, notamment, [Corry 2004 ; Brechenmacher & Ehrhardt 2010 ; Ehrhardt 2011a].

ciées dans ces travaux de Poinsoot, et la méthode de résolution algébrique des équations binômes en constitue un exemple clé. Poinsoot met en avant une « analogie remarquable » [1818, p. 386] entre équations et congruences binômes, en montrant que l'expression analytique des racines de l'équation binôme permet d'obtenir les différentes racines de la congruence binôme correspondante : il suffit en effet d'ajouter à la première « des multiples convenables de p » [1820, p. 349]. Poinsoot illustre ses propos avec des exemples bien choisis : dans certains cas, il obtient bien les solutions de la congruence considérée ; dans d'autres, la congruence n'admet pas de solution entière mais des « racines impossibles », dont « l'expression sera [...] aussi parfaite que celle des imaginaires dans l'analyse » [*Ibid.*, p. 359]. Pour démontrer ce résultat, Poinsoot suit la preuve que propose Lagrange dans sa méthode simplifiée de résolution algébrique des équations binômes, en transposant les égalités absolues en des égalités modulo p , sans justifier explicitement la validité de ce transfert.

Ici, Poinsoot traduit donc des problématiques habituelles de la théorie des équations – déterminer une expression analytique des racines, considérer des racines imaginaires – en termes de congruences. Il s'appuie également sur l'analogie équations-congruences pour transposer formellement des manipulations algébriques valables sur le corps des nombres complexes à des opérations modulo p . De même, il ne commente à aucun moment le choix de ces exemples et leur lien avec la loi de réciprocité quadratique par exemple. Ce type de transfert implicite, que des auteurs comme Libri ou Cauchy utilisent aussi dans leurs recherches arithmétiques, va contre l'idée de la mise en place d'une analyse arithmétique rigoureuse au tournant du XIX^e siècle.

À côté de cette analogie entre équations et congruences⁴⁵, la disposition particulière des racines de l'équation binôme, « exactement comme si elles étaient écrites en cercle » [1808, p. 373], constitue un exemple fondamental chez Poinsoot pour développer sa *théorie de l'ordre*, qui correspond, pour les mathématiques, à une approche liant notamment certaines thématiques d'algèbre, de théorie des nombres et de géométrie. Ces travaux de Poinsoot, qui connaîtront une postérité dans la seconde moitié du XIX^e siècle de ce point de vue⁴⁶, font donc apparaître une configuration disciplinaire distincte de l'analyse arithmétique algébrique évoquée dans la première

45. Les analogies jouent un rôle significatif dans ces travaux de Poinsoot, dans les procédés opératoires et dans les structures des ensembles étudiés [Boucard 2011a, p. 99-106]. Plus généralement, sur l'utilisation des analogies dans les mathématiques et dans les sciences, voir [Knobloch 1991 ; Durand-Richard 2008].

46. Plusieurs auteurs se réclameront de la théorie de l'ordre de Poinsoot : dans des travaux mathématiques pour Camille Jordan, de philosophie pour Cournot, et d'art ornemental pour Jules Bourgoïn. Voir [Boucard 2011a ; Brechenmacher 2011 ; Boucard & Eckes à paraître].

partie⁴⁷. Dans les deux cas, les acteurs soulignent l'unité existant entre les différentes recherches relevant de l'une ou l'autre de ces deux configurations disciplinaires⁴⁸.

Au-delà de la théorie de l'ordre, et même si ces recherches de Poinsoot ne contiennent pas de résultats techniques novateurs, plusieurs de leurs caractéristiques seront reprises par des auteurs de la scène française publiant à partir des années 1820. Germain mobilise ainsi les recherches de Gauss et de Poinsoot dans l'élaboration de son programme de recherche autour du dernier théorème de Fermat⁴⁹, Libri [1829, 1832] reprend l'analogie équation-congruence et Lebesgue [1829] s'appuie sur plusieurs idées de Poinsoot, dont son utilisation des racines imaginaires de congruences.

3. 1825-1835 : des pratiques variées autour d'un lien fort entre équations et congruences

Comme nous l'avons mentionné, Galois publie dans le *Bulletin de Férussac* un mémoire « Sur la théorie des nombres » [1830] présenté comme appartenant à ses recherches sur la théorie algébrique des équations. Ce travail porte sur l'étude de toutes les racines des congruences irréductibles modulo un nombre premier p . Comme Poinsoot, Galois considère donc les racines imaginaires de congruences, dans le cadre cette fois d'une application à la théorie algébrique des équations.

Les racines imaginaires de congruences sont d'ailleurs évoquées plus tôt dans ce même périodique, dans le compte rendu d'un mémoire de Jacobi [1827] rédigé par Cournot. Ce dernier y souligne leur importance :

« Depuis long-temps nous avons pensé (et les derniers mémoires de M. Poinsoot l'indiquaient assez clairement) que la considération de cette sorte de racines [imaginaires de congruences] était nécessaire pour compléter la théorie des nombres et étendre ses rapports avec l'analyse algébrique. » [Cournot 1827]

47. En effet, Poinsoot ne mobilise pas d'outils analytiques comme les séries ou les fonctions elliptiques. Rappelons qu'un lien entre géométrie et théorie des nombres est également souligné par Gauss lorsqu'il propose de représenter géométriquement certaines formes quadratiques en 1827 et en 1831 [Gauthier 2011].

48. Dans le cas de l'analyse arithmétique algébrique, voir [Goldstein & Schappacher 2007a, p. 51-52]. De son côté, Poinsoot propose une vision unifiée des mathématiques autour de la notion d'ordre.

49. La plupart de ses écrits sont restés sous forme manuscrite. Dans une lettre à Poinsoot du 2 juillet 1819 [Del Centina 2005, p. 63], elle le félicite notamment pour la considération des nombres imaginaires dans la théorie des nombres : « L'emploi des racines imaginaires dans les recherches arithmétiques m'a paru fort lumineux. C'est un phanal placé sur la grand route : il éclaire les sentiers détournés. » Sur les travaux arithmétiques de Germain, voir [Del Centina 2008 ; Laubenbacher & Pengelley 2010 ; Del Centina & Fiocca 2012].

Avec cette référence à Poinso, Cournot recourt à une source non citée par Jacobi, qu'il a déjà commentée par ailleurs [Cournot 1825], et rapproche ainsi les travaux de Jacobi, de Poinso et de Gauss. À rebours de l'idée de travail isolé souvent attaché à cette contribution de Galois sur les racines imaginaires de congruences [1830], Cournot suggère au contraire que la considération des racines imaginaires de congruences est vue comme pertinente par plusieurs auteurs dès les années 1820 et que les recherches de Galois – qui s'appuient certes sur l'œuvre de Gauss – s'inscrivent dans des thématiques également abordées par d'autres auteurs, voire peut-être même discutées au sein du salon de Férussac⁵⁰.

Les publications de Cauchy constituent un autre exemple intéressant de réception des congruences de Gauss. Cauchy profite de la publication de ses *Exercices de mathématiques* [Belhoste 1991] pour insérer deux mémoires [Cauchy 1829b,c] dans lesquels il étudie les propriétés des congruences en lien avec la théorie des équations : il transpose explicitement des résultats et des démonstrations connus de la théorie des équations à celle des congruences. Il publie aussi deux mémoires sur la théorie des nombres [1829a, 1831] dans le *Bulletin de Férussac*. Dès l'introduction du premier de ces deux derniers textes, Cauchy insiste sur l'importance des lois de réciprocité et expose des résultats sur les sommes de Gauss pour obtenir des formules intégrant une version généralisée du symbole de Legendre. Il annonce cependant aussi un autre type de résultat dans son travail : « l'analyse par laquelle je suis parvenu à découvrir ces mêmes lois, m'a offert le moyen de résoudre algébriquement une foule d'équations indéterminées et d'établir des théorèmes dignes de l'attention des géomètres » [1829a, p. 88].

Cauchy propose en effet des résultats sur les formes quadratiques de la forme $x^2 + ny^2$, formes dont certains cas particuliers ont déjà été abordés par Gauss dans la section VII de ses *D.A.* [1801, art. 356-358]. Ici, Cauchy ne se réfère à aucun moment à la théorie des formes quadratiques développée dans la section V des *D.A.* : les formes quadratiques sont traitées dans le cadre d'une étude des équations indéterminées de la forme $4p^\mu = x^2 + ny^2$, où p est premier et n un diviseur de $p - 1$. Son second mémoire dans le *Bulletin* [1831] consiste d'ailleurs en l'énoncé d'un théorème général sur ces mêmes formes quadratiques, les considérations sur les lois de réciprocité étant totalement absentes.

50. Sur les réseaux de sociabilité et les salons à Paris et Berlin pour cette période, voir [Verdier 2012].

Seuls deux mémoires arithmétiques d'auteurs évoluant en France paraissent dans le *Journal de Crelle*. Dans l'un deux, Libri [1832]⁵¹ adopte une approche contrastant fortement avec tous les textes évoqués, caractérisée par une position forte vis-à-vis des congruences, qui ne sont pour lui que des cas particuliers de la théorie des équations indéterminées – ce qui renvoie au point de vue de Legendre –, elle-même incluse dans l'analyse⁵². Libri insiste à plusieurs reprises sur la nécessité de traduire algébriquement la nature particulière des racines des équations indéterminées : il exprime donc une condition arithmétique – le fait que les racines en question soient entières – de manière algébrique-analytique, à l'aide des fonctions circulaires⁵³. À partir de là, Libri obtient des résultats – souvent déjà connus et démontrés – sur les congruences, dont des relations entre les coefficients et les racines ou le nombre de racines entières de certaines classes de congruences.

Cette seconde période voit encore un nombre relativement restreint de textes en lien avec les résidus et les congruences sur la scène française. Du point de vue des contenus, les parallèles établis entre congruences et équations – déjà soulignés par Gauss en 1801 – orientent nos auteurs vers l'obtention, pour les congruences, de résultats similaires à ceux déjà connus pour les équations (nombres de racines entières, résolution explicite de congruences, considération de racines imaginaires de congruences). L'arithmétique est également souvent liée à d'autres domaines : quand Libri la plonge dans l'analyse, Galois utilise les congruences dans le cadre de ses recherches sur la théorie algébrique des équations et Poinsoot propose une analogie avec l'algèbre et la géométrie. Notons que certains auteurs s'inscrivent aussi partiellement dans des thématiques développées par Gauss et reprises par Jacobi et Dirichlet sur cette même période : tel est par exemple le cas de Cauchy, qui obtient des résultats sur les lois de réciprocité, ou de Lebesgue, qui propose quelques réflexions sur les résidus cubiques.

4. 1835-1850 : continuité des pratiques ?

Au cours de la période suivante, plusieurs auteurs œuvrent pour la promotion de la théorie des nombres en France. C'est le cas de Poinsoot

51. Libri présente ses travaux à l'Académie des sciences en 1824 et 1825. Acceptés pour publication dans les *Mémoires des savants étrangers*, ils n'y paraîtront cependant qu'en 1838. Libri publie donc des mémoires arithmétiques indépendamment [1829] puis dans le *Journal de Crelle*.

52. Voir, par exemple, l'introduction de [Libri 1832], particulièrement explicite.

53. Libri produit par exemple des équations supplémentaires permettant d'exprimer que les racines des équations considérées sont entières. Ainsi, lorsqu'il considère une équation diophantienne de la forme $\varphi(x, y, z, \dots) = 0$, il prend également en compte les équations $\sin x\pi = 0$, $\sin y\pi = 0$, $\sin z\pi = 0$, ...

qui met l'accent sur la nécessité d'intégrer la théorie des nombres dans l'enseignement [1845, Introduction]⁵⁴. Liouville profite de son cours sur les intégrales définies au Collège de France pour y inclure des recherches récentes de théorie des nombres [Belhoste & Lützen 1984]. Dans les *Nouvelles annales*, plusieurs auteurs, enseignants dans des collèges royaux pour la plupart, produisent des textes dont l'objectif explicite est de propager la théorie des résidus et des congruences [Boucard 2011b, p. 105-110]. Sous l'impulsion de l'éditeur Olry Terquem, ces mêmes auteurs usent d'une nouvelle notation ($\dot{p}$) pour désigner le multiple d'un nombre p , ne reprenant ni le symbole de Gauss, ni celui de Legendre. S'appuyant par exemple sur des extraits de mémoires d'Euler, Gauss, Legendre ou de Dirichlet pour présenter des résultats de la théorie des résidus, ils proposent ainsi une réception originale des recherches sur la théorie des congruences et des résidus principalement destinée à un public d'élèves et d'enseignants.

Les deux supports intégrant des articles de recherche, les *Comptes rendus* et le *Journal de Liouville*, proposent quant à eux des contenus sensiblement différents. Nous y retrouvons deux auteurs principaux⁵⁵ : Lebesgue, qui fait connaître ses travaux *via* le *Journal de Liouville*, et Cauchy, qui utilise intensivement les *Comptes rendus* dès son retour d'exil.

Lebesgue fait figure d'exception sur la scène française, tant du point de vue de sa position institutionnelle marginale que des thématiques qu'il aborde : si une partie de ses « Recherches sur les nombres » [1837] s'attache à déterminer le nombre de racines entières de certaines classes de congruences et entre donc dans le cadre du rapprochement équations-congruences souligné précédemment, la majeure partie de ce texte se concentre néanmoins sur les résidus quadratiques, cubiques, biquadratiques et les lois de réciprocité associées. Lebesgue insiste sur l'importance d'obtenir des preuves strictement arithmétiques des résultats déjà démontrés à l'aide d'arguments algébriques et analytiques, ce qui le distingue d'auteurs comme Libri, par exemple⁵⁶. Par rapport aux autres auteurs de

54. Ce mémoire est publié à une période où Poinso, nommé au Conseil de l'Instruction publique en mai 1840 (en remplacement de Poisson), prend part aux débats sur l'enseignement des sciences (voir le neuvième volume du *Journal général de l'instruction publique et des cours scientifiques et littéraires*, 1840, p. 274).

55. C'est à la fin des années 1840 que des auteurs comme Liouville, Joseph-Alfred Serret ou encore Charles Hermite commencent à publier leurs recherches arithmétiques.

56. En 1840, Lebesgue remarque ainsi : « Au reste, beaucoup de propriétés des nombres sont des conséquences plus ou moins immédiates de certaines identités. Les unes sont empruntées à l'algèbre élémentaire ; leur nombre pourrait être augmenté. D'autres sont empruntées à une algèbre plus élevée : telles sont les formules singulières de M. Gauss et autres semblables. D'autres dépendent de l'analyse infinitésimale, ou de certaines inté-

la scène française, il semble donc plus directement se situer dans la filiation des travaux de Gauss.

Les travaux arithmétiques de Cauchy sont essentiellement concentrés sur les années 1839-1840 et 1847, avec vingt-deux notes publiées dans les *Comptes rendus* (et parfois reproduites dans le *Journal de Liouville*), quelques mémoires insérés dans ses *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, ainsi qu'un nouveau « Mémoire sur la théorie des nombres » [1840] de 450 pages publié dans les recueils de l'Académie sous la forme d'un travail présenté avant son départ de France et complété par quatorze notes. Si, en 1829, Cauchy soulignait l'importance des lois de réciprocité, suggérant un alignement sur les problématiques du *Journal de Crelle*, la seule référence à ces lois dans ses travaux ultérieurs tient dans la preuve qu'il propose de la loi de réciprocité quadratique dans une note [1840, p. 163-180]. Ses textes publiés entre 1839 et 1840 portent essentiellement sur l'établissement, à l'image du théorème énoncé en 1831, d'une méthode générale sur les formes quadratiques de la forme $4p^\mu = x^2 + ny^2$, où p est un nombre premier et n un diviseur de $p - 1$. Les recherches arithmétiques du savant sont alors entièrement centrées sur les équations indéterminées ou sur des outils appliqués dans ce cadre, comme les sommes de Gauss et de Jacobi⁵⁷. À l'instar de ses premières publications, les recherches de Cauchy se situent dans la continuité de la section VII des *D.A.* : l'omniprésence de manipulations sur les sommes de Gauss et les racines primitives en témoigne. Mais sa thématique de prédilection renvoie à des questions d'analyse indéterminée, et donc à la tradition issue de Lagrange et de Legendre. Dans ses raisonnements, Cauchy s'appuie régulièrement sur une correspondance entre équation et équivalence, en substituant à une racine d'une équation une racine de l'équivalence associée par exemple⁵⁸ ; il semble alors manipuler des égalités ou des équivalences sans interroger explicitement la validité des opérations en cours. Cette analogie transparaît d'ailleurs dans les notations utilisées : si la racine d'une équation est notée ρ , τ ou ς , la racine de la congruence associée sera désignée respectivement par r , t ou s . Partant d'une égalité qu'il transpose, Cauchy obtient ainsi une congruence mettant en jeu les nombres de Bernoulli, qui sont des nombres rationnels non entiers, sans questionner leur existence suivant le module

grales définies, telles que les fonctions elliptiques et les intégrales eulériennes de seconde espèce. Ces dernières applications deviendront sans doute de plus en plus nombreuses et reculeront les bornes de l'arithmétique transcendante ; mais peut-être conviendra-t-il, cependant, de chercher des démonstrations purement arithmétiques des théorèmes obtenus par cette voie. » [1840, p. 188]

57. Pour une analyse détaillée de ces travaux et des problèmes méthodologiques que leur étude soulève, voir [Boucard 2013].

58. Cette correspondance est utilisée sous différentes formes en théorie des nombres : par Jacobi par exemple, dans les années 1830, et sur la même thématique.

considéré. Une fois de plus, nous observons un net contraste avec l'image de rigueur traditionnellement attachée à ses travaux d'analyse.

Dans les années 1840, la méthode générale développée par Cauchy pour la résolution des équations indéterminées de la forme $4p^\mu = x^2 + ny^2$ (avec p nombre premier et n diviseur de $p - 1$) n'est reprise par aucun des auteurs de notre corpus. Parmi les notes publiées dans les *Comptes rendus*, les deux seules reproduites dans le *Journal de Liouville* font d'ailleurs partie des rares écrits de Cauchy qui ne comportent pas de mention de son travail sur les formes quadratiques. Ces recherches semblent donc isolées. Pourtant, l'étude de plusieurs textes de Jacobi, Dirichlet, Kummer d'une part, et de Cauchy d'autre part, montre que, s'ils ne se concentrent pas sur les mêmes thèmes arithmétiques, les travaux de ce dernier sont néanmoins connus et repris de manière sélective par les trois premiers. Cauchy [1831] introduit les nombres de Bernoulli pour la résolution de certaines équations indéterminées $4p^\mu = x^2 + ny^2$. Dirichlet obtient en 1838 des résultats sur le nombre de classes des formes quadratiques associées $x^2 + ny^2$ à partir de considérations sur les séries infinies. Kummer souligne l'analogie existant entre le nombre de classes de certaines catégories de nombres idéaux et celui des formes quadratiques considérées par Dirichlet ; il fait le lien avec les nombres de Bernoulli en 1847 dans sa démonstration du théorème de Fermat [Boucard 2011b, chap. 12]. Des résultats semblent donc circuler de manière tacite parmi ces auteurs⁵⁹, même si ceux-ci développent des perspectives de recherche différentes.

Conclusion

Les quelques exemples étudiés ici montrent qu'il est illusoire de penser une seule approche de la théorie des nombres chez les mathématiciens de la première moitié du XIX^e siècle, dont le développement serait consécutif à la parution des *D.A.* de Gauss. Ils témoignent au contraire d'une diversité des pratiques arithmétiques, réinvestissant différents aspects des travaux des géomètres du siècle des Lumières. Nous pouvons à présent réexaminer les propos de M. Kline cités dans notre première partie à l'aune de notre analyse.

Plusieurs travaux historiques ont déjà montré qu'au XVIII^e siècle, la théorie des nombres n'est pas réduite à un ensemble de résultats isolés produits par quelques auteurs académiciens. Si notre analyse de cette

59. Cette hypothèse se confirme à la lecture de la correspondance de Kummer avec Kronecker, dans laquelle le premier cite explicitement des résultats de Cauchy sur les nombres de Bernoulli [Kummer 1975, p. 91]. Dirichlet [1838, p. 270] se réfère également au mémoire de Cauchy de 1831.

période, construite à partir des références données par les auteurs du premier XIX^e siècle, et donc centrée sur Euler, Lagrange, Legendre et les *D.A.* de Gauss, donne un aperçu d'une reconstruction historique déjà amorcée par les acteurs de notre corpus, elle met également en évidence l'existence d'au moins deux pratiques arithmétiques : l'une axée sur les équations indéterminées, et donc étroitement liée à l'algèbre, dans les travaux de Lagrange et Legendre ; l'autre, développée chez Euler et Gauss, axée sur des objets arithmétiques spécifiques, comme les résidus et les congruences. Des résultats identiques, comme le théorème des quatre carrés chez Euler et Lagrange, sont obtenus, mais à partir de ces deux approches différentes : là où le premier tente d'élaborer une théorie des nombres cohérente et autonome avec les résidus, le second utilise des outils algébriques.

M. Kline met également en avant l'importance de l'introduction des congruences et de leur notation. Comme nous l'avons vu, la définition de ce nouvel objet arithmétique est cependant loin d'induire une rupture globale dans les pratiques arithmétiques. Nombre d'auteurs utilisent leur propre notation – Legendre, mais aussi Poinot, Crelle et des auteurs des *Nouvelles annales de mathématiques* par exemple –, voire leur propre dénomination, comme Cauchy. De nouvelles démonstrations, reposant sur des principes variés, sont également proposées pour les résultats fondamentaux de la théorie des congruences : Libri plonge celle-ci dans l'analyse et fonde ses preuves sur les fonctions circulaires tandis que Cauchy et d'autres transposent des preuves existant déjà pour la théorie des équations. En 1845, Poinot fournit quant à lui des preuves construites à partir de principes géométriques.

La prise en compte systématique de tous les écrits du premier XIX^e siècle intégrant les congruences sous une forme ou une autre confirme par ailleurs la nécessité de dépasser une lecture historique centrée sur la théorie algébrique des nombres ou celle des formes. Pour la scène française, le lien fort entre la théorie des nombres et la résolution d'équations est en continuité avec les pratiques arithmétiques de Lagrange et de Legendre ; les écrits de Gauss sont le plus souvent intégrés dans cette perspective. Nous avons ainsi mis en évidence l'existence d'approches variées résultant de combinaisons à divers niveaux de ces deux traditions, et induisant des effets différents. Dans le premier quart du XIX^e siècle, Legendre refuse par exemple l'utilisation des congruences, lorsque Germain intègre rapidement les différentes notions développées dans les *D.A.* de Gauss. On ne peut donc pas conclure de manière globale sur la question des ruptures et des continuités au XIX^e siècle : on ne retrouve en aucun cas une ligne directrice découlant exclusivement de Lagrange ou de Gauss, ou une rupture radicale avec leurs démarches. On assiste plutôt, au contraire, à une ramification complexe de pratiques autour des congruences et se répondant parfois les unes aux autres.

Ce rapprochement entre équations et congruences induit des questionnements et des méthodes caractéristiques, comme nous l'avons souligné à différentes reprises. Chez plusieurs auteurs, comme Poinot, Libri et Cauchy, cette approche se traduit notamment par le transfert sans justification aux congruences de démonstrations valables pour les équations, ce qui contraste fortement avec l'idée de rigueur souvent attachée aux mathématiques du XIX^e siècle.

Notre choix de corpus constitué autour d'un objet mathématique fait enfin ressortir des dynamiques oubliées : ainsi, la remise en contexte des travaux arithmétiques de Poinot ou Cauchy permet par exemple de souligner différents types de circulations, avec une proposition d'approche des mathématiques *via* la théorie de l'ordre pour le premier et un ensemble de résultats techniques précis pour le second. Bien sûr, la construction d'un corpus centré sur les congruences induit également un extérieur qui masque certaines pratiques transversales. Nous pensons par exemple aux sommes de Gauss ou aux méthodes liées aux fonctions symétriques et alternées, qui sont également mobilisées dans des travaux sans congruences. Leur prise en compte ferait vraisemblablement émerger de nouveaux aspects des pratiques arithmétiques et algébriques de la période étudiée, mettant en avant d'autres formes de filiations avec le XVIII^e siècle.

BIBLIOGRAPHIE

- [Belhoste 1991] Bruno Belhoste, *Augustin-Louis Cauchy. A biography*, New York : Springer-Verlag, 1991.
- [Belhoste 1995] B. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels. Tome 1 : 1789-1914*, Paris : INRP, 1995.
- [Belhoste & Lützen 1984] Bruno Belhoste et Jesper Lützen, « Joseph Liouville et le Collège de France », *Revue d'histoire des sciences*, 37/3-4 (1984), p. 255-304.
- [Boucard 2011a] Jenny Boucard, « Louis Poinot et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ? », *Revue d'histoire des mathématiques*, 17/1 (2011), p. 41-138.
- [Boucard 2011b] J. Boucard, *Un "rapprochement curieux de l'algèbre et de la théorie des nombres" : études sur l'utilisation des congruences de 1801 à 1850*, thèse de doctorat, Université Paris 6, 2011.
- [Boucard 2013] J. Boucard, « Cyclotomie et formes quadratiques dans l'œuvre arithmétique d'Augustin-Louis Cauchy (1829-1840) », *Archive for History of Exact Sciences*, 67/4 (2013), p. 349-414.
- [Boucard 2014] J. Boucard, « Joseph-Louis Lagrange e il teorema dei quattro quadrati », *Lettera Matematica Pristem*, 88-89 (2014), p. 59-69.
- [Boucard & Eckes à paraître] Jenny Boucard et Christophe Eckes, « La théorie de l'ordre de Poinot à Bourgoïn : mathématiques, philosophie, art ornemental », *Revue de synthèse*, à paraître.

- [Brechenmacher 2011] Frédéric Brechenmacher, « Self-Portraits with Évariste Galois, (and the Shadow of Camille Jordan) », *Revue d'histoire des mathématiques*, 17/2 (2011), p. 271-369.
- [Brechenmacher & Ehrhardt 2010] Frédéric Brechenmacher et Caroline Ehrhardt, « On the Identities of Algebra in the 19th Century », *Oberwolfach Reports*, 12 (2010), p. 24-32.
- [Bru & Martin 2005] Bernard Bru et Thierry Martin, « Le baron de Férussac, la couleur de la statistique et la topologie des sciences », *Journal électronique d'histoire des probabilités et de la statistique*, 1/2 (2005).
- [Bullync 2006] Maarten Bullynck, *Vom Zeitalter der Formalen Wissenschaften. Anleitung zur Verarbeitung von Erkenntnissen anno 1800, vermittelt einer parallelen Geschichte*, thèse de doctorat, Université Ghent, 2006.
- [Bullync 2008] M. Bullynck, « The transmission of numeracy: integrating reckoning in Protestant North-German elementary education (1770-1810) », *Paedagogica Historica*, 44/5 (2008), p. 568-585.
- [Bullync 2009a] M. Bullynck, « Modular Arithmetic before C. F. Gauss: Systematizations and Discussions on Remainder Problems in 18th-Century Germany », *Historia Mathematica*, 36 (2009), p. 48-72.
- [Bullync 2009b] M. Bullynck, « Leonhard Eulers Wege zur Zahlentheorie », dans W. Velminski et H. Bredekamp (éd.), *Mathesis & Graphe. Leonhard Euler zum 300. Geburtstag*, Berlin: Akademie-Verlag, 2009, p. 67-85.
- [Bullync 2010] M. Bullynck, « A History of Factor Tables with Notes on the Birth of Number theory 1668-1817 », *Revue d'histoire des mathématiques*, 16/2 (2010), p. 133-216.
- [Bussotti 2006] Paolo Bussotti, *From Fermat to Gauss: Indefinite Descent and Methods of Reduction in Number Theory*, Augsburg: Erwin Rauner Verlag, 2006.
- [Cauchy 1829a] Augustin-Louis Cauchy, « Mémoire sur la théorie des nombres », *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, 12 (1829), p. 205-221; *Œuvres complètes*, 2^e série, t. II, Paris: Gauthier-Villars, p. 88-107.
- [Cauchy 1829b] A.-L. Cauchy, « Sur diverses propositions relatives à l'algèbre et à la théorie des nombres », *Exercices de mathématiques*, 4 (1829), p. 217-252; *Œuvres complètes*, 2^e série, t. IX, Paris: Gauthiers-Villars, p. 259-297.
- [Cauchy 1829c] A.-L. Cauchy, « Sur la résolution des équivalences dont les modules se réduisent à des nombres premiers », *Exercices de mathématiques*, 4 (1829), p. 253-292; *Œuvres complètes*, 2^e série, t. IX, Paris: Gauthiers-Villars, p. 298-341.
- [Cauchy 1831] A.-L. Cauchy, « Mémoire sur la théorie des nombres », *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, 15 (1831), p. 137-139; *Œuvres complètes*, 2^e série, t. II, Paris: Gauthier-Villars, p. 115-118.
- [Cauchy 1840] A.-L. Cauchy, « Mémoire sur la théorie des nombres », *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, 17 (1840), p. 249-768; *Œuvres complètes*, 1^{re} série, t. III, Paris: Gauthier-Villars, p. 5-450.
- [Corry 2004] Leo Corry, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, 2^e éd., Basel: Birkhäuser, 2004.
- [Cournot 1825] Antoine-Augustin Cournot, « Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres; par M. Poinsoy », *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, 3 (1825), p. 144-145.
- [Cournot 1827] A.-A. Cournot, « Des résidus cubiques; par le Dr. Jacobi », *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, 8 (1827), p. 302.

- [Dahan Dalmedico 1997] Amy Dahan Dalmedico, « L'étoile "imaginaire" a-t-elle immuablement brillé ? Le nombre complexe et ses différentes interprétations dans l'œuvre de Cauchy », dans D. Flament (dir.), *Le nombre, une hydre à n visages*, Paris : Maison des Sciences de l'Homme, 1997, p. 29-50.
- [Del Centina 2005] Andrea Del Centina, « Letters of Sophie Germain preserved in Florence », *Historia Mathematica*, 32 (2005), p. 60-75.
- [Del Centina 2008] A. Del Centina, « Unpublished Manuscripts of Sophie Germain and a Reevaluation of her Work on Fermat's Last Theorem », *Archive for History of Exact Sciences*, 62 (2008), p. 349-392.
- [Del Centina & Fiocca 2012] Andrea Del Centina et Alessandra Fiocca, « The correspondence between Sophie Germain and Carl Friedrich Gauss », *Archive for History of Exact Sciences*, 66/6 (2012), p. 585-700.
- [Delambre 1810] Jean-Baptiste-Joseph Delambre, *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789, et sur leur état actuel*, Paris : Imprimerie Impériale, 1810.
- [Dirichlet 1828] Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, « Recherches sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 3 (1828), p. 35-69.
- [Dirichlet 1832] J. P. G. Lejeune-Dirichlet, « Démonstration d'une propriété analogue à la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers quelconques », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 9 (1832), p. 379-389.
- [Dirichlet 1838] J. P. G. Lejeune-Dirichlet, « Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 18 (1838), p. 259-274.
- [Durand-Richard 2008] Marie-José Durand-Richard (dir.), *L'Analogie dans la démarche scientifique. Perspective historique*, Paris : L'Harmattan, 2008.
- [Ehrhardt 2011a] Caroline Ehrhardt, *Évariste Galois. La fabrication d'une icône mathématique*, Paris : Éditions EHESS, 2011.
- [Ehrhardt 2011b] C. Ehrhardt, « A Quarrel between Joseph Liouville and Guillaume Libri at the French Academy of Sciences in the Middle of the Nineteenth Century », *Historia Mathematica*, 38/3 (2011), p. 389-414.
- [W. Ellison & F. Ellison 1978] William J. Ellison et Fern Ellison, « Théorie des nombres », dans J. Dieudonné (dir.), *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, t. I, Paris : Hermann, 1978, p. 165-334.
- [Euler 1740] Leonhard Euler, « Solutio problematis arithmetici de inveniendis numero, qui per datos numeros divisus relinquit data residua », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, années 1734-1735, 7 (1740), p. 46-66 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 2, p. 18-32.
- [Euler 1741] L. Euler, « Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, année 1736, 8 (1741), p. 141-146 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 2, p. 33-37.
- [Euler 1750] L. Euler, « Theoremata circa divisores numerorum », *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, années 1747-1748, 1 (1750) p. 20-48 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 2, p. 62-85.
- [Euler 1760] L. Euler, « Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum », *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, années 1754-1755, 5 (1760), p. 13-58 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 2, p. 338-372.

- [Euler 1761] L. Euler, « Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta », *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, années 1758-1759, 7 (1761), p. 49-82 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 2, p. 493-518.
- [Euler 1774] L. Euler, « Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia », *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, année 1773, 18 (1774), p. 85-135 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 3, p. 240-281.
- [Euler 1780] L. Euler, « Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata », *Nova Acta Eruditorum* année 1777 (1780), p. 48-69 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 3, p. 218-238.
- [Euler 1849] L. Euler, « Tractatus de numerorum doctrina capita sedecim, quae supersunt », dans *Commentationes arithmeticae*, R. Ferdinand (éd.), vol. 2, Berlin : Teubner, 1849, p. 503-575 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 5, p. 182-283.
- [Flament 2003] Dominique Flament, *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*, Paris : CNRS Éditions, 2003.
- [Galois 1830] Évariste Galois, « Sur la théorie des nombres », *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, 13 (1830), p. 428-435.
- [Gauss 1801] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, Leipzig : Fleischer, 1801. Trad. fr., *Recherches arithmétiques*, Paris : Courcier, 1807.
- [Gauthier 2011] Sébastien Gauthier, « Justifier l'utilisation de la géométrie en théorie des nombres : des exemples chez C. F. Gauss et H. Minkowski », dans D. Flament et P. Nabonnand (dir.), *Justifier en mathématiques*, Paris : Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 2011, p. 103-128.
- [Germain 1831] Sophie Germain, « Note sur la manière dont se composent les valeurs de y et z dans l'équation $\frac{4(x^p - 1)}{x - 1} = y^2 \pm pz^2$, et celles de Y' et Z' dans l'équation $\frac{4(x^{p^2} - 1)}{x - 1} = Y'^2 \pm pZ'^2$ », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 7 (1831), p. 201-204.
- [Goldstein 1989] Catherine Goldstein, « Le métier des nombres aux XVII^e et XIX^e siècles », dans M. Serres (dir.), *Éléments d'histoire des sciences*, Paris : Bordas, 1989, p. 274-295.
- [Goldstein 1993] C. Goldstein, « Descente infinie et analyse diophantienne : programmes de travail et mises en œuvre chez Fermat, Levi, Mordell et Weil », *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 2^e série, 3 (1993), p. 25-49.
- [Goldstein 1999] Catherine Goldstein, « Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914) », *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*, 28 (1999), p. 187-214.
- [Goldstein et al. 2007] Catherine Goldstein, Norbert Schappacher et Joachim Schwermer (éd.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 2007.
- [Goldstein & Schappacher 2007a] Catherine Goldstein et Norbert Schappacher, « A Book in Search of a Discipline (1801-1860) », dans [Goldstein et al. 2007, p. 3-65].
- [Goldstein & Schappacher 2007b] C. Goldstein et N. Schappacher, « Several Disciplines and a Book (1860-1901) », dans [Goldstein et al. 2007, p. 67-103].
- [Guisti 2000] Enrico Guisti, *La naissance des objets mathématiques*, Paris : Ellipses, 2000.

- [Heeffer 2014] Albrecht Heeffer, « How algebra spoiled recreational problems: A case study in the cross-cultural dissemination of mathematics », *Historia Mathematica*, 41 (2014), p. 400-437.
- [Jacobi 1827] Carl Gustav Jakob Jacobi, « De residuis cubicis commentatio numerosa », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2 (1827), p. 66-69.
- [Jacobi 2007] C. G. J. Jacobi, *Vorlesungen über Zahlentheorie-Wintersemester 1836/37, Königsberg*, F. Lemmermeyer et H. Pieper (éd.), Augsburg : Dr. Erwin Rauner Verlag, 2007.
- [Kline 1972] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York : Oxford University Press, 1972.
- [Knobloch 1991] Eberhard Knobloch, « L'analogie et la pensée mathématique », dans R. Rashed (dir.), *Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique*, Paris : CNRS Éditions, 1991, p. 217-237.
- [Kramp 1808] Christian Kramp, *Éléments d'arithmétique universelle*, Cologne : Hansen, 1808.
- [Kummer 1847] Ernst Eduard Kummer, « Beweis des Fermatschen Satzes der Unmöglichkeit von $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ für eine unendliche Anzahl Primzahlen λ », *Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, année 1847, p. 132-139 et 305-314 ; repr. dans [Kummer 1975, p. 274-281 et 283-297].
- [Kummer 1975] E. E. Kummer, *Collected Papers. Volume I. Contributions to Number Theory*, A. Weil (éd.), Berlin, New York : Springer-Verlag, 1975.
- [Lacroix 1804] Sylvestre-François Lacroix, *Complément des éléments d'algèbre*, 3^e éd., Paris : Courcier, 1804.
- [Lagrange Œuvres] Joseph-Louis Lagrange, *Œuvres*, 14 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1867-1892.
- [Lagrange 1769] J.-L. Lagrange, « Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré », *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1767 (1769), p. 165-310 ; *Œuvres*, t. II, p. 377-535.
- [Lagrange 1770] J.-L. Lagrange, « Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers », *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1768 (1770), p. 181-250 ; *Œuvres*, t. II, p. 655-726.
- [Lagrange 1772] J.-L. Lagrange, « Démonstration d'un théorème d'arithmétique », *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin* année 1770 (1772), p. 123-133 ; *Œuvres*, t. III, p. 189-201.
- [Lagrange 1773] J.-L. Lagrange, « Solution d'un problème d'arithmétique », *Miscellanea Taurinensia*, années 1766-1769, IV, 1773, p. 41-97 ; *Œuvres*, t. I, p. 671-731 [daté du 20 sept. 1768].
- [Lagrange 1774] J.-L. Lagrange, « Additions. De l'analyse indéterminée », dans *Éléments d'Algèbre d'Euler, traduits de l'allemand, avec des notes et des additions*, Lyon : Bruyset & Paris : Desaint, t. 2, 1774, p. 369-658 ; *Œuvres*, t. VII, p. 5-180 [paru en 1773].
- [Lagrange 1808] J.-L. Lagrange, *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*, 2^e éd., Paris : Courcier, 1808 ; *Œuvres*, t. VIII.
- [Laubenbacher & Pengelley 2010] Reinhard Laubenbacher et David Pengelley, « "Voici ce que j'ai trouvé" : Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem », *Historia Mathematica*, 37 (2010), p. 641-692.

- [Lebesgue 1829] Victor-Amédée Lebesgue, « Extrait d'un Mémoire inédit sur les congruences d'un degré quelconque à une seule inconnue », *Bulletin du Nord*, 1-2 (1829), vol. 1, cahier 1 (janvier 1829), p. 23-43; cahier 3 (mars 1829), p. 255-274; vol. 2, cahier 5 (mai 1829), p. 19-33.
- [Lebesgue 1837] V.-A. Lebesgue, « Recherches sur les nombres », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2-4 (1837-1839), vol. 2 : p. 253-292; vol. 3 : p. 113-144; vol. 4 : p. 9-59.
- [Lebesgue 1840] V.-A. Lebesgue, « Note sur une formule de Cauchy », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 5 (1840), p. 186-188.
- [Legendre 1788] Adrien-Marie Legendre, « Recherches d'analyse indéterminée », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1785 (1788), p. 465-559.
- [Legendre 1798] A.-M. Legendre, *Essai sur la théorie des nombres*, Paris : Duprat, 1798.
- [Legendre 1808] A.-M. Legendre, *Essai sur la théorie des nombres*, 2^e éd., Paris : Duprat, 1808.
- [Legendre 1823] A.-M. Legendre, « Recherches sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat », *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, 6 (1827), p. 1-60.
- [Lemmermeyer 2000] Franz Lemmermeyer, *Reciprocity Laws: from Euler to Eisentein*, Berlin : Springer-Verlag, 2000.
- [Lemmermeyer 2009] F. Lemmermeyer, « Jacobi and Kummer's Ideal Numbers », *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 79/2 (2009), p. 165-187.
- [Libri 1829] Guglielmo Libri, *Mémoire de mathématique et de physique*, Florence : Ciardetti, 1829.
- [Libri 1832] G. Libri, « Mémoire sur la théorie des nombres », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 9 (1832), p. 54-80, 169-188, 261-279.
- [Poinso 1808] Louis Poinso, « Analyse du Traité de la résolution des équations numériques... par J.-L. Lagrange », *Magasin encyclopédique, ou Journal des sciences, des lettres et des arts*, 4 (1808), p. 343-375.
- [Poinso 1818] L. Poinso, « Extrait de quelques recherches nouvelles sur l'algèbre et la théorie des nombres », *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, 14 (1818), p. 381-392.
- [Poinso 1820] L. Poinso, « Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres », *Journal de l'École polytechnique*, 11 (1820), p. 342-410.
- [Poinso 1845] L. Poinso, « Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 10 (1845), p. 1-101.
- [Remer 1737] Christian Stephan Remer, *Arithmetica theoretico-practica, das ist: Anweisung zu der Arithmetik, für diejenigen, so in derselben den rechten Grund legen wollen*, Braunschweig : Schröder, 1737.
- [Rothe 1811] Heinrich August Rothe, *Systematisches Lehrbuch der Arithmetik*, vol. 2, Erlangen : Barth, 1811.
- [Siebeneicher s.d.] Christian Siebeneicher, *Liebes Büchlein. Das Rechenbuch von Carl Friedrich Gauss*, <http://www.math.uni-bielefeld.de/sieben/congruenzen.pdf>.
- [Taton 1947] René Taton, « Les mathématiques dans le "Bulletin de Férussac" », *Archives internationales d'histoire des sciences*, 26 (1947), p. 100-125.
- [Verdier 2009a] Norbert Verdier, *Le Journal de Liouville et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIX^e siècle (1824-1885)*, thèse de doctorat, Université Paris 11, 2009.

- [Verdier 2009b] N. Verdier, « Les journaux de mathématiques dans la première moitié du XIX^e siècle en Europe », *Philosophia Scientiæ*, 13/2 (2009), p. 97-126.
- [Verdier 2012] N. Verdier, « Panthéons, journaux et salons à Berlin, Londres ou Paris : fabriquer des réseaux de sociabilité savante », dans E. Thoizet, N. Wanlin et A.-G. Weber (dir.), *Panthéons littéraires et savants XIX^e-XX^e siècles*, Arras : Artois Presses Université, 2012, p. 49-64.
- [Weil 1984] André Weil, *Number Theory : An Approach through History from Hammurapi to Legendre*, Boston : Birkhäuser, 1984.

*« dissocier et tisser sont les deux impératifs
de la pratique de l'histoire des sciences »*

[S. Bachelard 1968, p. 49]

Remarques finales

Le bilan historiographique présenté dans la partie I et les recherches nouvelles rassemblées dans la partie II ont permis de mettre en lumière la grande complexité des phénomènes de continuités et de ruptures en mathématiques à la fin du XVIII^e et au début du XIX^e siècle. Ce constat est notamment le fruit d'un choix méthodologique consistant à élargir le champ des objets historiques considérés, tant dans leur nature (les textes des diverses sciences mathématiques dans leur contenu et leur matérialité, mais aussi les lieux d'enseignement et de recherche de plusieurs pays) que dans leur temporalité. Ce double élargissement d'échelle nous a permis de mieux situer diverses ruptures, scientifiques, épistémologiques et sociales, d'identifier différents décalages temporels en amont ou en aval de la charnière entre les deux siècles selon les domaines étudiés et les contextes culturels pris en compte, et de constater ainsi que toutes les discontinuités décelées sur le temps long de la période englobant le second XVIII^e siècle et le premier XIX^e sont loin d'être synchrones et de se condenser en une rupture radicale et globale sur un temps court autour de 1800. Il nous a aussi permis de souligner l'existence de multiples continuités et traditions mettant à mal cette idée, encore profondément ancrée dans l'historiographie, d'une dichotomie entre le XVIII^e et le XIX^e siècle.

L'accent que nous avons mis sur ces continuités ne procède pas, pour autant, d'une conception « continuiste » ou cumulative de l'histoire des sciences, dont la critique constitue un acquis historiographique important¹. Il ne s'agissait pas non plus de remettre en cause l'existence de toute rupture à la charnière des deux siècles – et nous avons, de fait, pu relever des discontinuités localisées à ce moment de l'histoire. Néanmoins, qu'elle

1. La conception continuiste est encore largement à l'œuvre dans les histoires écrites par des savants à l'occasion de commémorations où l'on voit fleurir la notion de « précurseur ». Pour une critique de cette notion, voir notamment [Canguilhem 1970, p. 20-23].

se revendique de G. Bachelard, de M. Foucault ou de T. Kuhn², la conception « discontinuiste » de l'histoire qui met en avant les concepts de rupture épistémologique ou de révolution scientifique ne pose pas moins problème, en conduisant souvent à la recherche d'une différence d'essence entre deux périodes, de nature philosophique ou sociologique, censée avoir d'emblée une vertu explicative de tous les phénomènes situés en amont ou en aval d'une ligne de démarcation. Les limites d'une telle conception de l'histoire, scandée par des ruptures radicales, sont apparues dans plusieurs domaines. Georges Canguilhem, grande figure de la tradition bachelardienne de l'épistémologie historique, a mis en garde contre une telle radicalité :

« Souvent le chercheur de ruptures croit, à la façon de Kant, qu'un savoir scientifique s'inaugure par une rupture unique, géniale. Souvent aussi l'effet de rupture est présenté comme global, affectant la totalité d'une œuvre scientifique. Il faudrait pourtant savoir déceler, dans l'œuvre d'un même personnage historique, des ruptures successives ou des ruptures partielles. Dans une trame théorique certains fils peuvent être tout neufs, alors que d'autres sont tirés d'anciennes textures. Les révolutions copernicienne et galiléenne ne se sont pas faites sans conservation d'héritage. » [Canguilhem 1977, p. 24-25]

C'est dans cet esprit que le présent ouvrage a été conçu et que s'inscrit l'analyse dialectique des continuités et discontinuités multiples qui y est menée pour cette période 1750-1850. Sans nier les changements importants que l'on observe indéniablement dans le contenu des sciences mathématiques et la pratique des mathématiciens entre le milieu du XVIII^e siècle et celui du XIX^e, il s'agissait ainsi de porter attention aux divers fils qui pouvaient courir sur un temps plus long et de repérer leurs points de ruptures spécifiques, selon leurs propres temporalités³.

La présentation standard du tournant entre le XVIII^e et le XIX^e siècle, qui fonctionne souvent, nous l'avons vu, comme un véritable postulat, au prix même de contradictions avec les éléments historiques les mieux établis, induit par ailleurs une périodisation dont il convient d'interroger le statut : celle-ci se manifeste par l'utilisation généralisée de la borne 1800, qui délimite ainsi deux grandes périodes de l'histoire des mathématiques selon un découpage où le début du XIX^e apparaît comme le point de basculement vers la « modernité » mathématique⁴. Les questions relatives

2. Sur Foucault et Kuhn, voir Partie I ; sur Gaston Bachelard, voir [Gayon 2003].

3. Une marque de la nécessité de prendre en compte la complexité de cette période est illustrée par le refus d'I. Grattan-Guinness d'utiliser le terme de « Revolution » au profit de celui de « Convolution » forgé pour son ouvrage *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840* [1990, p. 1302-1303]. Voir aussi [Grattan-Guinness 2009].

4. On remarquera que la dichotomie de l'histoire entre avant et après la Révolution française se traduit administrativement, en France, par la répartition des sources des Archives nationales sur deux sites distincts. Sur la question des rapports entre archives et périodisation, voir [Hildesheimer 1991].

à la périodisation sont rarement posées explicitement et discutées en histoire des mathématiques⁵, la division classique de l'histoire générale jouant traditionnellement un rôle important en histoire des sciences⁶. La nécessité d'une réflexion sur ce problème paraît cependant incontournable, comme le souligne l'historien du Moyen Âge Jacques Le Goff :

« Ce terme de “périodisation” [...] indique une action humaine sur le temps et souligne que son découpage n'est pas neutre. [...] ce découpage n'est pas un simple fait chronologique, il exprime aussi l'idée de passage, de tournant, voire de désaveu vis-à-vis de la société et des valeurs de la période précédente. Les périodes ont par conséquent une signification particulière ; dans leur succession même, dans la continuité temporelle ou, au contraire, dans les ruptures que cette succession évoque, elles constituent un objet de réflexion essentiel pour l'historien. » [Le Goff 2014, p. 12-13]

Si elle reste selon lui un outil nécessaire à l'historien pour construire une intelligibilité du passé, J. Le Goff insiste sur le fait que la périodisation est liée à des choix de critères qui sont eux-mêmes soumis à des valeurs historiquement variables et donc qu'elle « évolue avec l'histoire elle-même » [*Ibid.*, p. 37]⁷. Ainsi, la périodisation standard des mathématiques discutée ici correspond souvent à la valorisation d'une conception de la « pureté » et de la « rigueur », liée à un certain état, historiquement situé, de la discipline. L'évolution de la hiérarchie des diverses branches des sciences mathématiques au cours de ces dernières décennies, marquée notamment par le rôle accru des mathématiques appliquées, conduit à modifier le regard sur les travaux du passé et constitue sans doute l'une des raisons du développement récent d'études historiques revisitant les rapports entre les mathématiques et leurs applications dans la seconde moitié du XVIII^e et la première moitié du XIX^e siècle.

La périodisation induite par la conception standard d'une rupture radicale et globale autour de 1800 constitue enfin souvent un véritable obstacle épistémologique pour la recherche : en histoire des mathématiques, elle

5. Une exception notable est la remise en cause par R. Rashed de la dichotomie traditionnelle entre « médiéval » et « moderne » en histoire des mathématiques, sur la base de recherches nouvelles dans le domaine des mathématiques arabes qui révèlent des continuités fortes sur la période allant du IX^e au XVII^e siècle : « [Cette dichotomie] apparaît finalement comme un emprunt inadéquat à l'histoire politique, laquelle est doublement décalée par rapport à l'histoire des mathématiques. Le seul découpage qui tienne compte des faits historiques eux-mêmes ne peut être que différentiel. » [Rashed 1987, p. 360]

6. Tel est le cas dans l'*Histoire générale des sciences* dirigée par R. Taton [1957-1964] et divisée en trois tomes : « La science antique et médiévale (des origines à 1450) », « La science moderne (de 1450 à 1800) » et « La science contemporaine » (ce dernier tome comprenant deux volumes : XIX^e siècle et XX^e siècle).

7. Dans son domaine de recherche, J. Le Goff propose ainsi une nouvelle périodisation qui introduit un « long Moyen Âge » pouvant s'étendre jusqu'au milieu du XVIII^e siècle [*Ibid.*, p. 137 et suiv.].

induit la tendance à privilégier l'étude des mathématiques à partir du XIX^e siècle et à négliger de rechercher les éléments antérieurs corrélatifs, renvoyés souvent dans une préhistoire au statut ambigu, et souvent mal connue, comme en témoigne la persistance d'un déficit de travaux sur le XVIII^e siècle⁸. Il nous semble au contraire important de tisser des fils entre les deux siècles pour suivre la genèse des divers éléments liés aux mathématiques (concepts, théories, pratiques des mathématiciens, représentations), le rétablissement des continuités permettant de mieux comprendre les ruptures et leurs ressorts. En ce sens, les nouvelles études sur les mathématiciens du XVIII^e et les éditions critiques de leurs œuvres complètes⁹ ouvrent de nouvelles perspectives permettant de réévaluer l'apport scientifique de ce siècle et conduisant à remettre en cause l'évidence supposée d'une coupure nette avec le XIX^e siècle.

Le choix de la fourchette 1750-1850 qui figure dans le titre de ce livre s'inscrit dans la même démarche. Il ne constitue pas une proposition de périodisation alternative, mais un cadre d'étude permettant de prendre en compte de façon symétrique le second XVIII^e et le premier XIX^e et, ce faisant, de décroiser les deux siècles. Des travaux d'histoire des sciences ou des idées publiés au moment du bicentenaire de la Révolution française avaient déjà montré l'utilité d'élargir en amont et en aval l'échelle temporelle considérée pour mieux saisir la complexité du moment révolutionnaire¹⁰. Plusieurs recherches récentes ou en cours (par exemple sur le corpus encyclopédique¹¹ ou les journaux mathématiques¹²) ont de même adapté

8. Dans la bibliographie générale d'histoire des mathématiques [Dauben & Lewis 2000], par exemple, le décompte du nombre de pages consacrées aux références des travaux suivant les siècles est significatif : 8 pages pour le XVIII^e et 16 pages pour le XIX^e.

9. L'ampleur des publications à l'occasion du tricentenaire de la naissance d'Euler, en 2007, en est un indicateur.

10. Voir notamment [Rashed 1988 ; Crépel & Gilain 1989]. Dans leur introduction aux actes du colloque consacré en 1999 aux « Sciences et techniques autour de la Révolution française », les organisateurs marquent aussi cette complexité : « L'impact de la Révolution sur les sciences a été massivement souligné, ne serait-ce que par l'association souvent directe des savants et des ingénieurs à l'effort de guerre [...] et de ce point de vue, il n'y a pas lieu de distinguer la période napoléonienne des années 1792-1799. Pourtant, les sciences n'ont pas toutes été « révolutionnées » et le mérite des débats et des communications a été de bien montrer qu'une certaine autonomie de la science avait été maintenue, dans un contexte où société et État connaissaient les bouleversements majeurs que l'on sait. » [Bret & Dorigny 2000, p. 4]

11. Voir, par exemple, les actes du colloque international « *L'Encyclopédie méthodique* (1782-1832) : des Lumières au positivisme » qui s'est tenu en 2001 [Blanckaert & Porret 2006].

12. Voir le projet CIRMATH, coordonné par H. Gispert, P. Nabonnand et J. Peiffer. Ce projet d'étude des circulations des mathématiques, notamment au travers des journaux, entend dépasser « le cloisonnement historiographique traditionnel entre dix-huitiémistes et dix-neuviémistes ».

leur champ d'étude en se plaçant sur un temps plus long avec des périodes enjambant la coupure supposée entre les XVIII^e et XIX^e siècles¹³. Nous espérons que ce livre pourra contribuer au développement de nouvelles dynamiques de recherches allant dans ce sens.

C. G. et A. G.

BIBLIOGRAPHIE

- [Andries 2003] Lise Andries (dir.), *Le Partage des savoirs, XVIII^e-XIX^e siècles*, Lyon : Presses universitaires de Lyon, 2003.
- [Andries 2009] L. Andries (dir.), *La Construction des savoirs, XVIII^e-XIX^e siècles*, Lyon : Presses universitaires de Lyon, 2009.
- [S. Bachelard 1968] Suzanne Bachelard, « Épistémologie et histoire des sciences », dans *XII^e Congrès international d'histoire des sciences, Colloques. Textes des rapports*, Paris : Albin Michel, 1968, p. 39-51.
- [Bertrand & Guyot 2011] Gilles Bertrand et Alain Guyot (dir.), *Des « passeurs » entre science, histoire et littérature. Contribution à l'étude de la construction des savoirs (1750-1840)*, Grenoble : ELLUG, 2011.
- [Blanckaert & Porret 2006] Claude Blanckaert et Michel Porret (dir.), *L'Encyclopédie méthodique (1782-1832) : des Lumières au positivisme*, Genève : Droz, 2006.
- [Bret & Dorigny 2000] Patrice Bret et Marcel Dorigny, « Introduction », *Annales historiques de la Révolution française*, 320 (2000), p. 3-4.
- [Canguilhem 1970] Georges Canguilhem, *Études d'histoire et de philosophie des sciences*, Paris : Vrin, 2^e éd., 1970.
- [Canguilhem 1977] G. Canguilhem, *Idéologie et rationalité dans l'histoire des sciences de la vie. Nouvelles études d'histoire et de philosophie des sciences*, Paris : Vrin, 1977.
- [Crépel & Gilain 1989] Pierre Crépel et Christian Gilain (dir.), *Condorcet mathématicien, économiste, philosophe, homme politique*, Paris : Minerve, 1989.
- [Dauben & Lewis 2000] Joseph W. Dauben (éd.), *The History of Mathematics from Antiquity to the Present : A Selective Annotated Bibliography*, Garland, 1985 ; éd. rév. sur CD-ROM par Albert C. Lewis, AMS, 2000.
- [Gayon 2003] Jean Gayon, « Bachelard et l'histoire des sciences », dans J.-J. Wunenburger (éd.), *Bachelard et l'épistémologie française*, Paris : PUF, 2003, p. 51-113.
- [Grattan-Guinness 1990] Ivor Grattan-Guinness, *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840*, 3 vol., Basel : Birkhäuser, 1990.
- [Grattan-Guinness 2009] I. Grattan-Guinness, « Scientific Revolutions as Convolutions ? A Skeptical Inquiry », dans *Roots of Learning : Highways, Pathways, and Byways in the History of Mathematics*, Baltimore : The John Hopkins University Press, 2009, p. 135-143 (1^{re} publ. 1992).

13. Ce mouvement de décloisonnement, avec l'adoption de périodes d'étude du type 1750-1850, se manifeste aussi récemment en histoire des sciences sociales [Heilbron *et al.* 1998] et dans des travaux pluridisciplinaires sur l'histoire des savoirs, souvent à l'initiative des historiens de la littérature [Andries 2003, 2009 ; Bertrand & Guyot 2011 ; Le Borgne & Platelle 2014].

- [Heilbron *et al.* 1998] Johan Heilbron, Lars Magnusson et Björn Wittrock (éd.), *The Rise of the Social Sciences and the Formation of Modernity. Conceptual Change in Context, 1750-1850*, Kluwer, 1998.
- [Hildesheimer 1991] Françoise Hildesheimer, « Périodisation et archives », dans O. Dumoulin et R. Valéry (éd.), *Périodes. La construction du temps historique*, Paris : Éditions de l'EHESS, 1991, p. 39-46.
- [Le Borgne & Platelle] Françoise Le Borgne et Fanny Platelle, *Relations familiales entre générations dans le théâtre européen (1750-1850)*, Clermont-Ferrand : PUBP, 2014.
- [Le Goff 2014] Jacques Le Goff, *Faut-il vraiment découper l'histoire en tranches ?*, Paris : Éditions du Seuil, 2014.
- [Rashed 1987] Roshdi Rashed, « La périodisation des mathématiques classiques », *Revue de synthèse*, IV^e série, n^{os} 3-4 (1987), p. 349-360.
- [Rashed 1988] R. Rashed (éd.), *Sciences à l'époque de la Révolution française. Recherches historiques*, Paris : Librairie A. Blanchard, 1988.
- [Taton 1957-1964] René Taton, *Histoire générale des sciences*, 3 tomes, Paris : PUF, 1957-1964 ; réimp. 1994-1995.

Index des noms de personnes

- ABBADIE, Antoine d', 212
ABEL, Niels Henrik, 18-22, 27, 32-33, 36, 66, 72, 95
ACKERBERG-HASTINGS, Amy, 256, 404, 407, 433
ADAMS, George, 409, 415, 426, 437
ADELBULNER, Micheal, 252
AEBISCHER, Anne-Marie, 366, 371, 377
AEPINUS, Franz, 329-331, 345
AGASSE, Henri, 213, 223, 226
AIRY, George Biddell, 237
AITKEN, Alexander, 490, 502
AKRITAS, Alkiviadis, 500, 506
ALAU, Jean-Baptiste, 166, 168
ALBREE, Joe, 417-418, 433
ALDER, Ken, 89, 99
ALEAUME, Jacques, 358
ALEMBERT, Jean le Rond d', 18, 25, 28, 53, 55-56, 59, 61, 64-65, 67-69, 76, 88-89, 90, 99, 117, 135, 143-146, 148, 209-210, 241-242, 246, 263-270, 272, 274, 285, 411, 421, 428, 448, 452, 496, 502
ALEXANDER, Amir R., 15-16, 30, 32-33, 35-36, 38, 52, 72, 76-79, 99
ALFONSI, Liliane, 48-49, 99, 113, 127-128, 134-135, 137-140, 144, 152, 166, 179, 216-219, 229, 453, 467
AMONDIEU, Joseph-Louis-Adrien, 216, 228
AMONTONS, Guillaume, 321-323, 325, 345
AMPÈRE, André-Marie, 225, 228
AMPÈRE, Jean-Jacques, 225
ANDERSEN, Kirsti, 119, 353-354, 358-359, 367-368, 371, 376-377, 404, 409, 414, 433
ANDRIES, Lise, 545
APOLLONIUS DE PERGE, 383, 388, 401
ARAGO, François, 225, 249, 256
ARBOGAST, Louis-François-Antoine, 63, 122, 157, 161-163, 165, 420, 444, 456-458, 460, 463-464, 467
ARBOUR, Roméo, 223, 229
ARCHIBALD, Tom, 91, 99
ARCHIMEDE, 308
ARGENSON, Marc-Pierre de Voyer de Paulmy, comte d', 48, 131, 139
ARMATTE, Michel, 82, 99, 306, 311
AUBERT, Jean-Louis, 215
AUBIN, David, 85, 99, 116, 235, 238, 251-253, 256-257, 260, 549
BABBAGE, Charles, 412, 417, 426, 437, 458-460, 462, 467
BACHELARD, Gaston, 542
BACHELARD, Suzanne, 541, 545
BACHELIER, Louis, 116, 214-216, 219-220, 223-227
BACHMACOVA, Isabella, 68-69, 99
BAILLEUL, Théodore, 220
BAILLY, Jean-Sylvain, 239, 241-244, 246, 257
BAKER, Keith Michael, 46, 99
BALAZS, Lajos G., 251, 257
BALLARD, Pierre-Robert-Christophe, 213, 216
BALPE, Claudette, 156, 179
BALTHUS, Christopher, 69, 100
BARET, Jean, 158
BARLOW, Peter, 406, 410, 412, 415, 417-418, 423-427, 437, 439
BARROW-GREEN, June, 406, 433
BASTIDE, Roger, 281, 285
BAUER, Edmond, 340-341, 347
BAUMGARTNER, Andreas von, 193
BEAUBOIS, Francis, 238, 257
BEBIANO, Natália, 56, 100
BEDEL, Jean-Joseph, 170, 174-175
BELHOSTE, Bruno, 36, 49-51, 74, 81-82, 84-85, 89, 100, 140, 147, 152, 155, 157, 170, 172-173, 175-176, 178-179, 209, 229, 319, 348, 370, 377, 381, 401, 464, 467, 522, 525, 528, 530, 534
BELLHOUSE, David R., 290, 292, 294, 311
BELLONE, Enrico, 26, 100, 252, 257
BELTRAMI, Eugenio, 79
BENABEN, Jean-Claude-Gauthier-Louis, 159, 164, 166, 169
BEN-DAVID, Joseph, 42
BENNETT, Jim, 249, 257
BENSAUDE-VINCENT, Bernadette, 241, 257
BENVENUTO, Eduardo, 321, 347
BERNARD, Jean-Baptiste, 213, 215, 219-220
BERNOULLI, Daniel, 61, 88-89, 100, 122, 264, 296, 301, 311, 476, 487, 491, 501-502
BERNOULLI, Johann (Jean) I, 88, 290, 329
BERNOULLI, Johann (Jean) III, 201, 252, 296, 518
BERNOULLI, Nikolaus (Nicolas) I, 290-291, 296

- BERTHOLON, Pierre, 341
 BERTRAND, Gilles, 545
 BERTRAND, Joseph, 220, 306, 311
 BERTUCH, Friedrich Justin, 200
 BÉZOUT, Étienne, 48, 114, 133-138, 140-152, 166-168, 173, 198, 208, 211-212, 216-218, 223, 228, 453, 467
 BIENAYMÉ, Irénée-Jules, 305
 BIENAYMÉ, Olivier, 311,
 BIERMANN, Kurt-Reinhard, 181, 203
 BIGG, Charlotte, 256-257
 BILLY, Alexandre-Louis, 168, 176
 BINET, Paul-René, 159, 176
 BIOESMAT-MARTAGON, Lise, 401
 BIOT, Jean-Baptiste, 159-161, 173, 175-176, 216, 247, 257, 344, 413, 427, 450, 468
 BIREMBAUT, Arthur, 158, 179
 BIRKBECK, George, 409, 415, 427, 437
 BIRN, Raymond, 207, 229
 BIROT, Joseph-François, 159, 167
 BLANCKAERT, Claude, 210, 229, 544-545
 BLAY, Michel, 84, 89, 100
 BLONDEAU, Etienne-Nicolas, 145
 BLONDEL, Christine, 92-93, 100, 118, 331, 333, 341, 347
 BLOUIN, Jean-Baptiste-Antoine, 139
 BOBILLIER, Étienne, 163
 BOCHNER, Salomon, 307
 BODE, Johann Elert, 235, 255-256
 BOISTEL, Guy, 240, 251, 257
 BOLYAI, Farkas, 190
 BOLYAI, János, 36, 78
 BOLZANO, Bernard, 18-19, 21-22, 34-35, 78, 479, 503
 BONAPARTE, Napoléon, 173
 BONNEFIN, 216
 BONNYCASTLE, John, 409, 412, 415, 420, 425, 427, 436-437, 439, 446, 468
 BOOLE, George, 465-466, 468
 BORCHARDT, Carl Wilhelm, 275, 285
 BORDA, Jean-Charles, 45, 136, 139, 142-144, 150, 153, 254, 318, 461
 BOREL, Émile, 306-307, 311
 BORGATO, Maria Teresa, 292, 311, 443, 447, 468
 BORHECK, Georg Heinrich, 252, 257
 BOROWCZYK, Jacques, 483, 506
 BOS, Henk, 20, 86, 100, 108, 204
 BOSCOVICH, Roger Joseph, 88
 BOSSE, Abraham, 353, 357-359, 377
 BOSSUT, Charles, 45, 48, 50-51, 54, 114, 142-153, 166-168, 173, 243, 318, 322, 325-326, 345, 347, 372, 420, 423-424, 427, 452-453, 462-463, 468, 496, 501, 503
 BOTTAZZINI, Umberto, 94, 96, 100, 101, 493, 506
 BOUCARD, Jenny, 123, 366, 377, 514-515, 525-526, 530-532, 534
 BOUGUER, Pierre, 137-138, 142, 150, 153
 BOURBAKI, Nicolas, 55, 101
 BOURDON, Pierre-Louis-Marie, 217, 228
 BOURGOIN, Jules, 526
 BOUSQUET-BRESSOLIER, Catherine, 218, 229
 BOUVARD, Alexis, 247,
 BOYER, Carl B., 18-19, 30, 38, 53, 75, 97, 101, 403, 434
 BRACKENHOFFER, Jean-Jérémie, 141, 145
 BRANSBY, John, 408, 415, 427, 437
 BRAVAIS, Auguste, 82
 BRECHENMACHER, Frédéric, 117, 267, 272-275, 279, 284-285, 525-526, 535
 BREITHAUP, H. C. W., 201
 BRENNI, Paolo, 258
 BRET, Jean-Jacques, 175-176
 BRET, Patrice, 49, 98, 101, 128, 151, 153, 210, 227, 229, 544-545
 BREWSTER, David, 408, 413, 428
 BRIAN, Éric, 42, 46, 101
 BRIANCHON, Charles-Julien, 365, 367-377, 381, 384-385, 387, 393, 400-401
 BRIASSON, Antoine-Claude, 209-211, 213
 BRIGGS, Henry, 444, 457
 BRINKLEY, John, 411-412, 415-416, 427, 437-438, 457-460, 464, 468
 BRISSON, Barnabé, 464-465
 BRISSON, Mathurin-Jacques, 342, 345
 BRON, chevalier de, 141
 BROSCHE, Peter, 251, 257
 BROUGHAM, Henry, 408, 415-416, 427, 436
 BROWN, Scott H., 417-418, 433
 BRU, Bernard, 46, 101, 117-118, 222, 305, 311, 524, 535
 BRU, Marie-France, 311
 BRUNEAU, Olivier, 120, 213, 419, 434
 BRUSH, Stephen G., 252, 257
 BRYANT, Walter W., 238, 251, 257
 BUDAN DE BOISLAURENT, François-Désiré, 483, 499, 503
 BUFFON, Georges-Louis Leclerc de, 84, 210, 250
 BULLYNCK, Maarten, 70-71, 101, 115, 203, 512, 514, 517-518, 535
 BUNSEN, Robert, 238
 BURCKHARDT, Johann Karl (Jean-Charles), 236, 255
 BURMANN, Heinrich, 190, 459
 BURSTIN, Haim, 253, 257
 BUSSE, Friedrich Gottlieb von, 192

- BUSSOTTI, Paolo, 515, 535
 CAJORI, Florian, 475, 477, 479, 483, 497-498, 506
 CALERO, Julian Simon, 89, 101, 137, 142, 153
 CALINGER, Ronald, 191, 203
 CAMPBELL-KELLY, Martin, 462, 468
 CAMUS, Charles-Étienne-Louis, 48, 131, 133-134, 136, 139-141, 144-147, 149, 153
 CANGUILHEM, Georges, 541-542, 545
 CANTOR, Georg, 190
 CARAMALHO DOMINGUES, João, 450, 455, 468
 CARILLAN (OU CARILIAN), 214, 219, 227
 CARLYLE, Thomas, 408, 413
 CARNOT, Lazare, 17, 49, 77, 82, 88, 198, 216, 223, 354, 365-368, 371-377, 383-384, 387, 389, 395, 399-401, 424, 427
 CARRE, Adrien, 132, 153
 CARRÈRE, Jean-Paul, 157, 176
 CASSINI, Jean-Dominique (Cassini IV), 253
 CASTILLON, Johann, 191
 CASTRIES, Charles-Eugène-Gabriel de La Croix, marquis de, 139, 149, 152
 CATALAN, Eugène Charles, 225
 CAUCHY, Augustin-Louis, 17-19, 21-22, 27-28, 33-36, 38, 45, 51-55, 57-58, 62, 64, 72, 77, 82, 88, 92-96, 120, 123, 208, 269, 272, 275-283, 285, 304, 305, 311, 397, 401, 464-466, 468, 476, 483, 495-496, 498-499, 501-503, 512, 514, 524-526, 528-535
 CAVENDISH, Henry, 333
 CELLOT, Louis, 218
 CERF, Madeleine, 207, 229
 CHABERT, André-Laurent, 176, 483
 CHABERT, Jean-Luc, 122, 443-446, 451, 468, 477, 490, 497, 506
 CHALINE, Jean-Pierre, 161, 179
 CHAMBERS, Ephraïm, 406, 422, 427
 CHAPIN, Seymour L., 253, 257
 CHAPMAN, Allan, 249, 257
 CHAPMAN, Frédéric-Henri, 138, 142
 CHAPPEY, Jean-Luc, 98, 101, 210, 227, 229
 CHAPRONT-TOUZE, Michelle, 242, 257-258
 CHARLES, Jacques, 62, 449-450, 452, 456, 461-462, 466, 468
 CHARLES, Michel, 73, 77, 101, 119, 354-355, 366-367, 375-377, 385
 CHASTILLON, Nicolas-François-Antoine de, 74
 CHATZIS, Konstantinos, 89, 101, 192, 203
 CHEMLA, Karine, 365, 372, 374, 377
 CHERVEL, André, 171-172, 174, 179
 CHINNICI, Ileana, 235, 258
 CHIO, Félix, 495, 501-502
 CHOFFAT, Thierry, 174, 179
 CHOISEUL, Étienne-François de, 48, 114, 127-133, 135-137, 139-141, 145-147, 149, 150-152
 CHOISEUL-PRASLIN, César-Gabriel de, 135-136
 CLAIRAUT, Alexis-Claude, 76, 88-89, 135, 144, 167-168, 223, 242, 329, 383, 408, 411, 427, 449, 490-491, 503
 CLARKE, Henry, 409, 415, 420, 427, 436, 439
 CLAUSBERG, Christlieb von, 197
 CLERC, Nicolas, 163, 175
 CLERKE, Agnes Mary, 250, 258
 COHEN, I. Bernard, 241, 252, 258
 COLSON, John, 423
 COMPÈRE, Marie-Madeleine, 157-160, 165, 179
 COMTE, Auguste, 456, 468
 CONDETTE, Jean-François, 159, 174-175, 179
 CONDORCET, Marie-Jean-Antoine-Nicolas Caritat, marquis de, 44, 46, 56, 61-62, 65-66, 76, 146, 161, 210, 326, 345, 450, 452-453, 468
 COPERNIC, Nicolas, 116, 237, 241, 249
 CORRADI, Massimo, 320, 347
 CORRY, Leo, 525, 535
 COSTA, Shelley A., 417, 434
 COSTABEL, Pierre, 237, 258, 313
 COSTAZ, Louis, 159
 COTES, Roger, 400, 403, 412, 444
 COTTA, Johann Heinrich, 192
 COULOMB, Charles-Augustin, 49, 85, 116, 118-119, 317-329, 331-347
 COURCELLE, Olivier, 89, 101
 COURCIER, Auguste-Alfred, 223-224
 COURCIER, Louis, 213, 215-216, 219-220, 224, 226
 COURNOT, Antoine-Augustin, 222, 230, 296, 305, 311, 499, 503, 524, 526-528, 535
 COUSIN, Jacques-Antoine-Joseph, 45, 48, 54, 85, 241, 243, 258, 423, 453, 462, 468
 COWLEY, John Lodge, 409, 415, 420, 427, 436, 439
 CUNHA, José Anastácio da, 56
 CRAIK, Alex, 404, 413, 419-420, 424-425, 434
 CRAKELT, William, 412, 431
 CRAMER, Gabriel, 411
 CRAPELET, Charles, 216
 CRAPELET, Georges-Adrien, 214, 220, 225-226, 228
 CRELLE, August Leopold, 115, 181-182, 201-202, 381, 523, 524, 525, 529, 531, 533

- CREMONA, Luigi, 354, 368, 371, 377
 CRÉPEL, Pierre, 46, 76, 84, 90, 101, 213, 218, 230, 544-545
 CROSLAND, Maurice P., 42-45, 84, 101, 252, 254, 258
 CROZET, Claudius, 411, 427
 CUNLIFFE, James, 408, 415, 417, 427, 437, 439
 CUNNINGHAM, Clifford J., 258
 CUVIER, Georges, 191
 DAGUIN, Jean-François-Charles, 159
 DAHAN DALMEDICO, Amy, 89, 91-93, 102, 152, 277, 285, 479, 506, 512, 536
 DALBY, Isaac, 408, 427, 436
 DANDELIN, Germinal Pierre, 498, 503
 DANGOS, Jean-Auguste, 161
 DANILOPOULOS, Stylianos, 500, 506
 D'ARBIGNY, 145
 DARBOUX, Gaston, 76, 282
 DARLEY, George, 412, 427, 437
 DARNTON, Robert, 209, 230
 DARRE, André, 408, 427
 DARRIGOL, Olivier, 61, 89, 93, 102, 142, 153, 328, 348
 DASTIN, Charles, 168
 DASTON, Lorraine, 77, 82, 102, 199, 203
 DAUBEN, Joseph W., 16-19, 30, 34, 102, 544-545
 DAVID, Michel-Antoine, 209, 213
 DAVIES, Thomas Stephen, 408, 415, 417, 427-428, 437, 439
 DECREMPS, Henri, 253, 258
 DEDEKIND, Richard, 22, 95, 511
 DELAMARE, Georges-François, 168
 DELAMBRE, Jean-Baptiste-Joseph, 45, 85, 216, 223-224, 235-236, 239, 246-247, 258, 461, 511, 536
 DELATOUR, Louis-François, 211, 213
 DEL CENTINA, Andrea, 527, 536
 DELCOURT, Jean, 57, 76, 102
 DELON, Alexandre-Louis-Mathias, 369
 DELUC, Jean André, 249
 DEMEULENAERE-DOUYERE, Christiane, 42, 101
 DEMEUSY, Joseph, 163, 175
 DEMIDOV, Serghei S., 89, 102
 DEMIEZ, François-Xavier, 165
 DE MORGAN, Augustus, 305, 314, 465-466, 468
 DESAGULIERS, Jean-Théophile, 322
 DESARGUES, Girard, 357, 367, 373-376
 DESCARTES, René, 73, 241, 277, 383, 476, 481-483
 DÉSIRAT, Claude, 156, 179
 DESPEAUX, Sloan E., 417, 434
 DESPONT, Nicolas, 169
 DEVIC, Jean-François-Schlister, 253, 258
 DEWHIRST, David W., 249, 259
 DEZOBRY, Charles, 214, 216, 222
 DHOMBRES, Jean, 46, 49, 60, 75, 82, 92, 95, 102, 156, 160
 DHOMBRES, Nicole, 46, 49, 102, 156
 DIDEROT, Denis, 209, 241, 406, 428, 452
 DIDOT, Firmin, 218, 220-221, 213
 DIDOT, François-Ambroise, 213
 DIDOT, Pierre, 218, 221
 DIEUDONNÉ, Jean, 55, 102
 DINET, Charles-Louis, 369
 DIONIS DU SÉJOUR, Achille-Pierre, 298
 DIRICHLET, Johann Peter Gustav Lejeune-, 21, 60, 63-64, 95-96, 181, 186, 192, 274, 283, 511, 523-524, 529-530, 532, 536
 DOERRIES, Matthias, 347
 DOIG, Kathleen Hardesty, 162, 179
 DOIG, Peter, 236, 249, 258
 DONATO, Clorinda, 162, 179
 DONNE, Benjamin, 407, 428
 DONNEAUD DU PLAN, Alfred, 153, 154
 DORIGNY, Marcel, 544-545
 DORN, Harold, 319, 348
 DOUGLAS, Howard, 408, 428, 436
 DOUGLASS, George, 407, 428
 DRAPER, John, 407, 428, 436
 DROBISCH, Moritz Wilhelm, 187, 203
 DUBOCHET, J.-A., 326, 348
 DU BOURGUET, Jean-Baptiste d'Estienne, 223
 DUBUAT, Pierre-Louis-Georges, 318
 DU CHATELARD, Jean-Jacques Sabot de Pizey, dit, 132
 DUCROC, Pierre-Antoine-François, 174
 DUEBECK, Hilmar W., 257
 DUGAC, Pierre, 61, 102, 313
 DUHAMEL, Jean-Marie-Constant, 88
 DUHAMEL DU MONCEAU, Henri-Louis, 136-139, 150, 153
 DULEAU, 363
 DUMAS, (abbé), 216
 DUMAS-RAMBAUD, Jean-François, 166, 169
 DUNN, Richard, 239, 258
 DUPIN, Charles, 88, 220, 228, 384, 396, 401, 409, 425, 428
 DUPONT, 159
 DUPRAT, J.-B.-M., 213, 215, 219, 220, 223, 226, 227
 DU PUGET, 141
 DUPUY DE BORDES, Henri-Sébastien, 158, 162, 164, 176
 DURAND, Laurent, 209, 213

- DURAND-RICHARD, Marie-José, 281, 285, 305, 311, 463, 469, 526, 536
 DURRANDE, Jean-Baptiste, 384
 DÜRER, Albrecht, 353
 DURIS, Pascal, 156, 179
 DUTOUR DE SALVERT, Étienne-François, 212, 218
 DUVAL-LEROY, Nicolas-Claude, 138, 145, 150
 DUVERGIER, Jean-Baptiste, 171, 178
 DUVIGNEAU, Marion, 223, 230
 EBERHART, Jean-Michel, 213, 216, 222
 EBERT, Johann Jakob, 188
 ECCARIUS, Wolfgang, 201, 203
 ECKES, Christophe, 119, 526, 534
 EDWARDS, Edward, 409, 415, 428, 437
 EHRARD, Jean, 218, 230
 EHRHARDT, Caroline, 73, 103, 114, 512, 525, 535-536
 EINSTEIN, Albert, 237
 EISENSTEIN, Gotthold, 509, 522, 524
 ELLISON, Fern, 511, 536
 ELLISON, William J., 511, 536
 EMERSON, William, 409, 412, 415, 428, 436, 445-446, 457-458, 462-463, 469
 D'ENFERT, Renaud, 114, 156, 180
 ENGELSMAN, Steven B., 64, 89, 103
 EPPLE, Moritz, 81, 108
 ERNEST II, duc de Saxe-Gotha-Altenbourg, 251
 ESTIVALS, Robert, 226, 230
 ETTINGSHAUSEN, Andreas von, 193
 EUCLIDE, 383, 406-409, 417, 419, 421, 423
 EULENBURG, Franz, 187, 203
 EULER, Leonhard, 18-19, 28, 33, 37, 39, 46, 52, 55, 58-65, 68, 70-71, 75, 88-89, 93, 95, 103, 117, 122-123, 137-138, 142, 144, 146-148, 153, 168, 191, 198, 223, 242, 264, 266, 293, 296, 319-320, 329, 365, 383, 398, 411-412, 421, 446-447, 451-452, 463, 467, 469, 476, 484, 487-488, 491, 494, 501-503, 509-512, 514-522, 530, 533, 536-537, 544
 EYTELWEIN, Johann Albert, 194
 FANTET DE LAGNY, Thomas, 479
 FARISH, William, 415, 417, 428, 438
 FEIGENBAUM, Lenore, 443-444, 469
 FEJÉR, Lipót, 307, 309-310
 FELDMAN, Theodore S., 91, 103
 FELLER, William, 296, 311
 FEROCOC, Charles, 175
 FERMAT, Pierre, 70, 161, 290, 383, 475, 484, 509-511, 515-517, 519, 521, 524, 527, 532
 FERRARO, Giovanni, 57, 60, 103
 FERREIRO, Larrie D., 89, 103, 128, 137-138, 142, 153
 FERRIOT, Louis-Antoine-Stanislas, 373, 377-378, 384
 FÉRUSSAC, André-Étienne d'Audebert de, 524, 528
 FÉRY, Suzanne, 311
 FEURTET, Jean-Marie, 254, 258
 FIBONACCI, Leonardo, 291
 FICHTE, Johann Gottlieb, 189
 FINCK, Pierre-Joseph-Étienne, 223
 FIOCCA, Alessandra, 527, 536
 FIRODE, Alain, 90, 103, 264, 285
 FISCHER, Hans, 310-311
 FIX, Christian Gotthelf, 239, 258
 FLAMENT, Dominique, 401, 512, 537
 FLOOD, Raymond, 403, 434
 FODERÀ SERIO, Giorgia, 235, 258
 FONTAINE (FONTAINE DES BERTINS), Alexis, 66, 88-89
 FONTENELLE, Bernard Le Bovier de, 144, 375
 FONTIUS, Martin, 212, 230
 FORBES, Eric G., 236, 258
 FORBES, George, 238, 258
 FORMEY, Johann Heinrich Samuel, 211, 353, 359, 378
 FOUCAULT, Michel, 22, 103, 542
 FOUCHY, Jean-Paul Grandjean de, 46, 207
 FOURCROY, Antoine-François de, 172-174, 176, 178
 FOURIER, Joseph, 17, 21, 23, 27, 31-32, 38, 61, 63, 82, 88, 91-93, 95, 122-123, 212, 259, 275, 277, 279, 282, 297, 299-300, 303-305, 309, 310, 312, 345, 464, 465, 476-477, 483-484, 486, 489-490, 496, 498-502, 504
 FOURNERAT, 221
 FOURNIER, Charles-Marie-Félix, 218, 229
 FOURNIER, Daniel, 409, 428, 436
 FOX, Robert, 91, 103, 252, 259
 FRANÇAIS, François-Joseph, 163, 176, 365
 FRANÇAIS, Jacques-Frédéric, 457
 FRANCEUR, Louis-Benjamin, 159, 161, 173, 175-176, 212, 217, 223, 228, 420
 FRANÇOIS DE NEUFCHÂTEAU, Nicolas, 156, 169, 178
 FRÄNGSMYR, Tore, 90, 103, 199, 203
 FRANKLIN, Benjamin, 329, 341-342
 FRASER, Craig G., 27-28, 30, 33, 37, 52, 59, 65, 89, 103
 FRÉDÉRIC II DE PRUSSE, 142
 FRÉMONT, Louis, 166
 FRESNEL, Augustin, 88, 275, 277, 345

- FRIEDELMEYER, Jean-Pierre, 157, 180, 381, 401, 443, 456, 469
 FRIEDRICH, Johann Christoph, 186, 203
 FUNK, Christlieb Benedikt, 201
 GALILÉE (GALILEI, Galileo), 289-290, 305-306, 312
 GALLOWAY, Thomas, 408, 415, 428, 437, 439
 GALOIS, Évariste, 20, 27, 32, 36, 41, 72-73, 512, 524, 527-529, 537
 GAMACHES, Étienne-Simon de, 241, 259
 GARBER, Elizabeth, 83, 85, 90-91, 104, 317, 333, 341, 344, 348
 GARNIER, Jean-Guillaume, 217, 223, 420
 GARRARD, William, 412, 415-416, 429, 437
 GASCOIGNE, John, 420, 434
 GASCOIGNE, Robert M., 416, 434
 GAUSS, Carl Friedrich, 18-21, 27, 31, 33-35, 38, 41, 55-56, 67-73, 78, 82, 95, 123, 181, 185, 187, 190, 223, 236, 254-255, 282, 304, 306, 509-514, 518-525, 527-533, 534, 537
 GAUTHIER, Sébastien, 527, 537
 GAYON, Jean, 542, 545
 GEISSLER, Rolf, 230
 GENTY, Louis, 161, 178
 GÉRARD, 217
 GERGONNE, Joseph-Diez, 174-175, 177, 217, 373-374, 376, 378, 384, 523
 GÉRINI, Christian, 98, 104, 374, 378
 GERMAIN, Sophie, 521, 524, 527, 533, 537
 GIBBS, Josiah Willard, 307
 GIBERT, 140
 GILAIN, Christian, 29, 36, 44, 46, 49, 51-52, 54-55, 58, 62, 66, 69, 76, 80, 89, 101, 104, 265, 286, 452, 464, 469, 480-481, 506, 544-545
 GILLE, Paul, 137, 153
 GILLIES, Donald, 30, 104
 GILLISPIE, Charles Coulston, 24-25, 38, 43-44, 46-47, 85, 89, 91-92, 104, 140, 153, 156, 180, 244, 259, 296, 298, 312, 317, 348
 GISPERT, Hélène, 98, 104, 544
 GILLMOR, C. Stewart, 318-321, 328, 341, 343, 348
 GLENIE, James, 412, 415, 417, 429, 437
 GLOVER, 415, 429
 GŒURY, Jean-Louis, 214, 219, 227
 GOLDBACH, Christian, 514
 GOLDSTEIN, Catherine, 70-71, 104, 276, 282, 286, 509, 511-515, 519-523, 527, 537
 GOLDSTINE, Herman H., 444-446, 451, 469, 475, 506
 GOMPERTZ, Benjamin, 412, 429, 437
 GONOD, Benoît, 225, 228
 GOULEMOT, Jean-Marie, 241, 259
 GRABER, Frédéric, 89, 104
 GRABINER, Judith, 22, 30, 55, 57-58, 105, 502, 506
 GRANT, Robert, 248, 259
 GRATTAN-GUINNESS, Ivor, 23-24, 26-27, 30-32, 36-37, 39-40, 78, 80, 84-85, 87-89, 92-93, 105, 252, 259, 319, 344, 348, 404, 435, 443, 454, 462, 465, 469, 542, 545
 GRAY, Jeremy J., 29, 78-79, 105, 381, 402
 GRENNBERG, John L., 24-26, 64, 84, 89, 105, 242, 259
 GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT, 383
 GREGORY, David, 408, 423, 429, 436
 GREGORY, Duncan Farquharson, 465, 469-470
 GREGORY, James, 444, 446, 451, 456, 460, 461
 GREGORY, Olynthus, 410, 412, 415, 417-418, 421, 423-425, 429, 437, 439
 GRIBEAUVAL, Jean-Baptiste Vaquette de, 131, 141
 GUA DE MALVES, Jean-Paul de, 483, 504
 GUEFFIER, Pierre-François, 211, 213
 GUGGISBERG, Frederick G., 420-421, 435, 438
 GUICCIARDINI, Niccolò, 66, 105, 403-405, 416-417, 420, 422, 424-425, 435, 438, 461, 470
 GUILBAUD, Alexandre, 61, 89, 105-106, 113, 138, 142, 148, 153-154
 GUILLARD, Nicolas-Antoine, 217
 GUILLERME, André, 319, 348
 GUISTI, Enrico, 517, 537
 GUYOT, Alain, 545
 GUYOT, Edmé-Gilles, 362-363, 365, 378
 GUYOT, Guillaume-Germain, 211
 GUYOT, Pierre-Yacinthe-Gabriel, 159
 GUYTON DE MORVEAU, Louis-Bernard, 342, 347
 HACHETTE, Jean-Nicolas-Pierre, 88, 368-369, 377-378, 385, 407, 429
 HACHETTE, Louis, 116, 214, 220, 222-223, 226-227
 HAHN, Louis, 168, 170
 HAHN, Roger, 42, 44, 47, 89, 106, 130, 132, 154, 207, 230, 244, 252-253, 259, 296, 312, 449, 470
 HALD, Anders, 290, 292, 296, 300-301, 305, 310, 312
 HALL, Thomas Grainger, 411, 429, 466, 470
 HALLEY, Edmond, 383, 477
 HAMBURG, Robin Rider, 482, 506
 HAMILTON, Henry Parr, 413, 415, 429, 437

- HANKINS, Thomas L., 90, 106, 317, 348
 HANLEY, William, 207, 230
 HARDING, Karl Ludwig, 236
 HARDY, Godfrey, 307
 HARRIOT, Thomas, 444
 HARRIS, John, 406, 422, 431
 HARRISON, M. A., 408, 429, 436
 HÄSELER, Jens, 230
 HAÛY, René-Just, 331, 344, 347
 HAWKINS, Thomas, 272-273, 277, 286
 HEEFFER, Albrecht, 517, 538
 HEERING, Peter, 341, 348
 HEILBRON, Johan, 545-546
 HEILBRON, John L., 31, 42, 85, 90, 103, 106, 203, 317, 329-330, 338, 341, 348
 HEINICH, Nathalie, 357, 378
 HELLINS, John, 411-412, 416, 429, 437
 HERIVEL, John, 312
 HERMITE, Charles, 275-276, 280-283, 286, 530
 HERREMAN, Alain, 63, 106
 HERSCHEL, William, 117, 236, 239, 248-251, 255-256
 HERSCHEL, John Frederick William, 412, 415, 424, 429, 437, 457-462, 464-465, 470
 HERTZ, Paul, 307, 309, 312
 HÉVELIUS, Johannes, 240
 HEY, Richard, 410, 416, 429, 437
 HEYMAN, Jacques, 319, 348
 HIGGITT, Rebekah, 239, 258-259
 HIGHMORE, Joseph, 409, 429, 436
 HILBERT, David, 511
 HILDESHEIMER, Françoise, 542, 546
 HINDENBURG, Carl Friedrich, 37, 70-71, 189-190, 200-201, 514, 518, 523
 HOFER, Ferdinand, 238, 259
 HOLLIDAY, Francis, 445
 HOME, Roderick Weir, 330, 348
 HORDE, Tristan, 156, 179
 HORNER, William, 483, 504
 HORSLEY, Samuel, 408, 415-416, 421, 429, 436
 HOSKIN, Michael A., 235, 248-249, 259
 HOURS, Laurent d', 209, 213
 HOUZEL, Christian, 64, 72, 106, 482, 506
 HOVIUS, Henri-Louis, 216-218
 HUMBOLDT, Alexander von, 37, 182, 202, 250, 259
 HUTTON, Charles, 406, 408, 410, 415, 418, 420-421, 423-425, 429, 436-437, 439
 HUYGENS, Christiaan, 290, 306, 312, 319
 HYMERS, John, 412-413, 415, 429, 437, 466, 470
 ILLING, Carl Christian, 201
 ITARD, Jean, 494, 506
 IVORY, James, 404, 411-413, 415, 417, 425, 429-430, 437, 439
 JACOBI, Carl Gustav Jacob, 32, 81, 181, 185, 274, 511-512, 522-524, 527-529, 531-532, 538
 JAHN, Gustav Adolph, 236, 259
 JAHNKE, Hans Niels, 20, 22, 30, 37, 52, 55-56, 59, 106, 182, 186, 203
 JAMES, Samuel, 412, 430, 437
 JANTET, Antoine-François-Xavier, 162, 168
 JEAURAT, Edmé-Sébastien, 48, 356-359, 378
 JOBARD, Marcellin, 225, 229
 JOHNSON, William, 420, 435, 438
 JOMBERT, Charles-Antoine, 210, 213, 218
 JOMBERT, Claude, 218
 JOMBERT, Louis-Alexandre, 218
 JONES, William, 412, 416, 430, 436
 JORDAN, Camille, 308-310, 312, 526
 JOUVE, Guillaume, 61, 65, 89, 106-107
 JUAN Y SANTACILIA, Jorge, 128, 142
 JULIA, Dominique, 49-50, 107, 128-129, 149, 154, 159, 164, 167, 177, 179-180
 JURATIC, Sabine, 208, 210-211, 216, 221, 230
 KAFKER, Franck A., 422, 426, 435
 KANT, Immanuel, 241, 542
 KARSTEN, Wenceslaus Johann Gustav, 188
 KÄSTNER, Abraham Gotthelf, 188-189, 203, 239, 518
 KEITH, Thomas, 412, 430
 KEPLER, Johannes, 241, 246, 457, 493, 495
 KESTELOOT, Jacob Lodewijk, 246-247, 259
 KHINCHIN, Aleksandr Y., 307
 KING, Henry C., 250, 259
 KIRBY, John Joshua, 409, 415, 436
 KIRCHHOFF, Gustav Robert, 238
 KJELDSSEN, Tinne Hoff, 81, 108
 KLEIN, Felix, 16-17, 22-24, 32-34, 37-38, 51, 70, 107
 KLEIN, Ursula, 192, 203
 KLINE, Morris, 19-20, 30, 32, 38, 64, 68, 76, 107, 510, 532-533, 538
 KLOSTERMANN, Jean, 214, 220, 223, 227
 KNIGHT, Thomas, 461, 470
 KNOBLOCH, Eberhard, 194, 203, 526, 538
 KOPPELMAN, Elaine, 403, 435, 443, 465, 470
 KOSMANN-SCHWARZBACH, Yvette, 312
 KOVÁCS, József, 235, 260
 KOYRÉ, Alexandre, 237, 260
 KRAMP, Christian, 190, 523, 538
 KRAUSHAAR, Heinrich Wilhelm, 201
 KRÖGER, Désirée, 188, 204
 KRONECKER, Leopold, 68, 272-273, 283, 286, 511, 532

- KUHN, Thomas S., 25-27, 30, 107, 240, 252, 260, 542
- KÜHN, Heidi, 195, 204
- KÜLP, Edmund, 190
- KUMMER, Ernst Eduard, 509, 511, 524, 532, 538
- LABEY, Jean-Baptiste, 158, 164, 176
- LACAILLE (OU LA CAILLE), Nicolas-Louis de, 114, 166-167, 358, 378
- LACOMBE, Jacques, 363, 378
- LACROIX, Sylvestre-François, 54, 58, 75, 158, 161-162, 167, 173, 175-176, 198, 208, 212, 216-217, 223-224, 228, 396, 398, 402, 410, 412-413, 420, 423-425, 430, 450, 455, 457-458, 460-462, 464, 470, 523, 538
- LAGRANGE, Joseph-Louis, 28, 33, 39, 45, 52, 57-58, 65, 68, 70-73, 75-76, 84, 88-89, 93, 95-96, 117-118, 122-123, 168, 191, 198, 223-224, 237, 240, 244, 246-247, 260, 263-264, 266-276, 278-281, 283, 286, 289, 293, 295-298, 305, 313, 320, 383, 398-399, 402, 412, 420-421, 423, 430, 446-452, 455-458, 460, 464, 470-471, 475-486, 488, 491-502, 504, 509-512, 514-523, 525-526, 531, 533-534, 538
- LAGUERRE, Edmond, 282
- LAHARIE, Patrick, 208, 230
- LA HIRE, Philippe de, 367, 373, 375-376
- LAKANAL, Joseph, 253-254
- LALANDE, Joseph-Jérôme Lefrançois de, 210, 221-222, 229, 235, 239-240, 251-252, 254, 260
- LALLEMANT, Nicolas, 161
- LAMANDÉ, Pierre, 49, 107, 156, 180, 208, 216, 230
- LAMBERT, Johann Heinrich, 71, 119-120, 144, 201, 353-361, 363-365, 367-379, 384, 492, 494-495, 501, 504, 512, 514, 518
- LAMBARDIE, Jacques-Élie, 49
- LAMÉ, Gabriel, 88
- LAMY, Jérôme, 253, 260
- LANDEN, John, 408, 411-412, 414-416, 430, 436-437
- LANDMANN, Isaac, 409, 415, 420, 430, 437, 439
- LANGINS, Janis, 49, 107
- LANGUEREAU, Hombeline, 366, 371, 377
- LAPLACE, Pierre-Simon, 27, 39, 45, 48, 50-51, 54, 66, 82, 88-93, 114, 116-118, 151, 161, 168, 198, 212, 216, 220, 223-224, 236-237, 239, 244-252, 254-256, 260, 270-272, 286, 289, 292-293, 295-306, 308-310, 313, 420, 423, 448-449, 452, 457-459, 461, 463-464, 471, 495-496, 501-502, 505
- LARDNER, Dionysius, 411-413, 415-416, 430, 437-438
- LASKAR, Jacques, 271, 286
- LAUBENBACHER, Reinhard, 482, 486, 506, 527, 538
- LAUGEL, Auguste, 238, 260
- LAUGWITZ, Detlef, 295, 313
- LAURENT, Roger, 354, 367-368, 379
- LAUZUN, Philippe, 162, 180
- LAVOISIER, Antoine-Laurent, 241
- LAWRENCE, Snezana, 404, 410, 425, 435
- LAWSON, 408, 430, 436
- LEBESGUE, Henri, 64, 354, 367-368, 379
- LEBESGUE, Victor-Amédée, 524-525, 527, 529-530, 539
- LEBLANC, Frédérique, 210, 230
- LE BORGNE, Françoise, 545-546
- LE BRETON, André-François, 209-210
- LE BRUN, Charles, 357
- LE CHAPELIER, Isaac-René-Guy, 210
- LE CLERC I, Sébastien, 357
- LE CLERC II, Sébastien, 357
- LE GARS, Stéphane, 241, 251, 260
- LEGENDRE, Adrien-Marie, 45, 48, 54, 70, 121, 123, 148, 167-168, 173, 198, 208, 212, 216-217, 219, 223, 230, 243, 297, 312, 407-408, 413-414, 421, 423-425, 430, 437, 463, 471, 483, 505, 509-514, 518-525, 528-531, 533, 539
- LE GOFF, Jacques, 543, 546
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm, 18
- LE LAY, Colette, 213
- LEMMERMAYER, Franz, 512, 539
- LEMPE, Johann Friedrich, 192
- LÉONARD DE VINCI (LEONARDO DA VINCI), 353
- LE PRIOL, Constantin-Julien, 175
- LE ROY, Jean-Baptiste, 325, 341-342, 347
- LE SAGE (OU LESAGE), Georges-Louis, 245
- LESCAN (OU LE SCAN), Jacques-François, 158
- LESKE, Nathanael Gottfried, 201
- LESLIE, John, 404, 407, 413, 415, 419, 424, 431, 436-438
- LESUEUR, Jean-François, 158, 169, 176
- LETOURNEUX, François-Sébastien, 161,
- LE VASSEUR, Raymond, 68, 107
- LEVÊQUE, Pierre, 138
- LE VERRIER, Urbain, 225, 236-237, 256
- LÉVY, Paul, 306, 313
- LEYBOURN, Thomas, 405, 408, 415, 418, 431, 439, 462, 471
- L'HUILIER, Simon Antoine Jean, 54
- LIAPOUNOV, Alexandre, 306, 310, 313

- LIBRI, Guglielmo, 524-527, 529-530, 533-534, 539
- LICOPPE, Christian, 90, 107, 317, 348
- LINTON, Christopher M., 237, 244-245, 260
- LILOUVILLE, Joseph, 45, 66, 88, 274, 524-525, 530-532
- LITTLEWOOD, John Edensor, 307
- LOBACHEVSKY, Nikolai I., 78-79
- LOMBARD, Jean-Louis, 141-142, 145, 150
- LONGUET, Jean-François, 175
- LORIA, Gino, 68, 107, 354, 367-368, 379
- LOTTIN, Auguste-Martin, 208, 229
- LOUIS XIV, 43
- LOUIS XVI, 46
- LOVELAND, Jeff, 422, 426, 435
- LOWRY, John, 408, 410, 415, 417, 431, 436, 439
- LOYD, Benjamin, 412
- LUBET, Jean-Pierre, 62, 107, 122, 443, 450, 456-457, 459, 464, 471, 495, 506
- LUBY, Thomas, 412, 431, 437
- LUDLAM, William, 407, 431, 436
- LÜTZEN, Jesper, 59-60, 63-64, 66, 81, 96, 107, 274, 286, 525, 530, 534
- MCCLEARY, John, 31, 109
- MCCLELLAN III, James E., 42-43, 108
- MCCRATH, Gary, 506
- MACH, Ernst, 93
- MACLAURIN, Colin, 53, 88, 120, 395, 400, 403-404, 408, 411, 414, 419, 431, 444, 446, 451, 479, 505
- MAGDELEINE, Charles-Emmanuel, 214, 216, 222
- MAGIMEL, Denis-Simon, 214, 223
- MAGNUSSON, Lars, 546
- MAIGNÉ, Carole, 35, 107
- MAIZIÈRES, Armand, 174
- MALLET, Louis-Alexandre-Joseph, 224
- MALTON, Thomas, 407, 409, 431, 436-437
- MALUS, Étienne-Louis, 345
- MANARA, Alessandro, 258
- MARAT, Denis, 169
- MARCOZ, Jean-Baptiste-Philippe, 164
- MARIE, Joseph-François, 173
- MARKOV, Andrei A., 310
- MARMONTEL, Jean-François, 210
- MARSDEN, Brian, 258
- MARSH, John, 412, 431
- MARTIN, Roger, 54, 215
- MARTIN, Thierry, 222, 305, 313, 524, 535
- MASCART, Jean, 136, 139, 154
- MASCHERONI, Lorenzo, 372, 376-377, 379, 424, 431
- MASERES, Francis, 412, 431, 436
- MASKELYNE, Nevil, 255, 412, 415-416, 431, 437
- MAUDUIT, Antoine-René, 167-168, 412, 431
- MAUGEIN, Marguerite-Thérèse de, 215
- MAUREPAS, Jean-Frédéric Phélypeaux, comte de, 132, 136
- MAZLIAK, Laurent, 306, 313
- MÉCHAIN, Pierre-François-André, 254
- MEHRTENS, Herbert, 20, 23, 108, 182, 204
- MENDELSON, Everett, 42
- MERLEAU-PONTY, Jacques, 249, 260
- MÉROT, Catherine, 164, 180
- MERZBACH, Uta C., 18
- MESSIER, Charles, 161
- MÉTIVIER, Michel, 313
- MEUSNIER, Jean-Baptiste, 75
- MICHAELIS, Johann David, 188, 204
- MIDY, Étienne, 213, 216, 229
- MIGON, Estienne, 358, 379
- MILLMAN, Peter M., 249, 260
- MOIGNO, François-Napoléon-Marie, 225, 229
- MOIVRE, Abraham de, 118, 289-298, 300, 308, 314, 444, 446, 458, 463, 472
- MOKTEFI, Amirouche, 407, 435
- MOLINA, Edward C., 310, 314
- MOLLIER, Jean-Yves, 222-223, 227, 230
- MONGE, Gaspard, 17, 27, 34, 41, 48-51, 73-77, 82, 88, 114, 121, 146-147, 149-151, 167, 173, 223-224, 326, 331, 345, 367, 381, 383-385, 393, 396, 398-400, 402, 410-413, 421, 423-425, 431, 449-450, 459, 472
- MONNA, Antonie Frans, 64, 108
- MÖNNICH, Bernhard Friedrich, 359, 375, 379
- MONTEL, Nathalie, 219, 231
- MONTGOLFIER, Jacques-Etienne, 325
- MONTMORT, Pierre Rémond de, 290-291, 293, 296, 298, 300, 314
- MONTUCLA, Jean-Étienne, 136, 154, 210, 239-240, 260, 354, 362-366, 372, 376, 379, 424, 431, 498, 505
- MOREL, Thomas, 115, 186-189, 192-193, 198, 201, 204
- MOROGUES, Sébastien-François Bigot de, 132
- MOROVICS, Miroslav Tibor, 192, 204
- MORTON, Pierce, 407-408, 417, 431, 437
- MOURAILLE, Jean-Raymond, 123, 497-498, 501-502, 505
- MOUTON, Gabriel, 454, 457
- MOUY, Pierre-François-Ansard de, 141
- MÜLLER, Conrad H., 188, 204

- MULLER, John, 408-409, 415, 420, 431, 436, 438
MÜLLER, Rainer, 183-184, 204
MUSIER, Jean-Baptiste-Guillaume, 211, 213, 220
MUSSCHENBROEK, Pieter van, 318, 320
NABONNAND, Philippe, 120, 381, 401-402, 544
NARDIN, Pierre, 131, 154
NAVIER, Claude-Louis-Marie-Henri, 88, 93, 321, 483
NETTO, Eugen, 68, 108
NEUGEBAUER, Wolfgang, 184, 204
NEWTON, Isaac, 53, 92, 116, 123, 142, 146, 236-237, 239-243, 246-248, 329, 400, 403, 411-412, 414, 431-432, 444, 446, 451, 456-458, 460-461, 463, 472, 476-479, 486, 492, 496-502, 505, 516
NICHOLSON, Peter, 410, 415, 424, 432, 437
NICOLAÏ, Friedrich, 200
NICOLAS, Jean-Antoine, 159
NICOLE, François, 445, 463, 472, 490, 505
NOBLE, Eduardo, 189, 204, 459, 472
NOBLE, Edward, 409, 415, 432, 436
NOBLE, Mark, 408, 415, 417, 432, 436, 439
NOEL, Pierre, 170
NOLLET, Jean-Antoine, 133, 146, 148
NOVY, Lubos, 72, 108
O'CONNOR, John, 404, 434
OLBERS, Heinrich Wilhelm Matthias, 78, 236
OLIVIER, Théodore, 74
OLLÉAC, Gratien, 158, 163-165, 170
OLLIVIER, Blaise, 136
OLSON, Richard, 404, 419, 435
ORCHISTON, Wayne, 258
ORIANI, Barnaba, 247, 255
ORTIZ, Eduardo L., 459, 472
OTTE, Michael, 20, 22, 30, 106, 182, 203
OVAERT, Jean-Louis, 58, 108
OZANAM, Jacques, 218, 354, 362-366, 379
OZANNE, Michel, 159
PALMER, Robert R., 164, 180
PANCKOUCKE, Charles-Joseph, 210, 213, 225-226
PANNEKOEK, Anton, 236-238, 260
PANTEKI, Maria, 404, 423-424, 435
PANZA, Marco, 57, 89, 103, 108
PAPPUS D'ALEXANDRIE, 383
PARENT-CHARON, Annie, 218, 231
PARSEVAL, Marc-Antoine, 299
PASCAL, Blaise, 290, 369, 373-376, 384
PASSERON, Irène, 89, 108, 242, 260
PAULIN, Nicolas-Rémi, 158, 163, 174, 214
PAULSEN, Friedrich, 186, 204
PAYNE, William, 412, 432, 436
PEACOCK, George, 458, 460
PEDERSEN, Olaf, 406, 418, 435
PEIFFER, Jeanne, 46, 98, 108, 544
PEMBERTON, Henry, 415-416, 432
PENGELEY, David, 506, 527, 538
PERL, Teri, 417, 435
PETERSEN, Georg Friedrich, 201
PEYRARD, François, 217
PFAFF, Johann Friedrich, 191
PHILI, Christine, 57, 108
PIAZZI, Giuseppe, 235, 255
PICON, Antoine, 48-49, 89, 100, 108, 152, 318-319, 321, 348
PLANA, Giovanni, 344
PLATELLE, Fanny, 545-546
PLAYFAIR, John, 404, 407-408, 415, 417, 419, 424, 432, 436, 438
POINCARÉ, Henri, 118, 237, 274, 282, 293, 306, 314
POINSOT, Louis, 366, 368-369, 379, 514, 521, 523, 525-530, 533-534, 539
POISSON, Siméon-Denis, 17, 27, 38, 45, 82, 88, 93, 118, 223-224, 271-273, 289, 295-296, 301, 303-305, 314-315, 334, 344, 347, 412, 530
POITEVIN-DUBOISQUET, Jean-Antoine, 159
PÓLYA, George, 307-310, 315
PONCELET, Jean-Victor, 17, 27, 77, 82, 119-120, 212, 354-355, 365, 367-368, 370-371, 373-376, 379, 381-402
PORRET, Michel, 210, 229, 544-545
POTEN, Bernhard von, 191, 204
POTIER, Alfred, 344
POULET-DELISLE, Antoine-Charles-Marcelin, 525
PRESSLER, Maximilian Robert, 192
PRÉVERAUD, Thomas, 213, 231
PRIESTLEY, Joseph, 329, 409, 432, 436
PRIEUR, Claude-Antoine, 49
PRONY, Gaspard-Clair-François-Marie Riche de, 321, 328, 347, 453-455, 458, 461-462, 472
PROST, Antoine, 171, 180
PUISSANT, Louis, 159, 161-163, 173, 176
PULTE, Helmut, 89, 108-109
QUERRET, Jean-Joseph, 217-218, 229
QUESNOT, François-Joseph, 164, 168
QUIQUET, Albert, 306
RADELET-DE GRAVE, Patricia, 319, 348
RAMSAULT DE RAULCOURT, Claude Rault de, 146
RAPHSO, Joseph, 123, 476-477, 486, 497, 505
RARISCH, Isolde, 194, 204

- RASHED, Roshdi, 543-544, 546
 REES, Abraham, 406, 422, 427, 462, 468
 REID, Thomas, 419
 REMER, Christian Stephan, 519, 539
 REYNARD, Pierre-Claude, 227, 231
 REYNAUD, André-Antoine-Louis, 217, 223
 RICE, Adrian, 403, 434
 RICHARDS, Joan L., 15, 38, 77, 84, 109, 403, 435
 RICHMANN, Georg Wilhelm, 330-331
 RIDER, Robin E., 103, 203
 RIEMANN, Bernhard, 274, 281
 ROBERT, Jean-Bernard, 92, 95, 102
 ROBERTS, Alonso, 404, 434
 ROBERTSON, Abram, 412, 433, 437
 ROBERTSON, John, 412, 416, 430, 436
 ROBESPIERRE, Maximilien de, 253
 ROBINS, Benjamin, 142, 154, 162
 ROCHE, Jean-Pierre-Louis-Antide, 369, 385
 ROEGEL, Denis, 454, 462, 472
 ROLLE, Michel, 478-480, 505
 ROQUE, Tatiana, 274, 286
 ROTHE, Heinrich August, 523, 539
 ROUSE BALL, Walter W., 420, 435
 ROUX, C. L., 175
 ROUX, Sophie, 333, 349
 ROWE, David E., 31, 109
 ROY, Jean-René, 236, 260
 RUFFIEUX, Christiane, 419, 435
 RUFFINI, Paolo, 72, 482-483, 505
 SAKAROVITCH, Joël, 49, 74-77, 100, 109, 147, 154
 SARAIVA, Luis, 54, 56, 109
 SARTON, George, 15
 SAVOIE, Philippe, 172, 180
 SCHAFFER, Simon, 240, 250, 261
 SCHAPPACHER, Norbert, 70, 104, 282, 286, 509, 511-512, 514, 519, 520-523, 527, 537
 SCHARLAU, Winfried, 182, 186, 205
 SCHILLER, Friedrich, 191
 SCHITKO, Jozef, 192
 SCHLÖMILCH, Oskar, 193
 SCHMIDT, Georg Gottlieb, 189, 205
 SCHNEIDER, Ivo, 108, 204, 304, 315
 SCHNETTGER, Matthias, 182, 205
 SCHUBERT, Friedrich Theodor von, 239, 247, 261
 SCHUBRING, Gert, 53-55, 96, 109, 185-186, 188, 190, 193, 198-199, 205, 215, 231
 SCHULZE, Johann Karl, 191
 SCOTICUS, 408, 432
 SCRIBA, Christoph J., 16-19, 102
 SEBESTIK, Jan, 35, 107
 SEGNER, Johann Andreas, 188
 SÉGUIN, Philippe, 189, 205
 SÉGUR, marquis de, 152
 SEIDEL, Philipp Ludwig von, 96
 SERRET, Joseph-Alfred, 225, 530
 SERVOIS, François-Joseph, 354, 365-368, 371-373, 376-377, 379, 384, 457
 SHEYNIN, Oscar B., 236, 261, 295, 306, 315
 SIBUM, H. Otto, 257
 SICOLIN, Piero, 258
 SIDGWICK, John Benson, 249, 261
 SIEBEL, Sabine, 359, 376, 379
 SIEBENEICHER, Christian, 519, 539
 SIEGMUND-SCHULTZE, Reinhard, 81, 108-109
 SIGAUD DE LAFOND, Joseph-Aignan, 341-342, 347
 SIMONIN, 163
 SIMPSON, Thomas, 118, 289, 292-298, 305, 315, 403, 407, 412, 415, 421, 432, 436, 439, 444, 477, 505
 SIMSON, Robert, 383, 407-408, 415, 419, 424, 432, 436, 438
 SINACEUR, Hourya, 277, 282, 286-287, 484, 507
 SMALL, Robert, 415, 417, 432
 SOUCHAY, Jean, 242, 258
 SPAIGHT, John Tracy, 249, 261
 SPENCE, William, 404
 SPITZ, François-Ignace, 167
 STEDMAN, John, 408, 415-416, 432, 436
 STEINHAUS, Hugo, 307
 STENDHAL, Henri Beyle, dit, 164, 176, 178
 STEWART, Matthew, 408, 415, 432, 438
 STIGLER, Stephen M., 294-296, 298, 315
 STIRLING, James, 411, 415, 432, 444-446, 457-458, 463, 472-473
 STOCKLER, Francisco de Borja Garção, 54
 STOUPE, Jean-Georges-Antoine, 216, 220
 STRAUB, Hans, 321, 349
 STRAY, Christopher, 420, 435
 STRUIK, Dirk J., 17-18, 20-21, 32-34, 36-37, 67, 74, 76, 109, 403, 435
 STURM, Charles, 88, 276-283, 287, 483-484, 499-500, 505
 SULZER, Johann Georg, 359, 375, 379
 SUZANNE, Pierre-Henri, 158, 162, 164
 SYLVESTER, James Joseph, 275-276, 280-283, 287
 SZEGŐ, Gabor, 307
 SZULMAN, Éric, 89, 109, 148, 154
 TAILLANDIER, Martial, 159
 TALLEYRAND-PÉRIGORD, Charles-Maurice de, 175
 TAMARELLE LAGRAVE, 162
 TATON, René, 47, 49, 74-75, 109, 128, 139, 146, 154-155, 180, 524, 539, 543, 546

- TAYLOR, Brook, 41, 53, 55, 57-58, 353, 380, 404, 409, 423, 432, 444-445, 450, 457-458, 460-463, 473, 490-491, 496
 TAYLOR, Eva, 406, 435
 TCHEBYCHEV, Pafnouti L., 310
 TÊDENAT, Pierre, 159-161, 163, 174
 TERQUEM, Olry, 175, 221, 224, 229, 530
 THÉBAULT, Mathurin, 158, 160
 THÉRENTY, Marie-Ève, 225, 231
 THÉVENARD, Antoine-Jean-Marie, 136
 THIBAUD-LANDRIOT, François, 214, 225
 THIELE, Rudiger, 59, 109
 THOMASSIN, Jean-François, 163
 THOMSON, James, 405, 412, 432, 437
 TIMOSCHENKO, Stephen P., 321, 349
 TINSEAU D'AMONDANS, Charles de, 75
 TOBIES, Renate, 16
 TODHUNTER, Isaac, 290, 301, 315
 TOEPELL, Michael, 187, 190, 205
 TOURNÈS, Dominique, 67, 109, 144, 154
 TRAIL, William, 412, 433, 437
 TRUESDELL, Clifford Ambrose, 89, 109-110, 319, 321, 349
 TUCOO-CHALA, Suzanne, 210, 231
 TURGOT, Anne-Robert-Jacques, 46, 148
 TÛTKEN, Johannes, 189, 205
 TWEDDLE, Ian, 445, 473
 USPENSKY, James V., 310, 315, 500, 505
 VAILLANT, Alain, 225, 231
 VAIRIN, Jean-Pierre, 158-159, 163-165, 169
 VANDERMONDE, Alexandre-Théophile, 45, 72, 143, 148, 365, 444, 473
 VAN DER WAERDEN, Bartel Leendert, 71, 110
 VARGHA, Magda, 251, 261
 VASSANT, Jean-Baptiste, 157, 168
 VERDET, Jean-Pierre, 236, 238, 261
 VERDIER, Norbert, 98, 104, 115-116, 220, 224-225, 231, 385, 402, 522-524, 528, 539-540
 VERGÉ-FRANCESCHI, Michel, 128, 132, 154
 VÉRIN, Hélène, 89, 110
 VERLEY, Jean-Luc, 480, 507
 VIAL DU CLAIRBOIS, Honoré-Sébastien, 138-139, 142, 150
 VIÈTE, François, 383, 397, 477
 VINCE, Samuel, 412, 433, 437
 VINCENT, Alexandre, 499-500, 505
 VIVIANI, Vincenzo, 383
 VOELKE, Jean-Daniel, 79, 110
 VOIRON, Bernard, 239, 246-248, 261
 VOLTA, Alessandro, 329
 VOLTAIRE, François-Marie Arouet, dit, 210
 WALLACE, William, 404, 407-408, 412, 415, 417, 419, 423-425, 433, 436-439
 WALLIS, John, 477, 484
 WALLIS, Peter. J., 406, 436
 WALLIS, Ruth, 406, 436
 WARING, Edward, 408, 411, 414-416, 433, 436, 438, 446, 457, 473, 482, 505
 WAUD, Samuel, 413, 415, 433, 437
 WEIERSTRASS, Karl, 19, 22, 28, 95-96, 269, 271-276, 280, 283-285, 287
 WEIL, André, 70, 110, 510, 540
 WERNER, Abraham Gottlob, 192
 WEST, John, 407, 433, 436
 WILSON, David B., 249, 261
 WILSON, Robin, 434
 WITCHELL, George, 415-416, 433, 440
 WITZSCHEL, Benjamin, 193
 WITTROCK, Björn, 546
 WOLFF, Bertrand, 118, 333, 347
 WOLFF, Christian, 188-189, 197, 205, 517
 WOOD, James, 412, 415, 433, 437
 WOOD, John, 409, 415, 433, 437
 WOODHOUSE, Robert, 412, 433, 437
 WOOLHOUSE, Wesley, 413, 433, 437
 WRIGHT, John, 412, 433, 436
 WRIGHT, John Martin Frederick, 420
 WUSSING, Hans, 72-73, 110
 WRONSKI, Josef Hoëné-, 223
 YEO, Richard, 422, 436
 YOUSCHKEVITCH (OU YUSHKEVICH), Adolf P., 56, 59-63, 110
 YVON-VILLARCEAU, Antoine, 274, 287
 ZACH, Franz Xaver von, 235-236, 251-252, 254-256, 261
 ZEUTHEN, Hieronymus, 388, 402
 ZIMMERMANN, Carl Friedrich, 188, 205
 ZIMMERMAN, Eberhard von, 190
 ZSOLDOS, Endre, 257
 ZYGMUND, Antoni, 307

Liste des auteurs

Liliane ALFONSI, maître de conférences, Institut universitaire de technologie de Sceaux, Université Paris-Sud, Groupe d'histoire et diffusion des sciences d'Orsay (GHDSO), Études sur les sciences et les techniques (EA 1610).

David AUBIN, professeur, Sorbonne universités, Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche, UMR 7586 CNRS.

Christine BLONDEL, chercheuse CNRS, Centre Alexandre Koyré, UMR 8560 (EHESS / CNRS / MNHN).

Jenny BOUCARD, maître de conférences, Université de Nantes, Centre François Viète d'épistémologie et d'histoire des sciences et des techniques (EA 1161).

Frédéric BRECHENMACHER, professeur, École polytechnique, Laboratoire interdisciplinaire de l'X (LinX).

Bernard BRU, professeur honoraire, Université Paris Descartes, Laboratoire de Mathématiques Appliquées (MAP5), UMR 8145 CNRS.

Olivier BRUNEAU, maître de conférences, Université de Lorraine, Laboratoire d'histoire des sciences et de philosophie – Archives Henri Poincaré, UMR 7117 CNRS.

Maarten BULLYNCK, maître de conférences, Université Paris 8, Centre de recherches historiques : histoire des pouvoirs, savoirs et sociétés (EA 1571), chercheur associé au laboratoire SPHERE, UMR 7219 CNRS.

Jean-Luc CHABERT, professeur émérite, Université de Picardie, Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée (LAMFA), UMR 7352 CNRS.

Christophe ECKES, maître de conférences, Université de Lorraine, Laboratoire d'histoire des sciences et de philosophie – Archives Henri Poincaré, UMR 7117 CNRS.

Caroline EHRHARDT, maître de conférences, Université Paris 8, Centre de recherches historiques : histoire des pouvoirs, savoirs et sociétés (EA 1571).

Renaud D'ENFERT, professeur, Université de Picardie – Jules Verne, Centre universitaire de recherches sur l'action publique et la politique – Épistémologie et sciences sociales (CURAPP-ESS), UMR 7319 CNRS.

Christian GILAIN, professeur émérite, Sorbonne universités, Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche, UMR 7586 CNRS.

Alexandre GUILBAUD, maître de conférences, Sorbonne universités, Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche, UMR 7586 CNRS.

Jean-Pierre LUBET, professeur honoraire, membre de l'Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de Lille.

Thomas MOREL, maître de conférences, Université d'Artois, membre de l'ESPE de Lille-Nord et du Laboratoire de Mathématiques de Lens (EA 2462).

Philippe NABONNAND, professeur, Université de Lorraine, Laboratoire d'histoire des sciences et de philosophie – Archives Henri Poincaré, UMR 7117 CNRS.

Norbert VERDIER, maître de conférences, Institut universitaire de technologie de Cachan, Université Paris-Sud, membre du Groupe d'histoire et diffusion des sciences d'Orsay (GHDSO), Études sur les sciences et les techniques (EA 1610).

Bertrand WOLFF, physicien, membre correspondant du Centre Alexandre Koyré, UMR 8560 (EHESS / CNRS / MNHN).

Retrouvez tous les ouvrages
de CNRS Éditions
sur notre site

www.cnrseditions.fr