

MATHEMATIQUES
— POUR —
LE
PHYSICIEN

ANDRÉ BAUMY · MICHEL BONNAUD

T O M E 2

classes préparatoires

Cycle universitaire

MATHEMATIQUES — POUR — LE PHYSICIEN

ANDRÉ BAUMY · MICHEL BONNAUD

Professeur
de sciences-physiques
Lycée naval de Brest

Professeur de mathématiques
Enseignant à l'université
de Bretagne occidentale

T O M E 2

2^e tirage



EDISCIENCE
international

1992

Dans la même collection dirigée par André Baomy

Mathématiques pour le physicien,

André Baomy, Michel Bonnaud, 1989, Tome 1

Mathématiques pour les sciences de la vie, 1. Analyse,

Yvon Allain, André Dorange, Jacques Langlois, 1991

Mathématiques pour les sciences de la vie, 2. Probabilités

et statistiques, Patrice Troussel, Jean-François Morin, 1991

Composition, mise en page et réalisation des schémas en PAO :

Sylvie Mille, microédition et infographisme

Maquette de couverture : Françoise Rojare

© 1989, Ediscience international, Paris

ISBN : 2-84074-009-5

(publié précédemment par les éditions McGraw-Hill, Paris

ISBN : 2-7042-1190-6)

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'Article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

Ediscience international - 28, rue Beaunier - 75014 Paris

AVANT-PROPOS

Enseignant respectivement la Physique et les Mathématiques en classe de Terminale C et d'autre part ayant de nombreux contacts avec les élèves des classes préparatoires par l'intermédiaire des interrogations, nous avons constaté depuis plusieurs années que le fossé existant entre la classe de terminale et la classe de Math-Sup ou la première année de Faculté des Sciences s'élargissait et que les étudiants avaient de plus en plus de difficultés à négocier ce passage délicat de leurs études.

Bien que le programme de Physique en terminale, assez expérimental, soit éloigné de celui du premier cycle supérieur beaucoup plus théorique et approfondi, les difficultés rencontrées ne proviennent pas de la Physique, mais essentiellement des Mathématiques.

En effet, l'outil mathématique vient en retard sur son utilisation et ce qui peut être comblé rapidement au niveau du secondaire par quelques exposés, ne peut plus l'être aussi facilement au niveau du supérieur tant les besoins sont importants.

Les étudiants en début de ce nouveau cycle n'ont pas suffisamment d'acquis mathématiques pour aborder avec aisance la mécanique, la thermodynamique ou l'électricité. Ceci pose d'ailleurs problème aux enseignants du supérieur qui hésitent à commencer un programme par l'une ou l'autre de ces parties.

Aussi avons-nous rédigé cet ouvrage qui n'est ni un rappel du programme de terminale, ni un cours de classe préparatoire, pour lesquels d'ailleurs des manuels existent déjà, mais dont le but est d'aider les bacheliers C, D, E, à bien négocier leur passage vers les études scientifiques en essayant de combler une lacune évidente.

L'articulation de chacun des chapitres est la suivante : les connaissances supposées assimilées par l'étudiant en Mathématiques Terminale C servent de point de départ ; ces notions sont approfondies et étoffées pour déjà s'approcher de l'esprit rencontré dans l'enseignement supérieur. Ensuite viennent des exemples d'application qui montrent l'interdépendance très étroite entre la Physique et les Mathématiques tout en servant d'introduction à la mécanique, la thermodynamique et l'électricité du premier cycle scientifique post baccalauréat.

Enfin, des exercices sont proposés sur chaque partie qui permettent un auto-contrôle de l'acquis.

Les étudiants peuvent ainsi après la classe de terminale prendre un premier contact avec la Physique au niveau du supérieur.

Cet ouvrage comportant de nombreux formulaires peut également leur servir par la suite. De plus, les notions introduites sont véritablement des bases auxquelles on se réfère souvent et les trouver réunies dans un seul ouvrage peut être pratique d'utilisation.

Nous espérons que ce livre, qui n'a d'autre ambition que de faciliter le passage des bacheliers scientifiques vers les études supérieures, comblera en partie le fossé qui, nous l'avons déjà dit, s'élargit entre ces deux cycles d'études et dont sont conscients les enseignants.

Les auteurs

MODE D'EMPLOI DE CES OUVRAGES

Le but de ces ouvrages est de fournir aux étudiants qui s'engagent dans des études scientifiques l'outil mathématique élémentaire nécessaire à l'apprentissage de la Physique. C'est pourquoi chaque chapitre sera articulé autour de deux ou trois parties.

11. D'abord dans une première étape, il est fait un rappel des notions simples de mathématiques généralement connues, qui sont ensuite approfondies sans toutefois prendre l'allure d'un cours complet et précis, puisque là n'est pas le but, l'objectif étant de donner rapidement aux étudiants *l'outil minimum indispensable* à une bonne compréhension du début du cours de sciences physiques. En conséquence, il ne faut pas s'étonner de voir une présentation succincte des résultats mathématiques souvent dégagés de leur démonstration. Tout ce qui est superflu pour le Physicien ayant été écarté, les notions exposées sont de première importance et doivent être parfaitement assimilées.

En particulier :

- On **mémorisera les définitions et les propriétés** mises en évidence dans le texte.
- On **retiendra toutes les formules** de base dans les domaines aussi variés que les *produits de vecteurs, la trigonométrie, les nombres complexes, l'intégration, la dérivation, les développements limités*, etc. Il faut bien se persuader que pour une bonne assimilation de la Physique, la connaissance du plus grand nombre de formules est nécessaire et que toute hésitation au sujet de l'une d'entre elles est une perte de temps ainsi qu'une digression néfaste dans la poursuite d'une démonstration du cours.
- On **reproduira minutieusement tous les calculs** traités à titre d'exemple ; en effet ils ont été sélectionnés car ils représentent des cas rencontrés fréquemment et doivent parfaitement être assimilés de manière à être immédiatement identifiés et résolus ainsi que les calculs similaires (exemple des intégrales ou des équations différentielles).

En conclusion à la fin de la première partie on peut considérer que l'étudiant a acquis les "réflexes" mathématiques fondamentaux. Toutes les difficultés n'en sont pas pour autant aplanies ; en effet il reste un obstacle souvent difficile à franchir, c'est l'interpénétration des disciplines que l'on tentera de résoudre dans la seconde partie des différents chapitres.

12. Disposant de l'outil, on montre ensuite son utilisation pour la Physique.

— A partir des *produits de vecteurs, des dérivées, des équations différentielles*, on se projete dans la **mécanique**.

— A partir des notions de *différentielles* et d'*intégrales*, on prend contact avec la **thermodynamique**.

- A partir des *produits de vecteurs*, des *intégrales*, de la *trigonométrie*, on peut aborder certaines parties de l'*électricité* à savoir l'électrostatique et l'électromagnétisme.
- Enfin avec la *trigonométrie* et les *nombres complexes*, on introduit quelques éléments ponctuels sur les *vibrations* et l'*optique*.

Les notions choisies constituent des bases dans chacun des domaines de la Physique, c'est-à-dire un passage obligé pour les études scientifiques, c'est pourquoi :

- On *fera d'abord une lecture assez rapide* du thème proposé de façon à s'en imprégner l'esprit.
- On *procèdera ensuite à une étude systématique et rigoureuse* de ces notions qui doivent être parfaitement comprises.
- On *reprendra enfin pour les mémoriser* les différents paragraphes concernés.

Arrivé à ce stade l'étudiant doit maintenant avoir compris qu'en Physique une étude se décompose en plusieurs parties :

- perception du phénomène liée à l'observation et à l'expérience,
- mise en équation et traitement mathématique du problème,
- énoncé des résultats et des lois,
- applications et conséquences.

La résolution mathématique fait donc partie intégrante de la démarche du Physicien.

3. Il est proposé ensuite un certain nombre d'exercices types dans le but de tester les acquis. Par soucis de "rentabilité intellectuelle" :

- On *lira attentivement l'énoncé* en faisant ressortir les éléments essentiels et dans la plupart des cas on réalisera un schéma.
- On *tentera une résolution de l'exercice* en se souvenant qu'un cheminement même lent et laborieux est toujours plus positif qu'un retour rapide vers le corrigé.
- On *terminera par une étude détaillée du corrigé*.

La chronologie a été soigneusement élaborée à l'intérieur des deux ouvrages : commençant par des notions simples, on évolue au cours des chapitres vers d'autres plus complexes. Cependant les différentes parties n'étant pas indépendantes, on rencontre parfois des éléments nouveaux, qui seront traités plus en détail dans un chapitre ultérieur, un renvoi en faisant mention.

Enfin il n'était pas concevable d'introduire l'outil mathématique sans parler du mode de résolution final des équations jusqu'à l'obtention d'un résultat numérique. C'est pourquoi le dernier chapitre traite succinctement (à la calculatrice) dans chacun des domaines abordés, un exercice similaire à ceux introduits théoriquement.

Table des Matières

CHAPITRE 6 : CALCUL INTÉGRAL

1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES	1
1. 1. Pourquoi le calcul intégral ?	1
1. 2. Intégrale d'une fonction scalaire d'une variable réelle	2
1. 3. Intégrales curvilignes	26
1. 4. Intégrales doubles ou intégrales de surface	27
1. 5. Intégrales triples ou intégrales de volume	30
2. APPLICATIONS À LA PHYSIQUE	32
2. 1. Application à l'électricité et à l'électromagnétisme	32
2. 2. Application à la thermodynamique	60
2. 3. Application au calcul des volumes	63
2. 4. Application au calcul des surfaces latérales des volumes de révolution	65
2. 5. Application à la recherche de la position du centre de gravité	66
2. 6. Application à la recherche des moments d'inertie	71
3. EXERCICES D'APPLICATION	77

CHAPITRE 7 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES	113
1. 1. Pourquoi les équations différentielles ?	113
1. 2. Définitions	114
1. 3. Équations différentielles du premier ordre	114
1. 4. Équations différentielles du second ordre	124
2. APPLICATIONS À LA PHYSIQUE	136
2. 1. Application à la mécanique	136
2. 2. Application à l'électricité	150
2. 3. Application à la thermodynamique	160
3. EXERCICES D'APPLICATION	164

CHAPITRE 8 : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES	193
1. 1. Pourquoi les développements limités ?	193
1. 2. Théorème de Rolle	193
1. 3. Théorème des accroissements finis	194
1. 4. Théorème de Taylor	195
1. 5. Développement de Taylor-Young	197
1. 6. Développements limités	199
1. 7. Développements limités de quelques fonctions usuelles au voisinage de zéro	201
1. 8. Exemples de développements limités	201
1. 9. Application de la formule de Mac-Laurin au développement du binôme de Newton	205
1. 10. Application des formules de Taylor-Lagrange et de Mac-Laurin au calcul approché	206
1. 11. Développements limités en Physique	209
1. 12. Notions élémentaires sur les séries numériques	210
2. EXERCICES D'APPLICATION	214

CHAPITRE 9 : CALCUL NUMÉRIQUE

1. GÉNÉRALITÉS	239
2. PRODUITS DE VECTEURS	240
3. CONVERSION DES COORDONNÉES	246
4. CALCUL DE DÉRIVÉE	251
5. ÉTUDE D'UN AJUSTEMENT	254
6. SOMME DE DEUX VECTEURS : VITESSE ET CAP D'UN BATEAU	258
7. SOMME DE FONCTIONS SINUSOÏDALES. ADDITION DE TENSIONS ALTERNATIVES	261
8. LES NOMBRES COMPLEXES ET APPLICATION AU CALCUL D'UNE IMPÉDANCE ET D'UNE ADMITTANCE	266
9. CALCUL D'UNE INTÉGRALE DE LA FORME $I = \int_a^b$	271
10. CALCUL DE L'AIRE D'UNE ELLIPSE (E) D'ÉQUATION : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	275
11. LONGUEUR ET FLÈCHE D'UNE CHÂINETTE	278
12. CHARGE D'UN CONDENSATEUR À TRAVERS UNE RÉSISTANCE	281
13. DÉTERMINATION DES POINTS DE LA TRAJECTOIRE D'UN MOBILE SOUMIS À LA FORCE DE FROTTEMENT DU TYPE $\vec{f} = k\vec{v}$	284
14. CALCUL DE LA PÉRIODE D'UN NÉON QUI CLIGNOTE	289
15. CHARGE D'UN CONDENSATEUR DANS UN CIRCUIT INDUCTIF ET RÉSISTIF	293
16. CALCUL D'UNE VALEUR APPROCHÉE À L'AIDE D'UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ	297

Chapitre 6

Calcul intégral

1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES

1. 1. Pourquoi le calcul intégral ?

On peut schématiser en disant que le calcul intégral est l'inverse du calcul différentiel ; ces deux notions ont d'ailleurs été introduites et étudiées contemporanément.

Le calcul différentiel permet à partir d'une fonction d'en déterminer sa différentielle par l'intermédiaire de la dérivée.

Le calcul intégral emprunte la démarche inverse, à savoir qu'il faut reconstituer la fonction à partir de sa différentielle par l'intermédiaire de la primitive.

Sans l'aide de ces deux notions le physicien serait totalement démuné et la Physique resterait à l'état de science purement expérimentale.

La liste des applications du calcul intégral que l'on peut dresser est loin d'être exhaustive ; on peut cependant noter parmi les plus importantes :

- le calcul de longueur des courbes, d'aires et de volumes;
- la généralisation de la notion d'intégrale aux intégrales doubles et triples ;
- le calcul de la masse d'un solide non homogène mais ayant une symétrie et dont on donne la fonction masse volumique.

En électricité

- le calcul du champ et du potentiel électriques créés par des distributions de charges ;
- le calcul du champ magnétique et du potentiel vecteur créés par un circuit de forme géométrique parcouru par un courant ;

- le calcul des grandeurs moyennes dans le temps et des valeurs efficaces ;
- le calcul des puissances électriques.

En mécanique

- la détermination du centre de masse ;
- le calcul des moments d'inertie ;
- la décomposition d'une vibration complexe en vibrations simples par le théorème de Fourier ;
- le calcul du travail d'une force mécanique, électrique ou magnétique dans différentes situations ;
- la détermination de l'énergie potentielle.

En thermodynamique

- travaux effectués par les gaz lors des transformations isothermes, adiabatiques ou autres ;
- établissement des équations caractérisant les transformations ;
- calcul des variations d'énergie interne, d'enthalpie et d'entropie.

En optique

- détermination de l'intensité spectrale à partir de l'amplitude vibratoire (série de Fourier) ;
- calcul d'un éclaircissement résultant sur un écran ;
- calcul de l'intensité diffractée dans une direction.

1. 2. Intégrale d'une fonction scalaire d'une variable réelle

1. 2. 1. Notions de primitive et propriétés

Si f est une fonction numérique définie et continue sur un intervalle \mathcal{S} de \mathbb{R} , on nomme primitive de la fonction f , toute fonction F admettant f comme dérivée première sur cet intervalle ainsi :

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{S}$$

• Si f est une fonction continue sur \mathcal{S} elle admet sur cet intervalle une infinité de primitives définies à une constante près ; si F est l'une d'entre elles l'ensemble des primitives se note :

$$G = F + C$$

• f admet une seule primitive sur \mathcal{S} prenant une valeur

bien déterminée en un point $x_0 \in \mathfrak{S}$.

1. 2. 2. Définition de l'intégrale

Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle fermé et borné $\mathfrak{S} = [a, b]$, la fonction f admet une primitive F ; d'après le premier théorème énoncé ci-contre, il existe au moins une autre primitive notée G telle que $G(x) = F(x) + C$ et l'on constate que :

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

Le nombre $F(b) - F(a)$ est donc indépendant du choix de la primitive de f .

Si f est une fonction définie et continue sur $[a, b]$, F une primitive de f sur $[a, b]$, on appelle intégrale de a à b de la fonction f le réel :

$$F(b) - F(a)$$

et on note :

$$\int_a^b f(t) dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(t) dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

• Dans l'expression $\int_a^b f(t) dt$, la variable t peut être remplacée par n'importe quelle lettre ; on dit que c'est une variable muette ;

• a et b sont appelées "bornes d'intégration" ;

• L'intégrale $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$ qui dépend de la variable x est appelée intégrale indéfinie ; on la note souvent sous la forme $\int f(x) dx$ et elle représente les primitives de la fonction f .

1. 2. 3. Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et soit Δ le domaine plan ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in [a, b]$ et $y \in [0, f(x)]$ ou $[f(x), 0]$. On démontre que l'aire géométrique de ce domaine Δ est telle que :

$$A_G(\Delta) = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

On nomme aire algébrique du domaine Δ le réel :

$$A(\Delta) = \int_a^b f(x) dx$$

$$A(\Delta) = \int_a^b f(x) dx$$

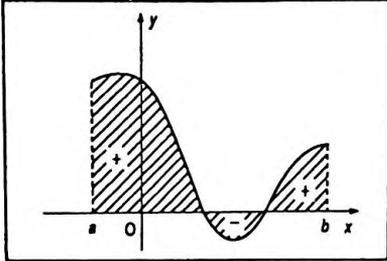


Figure 6.1

L'aire est comptée positivement au-dessus de l'axe des abscisses et négativement au-dessous si $(a < b)$ (Fig. 6.1).

1. 2. 4. Propriétés

- $\int_a^a f(x) dx = 0$

- $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

- Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(c appartenant ou non à $[a, b]$)

- Linéarité :

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

et :

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

- Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

1. 2. 5. Intégrales ou primitives usuelles (voir tableau ci-contre)

1. 2. 6. Méthodes d'intégration

Quels que soient les procédés utilisés pour calculer une intégrale on doit toujours se ramener à une intégrale fondamentale. Il existe plusieurs procédés d'intégration dont l'utilisation dépend de la forme et du type de l'intégrale.

Intégrales ou primitives usuelles

Intégrales	D	Intégrales	D
$\int a \, dx = ax + C$	\mathbf{R}	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	\mathbf{R}^*
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\begin{cases} \mathbf{R} \text{ si } n > 0 \\ \mathbf{R}^* \text{ si } n < 0 \end{cases}$	$\int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$	\mathbf{R}
$\int \frac{dx}{x+a} = \ln x+a + C$	$\mathbf{R} \setminus \{-a\}$	$\int -\frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \cotan x + C$	$\mathbf{R} \setminus \{0(\pi)\}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	\mathbf{R}^*	$\int \frac{1}{\cos x} \, dx = \ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$	$\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(\pi) \right\}$
$\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \text{Arc tan } \frac{x}{a} + C$	\mathbf{R}	$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \ln \left \tan \frac{x}{2} \right + C$	$\mathbf{R} \setminus \{0(\pi)\}$
$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$	\mathbf{R}	$\int \frac{1}{1+\cos x} \, dx = \tan \frac{x}{2} + C$	$\mathbf{R} \setminus \{\pi(2\pi)\}$
$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$	\mathbf{R}	$\int \frac{1}{1-\cos x} \, dx = -\cotan \frac{x}{2} + C$	$\mathbf{R} \setminus \{0(2\pi)\}$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$	$\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(\pi) \right\}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc sin } x + C$	$] -1, 1[$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \ln \left \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right + C$	\mathbf{R}	$\int f^n(x) f'(x) \, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	considérer chaque cas
$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$	\mathbf{R}^*	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \, dx = \sqrt{f(x)} + C,$ c'est le cas où $n = -\frac{1}{2}$	
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln f(x) + C$	$x/f(x) \neq 0$	$\int \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \, dx$ $= \frac{f(x)}{g(x)} + C$	

● Intégrale immédiate

Si à un coefficient numérique près l'intégrale est une intégrale usuelle, on procède alors à l'ajustement de ce coefficient.

Pour un polynôme, par exemple, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_i x^i + \dots + a_1 x + a_0) dx \\ &= a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots + a_i \frac{x^{i+1}}{i+1} + \dots \\ & \quad \dots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C \end{aligned}$$

Si par un simple changement d'écriture l'intégrale apparaît comme une intégrale usuelle, on opère la transformation et l'on intègre. Exemple :

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

● Intégration par changement de variable

On appelle u une partie de l'intégrale à calculer et on détermine du . L'astuce consiste à choisir convenablement u de façon que la nouvelle intégrale soit, au signe près, ou au coefficient près, une intégrale fondamentale. Si l'intégrale est définie, il faut opérer également le changement de valeur des bornes.

Exemples

• Calculer $I = \int (x^3 + 3x^2 + 1)^4 (x^2 + 2x) \, dx$.

On pose :

$$u = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow du = (3x^2 + 6x) \, dx$$

$$\text{et } \frac{du}{3} = (x^2 + 2x) \, dx$$

L'intégrale s'écrit :

$$I = \int u^4 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \frac{u^5}{5} + C$$

d'où :

$$I = \frac{1}{15} (x^3 + 3x^2 + 1)^5 + C$$

$$I = \frac{1}{15} (x^3 + 3x^2 + 1)^5 + C$$

• Calculer $J = \int \cos 3x \, dx$.

On pose :

$$u = 3x \Rightarrow du = 3 \, dx$$

ainsi :

$$J = \int \cos u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \sin u + C$$

d'où :

$$J = \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

$$J = \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

• Calculer $K = \int e^{-4x} \, dx$.

On pose :

$$u = -4x \Rightarrow du = -4 \, dx \text{ et } dx = -\frac{1}{4} \, du$$

ainsi :

$$K = \int e^u \left(-\frac{du}{4} \right) = -\frac{1}{4} e^u + C$$

d'où :

$$K = -\frac{1}{4} e^{-4x} + C$$

$$K = -\frac{1}{4} e^{-4x} + C$$

• Calculer $L = \int \frac{dx}{\sqrt{3-5x}}$.

On pose :

$$u = 3 - 5x \Rightarrow du = -5 \, dx \text{ et } dx = -\frac{du}{5}$$

ainsi :

$$L = \int -\frac{du}{5\sqrt{u}} = -\frac{1}{5} 2\sqrt{u} + C$$

d'où :

$$L = -\frac{2}{5}\sqrt{3-5x} + C$$

$$L = -\frac{2}{5}\sqrt{3-5x} + C$$

• Calculer $M = \int \frac{dx}{3x-1}$.

On pose :

$$u = 3x - 1 \Rightarrow du = 3 dx \text{ et } dx = \frac{du}{3}$$

ainsi :

$$M = \int \frac{1}{3} \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln |u| + C$$

d'où :

$$M = \frac{1}{3} \ln |3x-1| + C$$

$$M = \frac{1}{3} \ln |3x-1| + C$$

• Calculer $N = \int \frac{dx}{5+3x^2}$.

On peut écrire :

$$N = \int \frac{\frac{dx}{5}}{1 + \frac{3x^2}{5}}$$

Pour obtenir $u^2 = \frac{3x^2}{5}$, on pose $u = \sqrt{\frac{3}{5}}x$ et $du = dx \sqrt{\frac{3}{5}}$; il vient :

$$N = \int \frac{\frac{1}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{Arc tan } u + C$$

d'où :

$$N = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{Arc tan } \sqrt{\frac{3}{5}}x + C$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{Arc tan } \sqrt{\frac{3}{5}}x + C$$

• Calculer $O = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

On peut écrire :

$$O = \int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

Pour obtenir $u^2 = \frac{x^2}{a^2}$, on pose $u = \frac{x}{a}$ et $du = \frac{1}{a} dx$,
ainsi on obtient :

$$O = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \text{Arc sin } u + C$$

d'où :

$$O = \text{Arc sin } \frac{x}{a} + C$$

$$O = \text{Arcsin } \frac{x}{a} + C$$

• Calculer $P = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, avec $a \neq 0$.

On peut écrire :

$$P = \int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}$$

On pose alors $u^2 = \frac{x^2}{a^2}$, ce qui donne :

$$u = \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad du = \frac{dx}{a}$$

ainsi on obtient :

$$P = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \ln \left| u + \sqrt{1 + u^2} \right| + C$$

soit :

$$P = \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right| + C$$

et :

$$P = \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| - \ln |a| + C$$

$$P = \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| - \ln |a| + C$$

● Intégrations par parties

On utilise la relation :

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Ce qui revient à remplacer une intégrale difficile à calculer directement par une intégrale plus simple. Il est parfois nécessaire de faire plusieurs intégrations par parties successives. Ce procédé s'applique pour intégrer :

- le produit d'un polynôme en x par une exponentielle ;
- le produit d'un polynôme en x par un sinus ou cosinus ;
- le produit d'un polynôme en x par un logarithme ;
- le produit d'une exponentielle par un sinus ou cosinus ;
- certaines fonctions racines carrées.

Exemples

- Calculer $I = \int x \sin ax dx$, avec $a \neq 0$.

On pose :

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & g'(x) &= \sin ax \\ f'(x) &= 1, & g(x) &= -\frac{\cos ax}{a} \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$I = -x \frac{\cos ax}{a} + \int \frac{\cos ax}{a} dx$$

soit :

$$I = -x \frac{\cos ax}{a} + \frac{1}{a^2} \sin ax + C$$

$$I = -x \frac{\cos ax}{a} + \frac{1}{a^2} \sin ax + C$$

- Calculer $J = \int x e^{ax} dx$.

On pose :

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & g'(x) &= e^{ax} \\ f'(x) &= 1, & g(x) &= \frac{e^{ax}}{a} \end{aligned}$$

L'intégrale s'écrit :

$$J = x \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} dx$$

et :

$$J = x \frac{e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C$$

$$J = x \frac{e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C$$

• Calculer $K = \int x \cos(ax + b) dx$.

On pose :

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & g'(x) &= \cos(ax + b) \\ f'(x) &= 1, & g(x) &= \frac{\sin(ax + b)}{a} \end{aligned}$$

L'intégrale s'écrit :

$$K = \frac{x \sin(ax + b)}{a} - \int \frac{\sin(ax + b)}{a} dx$$

et :

$$K = \frac{x \sin(ax + b)}{a} + \frac{\cos(ax + b)}{a^2} + C$$

$$K = \frac{x \sin(ax + b)}{a} + \frac{\cos(ax + b)}{a^2} + C$$

• Calculer $L = \int e^{ax} \cos(bx + c) dx$.

On pose :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ax}, & g'(x) &= \cos(bx + c) \\ f'(x) &= ae^{ax}, & g(x) &= \frac{\sin(bx + c)}{b} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$L = e^{ax} \frac{\sin(bx + c)}{b} - \int a e^{ax} \frac{\sin(bx + c)}{b} dx$$

Pour la seconde intégrale on pose :

$$f_1(x) = f(x) = e^{ax}, \quad g'_1(x) = \sin(bx + c)$$

$$f'_1(x) = f'(x) = ae^{ax}, \quad g_1(x) = \frac{-\cos(bx + c)}{b}$$

Elle s'écrit donc :

$$-\frac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx + c) dx = \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos(bx + c)$$

$$-\frac{a^2}{b^2} \int \underbrace{e^{ax} \cos(bx + c)}_L dx$$

d'où :

$$L = \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx + c) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos(bx + c) - \frac{a^2}{b^2} L$$

soit :

$$L = \frac{\frac{1}{b} e^{ax} \left[\sin(bx + c) + \frac{a}{b} \cos(bx + c) \right]}{1 + \frac{a^2}{b^2}}$$

et :

$$L = \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \left[\sin(bx + c) + \frac{a}{b} \cos(bx + c) \right]$$

$$L = \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \left[\sin(bx + c) + \frac{a}{b} \cos(bx + c) \right]$$

• Calculer $M = \int \text{Arc tan } x \, dx$.

On pose :

$$f(x) = \text{Arc tan } x, \quad g'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = x$$

ainsi on obtient :

$$M = x \text{ Arc tan } x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2}$$

et :

$$M = x \text{ Arc tan } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$M = x \text{ Arc tan } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

• Calculer $N = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx$, avec $a > 0$.

On pose :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 - a^2}, & g'(x) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, & g(x) &= x \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$N = x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\text{Or } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2) dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ donc :}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

d'où :

$$N = x \sqrt{x^2 - a^2} - N - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

puis :

$$N = x \sqrt{x^2 - a^2} - N - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

On peut noter :

$$N_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

On considère $a > 0$ et on fait le changement de variable :

$$x = \varepsilon a \operatorname{ch} t, \quad \varepsilon = \pm 1$$

avec $\varepsilon = 1$, si $x > a$ et $\varepsilon = -1$, si $x < -a$; en effet, $x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$ et $a > 0$ ainsi que $\operatorname{ch} t > 0$.

Ceci implique :

$$x^2 - a^2 = a^2 (\operatorname{ch}^2 t - 1)$$

ou :

$$x^2 - a^2 = a^2 \operatorname{sh}^2 t$$

On obtient alors :

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a |\operatorname{sh} t|$$

de plus $dx = \varepsilon a \operatorname{sh} t dt$, ainsi :

$$N_1 = \int \frac{\varepsilon a \operatorname{sh} t dt}{a |\operatorname{sh} t|}$$

or $|\operatorname{sh} t| = \varepsilon \operatorname{sh} t$, d'où :

$$N_1 = \int dt \quad \text{et} \quad N_1 = t + C$$

mais, $t = \operatorname{Arg} \operatorname{ch} \varepsilon \frac{x}{a}$ (*), soit :

$$N_1 = \ln \left| \frac{\varepsilon x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C$$

on en déduit :

$$N = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln \left(\frac{\varepsilon x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) \right] + C$$

$$N = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln \left(\frac{\varepsilon x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) \right] + C$$

(*) *Calcul de l'argument*

En posant $y = \operatorname{ch} x$, soit $x = \operatorname{Arg} \operatorname{ch} y$ on peut écrire :

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ou :

$$e^x + \frac{1}{e^x} = 2y$$

on multiplie tous les termes par e^x et ainsi apparaît l'équation du second degré en e^x :

$$e^{2x} - 2y e^x + 1 = 0$$

les solutions sont de la forme :

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

la solution négative étant éliminée car $e^x > 0$.

D'où :

$$x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right)$$

• Calculer $P = \int \frac{\ln x}{x} dx$.

On pose :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x, & g'(x) &= \frac{1}{x} \\ f'(x) &= \frac{1}{x}, & g(x) &= \ln x \end{aligned}$$

on obtient alors :

$$P = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx + C$$

et :

$$P = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

$$P = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

• Intégration des fractions rationnelles

Il est parfois nécessaire de faire des transformations préliminaires. On peut écrire la fraction sous la forme $F(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, où $N(x)$ et $D(x)$ sont des polynômes en x .

Si $N(x)$ est de degré supérieur ou égal à $D(x)$ on obtient par division $F(x) = P(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$. L'intégration de la fraction $F(x)$ revient à intégrer le polynôme $P(x)$ et la fraction $\frac{R(x)}{D(x)}$ où $R(x)$ est de degré inférieur à $D(x)$.

Si $D(x)$ a des zéros il faut décomposer la fraction rationnelle en éléments simples donc plus faciles à intégrer.

Mettre $D(x)$ sous forme d'un produit de facteurs. Plusieurs éventualités peuvent se présenter dont on peut exposer ici les plus simples :

— ce sont des facteurs du premier degré non répétés :

$$D(x) = x(x - 2)(x + 3)$$

— ce sont des facteurs du premier degré répétés plusieurs fois :

$$D(x) = x(x + 3)^3(x - 1)^2$$

— ce sont des facteurs du second degré non répétés mélangés à des facteurs du premier degré non répétés :

$$D(x) = x(x^2 + 4)$$

— ce sont des facteurs du second degré répétés n fois :

$$D(x) = (3x^2 + 1)^4$$

(ici $D(x)$ n'a pas de zéros réels, mais se met sous une forme simple).

1^{er} Cas : Facteurs du premier degré non répétés (méthode par identification)

La partie fractionnaire peut s'écrire :

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{Mx + N}{(x - a)(x - b)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b},$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$$

ce qui implique :

$$Mx + N = A(x - b) + B(x - a)$$

On peut alors donner à x des valeurs simples facilitant les calculs.

Si $x = a$, il vient $Ma + N = A(a - b)$ soit :

$$A = \frac{Ma + N}{a - b} \quad \text{et} \quad B = \frac{Mb + N}{b - a}$$

et ensuite :

$$\int \frac{R(x)}{D(x)} dx = A \ln|x - a| + B \ln|x - b| + Cte$$

2^e Cas : Facteurs du premier degré répétés n fois

On obtient n fractions où l'exposant n diminue d'une unité à chaque fois, soit :

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{Mx + N}{(x - a)^3} = \frac{A}{(x - a)^3} + \frac{B}{(x - a)^2} + \frac{C}{(x - a)}$$

en utilisant la méthode par identification, il vient :

$$Mx + N = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

On peut aussi donner à x la valeur a , ce qui fournit A ,

puis dériver par rapport à x et faire $x = a$, ce qui donne B....
(ici $A = Ma + N$, $B = M$, $C = 0$), ensuite on peut intégrer
d'où :

$$\int \frac{R(x)}{D(x)} dx = \int \frac{A}{(x-a)^3} dx + \int \frac{B}{(x-a)^2} dx + \int \frac{C}{x-a} dx$$

et :

$$\int \frac{R(x)}{D(x)} dx = -\frac{A}{2(x-a)^2} - \frac{B}{x-a} + C \ln|x-a| + Cte$$

3^e Cas : Facteurs du second degré non répétés

La partie fractionnaire peut s'écrire :

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}$$

l'expression $ax^2 + bx + c$ n'admet pas de zéros réels, on
peut la noter :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \underbrace{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}_{> 0} \right]$$

On pose alors $u = x + \frac{b}{2a}$ avec $du = dx$, il vient :

$$ax^2 + bx + c = a(u^2 + A^2) \text{ et}$$

$$Mx + N = M\left(u - \frac{b}{2a}\right) + N = Mu - \frac{Mb}{2a} + N$$

donc ce changement de variable conduit à une nouvelle
fraction :

$$\frac{R(x)}{D(x)} \rightarrow \frac{R_1(u)}{D_1(u)} = \frac{Mu - \frac{Mb}{2a} + N}{a(u^2 + A^2)}$$

ce qui donne en intégrant :

$$\int \frac{R(x)}{D(x)} dx = \frac{M}{2a} \int \frac{2\frac{u}{A^2}}{1 + \frac{u^2}{A^2}} du + \int \frac{-\frac{Mb}{2a} + N}{a\left(1 + \frac{u^2}{A^2}\right)} \frac{du}{A^2}$$

ou :

$$\int \frac{R(x)}{D(x)} dx = \frac{M}{2a} \ln \left| 1 + \frac{u^2}{A^2} \right| + \frac{1}{aA} \left(-\frac{Mb}{2a} + N \right) \operatorname{Arctan} \frac{u}{A} + \text{Cte}$$

4^e Cas : Facteurs du second degré répétés n fois

Cas de $n = 2$ (si $n > 2$ l'intégration est beaucoup plus complexe).

On suppose que $\frac{R(x)}{D(x)}$ est de la forme $\frac{1}{(ax^2 + bx + c)^2}$,

on a alors :

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \int \frac{du}{a^2(u^2 + A^2)^2} \quad (\text{cf. cas précédent})$$

ce qui équivaut à :

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{1}{a^2 A^4} \int \frac{du}{\left(\frac{u^2}{A^2} + 1\right)^2}$$

Si l'on pose $v = \frac{u}{A}$ et $dv = \frac{du}{A}$, il vient :

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{1}{a^2 A^3} \int \frac{dv}{(v^2 + 1)^2}$$

ou :

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{1}{a^2 A^3} \int \frac{(v^2 + 1 - v^2)}{(v^2 + 1)^2} dv$$

soit encore :

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{1}{a^2 A^3} \int \frac{dv}{v^2 + 1} - \frac{1}{2a^2 A^3} \int \frac{2v^2}{(v^2 + 1)^2} dv$$

La première intégrale donne un Arctan et la seconde s'intègre par parties, pour ce faire on prend :

$$f'(v) = \frac{2v}{(v^2 + 1)^2}, \quad f(v) = -\frac{1}{v^2 + 1}$$

$$g(v) = v, \quad g'(v) = 1.$$

• **Intégration des expressions trigonométriques**

Il n'existe pas de méthode générale mais un certain nombre de procédés que l'on emploie suivant le type de l'intégrale à calculer.

Intégrales de la forme : $\int f(\sin x, \cos x, \tan x) dx$

On exprime $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ en fonction de $\tan \frac{x}{2}$.

$$\text{On rappelle que } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

La nouvelle variable est t donc :

$$\frac{x}{2} = \text{Arctan } t \Leftrightarrow x = 2 \text{Arctan } t \text{ et } dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

• Calculer $I = \int \frac{dx}{\sin x}$

En faisant le changement de variable on obtient :

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C$$

d'où :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

• Calculer $J = \int_0^{\pi} \frac{dx}{5 + 3 \cos x}$.

En faisant le changement de variable on obtient :

$$J = \int_0^{\pi} \frac{dx}{5 + 3 \cos x} = \int_0^{\infty} \frac{2 dt}{2t^2 + 8} \quad \text{avec,} \quad \begin{cases} \text{si } x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \\ \text{si } x \rightarrow \pi, t \rightarrow \infty \end{cases}$$

soit :

$$J = \int_0^{\infty} \frac{dt}{4 + t^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \text{Arctan} \left[\frac{t}{2} \right]_0^{\infty}$$

et :

$$J = \frac{\pi}{4}$$

$$J = \frac{\pi}{4}$$

• Calculer $K = \int \frac{\tan x \, dx}{1 + \cos x}$.

En faisant le changement de variable on obtient :

$$K = \int \frac{2t}{1-t^2} dt$$

la décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$$

d'où :

$$K = \int \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} \right) dt$$

et en intégrant :

$$K = -\ln |1-t| - \ln |1+t| + C$$

soit :

$$K = -\ln \left| 1 - \tan^2 \frac{x}{2} \right| + C$$

$$K = -\ln \left| 1 - \tan^2 \frac{x}{2} \right| + C$$

Intégrales de la forme : $\int \sin mx \cdot \cos px \, dx,$

$$\int \sin mx \cdot \sin px \, dx, \int \cos mx \cdot \cos px \, dx$$

On transforme ces produits en somme ou différence par l'emploi des formules :

$$\sin a \cdot \cos b = 1/2 \left[\sin(a + b) + \sin(a - b) \right]$$

$$\sin a \cdot \sin b = 1/2 \left[\cos(a - b) - \cos(a + b) \right]$$

$$\cos a \cdot \cos b = 1/2 \left[\cos(a + b) + \cos(a - b) \right]$$

• Calculer $I = \int \sin 3x \cos 2x \, dx$.

La transformation conduit à :

$$I = \int 1/2 [\sin 5x + \sin x] \, dx$$

d'où :

$$I = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C$$

$$I = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C$$

Intégrales de la forme : $\int f(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan^2 x, \sin x \cdot \cos x) \, dx$ (lignes trigonométriques au carré)

On exprime tous les termes en fonction de :

$$\tan x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

avec $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ et $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.

Après simplification on est ramené à une intégrale connue (on verra plus loin une intégration plus simple pour

$$\int \sin^2 x \, dx \text{ et } \int \cos^2 x \, dx).$$

• Calculer $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Le changement de variable conduit à :

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2}$$

soit en intégrant :

$$I = \left[-\frac{1}{t} \right]$$

et :

$$I = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$I = -\frac{1}{\tan x} + C$$

• Calculer $J = \int \tan^4 x \, dx$.

Le changement de variable conduit à :

$$J = \int t^4 \frac{dt}{1+t^2}$$

ce qui donne :

$$J = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt$$

d'où en intégrant :

$$J = \frac{t^3}{3} - t + \text{Arc tan } t + C$$

et :

$$J = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$$

$$J = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$$

Intégrales de la forme : $\int \sin^m x \cos^p x \, dx$

* m ou p est impair

L'intégrale peut alors se mettre sous la forme :

$$\int \sin^{m-1} x \cos^p x \sin x \, dx$$

où $m-1$ est pair ; on exprime ensuite $\sin^{m-1} x$ en fonction de $\cos x$.

Enfin on pose $\cos x = u$ et $\sin x \, dx = -du$ et l'on procède à l'intégration.

• Calculer $I = \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$.

L'intégrale équivaut à :

$$I = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x \, dx$$

ce qui donne après le changement de variable :

$$I = - \int u^2 \, du + \int u^4 \, du = - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C$$

et :

$$I = - \frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C$$

$$I = - \frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C$$

* m et p sont pairs

On exprime tout en fonction de $\sin x$ ou de $\cos x$ et on est amené à intégrer une puissance paire de $\sin x$ ou de $\cos x$ (cf. cas suivant).

Cas particulier de $I_{1m} = \int \sin^m x \, dx$ ou $I_{2m} = \int \cos^m x \, dx$

Intégration par parties :

$$I_{1m} = \int \sin^{m-1} x \sin x \, dx$$

On pose :

$$f(x) = \sin^{m-1} x \qquad g'(x) = \sin x$$

$$f'(x) = (m-1) \cos x \sin^{m-2} x, \quad g(x) = -\cos x$$

L'intégrale devient :

$$I_{1m} = -\cos x \sin^{m-1} x + \int (m-1) \cos^2 x \sin^{m-2} x \, dx$$

ou :

$$I_{1m} = -\cos x \sin^{m-1} x + \int (m-1) (1 - \sin^2 x) \sin^{m-2} x \, dx$$

soit :

$$I_{1m} = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \, dx - (m-1) \int \sin^m x \, dx$$

mais dans le dernier terme on sait que $\int \sin^m x \, dx = I_{1m}$
donc :

$$I_{1m} \left[1 + (m - 1) \right] = m I_{1m} \\ = -\cos x \sin^{m-1} x + (m - 1) \int \sin^{m-2} x \, dx$$

d'autre part $\int \sin^{m-2} x \, dx$, que l'on peut noter I_{1m-2} s'intègre directement ou par parties.

En fait on obtient une relation de récurrence entre I_{1m} et I_{1m-2} .

* Si m est pair, intégration par linéarisations successives en posant :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{ou} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

* Si m est impair, on écrit :

$$\int \sin^m x \, dx = \int \sin^{m-1} x \sin x \, dx \\ \text{(cf. méthode ci-dessus).}$$

Intégrales de la forme : $\int \tan^m x \, dx$ ou $\int \frac{dx}{\tan^m x}$

* Si m est pair

On fait le changement de variable suivant :

$$\tan x = t \quad \text{donc} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\bullet \text{ Calculer } I = \int \frac{dx}{\tan^4 x} = \int \frac{dt}{\frac{1+t^2}{t^4}} = \int \frac{dt}{t^4(1+t^2)}$$

Le changement de variable conduit à :

$$I = \int \frac{dt}{\frac{1+t^2}{t^4}} = \int \frac{dt}{t^4(1+t^2)}$$

On décompose en éléments simples et l'on intègre.

* Si m est impair

On fait alors les changements de variables suivants :

— avec $m > 0$, on pose $\cos x = t$;

— avec $m < 0$, on pose $\sin x = t$.

• Calculer $I = \int \frac{dx}{\tan^3 x}$ cas où $m = -3$; on pose $\sin x = t$

$\Rightarrow \cos x \, dx = dt$; donc :

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \cos x \, dx$$

soit :

$$I = \int \frac{1-t^2}{t^3} dt = \int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t}$$

et :

$$I = -\frac{1}{2 \sin^2 x} - \ln |\sin x| + C$$

$$I = -\frac{1}{2 \sin^2 x} - \ln |\sin x| + C$$

• Calculer $J = \int \tan^5 x \, dx$ cas où $m = +5$; on pose

$\cos x = t \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$; donc :

$$J = \int \frac{\sin^4 x \sin x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{(1-t^2)^2 (-dt)}{t^5}$$

soit :

$$J = -\int \frac{dt}{t^5} - \int \frac{dt}{t} + 2 \int \frac{dt}{t^3}$$

et :

$$J = \frac{1}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + C$$

$$J = \frac{1}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + C$$

La liste des méthodes d'intégration ainsi définie n'est pas exhaustive mais elle permet déjà de calculer un vaste échantillon d'intégrales.

1. 3. Intégrales curvilignes

1. 3. 1. Intégrale simple ou curviligne pour une fonction de point à valeur scalaire

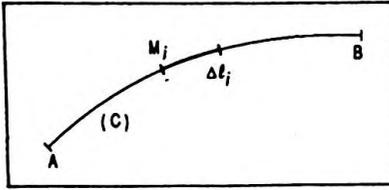


Figure 6.2

Soit $f(M)$ une fonction de point à valeur scalaire définie en tout point d'un espace dans lequel on choisit une courbe (C) entre 2 points A et B. On veut déterminer l'intégrale de cette fonction le long de AB (Fig. 6.2). Elle sera donnée par :

$$\int_{AB} f(M) d\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \ell_i$$

On l'appelle intégrale curviligne de la fonction $f(M)$ le long de AB. Elle est notée :

$$\int_{AB} f(M) dM$$

Si la courbe (C) est fermée cette intégrale est alors représentée par :

$$\oint f(M) d\ell = \oint_{(C)} f(M) dM$$

pour $f(M) = 1 \forall M \in (C)$, l'intégrale donne la longueur de la courbe (C).

1. 3. 2. Intégrale simple ou curviligne pour une fonction de point à valeur vectorielle

Soit $\vec{f}(M)$ une fonction de point à valeur vectorielle. On définit de même son intégrale curviligne le long d'une courbe ouverte AB par :

$$\int_{AB} \vec{f}(M) \cdot d\vec{\ell} = \int_{AB} \vec{f}(M) \cdot d\vec{M}$$

$\vec{f}(M) \cdot d\vec{\ell}$ est le produit scalaire de la valeur vectorielle de la fonction par l'élément de longueur $d\vec{\ell}$.

Remarques

- La valeur de l'intégrale curviligne est un scalaire.
- Si la courbe est fermée on la note :

$$\oint_{(C)} \vec{f}(M) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(C)} \vec{f}(M) \cdot d\vec{M}$$

- Cette intégrale curviligne s'appelle encore circulation de la fonction vectorielle le long de la courbe.

1. 4. Intégrales doubles ou intégrales de surface

1. 4. 1. Intégrale double pour une fonction de point à valeur scalaire

Soit $f(M)$ une fonction de point à valeur scalaire définie en tout point d'un espace dans lequel on choisit une surface (S) limitée par une courbe (C) (Fig. 6.3) ou fermée. On veut déterminer l'intégrale de cette fonction sur la surface.

Elle sera donnée par :

$$\iint_{(S)} f(M) dS = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$$

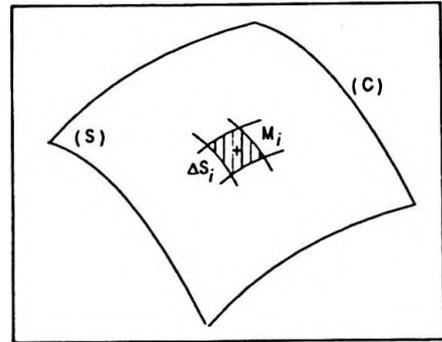


Figure 6.3

On l'appelle intégrale double ou intégrale de surface de f sur (S) .

- Si $f(M) = 1 \forall M \in (S)$, $\iint_{(S)} f(M) dS = S$, l'intégrale est égale à la surface.

1. 4. 2. Intégration

En général deux variables interviennent dans une telle intégrale, elles sont indépendantes. On intègre donc par rapport à la première ce qui ramène l'intégrale double à une intégrale simple puis on intègre par rapport à la seconde variable. Il faut bien choisir les variables de façon que $f(M)$ et dS s'expriment simplement en fonction de chacune d'elles.

Exemple

Un disque d'épaisseur négligeable possède une densité surfacique de masse $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$. Déterminer son moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) qui est perpendiculaire à son plan et passant par son centre.

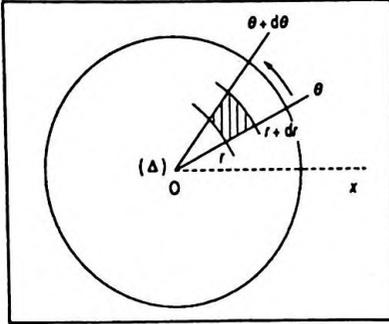


Figure 6.4

On sait que :

$$dj = dm r^2 \quad (\text{moment d'inertie d'un élément})$$

On choisit comme élément de surface l'élément limité par deux arcs concentriques de rayons respectifs r et $r + dr$ et par deux rayons faisant entre eux un angle $d\theta$. (On rappelle que dr et $d\theta$ sont aussi petits que possible) (Fig. 6.4).

Au point M_p , centre de cet élément, est associée la fonction de point à valeur scalaire $f(M_p) = \rho r^2$ où ρ est la densité surfacique de masse, ainsi :

$$J_{\Delta} = \iiint dm r^2 = \iiint \rho r^2 dS \quad \text{car } dm = \rho dS$$

Dans l'exemple choisi $dS = dr r d\theta$ où dr est la largeur de l'élément et $r d\theta$ est la longueur moyenne de l'élément.

On peut l'assimiler à un rectangle car dr et $d\theta$ sont aussi petits que possible ; ainsi :

$$J_{\Delta} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{M}{\pi R^2} r^3 dr d\theta$$

soit encore :

$$J_{\Delta} = \int_0^R \frac{M}{\pi R^2} r^3 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi}$$

après intégration par rapport à la variable θ on obtient :

$$J_{\Delta} = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$$

puis :

$$J_{\Delta} = \frac{2M}{R^2} \left[\frac{R^4}{4} \right]$$

enfin :

$$J_{\Delta} = 1/2 M R^2$$

$$J_{\Delta} = 1/2 M R^2$$

1. 4. 3. Intégrale double pour une fonction de point à valeur vectorielle

Soit $\vec{f}(M)$ une fonction de point à valeur vectorielle. On

définit de même son intégrale de surface sur une surface limitée par une courbe (C) ou fermée par :

$$\iint_{(S)} \vec{f}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{f}(M) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

où $\vec{f}(M) \cdot d\vec{S}$ est le produit scalaire de la valeur vectorielle de la fonction par l'élément de surface représenté par le vecteur $d\vec{S}$.

Remarques

- $d\vec{S}$ est un vecteur porté par la normale suivant son sens positif, sa norme est dS .
- La valeur de cette intégrale double est un scalaire.
- Cette intégrale double n'est autre que le flux de la grandeur vectorielle $\vec{f}(M)$ à travers la surface (S).

Exemple

Une charge électrique ponctuelle est placée au centre O d'une demi-sphère. Déterminer le flux du vecteur champ électrique à travers cette calotte sphérique.

Le champ électrique créé par la charge q en un point M est donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \vec{n} \quad (q > 0)$$

il représente le champ électrique créé par une charge ponctuelle en un point de l'espace situé à la distance R. Le flux de ce vecteur champ à travers un élément de surface est :

$$d\Phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

On prend l'élément de surface limité par deux parallèles vus sous un angle $d\theta$ du centre et par deux méridiens :

- la largeur BB' d'un tel élément est $R d\theta$;
- la longueur BB_1 d'un tel élément est un arc $d\ell$ du cercle de rayon $R \sin \theta$ et de centre I (Fig. 6.5).

Ainsi :

$$d\ell = \frac{2\pi R \sin \theta}{2\pi} d\alpha = R \sin \theta d\alpha$$

d'où :

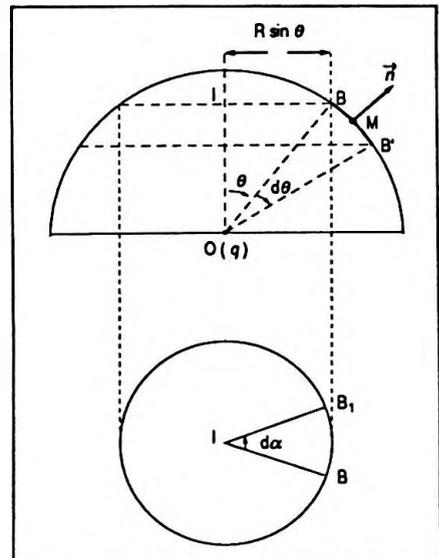


Figure 6.5

$$d\vec{S} = R^2 \sin \theta d\theta \cdot d\alpha \vec{n}$$

ce qui implique :

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} R^2 \sin \theta d\theta d\alpha$$

car $d\vec{S}$ et $\vec{E}(M)$ sont colinéaires.

Donc :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta$$

en intégrant d'abord par rapport à la variable α on obtient :

$$\Phi = \frac{q}{2\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(-\cos \theta)$$

soit :

$$\Phi = \frac{q}{2\epsilon_0} \left[-\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

et :

$$\Phi = \frac{q}{2\epsilon_0}$$

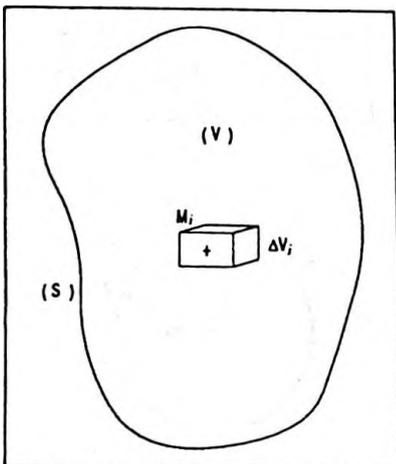


Figure 6.6

1. 5. Intégrales triples ou intégrales de volume

1. 5. 1. Intégrale triple pour une fonction de point à valeur scalaire

Soit $f(M)$ une fonction de point à valeur scalaire définie en tout point d'un espace dans lequel on choisit un volume (V) limité par une surface (S) (Fig. 6.6). On veut déterminer l'intégrale de cette fonction dans le volume.

Par définition elle sera donnée par :

$$\iiint_{(V)} f(M) dv = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta v_i$$

On l'appelle intégrale triple ou intégrale de vo-

lume sur (V).

• Si $f(M) = 1, \forall M \in (V)$, $\iiint_{(V)} f(M) dv = V$; l'intégrale est égale au volume.

1. 5. 2. Intégration

En général trois variables, qui sont indépendantes, interviennent dans une telle intégrale; on intègre donc par rapport à la première variable ce qui ramène l'intégrale triple à une intégrale double puis on ramène celle-ci à une intégrale simple en intégrant par rapport à la seconde variable.

On choisit les variables de façon que $f(M)$ et dv soient des expressions simplifiées.

Exemple

Si la densité de charge électrique dans l'espace est de la forme kr où r est la distance du point considéré au centre de la distribution, calculer la charge contenue dans une sphère de rayon R centrée en O .

La charge contenue dans l'élément de volume est :

$$dq = kr dv \text{ (charge élémentaire)}$$

où dv est l'élément de volume limité par 2 sphères concentriques de rayons respectifs r et $r + dr$ et deux paires de plans selon les coordonnées sphériques; c'est un petit parallélépipède de dimensions $(r \sin \theta d\varphi, r d\theta, dr)$ (Fig. 6.7).

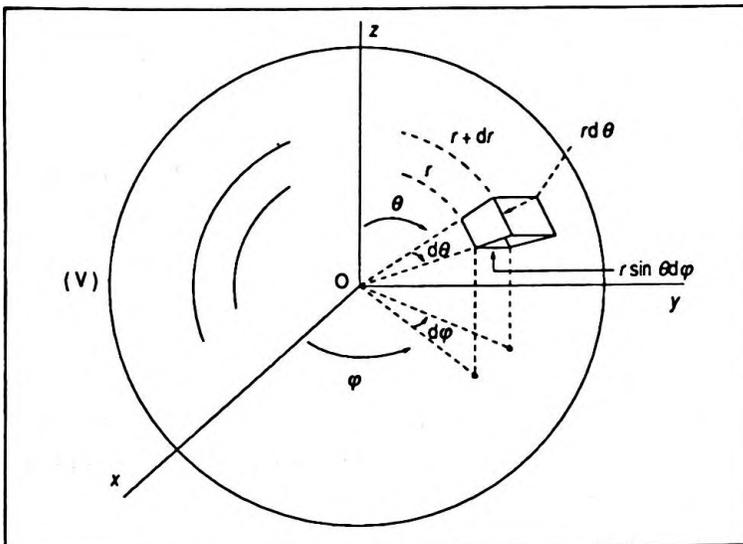


Figure 6.7

On peut ainsi écrire :

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

et :

$$dq = k r^3 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

qui est la charge de l'élément ; d'où la charge totale :

$$q = \iiint_{(V)} k r^3 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

soit :

$$q = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^3 dr$$

après intégration on obtient :

$$q = k 2\pi \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \frac{R^4}{4}$$

$$q = k 2\pi 2 \frac{R^4}{4}$$

et :

$$q = k \pi R^4$$

$$q = k \pi R^4$$

Remarque : l'élément de volume peut être noté dv .

2. APPLICATIONS À LA PHYSIQUE

2. 1. Application à l'électricité et à l'électromagnétisme

2. 1. 1. Électrostatique (charge électrique au repos dans, ou, sur la matière)

● Loi de Coulomb

Deux charges électriques q_1 et q_2 placées dans le vide à la distance r exercent l'une sur l'autre une force représentée par la grandeur vectorielle \vec{f} (*) (Fig. 6.8) :

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$$

avec q en coulomb (C), r en mètre (m), f en newton (N).

La force est répulsive ou attractive suivant que les charges sont ou non de même signe.

ϵ_0 : permittivité diélectrique du vide :

(*) En réalité l'force exercée par q_1 sur q_2 .

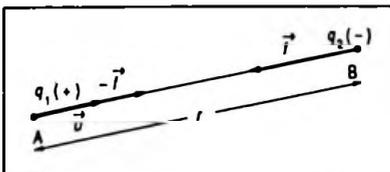


Figure 6.8

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ SI}$$

\vec{u} est le vecteur unitaire de la direction AB.

● **Champ électrostatique**

Champ électrostatique créé par une charge unique ponctuelle placée dans le vide

On considère la charge électrique q_1 placée en O. On détermine le champ électrique créé par cette charge en un point M. Soit q_0 une charge *unitaire* positive alors placée en ce point (Fig. 6.9). Elle est soumise à une force d'attraction ou de répulsion selon le signe de la charge q_1 .

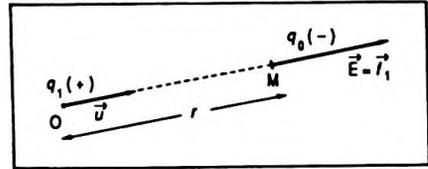


Figure 6.9

Cette force s'exerçant sur la charge unitaire positive s'identifiera alors au champ électrique en ce point soit :

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r^2} \vec{u}$$

or $q_0 = 1$ coulomb, donc :

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u} = \vec{E}$$

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u} = \vec{E}$$

E s'exprime en volt. m⁻¹.

\vec{E} caractérise l'action en M de la charge q_1 placée au point O.

Si q_1 est positif, \vec{E} est de même sens que $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{OM}$.

Si q_1 est négatif, \vec{E} est de sens contraire à \vec{u} .

Pour une charge quelconque q_2 placée en M, la force qu'elle subit sous l'action du champ \vec{E} est :

$$\vec{f} = q_2 \vec{E}$$

$$\vec{f} = q_2 \vec{E}$$

Champ électrostatique créé par un ensemble de charges placées dans le vide

On considère un ensemble de n charges ponctuelles réparties dans l'espace ; on admettra qu'elles agissent indépendamment les unes des autres et le champ résultant est donné par :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \right)$$

Si les charges sont réparties de façon continue sur une ligne, une surface ou un volume, la formule reste valable (on peut généralement intégrer si la distribution est continue).

$$\vec{E}(M) = \int_{(C)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_i}{r_i^2} \vec{u}_i \text{ avec } dq_i \text{ charge électrique}$$

portée par l'élément de courbe considéré.

$$\vec{E}(M) = \iint_{(S)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_i}{r_i^2} \vec{u}_i \text{ intégrale double pour une}$$

distribution surfacique ; dq_i charge portée par l'élément de surface.

$$\vec{E}(M) = \iiint_{(V)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_i}{r_i^2} \vec{u}_i \text{ intégrale triple pour une}$$

distribution volumique ; dq_i charge portée par l'élément de volume.

Exemple

Champ électrostatique créé en un point par une distribution linéaire de charge de densité λ de longueur infinie

On considère un fil infini de rayon négligeable sur lequel sont réparties uniformément des charges électriques. Soit $\lambda > 0$ la charge par unité de longueur que l'on appelle densité linéique de charge. On veut déterminer les caractéristiques du "vecteur champ électrique" au point M situé à la distance a du fil. Le plan de figure choisi contient le fil et le point M considéré. Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère simple associé au circuit (Fig. 6.10 ci-contre).

On considère un élément de fil de longueur $d\ell$, d'origine I ; on pose :

$$\vec{OI} = \ell \vec{j}$$

$d\ell$ étant petit on peut assimiler l'élément électrique à une charge pratiquement ponctuelle qui crée en M un champ électrique $\vec{E}_1(M)$ tel que :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{IM^2} \vec{u}$$

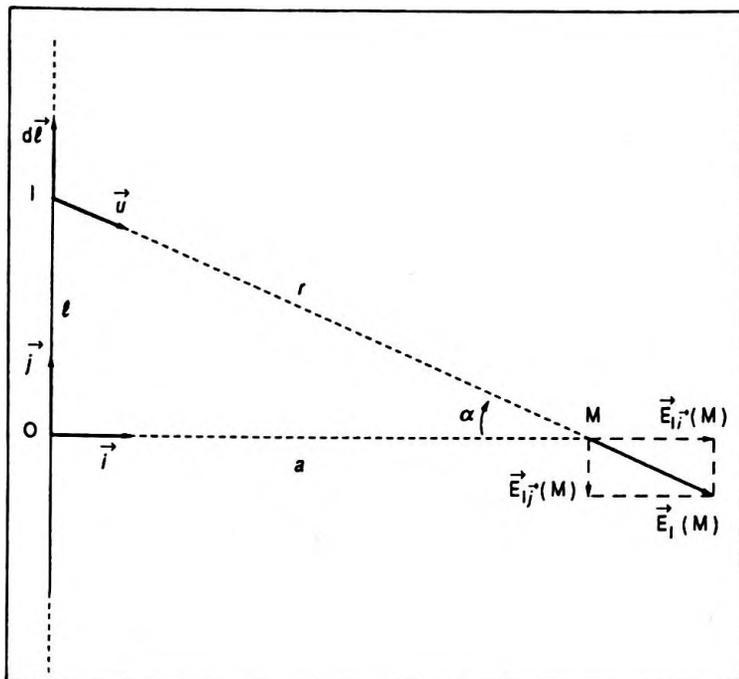


Figure 6.10

avec $dq = \lambda d\ell$ et $IM = r$ donc :

$$\vec{E}_I(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{r^2} \vec{u}$$

et :

$$\vec{E}(M) = \int_{\Omega} \vec{E}_I(M)$$

mais $\vec{E}_I(M) = \vec{E}_{Ii}(M) + \vec{E}_{Ij}(M)$.

Or pour deux éléments symétriques par rapport à O les composantes $\vec{E}_{Ij}(M)$ sont de sens contraire et s'annulent, donc :

$$\vec{E}(M) = \int_{\Omega} \vec{E}_{Ii}(M)$$

avec :

$$\vec{E}_{Ii}(M) = E_I(M) \cos \alpha \vec{i}$$

d'où :

$$\vec{E}_{Ii}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{r^2} \cos \alpha \vec{i}$$

et :

$$\vec{E}(M) = \int_{\text{fil}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{r^2} \cos\alpha \vec{i}$$

r , ℓ , α sont des variables non indépendantes.

On exprime r et ℓ en fonction de la seule variable α (il est plus commode d'intégrer avec des variables trigonométriques) :

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{\ell}{a} \Rightarrow \ell = a \tan\alpha \text{ et } d\ell = \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha$$

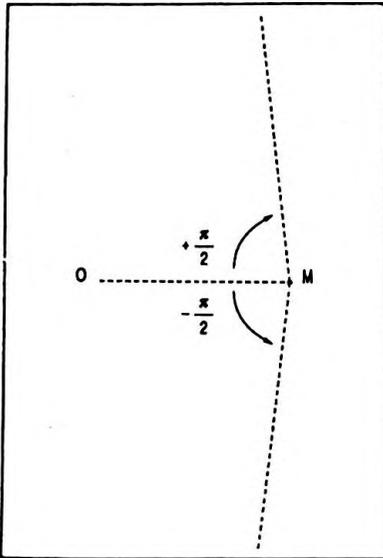


Figure 6.11

on en déduit :

$$\vec{E}(M) = \int_{\text{fil}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha}{\frac{a^2}{\cos^2\alpha}} \cos\alpha \vec{i}$$

soit :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \vec{i} \int_{\text{fil}} \cos\alpha d\alpha$$

or α varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ pour un fil infini (Fig. 6.11)

ainsi :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \vec{i} \left[\sin\alpha \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

et :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \vec{i}$$

● Potentiel électrostatique

Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle unique placée dans le vide

Soit en un point O une charge électrique q_1 créant en M un champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \vec{i}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}$$

On considère d'autre part un point M' voisin de M et on note $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}$ ou encore $d\vec{M} = d\vec{r}$ en choisissant arbitrairement O comme origine.

Cette notation a déjà été introduite au sujet de la variation d'une fonction de point.

On appelle circulation élémentaire dC du vecteur champ électrostatique $\vec{E}(M)$ au cours du déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ la grandeur scalaire :

$$dC = \vec{E}(M) \cdot d\vec{M}$$

La définition de la circulation d'une grandeur vectorielle $dC = \vec{E}(M) \cdot d\vec{r}$ a été développée dans le chapitre sur les opérateurs vectoriels.

La circulation élémentaire peut s'écrire dans l'exemple choisi :

$$dC = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

or \vec{r} et \vec{u} sont colinéaires ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$) donc $\vec{r} = r\vec{u}$ avec $d\vec{r} = dr\vec{u} + r d\vec{u}$ car r est variable en grandeur et \vec{u} en direction ; soit :

$$dC = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u} \cdot (dr\vec{u} + r d\vec{u})$$

Le produit scalaire étant distributif par rapport à l'addition vectorielle on en déduit que :

$$\vec{u} \cdot (dr\vec{u} + r d\vec{u}) = dr\vec{u} \cdot \vec{u} + r\vec{u} \cdot d\vec{u}$$

mais :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = 1$$

en dérivant il vient $\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$; ainsi un vecteur unitaire et sa différentielle sont orthogonaux, d'où :

$$dC = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} dr$$

Par convention on pose que cette circulation est égale à l'opposé de la variation d'une grandeur scalaire appelée *potentiel* :

$$dC = - dV$$

En intégrant on obtient cette grandeur scalaire :

$$V = - \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} dr$$

soit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} + Cte$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} + Cte$$

Remarque

Le potentiel créé en un point M par une charge électrique est défini à une constante près, constante qui sera calculée si l'on connaît exactement le potentiel en un point de référence.

En général on prend comme convention que le potentiel est nul à l'infini (lorsque la distribution de charge est finie) ce qui donne :

$$V(\infty) = 0 \Rightarrow Cte = 0$$

et :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$$

mais pour un fil infini chargé avec une densité linéique λ on ne peut plus prendre cette convention.

Potentiel électrostatique créé en un point par un ensemble de charges placées dans le vide

On considère un ensemble de n charges ponctuelles réparties dans l'espace ; on admettra qu'elles agissent indépendamment les unes des autres et le potentiel résultant est donné par :

$$V(M) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

Si les charges sont réparties sur une ligne, une surface ou un volume, la formule reste valable (on peut en général intégrer si la distribution est continue) :

$$V(M) = \int_{(C)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_i}{r_i}$$

$$V(M) = \iint_{(S)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_i}{r_i}$$

$$V(M) = \iiint_{(V)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_i}{r_i}$$

● **Relation entre le champ électrostatique en un point et le potentiel électrostatique en ce point**

La grandeur potentiel scalaire a été définie à partir de la circulation du "vecteur champ électrostatique" par :

$$dC = \vec{E}(M) \cdot d\vec{M} = -dV(M)$$

ce qui peut s'écrire en introduisant la notion de gradient:

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$

soit en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

donc :

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

et en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

donc :

$$\vec{E} = - \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

Potentiel et champ électrostatiques créés par un disque uniformément électrisé

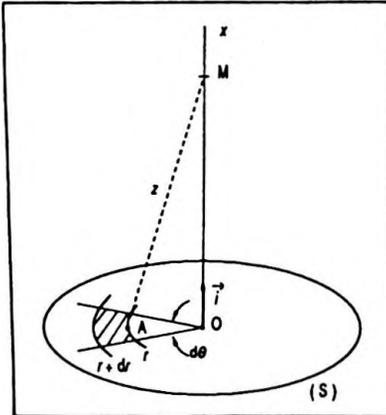


Figure 6.12

On considère le disque de rayon R chargé uniformément sur sa surface, σ est la densité surfacique de charge. Soit O son centre et Ox l'axe normal à son plan passant par ce point. On veut déterminer le potentiel en un point M d'abscisse x sur cet axe. Pour ce faire on choisit un élément de surface dS très petit (pratiquement ponctuel vu de M), limité par 2 arcs de rayons respectifs r et $r + dr$ et par deux rayons faisant entre eux un angle $d\theta$ (Fig. 6.12). On peut l'assimiler à un petit rectangle de côtés dr et $r d\theta$, donc :

$$dS = r d\theta dr$$

d'où la charge qu'il porte est :

$$dq = \sigma dS = \sigma r d\theta dr$$

Le potentiel élémentaire dV créé par cette charge dq au point M est donné par la formule de base :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r d\theta dr}{z}$$

z représente la distance de l'élément au point M.

Ainsi $z = (r^2 + x^2)^{1/2}$ car AOM est un triangle rectangle d'où :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r d\theta dr}{(r^2 + x^2)^{1/2}}$$

et :

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(S)} \frac{r d\theta dr}{(r^2 + x^2)^{1/2}}$$

mais r et θ sont deux variables indépendantes ; l'intégrale double se met sous la forme d'un produit de deux intégrales simples soit :

$$\iint_{(S)} = \int_{\theta} \cdot \int_r$$

r varie de 0 à R } pour balayer toute la surface (S), on
 θ varie de 0 à 2π }
 peut alors écrire :

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{1/2}}$$

(de la forme $\int f'(r) f^n(r) dr$)

et :

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \left[(r^2 + x^2)^{1/2} \right]_0^R$$

Attention : Ici r est variable et x est constant. Il vient donc :

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(R^2 + x^2)^{1/2} - x \right]$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(R^2 + x^2)^{1/2} - x \right]$$

Détermination du champ électrostatique $\vec{E}(M)$.

De par la symétrie de l'élément créateur de champ électrostatique celui-ci est une grandeur vectorielle portée par l'axe Ox donc de vecteur unitaire \vec{i} . Il n'existe donc qu'une seule composante $E(x)$ telle que :

$$E(x) = - \frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

(d'après la définition ci-dessus : relation entre champ et potentiel)

on en déduit :

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right]$$

et :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \vec{i}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \vec{i}$$

Remarque :

Si $R \rightarrow +\infty$ ou si $x \ll R$, du point M considéré le disque est alors perçu comme un plan infini car $\frac{x}{R} \rightarrow 0$ ainsi :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}$$

C'est l'expression du champ électrostatique au voisinage d'un plan uniformément électrisé.

On ne peut pas calculer le potentiel créé par un plan en utilisant cette méthode. En effet, on remarque que l'expression devient indéterminée; on aura recours à d'autres méthodes de calcul.

Potentiel électrostatique créé par un fil infini uniformément électrisé

On sait que :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{i}$$

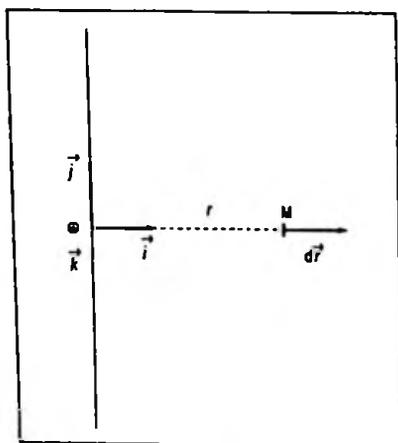


Figure 6.13

C'est le champ électrostatique existant à la distance r du fil.

Or :

$$\vec{E}(M) \cdot d\vec{M} = -dV(M)$$

$d\vec{M} = dr$ car r est la seule grandeur variable; dr vecteur de même direction que \vec{i} , est l'éloignement élémentaire (Fig. 6.13), donc :

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{i} \cdot d\vec{r} = -dV(M)$$

or :

$$\vec{i} \cdot d\vec{r} = dr$$

et :

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = -dV(M)$$

soit en intégrant :

$$V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r}$$

donc :

$$V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + Cte$$

$$V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + Cte$$

La constante est déterminée si l'on connaît le potentiel

en un point.

• Pourquoi a-t-on choisi $d\vec{r}$ vecteur de même direction que \vec{i} ?

Si $d\vec{r}$ est quelconque il peut se noter :

$$d\vec{r} = dr_x \vec{i} + dr_y \vec{j} + dr_z \vec{k}$$

en faisant le produit scalaire par le vecteur unitaire \vec{i} il vient :

$$\vec{i} \cdot d\vec{r} = dr_x \vec{i} \cdot \vec{i} + dr_y \vec{i} \cdot \vec{j} + dr_z \vec{i} \cdot \vec{k}$$

mais $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ car $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont orthogonaux et normés donc :

$$\vec{i} \cdot d\vec{r} = dr_x$$

On constate alors que seule la composante sur l'axe de vecteur unitaire \vec{i} intervient.

● Exemple du dipôle électrique

On appelle dipôle électrique l'ensemble formé par deux charges électriques égales mais de signes contraires placées à une distance d l'une de l'autre dans le vide (Fig. 6.14).

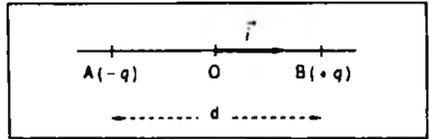


Figure 6.14

La caractéristique d'un dipôle est son moment dipolaire qui par définition est égal à :

$$\vec{p} = q d \vec{i}$$

(unités : C . m et debye (D))

Calcul du potentiel électrostatique créé par un dipôle en un point M de l'espace (Fig. 6.15)

Hypothèse : On supposera que la distance du point M au dipôle est grande par rapport à la longueur d de ce dipôle, ce qui est souvent le cas dans les applications concrètes.

La position du point M est repérée par les coordonnées cylindriques ou polaires, $OM = r$ et $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$.

Le potentiel créé par ce dipôle est :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M)$$

soit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q}{r_A} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_B}$$

et :

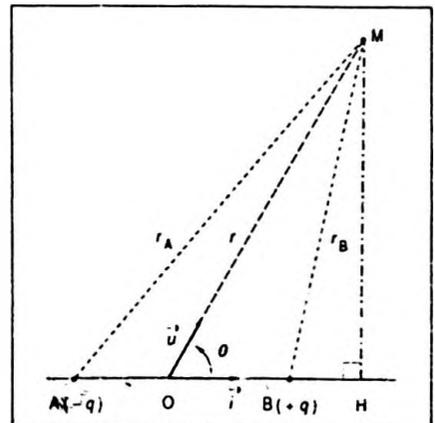


Figure 6.15

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Dans AMO, $r_A^2 = \frac{d^2}{4} + r^2 + 2\frac{d}{2} r \cos \theta$

Dans BMO, $r_B^2 = \frac{d^2}{4} + r^2 - 2\frac{d}{2} r \cos \theta$

ainsi :

$$r_A^2 - r_B^2 = 2dr \cos \theta$$

ce qui implique :

$$r_A - r_B = \frac{2dr \cos \theta}{r_A + r_B} \quad (\text{mais } r_A = r_B \neq 2r)$$

ou :

$$r_A - r_B = d \cos \theta$$

on en déduit :

$$\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} = \frac{r_A - r_B}{r_B r_A} = \frac{d \cos \theta}{r^2} \quad \text{car } (r_A r_B \neq r^2)$$

et :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

Il est alors possible d'introduire le moment dipolaire $\vec{p} = qd\vec{i}$ car :

$$qd \cos \theta = \vec{p} \cdot \vec{u} \quad (\vec{u} \text{ vecteur unitaire de OM})$$

et :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2}$$

Calcul du champ électrostatique créé par ce dipôle électrique au point M

On utilise les coordonnées cylindriques pour ce calcul, on peut donc écrire :

$$\vec{E}(M) = - \overline{\text{grad}} V(M)$$

$$\text{avec } \vec{E}(M) = \begin{cases} E_r = - \frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}$$

E_r est la composante radiale de vecteur unitaire \vec{u} (dériver V par rapport à r) ;

E_θ est la composante orthoradiale de vecteur unitaire \vec{t} (dériver V par rapport à θ) (Fig. 6.16).

Ainsi :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd \cos \theta}{r^3} \Leftrightarrow E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

et :

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \sin \theta}{r^3} \Leftrightarrow E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

on en déduit :

$$\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{t})$$

d'où :

$$\|\vec{E}(M)\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

en simplifiant il vient :

$$E(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$$

par ailleurs :

$$\tan \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \tan \theta$$

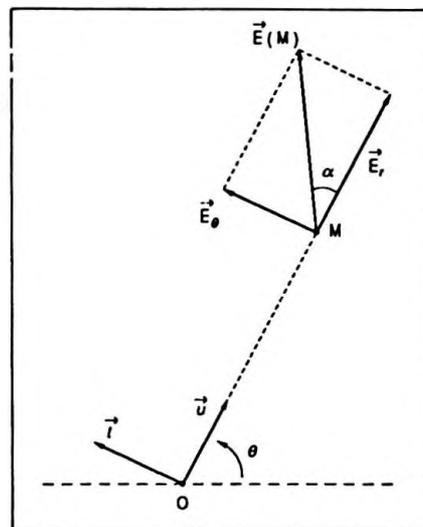


Figure 6.16

$$\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{t})$$

$$E(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$$

$$\tan \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \tan \theta$$

● Flux du champ électrostatique ● Théorème de Gauss

(Relire la définition du flux d'un vecteur à travers un élément de surface ou une surface fermée).

Le théorème de Gauss nous démontre que :

Le flux du champ électrostatique créé par des charges sortant d'une surface fermée est égal au produit de la somme algébrique des charges intérieures à cette surface par le terme $\frac{1}{\epsilon_0}$. En particulier il est indépendant de leur position et de leur distribution continue ou discontinue (Fig. 6.17) :

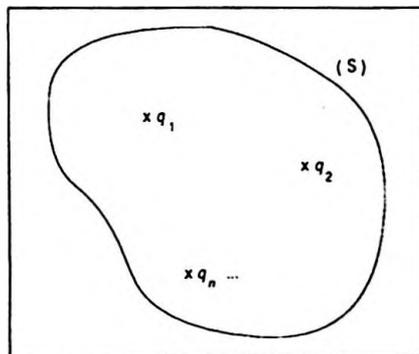


Figure 6.17

$$\Phi_{(S)}(\vec{E}) = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_{(S)}(\vec{E}) = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0}$$

Φ_S est le flux du champ électrostatique \vec{E} à travers la surface fermée (S).

Ce théorème permettra de calculer dans de nombreux cas le champ et le potentiel électrostatiques créés par une distribution.

Champ et potentiel électrostatiques créés par une couche sphérique uniformément chargée superficiellement

On considère la couche sphérique portant des charges électriques (positives) uniformément réparties dont la densité est σ en surface. On veut déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution.

Par raison de symétrie $\vec{E}(M)$ est porté par la direction OM (il est radial, les composantes orthoradiales s'annulant deux à deux) (Fig. 6.18).

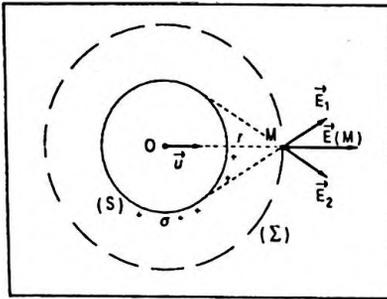


Figure 6.18

Ainsi :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}$$

avec $E(r)$ composante radiale du champ.

On prend une surface de Gauss imaginaire (Σ) sphérique concentrique à (S) et de rayon $r = OM$. D'après le théorème de Gauss on peut écrire :

$$\iint_{(\Sigma)} E(r) \vec{u} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

ce qui représente le flux du champ \vec{E} à travers la surface de Gauss (Σ).

$E(r)$ est une constante en tout point de cette surface d'après la symétrie sphérique car elle ne dépend que de r qui reste constant sur (Σ) donc :

$$\Phi = E(r) \iint_{(\Sigma)} \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

\vec{u} qui est un vecteur radial et $d\vec{S}$ un vecteur normal à l'élément de surface considéré sont donc colinéaires (Fig. 6.19)

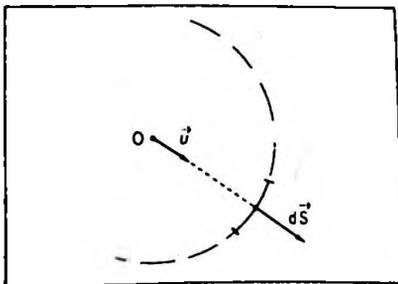


Figure 6.19

par conséquent :

$$\vec{u} \cdot d\vec{S} = dS$$

et $\iint_{(\Sigma)} dS = 4\pi r^2$ qui est la surface de la sphère de Gauss.

Ainsi :

$$\Phi = E(r) 4\pi r^2$$

Or, $\frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0} = \frac{\iint_{(S)} q_i}{\epsilon_0}$ puisqu'il s'agit d'une distribution continue de charges sur la surface (S) de rayon R. Soit :

$$\Phi = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0}$$

si $r > R$ toutes les charges sont intérieures à (Σ) par conséquent :

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0}$$

et :

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

d'où le vecteur champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

Le potentiel électrostatique $\vec{E}(M)$ ne dépend que de la seule variable r en particulier il est indépendant de θ donc :

$$E(M) = E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V(r) = -\int E(r) dr$$

Si $r > R$, alors $V(r) = -\frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2}$ et en intégrant on obtient :

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + Cte$$

la constante peut, par exemple, être déterminée si l'on connaît le potentiel de la sphère $V_0 = V$ (avec $r = R$) ce qui donne :

$$V_0 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 R} + Cte \Rightarrow Cte = V_0 - \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

et :

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + V_0 - \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + V_0 - \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

Remarques

On peut aussi considérer que le potentiel est nul à l'infini, dans ce cas la constante serait nulle.

Si $r < R$ la sphère de Gauss (Σ) est intérieure à la distribution (S) donc pas de charges intérieures à la sphère de Gauss. Le flux est nul et il en est de même pour le champ électrostatique, $\vec{E}(r) = \vec{0}$.

Le potentiel sur la sphère (S) et à l'intérieur est alors :

$$V(r) = Cte = V_0$$

2. 1. 2. Électromagnétisme

Champs magnétiques créés par les courants ; action des champs magnétiques sur les courants

● Loi de Biot et Savart

Un "élément de courant" c'est-à-dire un conducteur de longueur $d\vec{\ell}$ (petit) parcouru par un courant d'intensité i (l'orientation de $d\vec{\ell}$ indique le sens de passage du courant) crée en un point de son voisinage dans le vide un champ magnétique élémentaire défini par :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

μ_0 est la perméabilité magnétique du vide dont la valeur est :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S I}$$

Le champ magnétique total \vec{B} au point M est obtenu en intégrant sur le circuit pour tous les éléments de courant l'expression de $d\vec{B}$ ce qui s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

B est exprimé en tesla (T).

La direction de $\vec{B}(M)$ est définie par le produit vectoriel $d\vec{\ell} \wedge \vec{u}$; $d\vec{\ell}$, \vec{u} , $d\vec{B}$ forment un trièdre direct (Fig. 6.20).

Champ magnétique créé en un point par un fil rectiligne infini parcouru par un courant

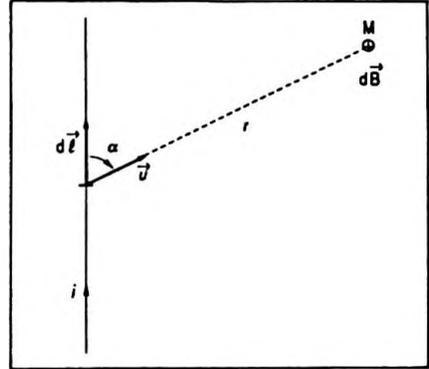


Figure 6.20

D'après la loi de Biot et Savart on peut écrire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Expression du produit vectoriel $d\vec{\ell} \wedge \vec{u}$:

$$d\vec{\ell} \wedge \vec{u} = \|d\vec{\ell}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot |\sin \alpha| \cdot \vec{k}$$

soit :

$$d\vec{\ell} \wedge \vec{u} = d\ell |\sin \alpha| \vec{k}$$

car $\|\vec{u}\| = 1$ avec $\alpha < 0$ selon l'orientation trigonométrique (Fig. 6.21) ; donc :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i d\ell |\sin \alpha| \vec{k}}{4\pi r^2}$$

r , ℓ , α sont des variables non indépendantes ; on peut donc exprimer r et ℓ en fonction de la seule variable α :

$$\tan \alpha = + \frac{a}{\ell} \quad (\ell = \overline{OA} < 0 \text{ sur la figure})$$

soit :

$$\ell = + a \cotan \alpha \quad \text{et} \quad d\ell = - \frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

d'autre part :

$$\sin \alpha = - \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{-a}{\sin \alpha}$$

ainsi :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{- \frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha} |\sin \alpha| \vec{k}}{\frac{a^2}{\sin^2 \alpha}}$$

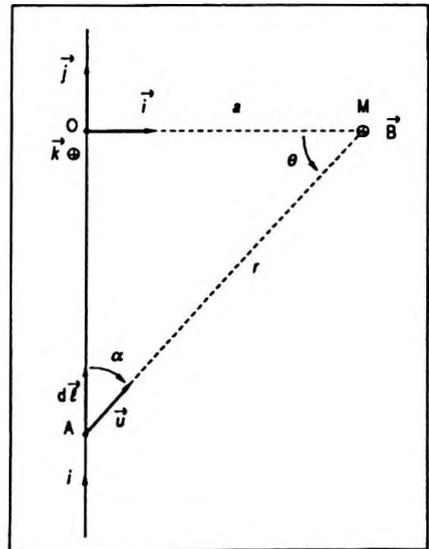


Figure 6.21

ou après simplification :

$$d\vec{B} = \frac{-\mu_0 i}{4\pi} \frac{|\sin \alpha| \vec{k} d\alpha}{a}$$

On pourrait aussi choisir θ comme variable $\theta = \frac{\pi}{2} - |\alpha|$.

Le fil étant infini, α varie de 0 à $-\pi$ (si le courant va de bas en haut) donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \vec{k} \int_0^{-\pi} \sin \alpha d\alpha$$

en intégrant il vient :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \vec{k} \left[-\cos \alpha \right]_0^{-\pi}$$

et :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \vec{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \vec{k}$$

Champ magnétique créé par un solénoïde parcouru par un courant en un point de son axe

Un solénoïde est un ensemble formé d'un grand nombre de spires reliées entre elles, le courant entrant par la première et ressortant par la dernière ; les spires sont généralement juxtaposées mais isolées par un vernis spécial. On lui donne encore le nom de bobine (Fig. 6.22).

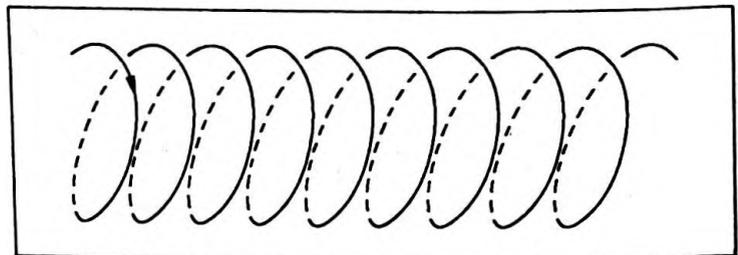
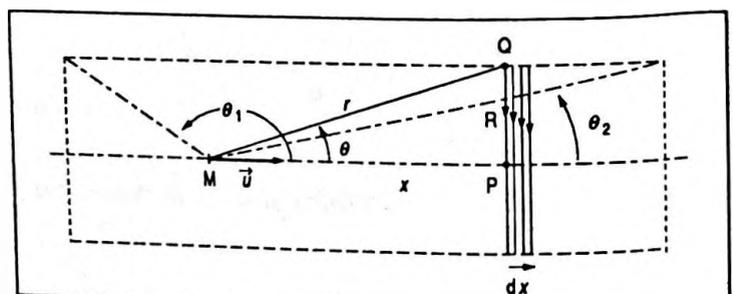


Figure 6.22

Pour le calcul du champ magnétique en un point M de son axe, on peut schématiser sa représentation (Fig. 6.23).



Le solénoïde étant un ensemble de spires, le vecteur champ magnétique en un point de l'axe est dirigé suivant l'axe comme dans le cas d'une seule spire (Fig. 6.24). D'autre part, on rappelle que ce champ magnétique pour une spire de rayon R parcourue par un courant d'intensité i en un point M de l'axe de la spire situé à la distance x du centre est donné par la formule :

$$\vec{b} = -\frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}$$

le signe est lié au sens de passage du courant.

On considère une "tranche" du solénoïde de largeur dx (petite), le nombre de spires par unité de longueur étant n , l'élément considéré en contient donc $n dx$. Cet élément de solénoïde crée alors au point M de son axe un champ magnétique $d\vec{B}$ tel que :

$$d\vec{B} = n dx \vec{b} = n dx \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}$$

Pour déterminer \vec{B} il faudra considérer l'ensemble du solénoïde et intégrer.

On peut transformer l'intégrale :

$$\vec{B} = \int_{x_1}^{x_2} n \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx \vec{u}$$

en intégrale trigonométrique en opérant le changement de variable suivant :

$$\tan \theta = \frac{R}{x} \Leftrightarrow x = R \cotan \theta \text{ et } dx = -\frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$$

d'autre part :

$$\sin \theta = \frac{R}{(x^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{PQ}{MQ}$$

soit :

$$\sin^3 \theta = \frac{R^3}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

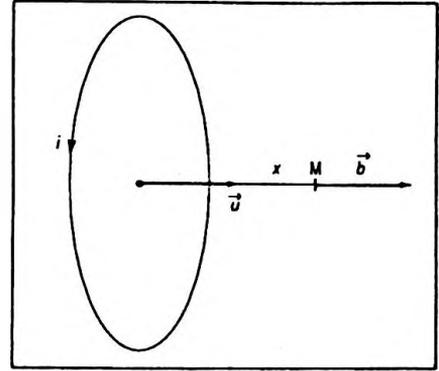


Figure 6.24

d'où :

$$\vec{B} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} n \frac{\mu_0 i}{2} \frac{\sin^3 \theta}{R} (-) \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta} \vec{u}$$

après simplification on obtient :

$$\vec{B} = \frac{n \mu_0 i}{2} \vec{u} \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\sin \theta d\theta$$

et :

$$\vec{B} = \frac{n \mu_0 i}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{u}$$

$$\vec{B} = \frac{n \mu_0 i}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{u}$$

Si $R \ll \ell$ longueur du solénoïde alors :

$$\theta_1 \neq \pi \text{ et } \theta_2 \neq 0$$

donc :

$$\vec{B} = n \mu_0 i \vec{u}$$

$$\vec{B} = n \mu_0 i \vec{u}$$

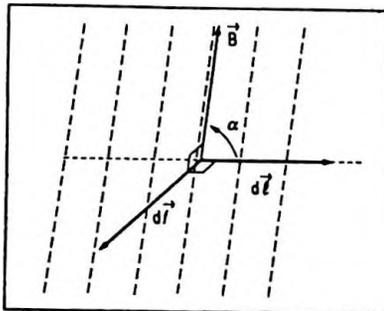


Figure 6.25

$$df = i dl B |\sin \alpha|$$

● Loi de Laplace

Tout élément de conducteur de longueur $d\vec{\ell}$, parcouru par un courant d'intensité i placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} sera soumis à une force $d\vec{f}$ telle que :

$$d\vec{f} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

- $d\vec{\ell}$ indique le sens de passage du courant i .
- $d\vec{\ell}$, \vec{B} , $d\vec{f}$ forment un trièdre direct (Fig. 6.25).

Ainsi :

$$df = i dl B |\sin \alpha|$$

Calcul d'une force résultante

Un fil rectiligne rigide infini est parcouru par un courant d'intensité i_1 . Un cadre rectangulaire de dimensions (a, b) est placé au voisinage du fil de façon que son plan "contienne" le fil et que sa grande dimension soit parallèle à ce dernier (Fig. 6.26). La distance du fil à son centre est R , il est lui-même parcouru par un courant d'intensité i_2 . On veut déterminer la résultante des forces agissant sur ce cadre.

Le champ magnétique créé par (F) est "constant" en tout point de AD ; son expression est :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi \left(R - \frac{a}{2}\right)} \vec{w}$$

(voir l'expression du champ magnétique créé par un fil)

or :

$$\vec{f}_1 = i_2 \overrightarrow{AD} \wedge \vec{B}_1$$

avec $\overrightarrow{AD} \perp \vec{B}_1$, $\sin \alpha = 1$ et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trièdre direct.

Donc :

$$\vec{f}_1 = i_2 b \frac{\mu_0 i_1}{2\pi \left(R - \frac{a}{2}\right)} \vec{u}$$

de même la force exercée sur le fil CB s'écrit :

$$\vec{f}_2 = -i_2 b \frac{\mu_0 i_1}{2\pi \left(R + \frac{a}{2}\right)} \vec{u}$$

le signe - est dû au fait que le sens du courant dans CB est opposé à celui qui passe dans AD.

Le long de AB le champ magnétique n'est pas uniforme; à la distance x du fil (F) il se note :

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \vec{w}$$

La force s'exerçant sur un petit élément de courant de longueur dx est alors :

$$d\vec{f}_3 = -i_2 dx \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \vec{u} \wedge \vec{w}$$

or $-\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v}$, donc :

$$\vec{f}_3 = \frac{i_2 \mu_0 i_1}{2\pi} \vec{v} \int_{R+\frac{a}{2}}^{R-\frac{a}{2}} \frac{dx}{x} \text{ avec } x \in \left[R - \frac{a}{2}, R + \frac{a}{2} \right]$$

en intégrant il vient :

$$\vec{f}_3 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \ln \frac{R - \frac{a}{2}}{R + \frac{a}{2}} \vec{v} = -\vec{f}_4 \text{ (sur DC)}$$

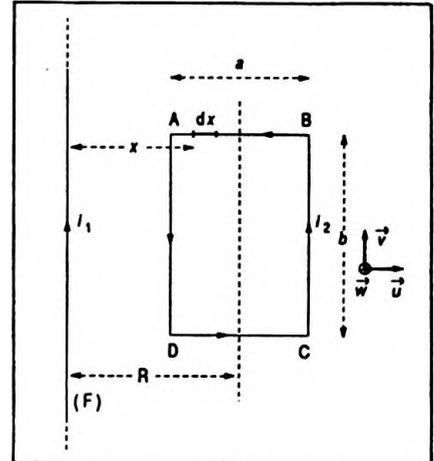


Figure 6.26

d'où :

$$\vec{f}_3 + \vec{f}_4 = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2 b}{2\pi} \left(\frac{1}{R - \frac{a}{2}} - \frac{1}{R + \frac{a}{2}} \right) \vec{u}$$

et :

$$\vec{f} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 b}{2\pi} \frac{a}{R^2 - \frac{a^2}{4}} \vec{u}$$

$$\vec{f} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 b}{2\pi} \frac{a}{R^2 - \frac{a^2}{4}} \vec{u}$$

Calcul d'un flux de champ magnétique

On calcule le flux du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant à travers un circuit rectangulaire (a, b) placé dans son voisinage. La distance du fil au centre du cadre est R .

Soit un rectangle élémentaire (dx, dy) dont le centre est situé à la distance x du fil (Fig. 6.27). Le champ magnétique créé par le fil parcouru par un courant en son centre est :

$$\vec{B}_x = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \vec{k}$$

On peut le considérer uniforme pour ce rectangle donc :

$$d\Phi = \vec{B}_x \cdot d\vec{S}$$

or, $d\vec{S} = dx dy \vec{k}$ (cf. définition du vecteur surface en prenant une orientation positive) ainsi :

$$d\Phi = B_x dx dy$$

ou :

$$d\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} dx dy$$

et :

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{dx}{x} dy$$

x et y sont des variables indépendantes, l'intégrale double peut donc se transformer en deux intégrales simples, il vient donc :

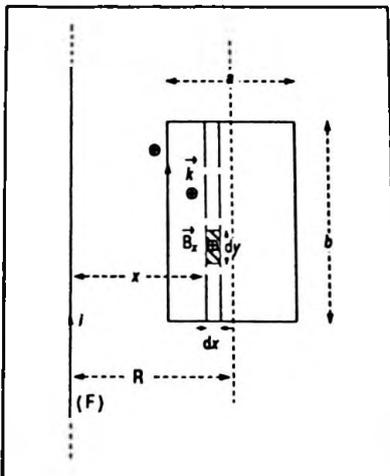


Figure 6.27

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^b dy \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{dx}{x}$$

soit en intégrant :

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \ln \frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \ln \frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}}$$

2. 1. 3. Courant alternatif sinusoïdal

• Calcul des intensités moyennes

Courant alternatif non redressé (Fig. 6.28)

L'intensité est de la forme :

$$i = I_m \sin \omega t$$

sa valeur moyenne s'écrit :

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t dt$$

en intégrant on obtient :

$$\bar{I} = \frac{I_m}{T} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^T$$

et :

$$\bar{I} = \frac{I_m}{T} \left[-\frac{\cos \omega T}{\omega} + \frac{\cos 0}{\omega} \right]$$

or $\cos \omega T = \cos \frac{2\pi}{T} T = 1$ donc :

$$\bar{I} = \frac{I_m}{T} \left(-\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right) = 0$$

soit :

$$\bar{I} = 0$$

$$T = 0$$

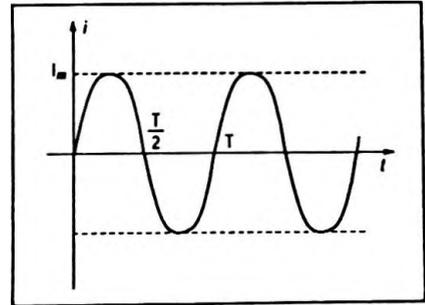


Figure 6.28

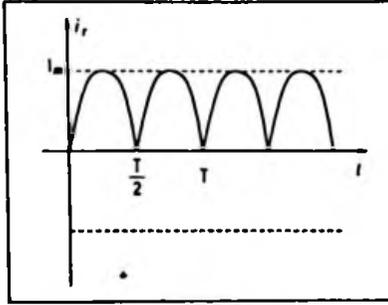


Figure 6.29

Courant alternatif redressé à 2 alternances (Fig. 6.29)

On peut calculer l'intensité moyenne sur $\frac{1}{2}$ période soit :

$$\bar{I}_r = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \, dt$$

En effet la fonction est la même que pour le courant alternatif sinusoïdal non redressé sur $\left[0, \frac{T}{2} \right]$ ainsi :

$$\bar{I}_r = \frac{2 I_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \, dt$$

en intégrant on obtient :

$$\bar{I}_r = \frac{2 I_m}{T} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}}$$

soit :

$$\bar{I}_r = \frac{2 I_m}{T} \left(-\frac{\cos 2 \frac{\pi}{T} \frac{T}{2}}{\omega} + \frac{\cos 0}{\omega} \right)$$

or $-\frac{\cos \pi}{\omega} = \frac{1}{\omega}$ et $\frac{\cos 0}{\omega} = \frac{1}{\omega}$ ce qui implique :

$$\bar{I}_r = \frac{4 I_m}{T \omega}$$

mais $\omega = \frac{2\pi}{T}$ donc :

$$\bar{I}_r = \frac{2 I_m}{\pi}$$

$$\bar{I}_r = \frac{2 I_m}{\pi}$$

Courant alternatif filtré (Fig. 6.30)

L'alternance négative est supprimée donc :

$$i = I_m \sin \omega t, \text{ si } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right]$$

et :

$$i = 0 \text{ si } t \in \left[\frac{T}{2}, T \right]$$

la valeur moyenne s'écrit :

$$\bar{I}_f = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t \, dt$$

le calcul conduit à :

$$\bar{I}_f = \frac{I_m}{\pi}$$

Ici la période est T alors que pour le courant redressé elle était $\frac{T}{2}$.

● Calcul de l'énergie libérée par un courant alternatif ; introduction des grandeurs efficaces

On considère un courant alternatif sinusoïdal, d'intensité $i = I_m \sin \omega t$. On veut déterminer l'énergie dégagée par effet joule dans un conducteur de résistance R.

Pendant un intervalle de temps dt très petit l'intensité peut être considérée comme constante, donc :

$$dW = Ri^2 \, dt$$

et sur une période du courant alternatif on a :

$$W = \int_0^T Ri^2 \, dt$$

ou :

$$W = RI_m^2 \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt$$

pour intégrer il faut "linéariser" $\sin^2 \omega t$ ce qui donne :

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$$

soit :

$$W = RI_m^2 \left[\frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} (\sin 2\omega t)_0^T \right]$$

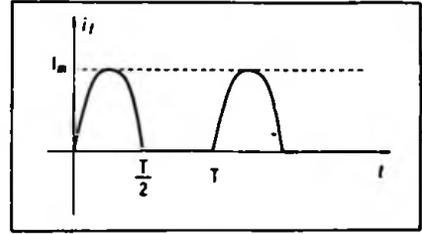


Figure 6.30

$$\bar{I}_f = \frac{I_m}{\pi}$$

or $(\sin 2\omega t)_0^T = \sin\left(2\frac{2\pi}{T}T\right) - \sin 0 = 0$ donc :

$$W = \frac{RI_m^2 T}{2}$$

On appelle *intensité efficace* I l'intensité du courant continu qui produirait le même dégagement par effet joule que le courant alternatif pendant le même temps.

Si $W = RI^2 T$, par identification on obtient :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

D'une façon générale f étant périodique et de période T continue donc intégrable sur $[0, T]$ la fonction f^2 a les mêmes propriétés que f et l'intégrale de f^2 sur un intervalle égal à la période est constante, le nombre positif μ tel que :

$$\mu^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt$$

est appelé valeur efficace de f .

Application

Déterminer la valeur efficace U de la tension alternative sinusoïdale telle que $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$. D'après la définition on pose :

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} U_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt$$

et :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

● Puissance moyenne en courant alternatif

D'après la définition d'une grandeur moyenne on peut écrire :

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T u i \, dt$$

où u est la ddp instantanée aux bornes de la portion de circuit et i l'intensité instantanée qui traverse cette portion.

Or $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ et $i = I_m \sin \omega t$ donc :

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin(\omega t + \varphi) I_m \sin \omega t \, dt$$

ou :

$$P_m = \frac{U_m I_m}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t \, dt$$

mais nous savons que :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \left[\cos(a - b) - \cos(a + b) \right] \text{ donc :}$$

$$\sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t = \frac{1}{2} \left(\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi) \right)$$

et :

$$P_m = \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T \left(\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi) \right) dt$$

l'intégrale donne :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi) \right) dt \\ &= \left[t \cos \varphi - \frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{2\omega} \right]_0^T = T \cos \varphi \end{aligned}$$

d'où l'expression de la puissance moyenne qui est :

$$P_m = \frac{U_m I_m \cos \varphi T}{2T}$$

soit finalement :

$$P_m = UI \cos \varphi$$

$$P_m = UI \cos \varphi$$

2. 2. Application à la thermodynamique

2. 2. 1. Étude d'une compression isotherme réversible

On peut faire subir des transformations à un gaz, en particulier le comprimer de la pression p_1 à la pression p_2 ($p_2 > p_1$) ceci à température constante (isotherme) donc obéissant à la Loi de Mariotte. On supposera que les états intermédiaires sont quasi-statiques ce qui signifie qu'à chaque instant la température restant égale à T on a $pV = p_1 V_1$ (chaque état est un état d'équilibre du gaz avec p , V , T bien définis) et en particulier $p_1 V_1 = p_2 V_2$ (V_1 volume initial, V_2 volume final).

On veut déterminer le travail mis en jeu dans une telle compression.

$\delta W = - p dV$ (ceci est valable pour toute transformation élémentaire réversible quelle que soit sa nature).

On applique ceci au cas particulier de la compression isotherme soit :

$$W = \int_{p_1}^{p_2} - p dV$$

or p et V sont deux variables non indépendantes, on élimine p en l'exprimant en fonction de V .

A chaque instant $pV = p_1 V_1$ dans une transformation isotherme réversible donc :

$$p = \frac{p_1 V_1}{V}$$

et :

$$W = - p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

d'où :

$$W = - p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$W = - p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

• $V_2 < V_1 \Rightarrow W > 0$, le système reçoit du travail lors de la compression.

2. 2. 2. Étude d'une compression adiabatique réversible

Lors d'une telle compression la température du gaz ne reste plus constante car l'opération se fait dans une enceinte dont les parois spéciales *empêchent tout échange de chaleur* entre le gaz et le milieu extérieur ainsi :

$$\delta Q = 0$$

La relation entre la pression et le volume dans chaque état est :

$$p V^\gamma = \text{Cte}$$

$$p V^\gamma = \text{Cte}$$

dans laquelle γ est une constante dépendant uniquement de l'atomicité du gaz.

$\gamma = \frac{C_{m_p}}{C_{m_v}}$ où C_{m_p} est la chaleur molaire à pression constante et C_{m_v} est la chaleur molaire à volume constant.

De plus, $C_{m_p} - C_{m_v} = R$ (relation de Mayer pour une mole de gaz).

La compression adiabatique fera passer le gaz de l'état (p_1, V_1, T_1) à l'état (p_2, V_2, T_2) donc :

$$p V^\gamma = p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

(chaque état étant un état d'équilibre)

On sait que $\delta W = -p dV$. Cette expression reste valable quelle que soit la transformation pourvu qu'elle soit réversible. Le travail total lors de la transformation est alors :

$$W = \int_{p_1}^{p_2} -p dV$$

Si l'on élimine la variable p il vient :

$$p V^\gamma = p_1 V_1^\gamma$$

ceci est vérifié pour tout état du gaz défini par (p, V) , donc :

$$p = \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma}$$

on en déduit :

$$W = - p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma}$$

soit en intégrant :

$$W = - p_1 V_1^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_1}^{V_2}$$

ou :

$$W = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma - 1} \left(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma} \right)$$

ce qui donne :

$$W = \frac{p_1 V_1^\gamma V_2^{1-\gamma} - p_1 V_1^\gamma V_1^{1-\gamma}}{\gamma - 1}$$

mais :

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

donc :

$$W = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} = \frac{nR(T_2 - T_1)}{\gamma - 1} \quad W = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} = \frac{nR(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}$$

puisque $pV = nRT$ quelque soient p, V, T si l'on considère que le gaz est parfait.

2. 2. 3. Variation d'entropie d'un gaz parfait au cours d'une transformation finie

On considère une certaine masse d'un gaz parfait qui passe de l'état initial défini par (p_1, V_1, T_1) à l'état final défini par (p_2, V_2, T_2) le processus étant réversible. La variation d'entropie lors d'une transformation élémentaire réversible est donnée par :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

si le gaz est parfait :

$$\delta Q = C_p dT - V dp$$

ou :

$$\delta Q = C_v dT + p dV$$

donc :

$$\Delta S = \int_1^2 \left(C_p \frac{dT}{T} - V \frac{dp}{T} \right) \text{ avec } \frac{V}{T} = \frac{nR}{P}$$

ou :

$$\Delta S = \int_1^2 \left(C_v \frac{dT}{T} + p \frac{dV}{T} \right) \text{ avec } \frac{p}{T} = \frac{nR}{V}$$

on obtient donc :

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{p_2}{p_1}$$

ou :

$$\Delta S = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

On rappelle que C_p et C_v sont les capacités calorifiques du gaz considéré respectivement à pression et volume constants.

2. 3. Application au calcul des volumes

2. 3. 1. Principe du calcul

Soit le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. L'unité de volume sera donnée par un cube élémentaire ayant pour arêtes respectivement $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

On considère un volume limité par une surface fermée (Σ) et soit un plan (P) de cote z parallèle au plan $(x O y)$. Le plan admet pour intersection avec (Σ) une courbe (C) (Fig. 6.31). A tout réel z , cote de (P) , on peut associer par l'application s l'aire $s(z)$ intérieure à (C) .

Soit (P') un plan voisin de (P) parallèle à celui-ci et de cote $z + dz$; le volume élémentaire dV limité par les deux plans et la surface (Σ) est :

$$dV = s(z) dz$$

Ainsi le volume V limité par deux plans quelconques de cote a et b et la surface (Σ) sera :

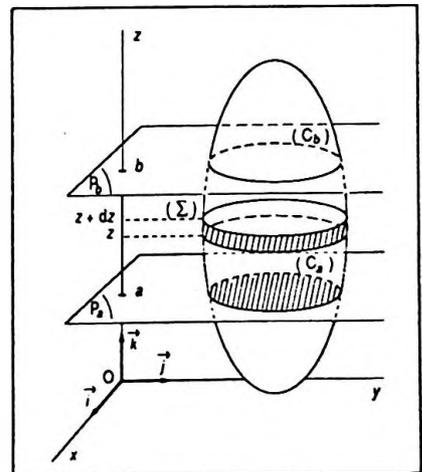


Figure 6.31

$$V = \int_a^b s(z) dz$$

2. 3. 2. Volume d'un cône

On prend le cas particulier et simple du cône admettant l'axe Oz comme axe de symétrie (Fig. 6.32). Le volume est alors donné par :

$$V = \int_0^h \pi r^2 dz$$

mais r et z sont des variables non indépendantes et :

$$\frac{r}{R} = \frac{z}{h} \Leftrightarrow z = \frac{r}{R} h \text{ ce qui conduit à } dz = \frac{h}{R} dr$$

d'où :

$$V = \int_0^R \pi r^2 \frac{h}{R} dr$$

On peut sortir de l'intégrale les termes constants, il vient alors :

$$V = \frac{\pi h}{R} \int_0^R r^2 dr$$

on obtient en intégrant :

$$V = \frac{\pi h}{R} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R$$

soit finalement :

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

2. 3. 3. Volume d'une sphère

La sphère étudiée est centrée en O, origine du repère orthonormé (Fig. 6.33). Son volume est :

$$V = \int_{-R}^R \pi r^2 dz$$

r et z ne sont pas des variables indépendantes en effet :

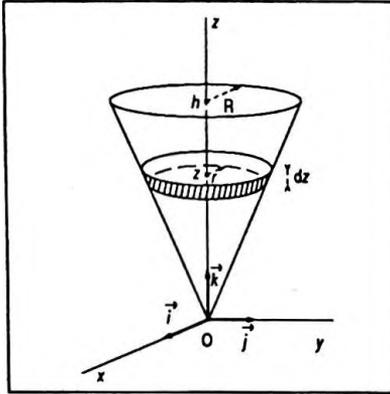


Figure 6.32

$$r^2 + z^2 = R^2$$

On prend ici z comme variable d'intégration or :

$$r^2 = R^2 - z^2$$

donc :

$$V = \int_{-R}^R \pi (R^2 - z^2) dz$$

on obtient en intégrant :

$$V = \left[\pi R^2 z \right]_{-R}^R - \left[\pi \frac{z^3}{3} \right]_{-R}^R$$

soit :

$$V = 2 \pi R^3 - 2 \frac{\pi}{3} R^3$$

et finalement :

$$V = \frac{4 \pi R^3}{3}$$

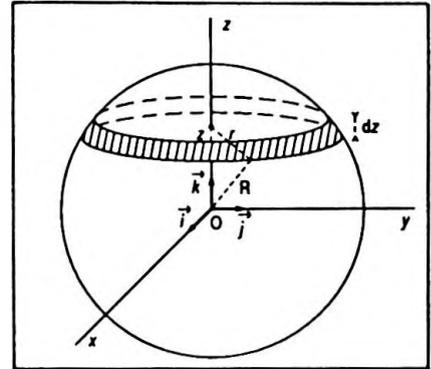


Figure 6.33

$$V = \frac{4 \pi R^3}{3}$$

2. 4. Application au calcul des surfaces latérales des volumes de révolution

2. 4. 1. Principe de calcul

Le principe est le même que pour le calcul des volumes, mais ici, au lieu d'exprimer le volume d'une "petite tranche", on en exprimera la surface latérale (Fig. 6.34). Ensuite il suffira d'intégrer.

La surface latérale est donc donnée par :

$$S = \int_a^b 2 \pi y \cdot AB$$

AB dépend de la figure considérée.

2. 4. 2. Surface latérale d'un cône (Fig. 6.35)

On sait que :

$$S = \int_0^h 2 \pi y \cdot AB$$

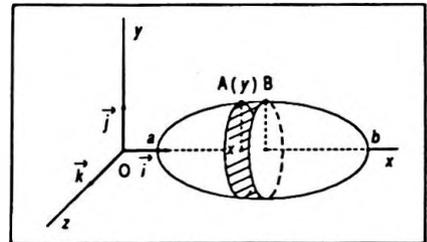


Figure 6.34

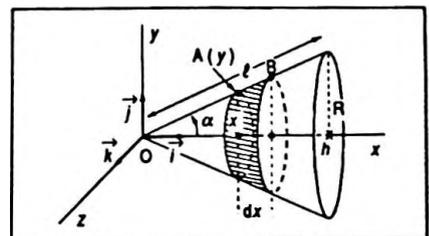


Figure 6.35

D'après la similitude $\frac{AB}{dx} = \frac{\ell}{h}$ soit $AB = \frac{\ell}{h} dx$.

D'autre part $\frac{y}{x} = \frac{R}{h}$ soit $y = \frac{R}{h} x$ ou $x = \frac{h}{R} y$ et :

$$dx = \frac{h}{R} dy$$

L'expression en fonction de la variable y qui varie de 0 à R est alors :

$$S = \int_0^R \frac{2\pi y \ell}{R} dy$$

ou :

$$S = \frac{2\pi \ell}{R} \int_0^R y dy$$

et :

$$S = \pi R \ell$$

$$S = \pi R \ell$$

mais α est le demi angle au sommet du cône avec $\sin \alpha = \frac{R}{\ell}$
donc :

$$S = \frac{\pi R^2}{\sin \alpha}$$

$$S = \frac{\pi R^2}{\sin \alpha}$$

2. 5. Application à la recherche de la position du centre de gravité

2. 5. 1. Principe du calcul

Cette recherche est basée sur la définition du barycentre.

- S'il s'agit d'un système discontinu de masses :

$$m \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{OG_i} \text{ avec } m = \sum_{i=1}^{i=n} m_i$$

- S'il s'agit d'un système continu (fil, surface, solide pesant) :

$$m \overrightarrow{OG} = \int_{\text{système}} \overrightarrow{Og} dm \text{ avec } m = \int_{\text{système}} dm$$

On détermine à titre d'exemple le centre de masse d'une

ligne de forme quelconque supposée pesante (Fig. 6.36).
 λ est la masse linéique, ℓ la longueur totale.

Pour simplifier on supposera que cette ligne est contenue dans le plan xOy .

Soit un élément $d\ell$ quelconque infiniment petit, son centre g ayant pour coordonnées (x, y) . Il s'agit d'un système continu donc :

$$m \overrightarrow{OG} = \int_{\text{fil}} \overrightarrow{Og} dm$$

où $m = \lambda \ell$ et $dm = \lambda d\ell$.

Si l'on opère une projection sur les axes de la relation vectorielle il vient :

$$m x_G = \int_{\text{fil}} x dm \quad \text{et} \quad m y_G = \int_{\text{fil}} y dm$$

soit :

$$\lambda \ell x_G = \int_{\text{fil}} \lambda x d\ell \quad \text{et} \quad \lambda \ell y_G = \int_{\text{fil}} \lambda y d\ell$$

On en déduit que les coordonnées de G sont telles que :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\int_{\text{fil}} x d\ell}{\ell} \\ y_G = \frac{\int_{\text{fil}} y d\ell}{\ell} \end{cases}$$

2. 5. 2. Centre de masse d'une "courbe pesante" ayant la forme d'une demi-circonférence

On sait que par raison de symétrie le centre de masse G se trouvera sur $Oy \Rightarrow x_G = 0$. Soit un élément de courbe de centre M et de longueur $d\ell$, tel que $(Ox, OM) = \theta$ (Fig. 6.37) ; λ est la masse linéaire (ou linéique du fil).

D'après le résultat général $y_G = \frac{\int_{\text{fil}} y d\ell}{\ell}$; or, $d\ell = R d\theta$ donc $\ell = \pi R$ et $y = R \sin \theta$ ce qui conduit à :

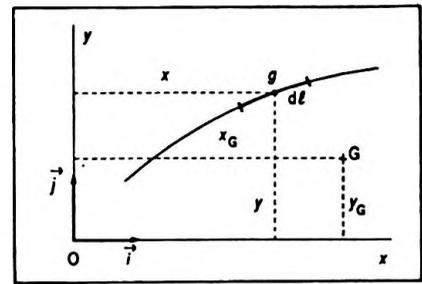


Figure 6.36

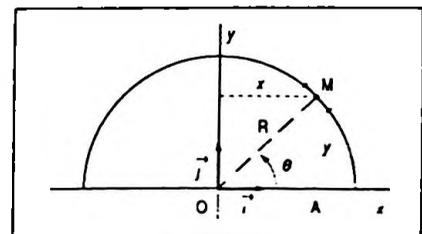


Figure 6.37

$$y_G = \frac{R \int_0^\pi \sin \theta d\theta}{\pi}$$

et :

$$OG = \frac{2R}{\pi}$$

$$OG = \frac{2R}{\pi}$$

Remarque

L'élément $d\ell$ est pris symétriquement de part et d'autre du point M d'abscisse curviligne $\widehat{AM} = \ell$, l'élément $d\theta$ est pris symétriquement de part et d'autre du vecteur \vec{OM} d'abscisse angulaire $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \theta$ (Fig. 6.38).

En toute rigueur il aurait été souhaitable de prendre $2 d\ell$ et $2 d\theta$ car $d\ell$ représente la variation de ℓ et $d\theta$ la variation de θ ; mais pour le calcul le résultat n'est pas modifié. Cette remarque s'appliquera à tous les calculs portant sur le centre de masse.

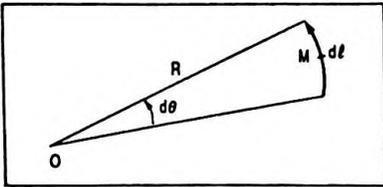


Figure 6.38

2. 5. 3. Centre de masse d'une "surface pesante"

On s'appuie toujours sur la définition du barycentre. Soit une surface plane contenue dans le plan xOy . Elle est par exemple limitée par les axes Ox, Oy et la courbe (C) (Fig. 6.39). On sait que :

$$m \vec{OG} = \int_{\text{surface}} \vec{Og} dm$$

La projection sur les axes de la relation vectorielle conduit à :

$$m x_G = \int_{\text{surface}} x dm \tag{1}$$

$$m y_G = \int_{\text{surface}} \frac{y}{2} dm \tag{2}$$

car g a pour coordonnées $(x, \frac{y}{2})$.

Remarque

g est le centre de masse d'un élément ; le point M qui appartient à (C) a pour coordonnées x et y .

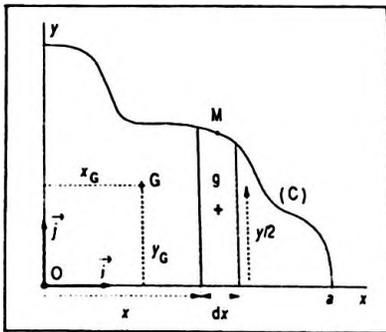


Figure 6.39

Or :

$$m = \int_0^a \sigma y \, dx \quad (\sigma \text{ masse surfacique})$$

donc :

$$x_G \int_0^a \sigma y \, dx = \int_0^a (\sigma y \, dx) x \quad (1)$$

$$y_G \int_0^a \sigma y \, dx = \int_0^a (\sigma y \, dx) \frac{y}{2} \quad (2)$$

d'où :

$$x_G = \frac{\int_0^a x y \, dx}{\int_0^a y \, dx} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\int_0^a \frac{y^2}{2} \, dx}{\int_0^a y \, dx}$$

2. 5. 4. Centre de masse du demi-cercle pesant

Par raison de symétrie le centre de masse se trouve sur Oy $\Rightarrow x_G = 0$ (Fig. 6.40).

On calcule $y_G = OG$, or :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

soit :

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y < 0 \text{ ne convenant pas ici ;}$$

d'où par application de la formule ci-dessus il vient :

$$y_G = \frac{2 \int_0^R \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \, dx}{2 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx}$$

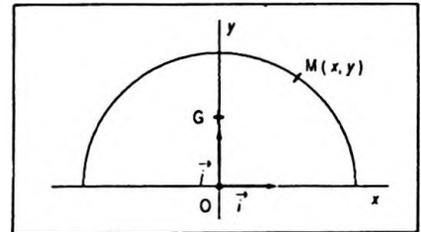


Figure 6 40

Le dénominateur représente la surface totale soit $\frac{\pi R^2}{2}$.

En intégrant le numérateur on obtient :

$$y_G = \frac{\left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\pi \frac{R^2}{2}}$$

et :

$$y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

$$y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

2. 5. 5. Centre de masse des volumes

Pour les volumes on procède de la même manière que pour les lignes ou surfaces pesantes, à savoir : prendre un élément d'épaisseur dx ou dy , en calculer le volume et appliquer la relation de définition du barycentre.

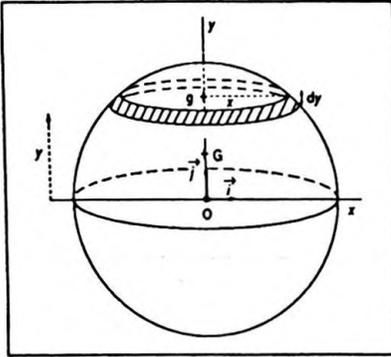


Figure 6.41

Demi-sphère pleine (Fig. 6.41)

Le volume élémentaire est donné par :

$$dV = \pi x^2 dy$$

de plus :

$$m \vec{OG} = \int_{\text{volume}} \vec{Og} dm$$

la projection de la relation vectorielle sur les axes conduit à :

$$m x_G = \int_{\text{volume}} x dm \quad \text{avec } x_g = 0 \Rightarrow x_G = 0 \text{ par symétrie} \quad (1)$$

et :

$$m y_G = \int_{\text{volume}} y dm \quad (2)$$

or :

$$m = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho \quad \text{et} \quad dm = \pi x^2 dy \rho$$

(ρ est la masse volumique de la matière supposée homogène)

la relation (2) s'écrit donc :

$$\frac{2}{3} \pi R^3 \rho y_G = \int_0^R \pi x^2 dy \rho y$$

soit :

$$\frac{2}{3} R^3 y_G = \int_0^R x^2 y \, dy$$

avec $x^2 = R^2 - y^2$ d'où :

$$y_G = \frac{3}{2R^3} \int_0^R (R^2 - y^2) y \, dy$$

par intégration on obtient :

$$y_G = \frac{3}{2R^3} \left[R^2 \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^R$$

et :

$$y_G = \frac{3R}{8} = OG$$

$$y_G = \frac{3R}{8} = OG$$

2. 6. Application à la recherche des moments d'inertie

2. 6. 1. Définition et introduction

On appelle moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe (Δ) (Fig. 6.42) la quantité scalaire :

$$J_{\Delta} = \iiint_{(S)} r^2 \, dm$$

Pour le calcul des moments d'inertie des solides géométriques à forme simple on utilise deux théorèmes fondamentaux.

I. Le moment d'inertie d'un élément de masse par rapport à un point (Fig. 6.43) est égal à la somme des moments d'inertie de cet élément par rapport à deux axes perpendiculaires passant par ce point, ainsi :

$$J_O = dm \, r^2 = dm \, x^2 + dm \, y^2$$

soit :

$$J_O = J_{Ox} + J_{Oy}$$

II. Théorème d'Huygens. Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ (Fig. 6.44) est égal au moment

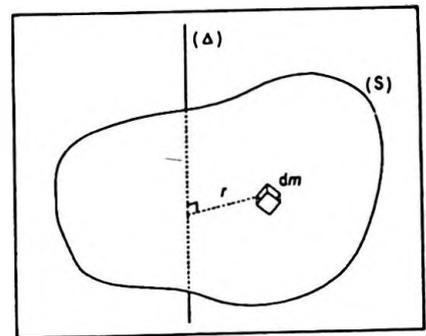


Figure 6.42

$$J_{\Delta} = \iiint_{(S)} r^2 \, dm$$

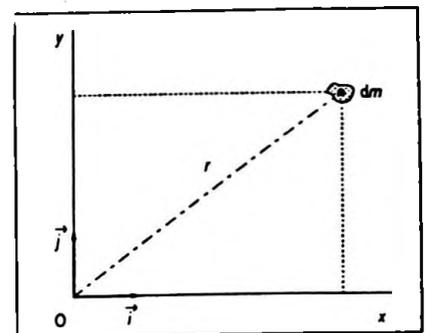


Figure 6.43

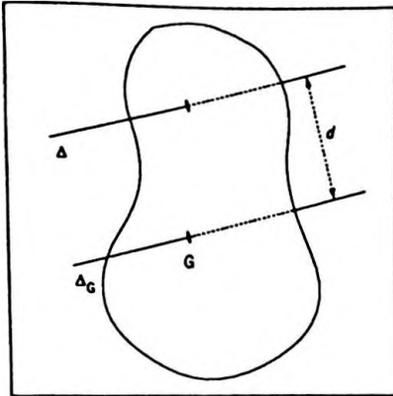


Figure 6.44

d'inertie de ce solide par rapport à un axe Δ_G parallèle à Δ et passant par le centre de masse du solide augmenté du produit de la masse de ce solide par le carré de la distance du centre de masse à Δ .

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + m d^2$$

Démonstration simple

Par définition on a :

$$J_{\Delta_G} = \iiint_{(S)} r_G^2 dm$$

et :

$$J_{\Delta} = \iiint_{(S)} r^2 dm$$

or $\vec{r} = \vec{r}_G - \vec{d}$ (Fig. 6.45) donc en élevant au carré il vient:

$$\vec{r}^2 = (\vec{r}_G - \vec{d})^2 = r_G^2 + d^2 - 2\vec{r}_G \cdot \vec{d}$$

ainsi :

$$J_{\Delta} = \iiint_{(S)} (r_G^2 + d^2 - 2\vec{r}_G \cdot \vec{d}) dm$$

et en utilisant la propriété de linéarité il vient :

$$J_{\Delta} = \iiint_{(S)} r_G^2 dm + \iiint_{(S)} d^2 dm - \iiint_{(S)} 2\vec{r}_G \cdot \vec{d} dm$$

ou encore :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + d^2 \iiint_{(S)} dm - 2\vec{d} \iiint_{(S)} \vec{r}_G dm$$

mais

$$\vec{d} \cdot \vec{r}_G = \vec{d} \cdot (\vec{r}_G + \vec{GH}) = -\vec{d} \cdot \vec{MG} \text{ puisque } \vec{d} \cdot \vec{GH} = 0$$

d'où :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + d^2 m + 2\vec{d} \iiint_{(S)} \vec{MG} dm$$

avec $\iiint_{(S)} \vec{MG} dm = 0$ d'après les propriétés du bary-

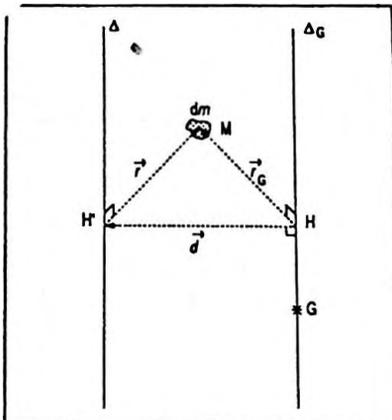


Figure 6.45

centre et :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta G} + md^2$$

$$J_{\Delta} = J_{\Delta G} + md^2$$

2. 6. 2. Moment d'inertie d'une tige rectiligne

Soit m la masse de la tige et ℓ sa longueur. On veut déterminer son moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) passant par son centre.

Soit un élément de longueur dx situé à l'abscisse x à partir de O (Fig. 6.46). Le moment d'inertie de cet élément est :

$$dJ_{Oy} = x^2 dm$$

ou :

$$dJ_{Oy} = x^2 \frac{m}{\ell} dx$$

avec $\lambda = \frac{m}{\ell}$ représentant la masse linéique, donc :

$$J_{Oy} = 2 \int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{m}{\ell} x^2 dx$$

en intégrant on obtient :

$$J_{Oy} = 2 \frac{m}{\ell} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\ell}{2}}$$

et :

$$J_{Oy} = \frac{m \ell^2}{12}$$

$$J_{Oy} = \frac{m \ell^2}{12}$$

2. 6. 3. Moment d'inertie d'un disque plan mince

Soit m la masse du disque et R son rayon. On veut déterminer son moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) normal à son plan en son centre. On pose $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$ masse surfacique du disque.

Soit un élément de largeur dr situé à r du centre, vu sous un angle $d\theta$ de ce même centre (Fig. 6.47). Sa surface est $rd\theta dr$ et sa masse $dm = \sigma rd\theta dr$.

On en déduit son moment d'inertie :

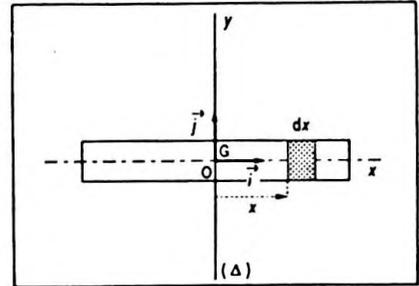


Figure 6.46

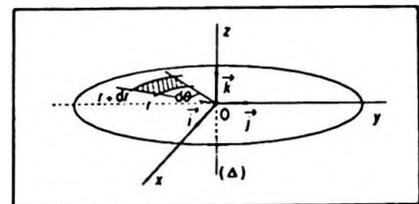


Figure 6.47

$$dJ_{Oz} = \sigma r d\theta dr r^2$$

r et θ sont des variables indépendantes, le moment d'inertie s'écrit donc :

$$J_{Oz} = \iint_{(D)} \sigma r d\theta dr r^2$$

l'intégrale double peut se transformer en deux intégrales simples ce qui donne :

$$J_{Oz} = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr$$

en intégrant on obtient :

$$J_{Oz} = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^4}{4}$$

soit :

$$J_{Oz} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$J_{Oz} = \frac{1}{2} m R^2$$

2. 6. 4. Moment d'inertie d'un cylindre droit

Soit m sa masse et R son rayon, h sa hauteur. On veut déterminer son moment d'inertie par rapport à son axe Oz . La masse volumique est $\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$.

Soit un élément semblable au précédent mais d'épaisseur dz (Fig. 6.48), le moment d'inertie de cet élément par rapport à Oz s'écrit :

$$dJ_{Oz} = \rho r dr d\theta dz r^2$$

soit :

$$J_{Oz} = \frac{m}{\pi R^2 h} \iiint_{(C)} r^3 dr d\theta dz$$

Les trois variables étant indépendantes il vient :

$$J_{Oz} = \frac{m}{\pi R^2 h} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz$$

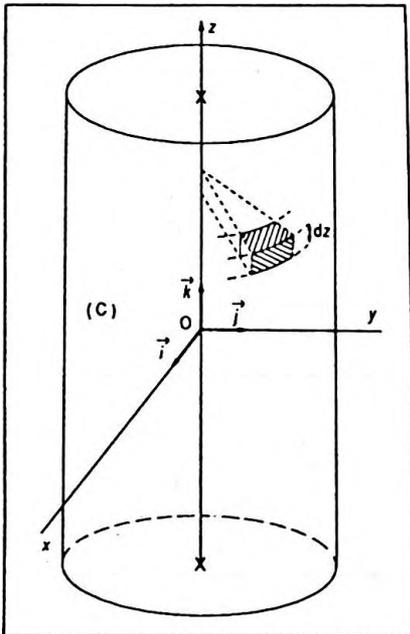


Figure 6.48

puis en intégrant :

$$J_{Oz} = \frac{m}{\pi R^2 h} 2\pi \frac{R^4}{4} h$$

et :

$$J_{Oz} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$J_{Oz} = \frac{1}{2} m R^2$$

On calcule maintenant le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox ou Oy .

$$J_{Ox} = J_{Oy} \text{ par raison de symétrie}$$

or :

$$J_{Ox} = \iiint_{(C)} r_x^2 dm = \iiint_{(C)} (y^2 + z^2) dm \quad (\text{Fig. 6.49})$$

de même :

$$J_{Oy} = \iiint_{(C)} (x^2 + z^2) dm$$

en additionnant il vient :

$$2J_{Ox} = \iiint_{(C)} (x^2 + y^2 + 2z^2) dm$$

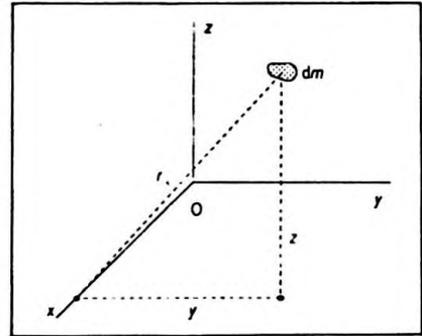


Figure 6.49

et d'après la propriété de linéarité il vient :

$$2J_{Ox} = \iiint_{(C)} (x^2 + y^2) dm + 2 \iiint_{(C)} z^2 dm$$

La première intégrale représente le moment d'inertie J_{Oz} .

La seconde intégrale représente le moment d'inertie d'un disque de rayon R d'épaisseur dz situé à la cote z et dont la masse est :

$$dm = \rho \pi R^2 dz$$

d'où :

$$\iiint_{(C)} z^2 dm = \rho \pi R^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz$$

soit :

$$\iiint_{(C)} z^2 dm = 2 \frac{m}{\pi R^2 h} \pi R^2 \frac{h^3}{24}$$

et :

$$\iiint_{(C)} z^2 dm = \frac{m h^2}{12}$$

ainsi :

$$2J_{Ox} = \frac{1}{2} m R^2 + m \frac{h^2}{6}$$

$$J_{Ox} = J_{Oy} = \frac{m R^2}{4} + \frac{m h^2}{12}$$

$$J_{Ox} = J_{Oy} = \frac{m R^2}{4} + \frac{m h^2}{12}$$

2. 6. 5. Moment d'inertie d'une sphère

Sa masse étant m et son rayon R , sa masse volumique est $\rho = \frac{m}{4/3\pi R^3}$ (Fig. 6.50).

On veut déterminer son moment d'inertie par rapport à l'un quelconque de ses diamètres ; pour ce faire on peut écrire :

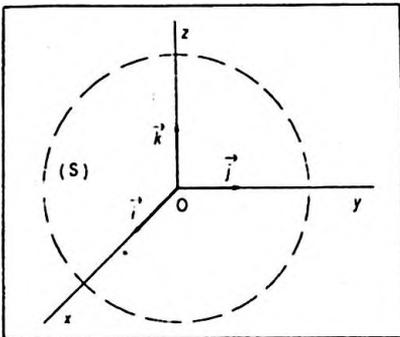


Figure 6.50

$$J_{Ox} = \iiint_{(S)} (y^2 + z^2) dm$$

$$J_{Oy} = \iiint_{(S)} (x^2 + z^2) dm$$

$$J_{Oz} = \iiint_{(S)} (x^2 + y^2) dm$$

(S) représente le volume de la sphère et $J_{Ox} = J_{Oy} = J_{Oz}$.

En faisant la somme de ces trois moments d'inertie il vient :

$$3J_{Ox} = 2 \iiint_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

soit :

$$3J_{Ox} = 2 \iiint_{(S)} r^2 dm$$

Pour calculer $\iiint_{(S)} r^2 dm$, il suffira de prendre un élément d'épaisseur dr situé à la distance r du centre ayant la forme d'une couche sphérique ainsi :

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr$$

$4\pi r^2 dr$ représente le volume approché de cet élément en supposant que ce volume soit limité par une surface sphérique $4\pi r^2$ et ait une épaisseur dr .

Donc :

$$\iiint_{(S)} r^2 dm = \int_0^R \frac{m}{4/3\pi R^3} 4\pi r^2 r^2 dr$$

ainsi :

$$3J_{Ox} = 2 \frac{m}{R^3} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R$$

et :

$$J_{Ox} = \frac{2}{5} m R^2 = J_{Oy} = J_{Oz}$$

$$J_{Ox} = \frac{2}{5} m R^2 = J_{Oy} = J_{Oz}$$

3. EXERCICES D'APPLICATION

(M pour Mathématique ; P pour Physique ; (*) pour un exercice résolu à l'aide d'une calculatrice, au chapitre 9)

■ Exercice M.6.1

Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$.

On montre que $\frac{1}{x^2 - 1}$ peut se mettre sous la forme

$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$; par identification il vient :

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

soit :

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x(a+b) + a-b}{x^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases} \quad \text{d'où : } a = -b = \frac{1}{2}$$

ainsi :

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 1}$$

et :

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C$$

soit :

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C$$

■ Exercice M.6.2

$$\left| \begin{array}{l} \text{Calculer l'intégrale } \int \frac{dx}{\cos x} \text{ connaissant l'intégrale } \int \frac{dx}{\sin x} \\ = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{array} \right.$$

On pose $x = y - \frac{\pi}{2}$ donc $dx = dy$, ainsi on obtient :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dy}{\cos \left(y - \frac{\pi}{2} \right)}$$

ou :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dy}{\sin y}$$

d'où :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \frac{y}{2} \right| + C$$

ce qui équivaut à :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

mais :

$$\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}$$

on en déduit :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C \end{aligned}$$

■ Exercice M.6.3

On montre que si l'équation d'un arc AB est paramétrée par t avec en A, $t = a$ et en B, $t = b$, alors la longueur de

l'arc AB est donnée par : $\left| \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt \right|$ où $\vec{f}(t) = \overrightarrow{OM}$.

Pour une courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, & a > 0 \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

calculer la longueur de l'arc AB délimité par A (0) et B $\left(\frac{\pi}{2} \right)$.

On peut écrire :

$$\vec{f}(t) = a \cos^3 t \vec{i} + a \sin^3 t \vec{j}$$

ce qui implique :

$$\vec{f}'(t) = -3a \cos^2 t \sin t \vec{i} + 3a \sin^2 t \cos t \vec{j}$$

soit :

$$\|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)}$$

et :

$$\|\vec{f}'(t)\| = |3a \cos t \sin t|$$

ainsi :

$$L = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t \sin t| dt$$

Or dans ce domaine $\cos t \sin t > 0$ donc :

$$L = 3a \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

et :

$$L = \frac{3}{2} a$$

$$L = \frac{3}{2} a$$

■ Exercice M.6.4 (*)

Pour une courbe d'équation polaire $r = f(\theta)$ la longueur de l'arc AB où A correspond à $\theta = \theta_1$ et B à $\theta = \theta_2$ est donnée par :

$$\left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)} d\theta \right|$$

Calculer la longueur de la cardioïde d'équation polaire $r = a(\cos \theta + 1)$ ($a > 0$) entre $-\pi$ et $+\pi$.

A partir de l'équation polaire $f(\theta) = a(\cos \theta + 1)$ on peut dériver ; on obtient alors :

$$f'(\theta) = -a \sin \theta$$

donc :

$$L = \int_{-\pi}^{+\pi} a \sqrt{(\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta} d\theta$$

ce qui équivaut à :

$$L = \int_{-\pi}^{+\pi} a \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta$$

ou :

$$L = a \int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

soit encore :

$$L = 2a \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

mais dans l'intervalle considéré, $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ ce qui implique :

$$L = 2a \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \left[\sin \frac{\theta}{2} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

et :

$$L = 8a$$

L - 8a

■ Exercice M.6.5

Calculer l'intégrale $N_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ avec $a > 0$, en

faisant le changement de variable $x = \varepsilon \frac{a}{\cos \varphi}$, $\varepsilon = \pm 1$, $\cos \varphi > 0$. On rappelle que :

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \left| \tan \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} \right|$$

Si $x = \varepsilon \frac{a}{\cos \varphi}$, alors $dx = \varepsilon a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi$ ce qui implique :

$$N_1 = \int \frac{\varepsilon a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi}{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi} - a^2}}$$

or :

$$\frac{a^2}{\cos^2 \varphi} - a^2 = \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

d'où :

$$\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi} - a^2} = a \left| \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right| = \frac{a}{\cos \varphi} |\sin \varphi| = \frac{\varepsilon a \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

et :

$$N_1 = \int \frac{\varepsilon \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}}{\frac{a \sin \varphi}{\varepsilon \cos \varphi}} d\varphi$$

soit :

$$N_1 = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \left| \tan \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} \right| + C$$

or $\cos \varphi = \frac{\varepsilon a}{x}$ et $\tan^2 \varphi = \frac{x^2}{a^2} - 1$ d'où :

$$N_1 = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + \varepsilon x}{a} \right| + C$$

$$N_1 = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + \varepsilon x}{a} \right| + C$$

■ Exercice M.6.6

Si une fonction f périodique de période 2π est considérée sur un intervalle $[x_0, x_0 + 2\pi]$, que cette fonction soit bornée et admette des points de discontinuité en nombre limité alors il est possible de la représenter dans l'intervalle considéré par une série de la forme :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

où :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0 + 2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

La série obtenue s'appelle le développement en série de Fourier de la fonction. Calculer les coefficients de Fourier pour la fonction 2π périodique ainsi définie :

$$\text{sur } [0, \pi[, \quad f(x) = x$$

$$\text{sur }]\pi, 2\pi], \quad f(x) = x - 2\pi.$$

$f(x)$ étant définie par deux expressions on peut écrire :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \, dx$$

et en explicitant $f(x)$ il vient :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x \, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\pi) \, dx$$

en intégrant on obtient :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} - 2\pi x \right]_{\pi}^{2\pi}$$

soit :

$$a_0 = 0$$

De même :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\pi) \cos nx \, dx$$

Une intégration par parties donne en posant :

$$u'(x) = \cos nx \quad \text{avec} \quad u(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

puis :

$$v_1(x) = x \quad \Rightarrow \quad v_1'(x) = 1$$

$$v_2(x) = x - 2\pi \quad \Rightarrow \quad v_2'(x) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\left[x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n} dx \right) \\ + \frac{1}{\pi} \left(\left[(x - 2\pi) \frac{\sin nx}{n} \right]_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right)$$

soit :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Par ailleurs :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx + \int_\pi^{2\pi} (x - 2\pi) \sin nx dx$$

L'intégration par parties donne en posant :

$$u'(x) = \sin nx \quad \text{avec} \quad u(x) = -\frac{\cos nx}{n}$$

puis :

$$v_1(x) = x \quad \Rightarrow \quad v_1'(x) = 1$$

$$v_2(x) = x - 2\pi \quad \Rightarrow \quad v_2'(x) = 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n} dx \right) \\ + \frac{1}{\pi} \left(\left[-(x - 2\pi) \frac{\cos nx}{n} \right]_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right)$$

soit :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left((-1)^{n+1} \frac{2\pi}{n} + \left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} \right)$$

et :

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

ainsi :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$$

■ Exercice P.6.7

Développer en série de Fourier la fonction périodique représentant un courant alternatif "redressé" à une alternance définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ sur } \left[nT, \left(n + \frac{1}{2} \right) T \right], f(t) = I_m \sin \omega t$$

$$\text{sur } \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) T, (n+1) T \right], f(t) = 0.$$

$$\bullet a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \, dt$$

soit :

$$a_0 = \frac{I_m}{T} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}}$$

ce qui donne :

$$a_0 = \frac{I_m}{\omega T} \left(-\cos \omega \frac{T}{2} + \cos 0 \right)$$

avec $\omega T = 2\pi$ on obtient :

$$a_0 = \frac{I_m}{\pi}$$

$$\bullet a_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \cos n \omega t \, dt$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$a_n = \frac{I_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t \right) dt$$

et en intégrant on obtient :

$$a_n = \frac{I_m}{T} \left[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega} - \frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}}$$

— pour n pair, on pose $n = 2p$ ainsi :

$$a_{2p} = \frac{I_m}{\omega T} \left[\left(-\frac{\cos(2p+1)\omega \frac{T}{2}}{2p+1} + \frac{\cos(2p-1)\omega \frac{T}{2}}{2p-1} \right) - \left(-\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p-1} \right) \right]$$

soit :

$$a_{2p} = 2 \frac{I_m}{\omega T} \left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p-1} \right)$$

et :

$$a_{2p} = -\frac{2I_m}{\pi(4p^2-1)}$$

— pour n impair, on pose $n = 2p + 1$ ainsi :

$$a_{2p+1} = \frac{I_m}{\omega T} \left[\left(-\frac{\cos(2p+2)\omega \frac{T}{2}}{2p+2} + \frac{\cos 2p \omega \frac{T}{2}}{2p} \right) - \left(-\frac{1}{2p+2} + \frac{1}{2p} \right) \right]$$

soit :

$$a_{2p+1} = 0 \quad \text{valable pour } n \neq 1$$

le calcul direct de a_1 conduit également à $a_1 = 0$.

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \sin n \omega t dt$$

ce que l'on peut écrire également sous la forme :

$$b_n = \frac{I_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\cos(n-1)\omega t - \cos(n+1)\omega t \right) dt$$

et en intégrant il vient :

$$b_n = \frac{I_m}{T} \left[\frac{\sin(n-1)\omega t}{(n-1)\omega} - \frac{\sin(n+1)\omega t}{(n+1)\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}}$$

— si $n \neq 1$, pair ou impair $b_n = 0$.

$$\text{— si } n = 1, b_1 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin^2 \omega t dt$$

soit :

$$b_1 = 2 \frac{I_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt$$

ce qui donne en intégrant :

$$b_1 = \frac{I_m}{T} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}}$$

et :

$$b_1 = \frac{I_m}{2}$$

ainsi :

$$a_0 = \frac{I_m}{\pi}; \quad a_{2p} = -\frac{2I_m}{\pi(4p^2 - 1)}; \quad a_{2p+1} = 0$$

$$b_n = 0 \text{ si } n \neq 1; \quad b_1 = \frac{I_m}{2}$$

et :

$$f(x) = I_m \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(4p^2 - 1)} \cos 2p \omega t \right)$$

■ Exercice M.6.8

Calcul de la longueur d'une cycloïde

Les équations paramétriques de la cycloïde sont $x = R(\theta - \sin \theta)$ et $y = R(1 - \cos \theta)$. Calculer la longueur d'un arc de cycloïde correspondant à un tour complet d'un point du cercle générateur de rayon R .

On rappelle les éléments suivants :

La longueur de la corde MM' est $\Delta \ell = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

La longueur de l'arc $\widehat{MM'}$ est pratiquement égale à la longueur de cette corde et ceci avec d'autant plus de précision que M et M' sont proches (Fig. 6.51) :

$$\widehat{MM'} = d\ell = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

soit :

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ce qui est équivalent à :

$$d\ell = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Pour la cycloïde les équations paramétriques sont :

$$x = R(\theta - \sin \theta)$$

$$y = R(1 - \cos \theta)$$

La longueur d'un arc de courbe est donnée par $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ avec :

$$dx = R(1 - \cos \theta) d\theta$$

$$dy = R \sin \theta d\theta$$

d'où :

$$d\ell = \sqrt{R^2(1 - \cos \theta)^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\theta^2}$$

soit encore :

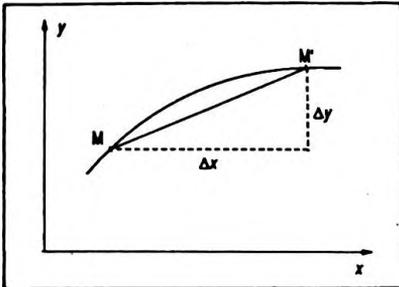


Figure 6.51

$$d\ell = R \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta$$

et après simplification il vient :

$$d\ell = R \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta$$

mais $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, donc :

$$d\ell = 2R \sin \frac{\theta}{2} d\theta \quad \text{car } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\text{ainsi } \ell = 4R \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

en intégrant on obtient :

$$\ell = 4R \left[-\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi}$$

en effet pour une période $\theta = 2\pi$ et :

$$\ell = 8R$$

$$\ell = 8R$$

Remarque

Il ne faut pas confondre la longueur de l'arc engendré ($8R$) avec la période $2\pi R$ mesurée sur Ox (Fig. 6.52).

■ Exercice M.6.9

Les équations paramétriques de la cycloïde étant $x = R(\theta - \sin \theta)$ et $y = R(1 - \cos \theta)$, calculer la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses sur une période.

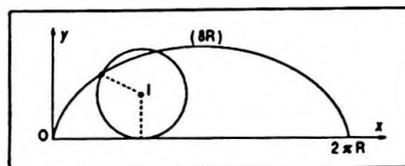


Figure 6.52

Surface de la cycloïde

Elle est donnée par :

$$S = \int_0^{2\pi} y dx$$

y étant exprimé en coordonnées polaires soit :

$$y = R(1 - \cos \theta) \quad \text{et} \quad dx = R(1 - \cos \theta) d\theta$$

donc :

$$S = \int_0^{2\pi} R^2 (1 - \cos \theta)^2 d\theta$$

en développant il vient :

$$S = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

avec $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$, d'où :

$$S = R^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

en intégrant on obtient :

$$S = R^2 \left[\frac{3}{2} \theta - 2 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi}$$

et :

$$S = 3\pi R^2$$

$$S = 3\pi R^2$$

■ Exercice M.6.10 (*)

Un satellite de la Terre étant soumis à une force centrale, on montre que la trajectoire de son centre d'inertie est plane et elliptique, le centre de la Terre étant l'un des foyers F (Fig. 6.53).

On peut donner son équation en coordonnées cartésiennes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a représente le demi-grand axe et b le demi-petit axe.

Le point A le plus éloigné de F s'appelle apogée, le point P le plus voisin est le périégée. Calculer en fonction de a et b l'aire balayée par le rayon vecteur \overrightarrow{FS} lors de sa rotation.

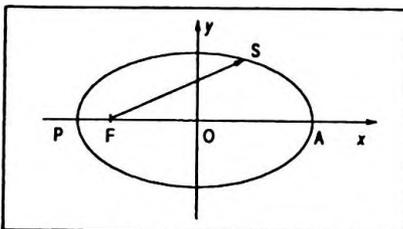


Figure 6.53

L'équation cartésienne de l'ellipse est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On en déduit :

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

L'aire de l'élément de surface (Fig. 6.54) s'exprime par:

$$dS = y \, dx$$

soit :

$$S = 2 \int_{-a}^{+a} b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dx$$

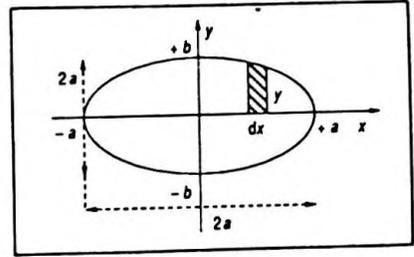


Figure 6.54

Pour le calcul de l'intégrale on fait le changement de variable $\sin \varphi = \frac{x}{a} \Leftrightarrow dx = a \cos \varphi \, d\varphi$. Il vient alors :

$$S = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} b \cos \varphi a \cos \varphi \, d\varphi$$

ce qui donne encore :

$$S = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi$$

ou :

$$S = ab \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

et :

$$S = \pi ab$$

$$S = \pi ab$$

Cet exercice est donné à titre d'entraînement pour montrer comment de deux méthodes, l'une peut être simple (M.6.10) et l'autre plus complexe (M.6.11).

■ Exercice M.6.11

Calculer l'aire de l'ellipse dont l'équation est donnée en coordonnées polaires (r, θ) par $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ (origine en F).

p est le paramètre focal défini par $p = a(1 - e^2)$
où $p = b\sqrt{1 - e^2}$; e est l'excentricité inférieure à 1.

Remarque

L'équation de l'ellipse serait $r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$ si l'origine était au foyer F' .

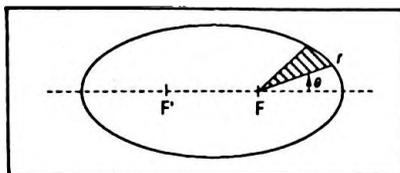


Figure 6.55

Calcul de l'aire de l'ellipse à partir des coordonnées polaires. L'élément d'aire est un triangle de hauteur approximative r et de base $r d\theta$ (Fig. 6.55) d'où :

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

or :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

d'où :

$$dS = \frac{1}{2} \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta$$

et :

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{p^2}{2(1 + e \cos \theta)^2} d\theta$$

ce qui donne encore :

$$S = \frac{p^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = p^2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$$

On prend comme nouvelle variable $t = \tan \frac{\theta}{2}$, ainsi $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$; t varie alors de 0 à $+\infty$ il vient donc :

$$S = p^2 \int_0^{+\infty} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(1 + e \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}$$

en développant $A = \left(1 + e \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2$ on peut écrire :

$$A = \left(\frac{1+t^2+e-et^2}{1+t^2} \right)^2$$

ou encore :

$$A = \left(\frac{1+e+t^2(1-e)}{(1+t^2)^2} \right)^2$$

l'aire a donc pour expression :

$$S = p^2 \int_0^{+\infty} \frac{2(1+t^2) dt}{\left(1+e+(1-e)t^2 \right)^2}$$

$$S = p^2 \int_0^{+\infty} \frac{2(1+t^2) dt}{(1+e)^2 \left(1 + \frac{1-e}{1+e} t^2 \right)^2}$$

soit :

$$S = \frac{2p^2}{(1+e)^2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) dt}{\left(1 + \frac{1-e}{1+e} t^2 \right)^2}$$

On peut poser $\frac{1-e}{1+e} = \lambda^2$ car $e < 1$ donc c'est un rapport > 0 , la fonction à intégrer se note alors :

$$\frac{1+t^2}{(1+\lambda^2 t^2)^2} = \frac{\lambda^2 + \lambda^2 t^2}{\lambda^2 (1+\lambda^2 t^2)^2}$$

ou :

$$\frac{1+t^2}{(1+\lambda^2 t^2)^2} = \frac{\lambda^2 + \lambda^2 t^2 + 1 - 1}{\lambda^2 (1+\lambda^2 t^2)^2}$$

$$\frac{1+t^2}{(1+\lambda^2 t^2)^2} = \frac{1}{\lambda^2(1+\lambda^2 t^2)} + \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2(1+\lambda^2 t^2)^2}$$

et l'aire devient :

$$S = \frac{2p^2}{(1+e)^2} \left[\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\lambda^2(1+\lambda^2 t^2)} + \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2(1+\lambda^2 t^2)^2} dt \right]$$

Pour simplifier on note la première intégrale I et la seconde J et l'on procède à leur calcul soit :

$$\bullet I = \frac{1}{\lambda^3} \int_0^{+\infty} \frac{d(\lambda t)}{1+\lambda^2 t^2} = \frac{1}{\lambda^3} \left[\text{Arctan } \lambda t \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\lambda^3}$$

$$\bullet J = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+\lambda^2 t^2)^2} = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^3} \int_0^{+\infty} \frac{d(\lambda t)}{(1+\lambda^2 t^2)^2}$$

$$\text{On pose } u = \lambda t; J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^2} \text{ et } J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+u^2-u^2) du}{(1+u^2)^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} - \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1+u^2)^2} \end{aligned}$$

donc :

$$J_2 = J_1 - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u \frac{2u du}{(1+u^2)^2}$$

en intégrant par parties on pose $f(u) = u$ et $g'(u) = \frac{2u du}{(1+u^2)^2}$ il vient alors :

$$J_2 = J_1 - \frac{1}{2} \left[u \left(-\frac{1}{1+u^2} \right) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} -\frac{1}{1+u^2} du$$

et finalement :

$$J_2 = \frac{1}{2} J_1$$

Or :

$$J_1 = [\text{Arctan } u]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

donc :

$$J_2 = \frac{\pi}{4}$$

On peut déduire l'expression de J soit :

$$J = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^3} \frac{\pi}{4}$$

Ainsi :

$$I + J = \frac{\pi}{2\lambda^3} \left(1 + \frac{\lambda^2 - 1}{2} \right)$$

ou :

$$I + J = \frac{\pi}{4\lambda^3} (\lambda^2 + 1)$$

Ce qui conduit à :

$$S = \frac{2p^2}{(1+e)^2} \frac{\pi}{4\lambda^3} (\lambda^2 + 1)$$

$$\text{Or, } \lambda^2 = \frac{1-e}{1+e} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = \frac{2}{1+e}, \text{ donc :}$$

$$S = \frac{2p^2}{(1+e)^2} \frac{\pi}{4 \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{3/2}} \frac{2}{1+e}$$

et :

$$S = \frac{\pi p^2}{(1-e)^{2 \cdot 3/2}}$$

Mais $p = a(1 - e^2)$ et $p = b\sqrt{1 - e^2}$, donc :

$$S = \pi ab$$

$$S = \pi ab$$

Remarque

On a posé $dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ soit $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$ qui représente l'aire balayée par unité de temps par le rayon vecteur \overrightarrow{OM} .

Pour un satellite de la Terre cette grandeur appelée vitesse aréolaire est une constante. C'est la troisième loi de Képler.

■ **Exercice P.6.12 (*)**

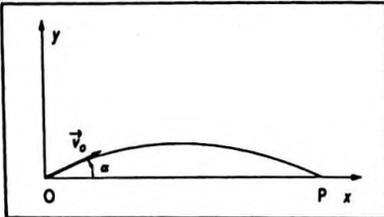


Figure 6.56

On sait que la trajectoire d'un projectile lancé avec une vitesse oblique \vec{v}_0 faisant un angle α avec l'horizontale et sans tenir compte des frottements est une parabole (Fig. 6.56) d'équation $y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x$.

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x$$

Calculer la longueur de la trajectoire entre le point de lancement O et le point d'impact P.

La longueur d'un arc de courbe est :

$$d\ell = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

avec $y = -\frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x$ donc :

$$y' = -\frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha$$

ce qui implique :

$$d\ell = \sqrt{1 + \left(\frac{-gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \right)^2} dx$$

• On pose :

$$u = -\frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \quad \text{et} \quad du = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} dx$$

d'où :

$$d\ell = \sqrt{1+u^2} \left(-\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \right) du$$

• Second changement de variable :

$$u = \tan \varphi \quad \text{et} \quad du = \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

Ainsi :

$$d\ell = \sqrt{1+\tan^2 \varphi} \left(-\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \right) \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

En simplifiant on obtient :

$$d\ell = \left(-\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \right) \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi}$$

d'où la longueur de la trajectoire :

$$\ell = \left(-\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \right) \int_{(Parabole)} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi}$$

• Troisième changement de variable :

On introduit $t = \tan \frac{\beta}{2}$ il vient alors :

$$I = \int_0^P \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} = - \int_0^P \frac{d\beta}{\sin^3 \beta} \quad \text{en posant } \varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$$

ou :

$$I = - \int_0^P \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}} = - \int_0^P \frac{(1+t^2)^2 dt}{4t^3}$$

soit :

$$I = - \frac{1}{4} \int_0^P \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t \right) dt$$

En intégrant on obtient :

$$I = -\frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2t^2} + 2 \ln |t| + \frac{t^2}{2} \right]_0^P$$

et finalement :

$$\ell = + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{4g} \left[-\frac{1}{2t^2} + 2 \ln |t| + \frac{t^2}{2} \right]_0^P$$

On détermine alors les bornes d'intégration :

$$u(0) = \tan \alpha \qquad u(P) = \tan(-\alpha)$$

$$\Rightarrow \varphi = \alpha \qquad \Rightarrow \varphi = -\alpha$$

$$\beta(0) = -\varphi(0) + \frac{\pi}{2} \qquad \beta(P) = -\varphi(P) + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \beta(0) = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \Rightarrow \beta(P) = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$t(0) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \qquad t(P) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

Ainsi compte tenu des bornes il vient :

$$\ell = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{4g} \left[-\frac{1}{2 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)} + 2 \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \right| + \frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} - 2 \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \right| - \frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} \right]$$

en simplifiant on obtient :

$$\ell = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{4g} \left[\left(\frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}} \right)^2 - \left(\frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \right. \\ \left. + 4 \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}} \right| \right]$$

soit :

$$\ell = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left[\frac{2 \tan \frac{\alpha}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{\left(1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right)^2} + \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}} \right| \right]$$

ou encore :

$$\ell = \frac{v_0^2}{g} \left[\sin \alpha + \cos^2 \alpha \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}} \right| \right]$$

$$\ell = \frac{v_0^2}{g} \left[\sin \alpha + \cos^2 \alpha \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}} \right| \right]$$

On peut vérifier cette formule dans deux cas particuliers :

- $\alpha = 0$ tir plat : $\ell = 0$, trajectoire de longueur nulle.
- $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tir vertical : $\ell = \frac{v_0^2}{g}$ en effet

$$\cos^2 \alpha \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}} \right| \rightarrow 0,$$

(cette expression étant de la forme $x^2 \ln x$, avec $x \rightarrow 0$).

■ Exercice P.6.13

On considère un fil infini $x'Ox$ coudé en O faisant un angle 2θ en ce point (Fig. 6.57). Le fil est chargé uniformément avec une densité de charge électrique $\lambda > 0$. Déterminer le champ électrique en un point P de la bissectrice tel que $OP = d$.

On considère un élément de fil de longueur $d\ell$ d'origine M (Fig. 6.58). Sa charge est $dq = \lambda d\ell$. Il crée en P le champ électrique $d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{MP^2} \vec{u}$. Soit un élément

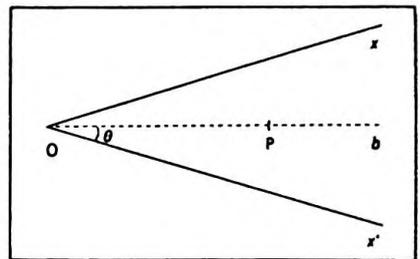


Figure 6.57

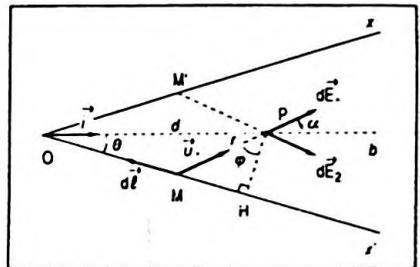


Figure 6.58

de même longueur d'origine M' symétrique de M par rapport à la bissectrice Ob , il crée un champ élémentaire $d\vec{E}_2$. On constate alors que les composantes de $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$ perpendiculaires à Ob s'annulent. En revanche, les composantes sur Ob s'ajoutent ainsi :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{r^2} \cos \alpha \vec{i}$$

r et ℓ sont dépendants de la variable α on peut écrire :

$$\ell = HM = r \sin \varphi$$

$$PH = d \sin \theta = r \cos \varphi$$

donc :

$$r = \frac{d \sin \theta}{\cos \varphi}$$

et :

$$\ell = d \sin \theta \tan \varphi$$

ce qui conduit à :

$$d\ell = d \frac{\sin \theta}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

compte tenu des expressions de $d\ell$ et de r on a :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \frac{d \sin \theta}{\cos^2 \varphi} d\varphi}{d^2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \varphi}} \cos \alpha \vec{i}$$

soit en simplifiant :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{d \sin \theta} d\varphi \cos \alpha \vec{i}$$

On remarque que $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta - \alpha$ par conséquent $d\varphi = -d\alpha$ et :

$$d\vec{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{d \sin \theta} \cos \alpha d\alpha \vec{i}$$

d'où la valeur du champ électrique :

$$\vec{E} = - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d \sin \theta} \vec{i} \times 2 \int_{\pi-\theta}^0 \cos \alpha d\alpha$$

en intégrant on obtient :

$$\vec{E} = - \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 d \sin \theta} \vec{i} \times 2 \left[\sin \alpha \right]_{\pi-\theta}^0$$

ou encore :

$$\vec{E} = \frac{\lambda \sin \theta}{2 \pi \epsilon_0 d \sin \theta} \vec{i}$$

et finalement :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 d} \vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 d} \vec{i}$$

On remarque que curieusement E est indépendant de θ .

■ Exercice P.6.14

On considère un fil ayant la forme d'un demi-cercle de centre O, de rayon R, de sommet S. Ce fil est uniformément chargé avec une densité de charge électrique λ . Déterminer l'expression du champ électrique au point S' diamétralement opposé à S.

Un élément de fil de longueur $d\ell$ d'origine M (Fig. 6.59) crée un champ électrique élémentaire, $d\vec{E}_1 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{MS'^2} \vec{u}$.

Un élément de même longueur $d\ell$ d'origine M' symétrique de M par rapport à Sx crée un champ électrique élémentaire $d\vec{E}_2$. On remarque que les composantes perpendiculaires à Sx s'annulent. En revanche, les composantes sur Sx s'ajoutent ainsi :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{MS'^2} \cos \alpha \vec{i}$$

Géométriquement on constate que $\alpha = \frac{\theta}{2}$ et que $MS'^2 = 4R^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$.

D'autre part $d\ell = R d\theta$, donc :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{4 R^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \vec{i}$$

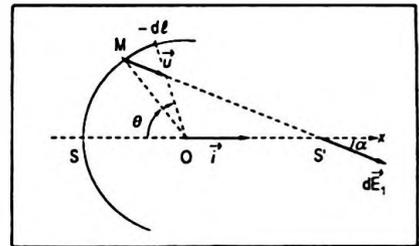


Figure 6.59

ou :

$$d\vec{E} = \frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0 R} \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \vec{i}$$

Par intégration on en déduit l'expression du vecteur champ électrique :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0 R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \vec{i}$$

On démontre que $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C$
donc :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{4} \right) \right| \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

et :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\ln \frac{\tan \frac{3\pi}{8}}{\tan \frac{\pi}{8}} \right) \vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{\tan \frac{3\pi}{8}}{\tan \frac{\pi}{8}} \right) \vec{i}$$

■ Exercice P.6.15

Le théorème de Gauss introduit en électricité peut également s'appliquer en mécanique au champ de gravitation. Le flux du champ de gravitation à travers une surface fermée, créé par un ensemble de particules matérielles situées à l'intérieur de cette surface, est égal au produit de la masse de ces particules par le facteur $-4\pi G$, G représentant la constante de gravitation universelle :

$$\Phi_G = -4\pi G (\Sigma m_i) \quad \left(\Phi_E = \frac{\Sigma q_i}{\epsilon_0} \right)$$

1. En supposant la Terre sphérique, homogène de rayon R et de masse M , déterminer l'expression du vecteur champ de gravitation en un point quelconque de l'espace.

2. Si la masse volumique de la Terre n'est plus considérée comme uniforme elle peut être donnée en un point situé à la distance x du centre O par la loi approximative

$$\rho = \rho_0 \left(1 - k \frac{x^2}{R^2} \right), \rho_0 \text{ et } k \text{ étant des constantes. Donner}$$

l'expression du vecteur champ de gravitation en un point P de l'espace défini par $OP = r > R$.

1. Par raison de symétrie le champ de gravitation est radial. En un point quelconque N on peut le noter $\vec{A}(N)$. On prend une surface de Gauss sphérique de centre O passant par N (Fig. 6.60). Le flux élémentaire créé par le vecteur champ de gravitation est :

$$d\Phi = \vec{A}(N) \cdot \vec{n} dS$$

soit $d\Phi = -A(N) dS$ et si $ON = r$ on peut écrire $A(N) = A(r)$ car A n'est fonction que de r , et :

$$\Phi = - \iint A(r) dS$$

Sur la surface de Gauss $A(r)$ est constant, donc :

$$\Phi = - A(r) \iint dS$$

et en intégrant il vient :

$$\Phi = - A(r) 4\pi r^2$$

• 1^{er} cas

Si $r > R$; toute la masse est intérieure à la surface de Gauss et le flux peut s'écrire :

$$- A(r) 4\pi r^2 = - 4\pi GM$$

ainsi :

$$A(r) = \frac{GM}{r^2}$$

$$A(r) = \frac{GM}{r^2}$$

• 2^e cas

Si $0 < r < R$; seule une partie de la masse est intérieure à la surface de Gauss et l'on obtient :

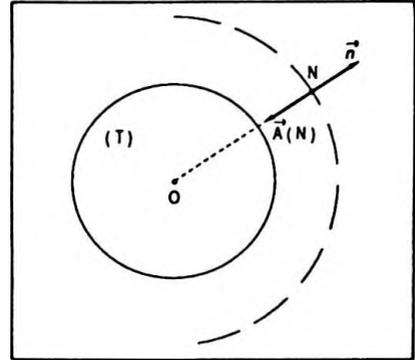


Figure 6.60

$$- A(r) 4\pi r^2 = - 4\pi G \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3$$

et par conséquent :

$$A(r) = \frac{GMr}{R^3}$$

$$A(r) = \frac{GMr}{R^3}$$

2. On se retrouve dans le 1^{er} cas du 1., c'est-à-dire $r > R$ donc $A(r) = \frac{GM}{r^2}$ où M représente la masse totale de la sphère.

La masse d'une couche sphérique d'épaisseur dx et de rayon intérieur x est :

$$dM = \underbrace{4\pi x^2 dx}_{dV} \cdot \underbrace{\rho_0 \left(1 - k \frac{x^2}{R^2}\right)}_{\rho}$$

d'où la masse totale :

$$M = \int_0^R 4\pi \rho_0 \left(1 - k \frac{x^2}{R^2}\right) x^2 dx$$

soit en intégrant :

$$M = 4\pi \rho_0 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{kx^5}{5R^2} \right]_0^R$$

et :

$$M = 4\pi \rho_0 R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5} \right)$$

on en déduit :

$$A(r) = \frac{4\pi \rho_0 G R^3}{r^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5} \right)$$

$$A(r) = \frac{4\pi \rho_0 G R^3}{r^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5} \right)$$

■ Exercice P.6.16

On considère une cuve cylindrique de rayon R et de longueur ℓ . Elle contient un liquide sur une hauteur h . Calculer le volume de ce liquide.

Soit un élément de surface de coordonnées (x, y) de dimensions dx et dy (Fig. 6.61). On peut écrire :

$$dS = dx dy$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

mais $x = R \cos \theta$ donc :

$$dx = -R \sin \theta d\theta$$

Par ailleurs $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ ainsi $y = R \cos \theta \tan \alpha$ donc :

$$dy = R \cos \theta \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

En conséquence :

$$S = 2 \int_{\theta_1}^{\theta} \int_0^{\alpha} -R \sin \theta d\theta \cdot R \cos \theta \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

car α varie de 0 à θ , x de x_1 à $x_2 \Rightarrow \theta$ de θ_1 à 0.

Une première intégration conduit à :

$$S = 2 \int_{\theta_1}^0 -R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \left[\tan \alpha \right]_0^{\theta}$$

ou bien :

$$S = 2 \int_{\theta_1}^0 -R^2 \sin \theta \cos \theta \tan \theta d\theta$$

soit :

$$S = -2R^2 \int_{\theta_1}^0 \sin^2 \theta d\theta \text{ avec } \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

La seconde intégration donne :

$$S = -R^2 \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\theta_1}^0$$

$$\text{et } S = +R^2 \left(\theta_1 - \frac{\sin 2\theta_1}{2} \right) \text{ avec } \cos \theta_1 = \frac{R-h}{R};$$

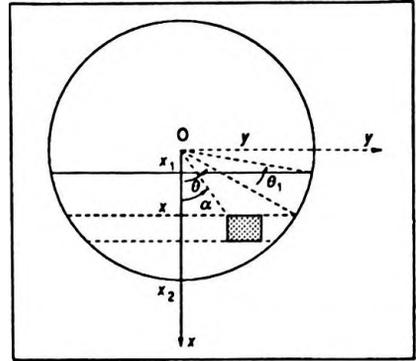


Figure 6.61

$$V = R^2 \ell \left(\theta_1 - \frac{\sin 2\theta_1}{2} \right)$$

avec $\cos \theta_1 = \frac{R-h}{R}$

or, $V = \ell S$, donc :

$$V = R^2 \ell \left(\theta_1 - \frac{\sin 2\theta_1}{2} \right) \text{ avec } \cos \theta_1 = \frac{R-h}{R}$$

Vérification : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$; $V = \frac{\pi R^2 \ell}{2}$ (volume du demi-cylindre).

Remarque

Bien souvent on ne détaille pas l'intégration suivant y et l'on prend $2y = 2R \sin \theta$; l'intégrale double est alors ramenée à une intégrale simple.

■ Exercice P.6.17

Aire d'une calotte sphérique.

On considère une calotte sphérique de rayon R de centre O . Cette calotte est "engendrée" du point O par un cône de demi-angle au sommet θ .

Calculer la surface de cette calotte.

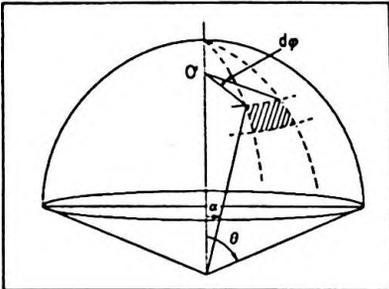


Figure 6.62

On prend un élément de surface limité par deux méridiens et deux parallèles. L'arc de méridien est vu au point O sous un angle $d\alpha$, l'arc de parallèle est vu du point O' sous un angle $d\phi$ mais il appartient à un cercle de rayon $R \sin \alpha$ (Fig. 6.62), ainsi :

$$dS = R \sin \alpha d\phi R d\alpha$$

soit :

$$S = \iint R \sin \alpha d\phi R d\alpha$$

ou :

$$S = R^2 \int_0^\theta d\phi \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha$$

par intégration l'on obtient :

$$S = R^2 2\pi \left[-\cos \alpha \right]_0^\theta$$

et enfin :

$$S = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta)$$

$$S = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta)$$

■ Exercice P.6.18

On considère un tore de rayon principal R à section carrée de côté a (Fig. 6.63), il est composé de N spires parcourues par un courant d'intensité i . On admet qu'à l'intérieur du tore le champ magnétique en un point situé à la distance r de l'axe (Δ) a pour expression :

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}$$

Calculer le coefficient d'auto-inductance de ce tore.

Soit un élément de surface dS rectangulaire de largeur dr et de hauteur dx situé à la distance r de l'axe (Δ) (Fig. 6.64).

Pour une spire le flux élémentaire créé par le tore dans cet élément est :

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

soit d'après le sens positif choisi $d\Phi = B dS$ ou encore :

$$d\Phi = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} dr dx$$

le flux Φ traversant une spire est obtenu en intégrant et vaut :

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi} \iint_{sp} \frac{dr dx}{r}$$

soit :

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi} 2a [\ln r]_{R-a}^{R+a}$$

et :

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ni}{\pi} a \ln \frac{R+a}{R-a}$$

Pour les N spires l'expression du flux est :

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 i}{\pi} a \ln \frac{R+a}{R-a}$$

or par définition $\Phi = Li$ d'où :

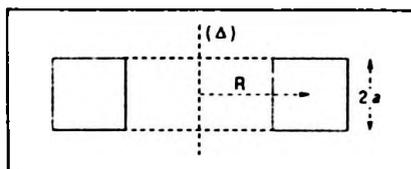


Figure 6.63

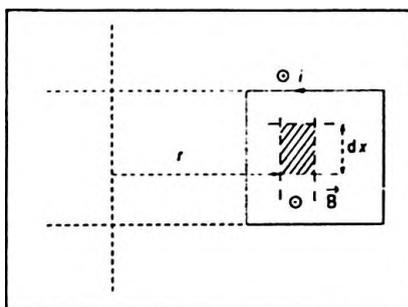


Figure 6.64

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln \frac{R+a}{R-a}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln \frac{R+a}{R-a}$$

■ Exercice P.6.19

On considère un tore de rayon principal R à section circulaire de rayon a . En calculer le volume.

Volume du tore de révolution à section circulaire.

Soit un élément de volume limité par :

- deux cercles concentriques de centre O_1 de rayons respectifs r et $r + dr$;
- deux rayons à partir de O_1 , l'un repéré par son angle polaire θ , l'autre par l'angle polaire $\theta + d\theta$;
- enfin deux plans radiaux à partir de O faisant entre eux un angle $d\alpha$ (Fig. 6.65).

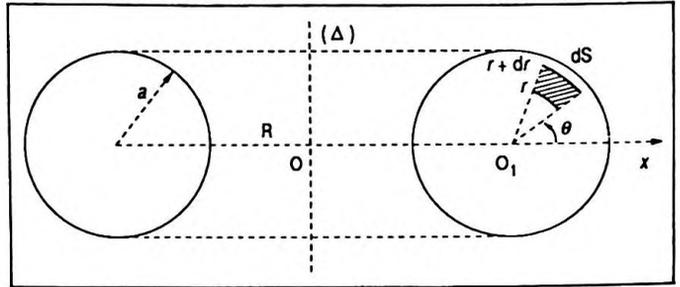


Figure 6.65

L'aire de l'élément de surface est :

$$ds = r d\theta dr$$

Cet élément est situé à la distance $R + r \cos \theta$ de l'axe passant par O (Fig. 6.66), d'où la longueur $d\ell = (R + r \cos \theta) d\alpha$ de l'élément de volume ce qui conduit à :

$$dV = r (R + r \cos \theta) d\alpha d\theta dr$$

on en déduit :

$$V = \iiint_{\text{tore}} r (R + r \cos \theta) d\alpha d\theta dr$$

α est indépendant et son intégrale est immédiate, on peut écrire :

$$V = \int_0^{2\pi} d\alpha \iint_{\text{section}} r (R + r \cos \theta) d\theta dr$$

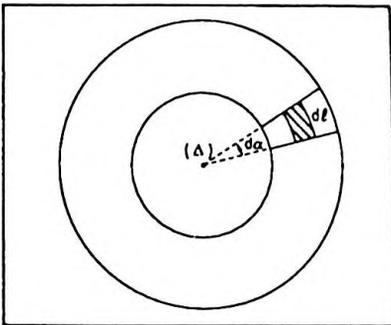


Figure 6.66

ou :

$$V = 2\pi \int_0^a r \, dr \int_0^\pi (R + r \cos \theta) \, d\theta$$

en intégrant par rapport à la variable θ on obtient :

$$V = 4\pi \int_0^a r \, dr \left[R\theta + \sin \theta \right]_0^\pi$$

ce qui conduit à :

$$V = 4\pi R \frac{a^2}{2}$$

et finalement :

$$V = 2\pi^2 R a^2$$

$$V = 2\pi^2 R a^2$$

On remarque que $V = 2\pi R \times \pi a^2$; $2\pi R$ est la longueur de la ligne moyenne du tore et πa^2 la surface génératrice de ce tore. Ceci est une propriété générale.

■ Exercice P.6.20

On considère une cuve sphérique de rayon R . Elle contient un liquide sur une hauteur h . Calculer le volume de ce liquide.

On prend un élément d'épaisseur dx , limité par deux arcs de cercle de centre O' de rayons respectifs r et $r + dr$, et deux plans radiaux passant par O' faisant entre eux un angle $d\beta$ (Fig. 6.67). Ainsi :

• $x = R \cos \theta$, on en déduit $dx = -R \sin \theta \, d\theta$;

• $r = x \tan \alpha$ ou $r = R \cos \theta \tan \alpha$, on en déduit $dr = R \cos \theta \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$;

• $du = r \, d\beta$ ou $du = R \cos \theta \tan \alpha \, d\beta$;

le volume élémentaire $dV = dx \, dr \, du$ peut alors s'écrire compte tenu des expressions précédentes :

$$dV = -R^3 \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \tan \alpha \, d\beta$$

et :

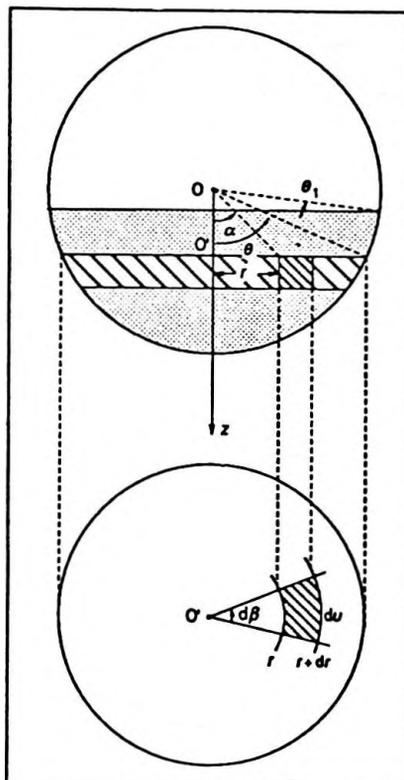


Figure 6.67

$$V = -R^3 \int_{\theta_1}^0 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^\theta \frac{\sin \alpha d\alpha}{\cos^3 \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta$$

En intégrant par rapport à la variable α il vient :

$$V = -2\pi R^3 \int_{\theta_1}^0 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \left[+ \frac{1}{2\cos^2 \alpha} \right]_0^\theta$$

ou encore :

$$V = -2\pi R^3 \int_{\theta_1}^0 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \left(+ \frac{1}{2\cos^2 \theta} - \frac{1}{2} \right)$$

puis :

$$V = -\pi R^3 \int_{\theta_1}^0 \sin \theta \cos^2 \theta \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

soit :

$$V = -\pi R^3 \int_{\theta_1}^0 \sin^3 \theta d\theta$$

En intégrant par rapport à la variable θ et sachant que :

$$\sin^3 \theta = \sin^2 \theta \sin \theta = (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta$$

on obtient :

$$V = -\pi R^3 \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{\theta_1}^0$$

ou bien :

$$V = -\pi R^3 \left(-1 + \frac{1}{3} + \cos \theta_1 - \frac{\cos^3 \theta_1}{3} \right)$$

et finalement :

$$V = \pi R^3 \left(+ \frac{2}{3} - \cos \theta_1 + \frac{\cos^3 \theta_1}{3} \right) \text{ avec } \cos \theta_1 = \frac{R-h}{R}$$

$$V = \pi R^3 \left(+ \frac{2}{3} - \cos \theta_1 + \frac{\cos^3 \theta_1}{3} \right)$$

avec $\cos \theta_1 = \frac{R-h}{R}$

Vérification $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$; $V = \frac{2}{3} \pi R^3$ volume de la demi-sphère.

Remarque

Bien souvent on ne détaille pas l'intégration de la couronne circulaire et l'on pose $S = \pi R^2 \sin^2 \theta$. L'intégrale triple est ramenée à une intégrale simple.

■ **Exercice P.6.21**

Calculer le moment d'inertie d'un tore de masse m , de rayon principal R et de section carrée de côté $2a$ par rapport à son axe de révolution.

On considère un élément de volume limité par :

- deux plans parallèles distants de dz ;
- deux surfaces cylindriques de rayons respectifs r et $r + dr$;
- deux plans faisant entre eux un angle $d\alpha$ (Fig. 6.68).

Donc $dV = dz r d\alpha dr$.

Le moment d'inertie de cet élément par rapport à l'axe (Δ) est $dJ_{\Delta} = dm r^2$ avec $dm = \rho dV$ où ρ est la masse volumique.

Or :

$$dm = \rho r dz d\alpha dr$$

et :

$$dJ_{\Delta} = \rho dz d\alpha r^3 dr$$

soit :

$$J_{\Delta} = \iiint_{\text{tore}} \rho dz d\alpha r^3 dr$$

ou encore :

$$J_{\Delta} = \rho \int_{-a}^{+a} dz \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{R-a}^{R+a} r^3 dr$$

en intégrant on obtient :

$$J_{\Delta} = \rho 2a 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R-a}^{R+a}$$

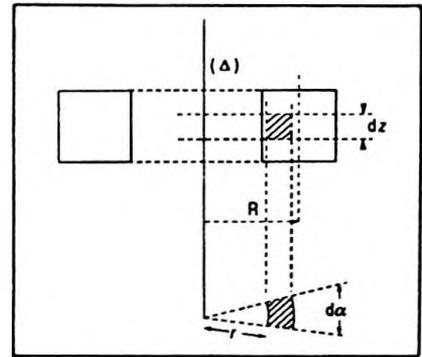


Figure 6.68

et finalement :

$$J_{\Delta} = \pi a \rho \left[(R + a)^4 - (R - a)^4 \right]$$

On exprime ce moment d'inertie en fonction de m qui vaut :

$$m = \iiint_{\text{tore}} dm$$

soit :

$$m = \iiint_{\text{tore}} \rho r \, dz \, d\alpha \, dr$$

en introduisant les bornes d'intégration on peut écrire :

$$m = \rho \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-a}^{+a} dz \int_{R-a}^{R+a} r \, dr$$

et en intégrant on obtient :

$$m = \rho 2\pi 2a \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R-a}^{R+a}$$

ainsi :

$$m = 2\pi a \rho \left[(R + a)^2 - (R - a)^2 \right]$$

sachant que :

$$J_{\Delta} = \pi a \rho \left[(R + a)^4 - (R - a)^4 \right] \left[(R + a)^2 + (R - a)^2 \right]$$

on en déduit :

$$J_{\Delta} = \frac{m}{2} \left[(R + a)^2 + (R - a)^2 \right]$$

soit :

$$J_{\Delta} = m(R^2 + a^2)$$

$$J_{\Delta} = m(R^2 + a^2)$$

Chapitre 7

Équations différentielles

1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES

1. 1. Pourquoi les équations différentielles ?

Les équations différentielles constituent tout comme le calcul intégral l'un des points forts de l'outil mathématique utilisé en Physique car leur champ d'application est vaste voire systématique dans certaines parties.

En mécanique

L'application des principes et théorèmes généraux conduit dans la plupart des cas à une équation différentielle dont les solutions permettent d'établir la nature du mouvement ; c'est en particulier le cas des oscillateurs harmoniques que leurs oscillations soient libres, amorties ou entretenues.

En électricité

Elles interviennent dans :

- l'étude des circuits en régime transitoire ou soumis à des oscillations entretenues ;
- la propagation d'une onde de courant le long d'une ligne électrique ;
- les circuits oscillants couplés ;
- les phénomènes d'induction électromagnétique et l'électromécanique.

En thermodynamique

Elles permettent d'établir des expressions caractérisant l'état d'un fluide. On les rencontre également dans les problèmes de propagation de la chaleur dans une barre ou un milieu conducteur.

1. 2. Définitions

- On appelle équation différentielle une équation reliant une fonction avec certaines de ses dérivées. Sa forme générale est $F(x, y, y', y'', \text{etc.}) = 0$.
- On nomme solution ou intégrale de cette équation sur un intervalle donné toute fonction $f/y = f(x)$ qui la vérifie sur cet intervalle.
- Résoudre ou intégrer une équation différentielle sur un intervalle revient donc à déterminer toutes les fonctions f correspondantes.
- Une équation différentielle est du premier ordre si elle contient la dérivée première à l'exclusion des autres dérivées $F(x, y, y') = 0$. Les solutions de cette équation seront définies à une constante près.
- Une équation différentielle est du second ordre si elle contient la dérivée seconde $F(x, y, y', y'') = 0$. Les solutions de cette équation seront définies à deux constantes près puisqu'en principe il faut intégrer deux fois.

Remarque

En Physique ou en Chimie les constantes sont calculées en connaissant les conditions initiales ou les conditions aux limites.

1. 3. Équations différentielles du premier ordre

Une telle équation se présente sous la forme :

$$F(x, y, y') = 0 \text{ avec } y' = \frac{dy}{dx} \text{ et } y = f(x)$$

Elles peuvent se classer en trois types principaux :

- Équations dont on peut séparer les variables.
- Équations homogènes (tous les termes sont de même degré).
- Équations linéaires (y et y' sont au premier degré).

Ces dernières peuvent être à coefficients constants ou variables, sans second membre ou avec second membre. Ce sont les plus fréquentes en Physique.

1. 3. 1. Équations dont on peut séparer les variables

On isole les termes en x dans l'un des membres et les

termes en y dans l'autre membre ce qui donne une expression telle que :

$$g(x) dx = h(y) dy$$

il suffit alors d'intégrer ce qui donne :

$$\int g(x) dx = \int h(y) dy$$

et :

$$G(x) = H(y) + C$$

ensuite on transforme l'expression pour aboutir à $y = f(x)$.

• Résoudre $y' + \frac{1-y}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1-y}{1+x} = 0$.

L'expression peut s'écrire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+1}$$

soit encore :

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x+1}$$

en intégrant il vient :

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x+1} + C$$

on obtient alors :

$$\ln |y-1| = \ln |x+1| + C$$

ou :

$$\ln \frac{|y-1|}{|x+1|} = C$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{|y-1|}{|x+1|} = e^C$$

L'ensemble des solutions est de la forme :

$$y = 1 + K(x+1), \quad K \in \mathbb{R}$$

$$y = 1 + K(x+1), \quad K \in \mathbb{R}$$

• Résoudre $y' + y \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + y \cos x = 0$.

Par séparation des variables on peut écrire :

$$\frac{dy}{y} = -\cos x dx$$

en intégrant il vient :

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\cos x \, dx + C$$

soit :

$$\ln |y| = -\sin x + C$$

L'ensemble des solutions est alors :

$$y = Ke^{-\sin x}, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$y = Ke^{-\sin x}, \quad K \in \mathbb{R}$$

1. 3. 2. Équations homogènes

Une équation différentielle est dite homogène lorsqu'elle est sous la forme $g(x, y) \, dx + h(x, y) \, dy = 0$ et que tous les termes sont de même degré, ou bien si l'on peut la mettre sous la forme $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Résolution

On pose $\frac{y}{x} = u \Leftrightarrow y = ux$ où u est une fonction : $x \rightarrow u(x)$.

D'où la différentielle :

$$dy = x \, du + u \, dx$$

ce qui implique :

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$$

On reporte cette expression dans l'équation initiale et l'on procède aux simplifications. On obtient alors une équation dont on peut séparer les variables soit :

$$x \frac{du}{dx} + u = \varphi_1(u)$$

ce qui conduit à :

$$\frac{du}{\varphi_1(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

et par intégration il vient :

$$\int \frac{du}{\varphi_1(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Après cette opération on extrait la valeur de $u(x)$ puis celle de $y = f(x)$.

• Intégrer l'équation $(x^2 + y^2) dx + xy dy = 0$.

C'est une équation homogène dont tous les termes sont du second degré.

On pose :

$$y = ux \Rightarrow dy = x du + u dx$$

l'équation peut alors s'écrire sous la forme :

$$x^2(1 + u^2) dx + x^2u(x du + u dx) = 0$$

si $x \neq 0$, il vient :

$$(1 + u^2) dx + u(x du + u dx) = 0$$

Après réduction des termes semblables on obtient :

$$dx + ux du + 2u^2 dx = 0$$

et :

$$ux du + dx(1 + 2u^2) = 0$$

Soit :

$$\frac{u du}{1 + 2u^2} = -\frac{dx}{x}$$

En intégrant on est conduit à :

$$\frac{1}{4} \int \frac{4u du}{1 + 2u^2} = \int -\frac{dx}{x} + C$$

ce qui donne encore :

$$\frac{1}{4} \ln |1 + 2u^2| = -\ln x + C$$

Si l'on élimine le logarithme l'équation devient :

$$1 + 2u^2 = \frac{K}{x^4}$$

d'où :

$$u^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{K}{x^4} - 1 \right)$$

et :

$$u = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{K}{x^4} - 1} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

ainsi :

$$y = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{K}{x^4} - 1}$$

$$y = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{K}{x^4} - 1}$$

1. 3. 3. Équations linéaires (les plus fréquentes en Physique)

Elles sont de la forme :

$$a \frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)$$

$h(x)$ est le terme que l'on désigne sous le nom de second membre.

Cas particuliers

$g(x)$ et $h(x)$ peuvent être des constantes ;

$h(x) = 0$: l'équation est dite alors sans second membre d'où les quatre cas possibles :

$$(1) a \frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x) ;$$

$$(2) a \frac{dy}{dx} + g(x)y = 0 \text{ ou Cte} ;$$

$$(3) a \frac{dy}{dx} + by = h(x) ;$$

$$(4) a \frac{dy}{dx} + by = 0 \text{ ou Cte.}$$

• Équations linéaires sans second membre

$$a \frac{dy}{dx} + g(x)y = 0 \text{ ou } ay' + g(x)y = 0$$

$$a \frac{dy}{dx} + g(x)y = 0 \text{ ou } ay' + g(x)y = 0$$

La résolution de ce type d'équation est très simple car on peut se ramener à la méthode 1 dite de séparation de variable.

• Intégrer $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{1+x} = 0$.

En séparant les variables on obtient :

$$\frac{dy}{y} = \frac{2 dx}{1+x}$$

et l'intégration conduit à :

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2 \frac{dx}{1+x} + C$$

Soit :

$$\ln |y| = 2 \ln |1+x| + C$$

ainsi les solutions sont de la forme :

$$y = K(1+x)^2, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$y = K(1+x)^2, \quad K \in \mathbb{R}$$

Cas particulier important

$$a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad \text{ou} \quad ay' + by = 0$$

$$a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad \text{ou} \quad ay' + by = 0$$

Cette équation est dite linéaire à coefficients constants et sans second membre.

Par séparation des variables on obtient :

$$\frac{dy}{y} = -\frac{b}{a} dx$$

en intégrant il vient :

$$\ln |y| = -\frac{b}{a} x + C$$

et :

$$y = K e^{-\frac{b}{a} x}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Si de plus la condition initiale est donnée :

$$x = 0, y = y_0, \text{ ceci implique } K = y_0 \text{ et } y = y_0 e^{-\frac{b}{a} x}$$

• **Équations linéaires à coefficients constants et avec second membre constant.**

$$a \frac{dy}{dx} + by = c \quad \text{ou} \quad ay' + by = c$$

$$a \frac{dy}{dx} + by = c \quad \text{ou} \quad ay' + by = c$$

Première méthode

Par séparation de variable on obtient :

$$\frac{dy}{c - by} = \frac{dx}{a}$$

en intégrant il vient :

$$\int \frac{dy}{c - by} = \int \frac{dx}{a} + \text{Cte}$$

soit :

$$-\frac{1}{b} \ln |c - by| = \frac{x}{a} + \text{Cte}$$

d'où l'on tire y ce qui conduit à :

$$\ln |c - by| = -b \frac{x}{a} + C_1$$

ou :

$$|c - by| = e^{-b \frac{x}{a} + C_1}$$

donc :

$$y = \frac{1}{b} (c - Ke^{-\frac{b}{a}x}), \quad K \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{1}{b} (c - Ke^{-\frac{b}{a}x}), \quad K \in \mathbb{R}$$

Seconde méthode (par changement de variable)

L'équation $a \frac{dy}{dx} + by = c$ peut encore s'écrire sous la forme :

$$a \frac{dy}{dx} + (by - c) = 0$$

On pose $u = by - c \Rightarrow du = b dy$ et compte tenu de ce changement de variable on obtient :

$$\frac{a}{b} \frac{du}{dx} + u = 0$$

ainsi on est ramené à une équation sans second membre à coefficients constants.

Troisième méthode

La solution de l'équation $a \frac{dy}{dx} + by = c$ sera égale à la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Ainsi :

$$y = y_g \text{ (générale de l'équation sans second membre)} + y_p \text{ (particulière de l'équation avec second membre)}$$

Or :

$$y_{\text{générale}} = Ke^{-\frac{b}{a}x}, \quad K \in \mathbb{R}$$

d'autre part :

$$y_{\text{particulière}} = \frac{c}{b}$$

en effet on peut trouver une solution constante en prenant les deux termes $by = c$ et qui vérifie bien l'équation entière puisque $\frac{dy}{dx} = 0$, d'où :

$$y = K e^{-\frac{b}{a}x} + \frac{c}{b}$$

$$y = K e^{-\frac{b}{a}x} + \frac{c}{b}$$

Si l'on considère les conditions initiales :

$$x = 0, y = y_0 \text{ ceci implique } y_0 = K + \frac{c}{b}$$

alors :

$$K = y_0 - \frac{c}{b}$$

et :

$$y = \left(y_0 - \frac{c}{b} \right) e^{-\frac{b}{a}x} + \frac{c}{b}$$

ou :

$$y = y_0 e^{-\frac{b}{a}x} + \frac{c}{b} (1 - e^{-\frac{b}{a}x})$$

• Équations linéaires avec second membre variable

$$a \frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x) \quad \text{ou} \quad ay' + g(x)y = h(x)$$

$$a \frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x) \quad \text{ou} \quad ay' + g(x)y = h(x)$$

Il s'agit d'un second membre fonction de x seul mais pas de y . Le coefficient de y peut être une constante ou une fonction de x .

Méthode de Lagrange dite de "variation des constantes"

On résout d'abord l'équation sans second membre :

$$a \frac{dy}{dx} + g(x)y = 0$$

ce qui permet de séparer les variables et d'intégrer ainsi :

$$\frac{dy}{y} = -\frac{g(x)}{a} dx$$

d'où, en intégrant il vient :

$$\ln |y| = -\frac{1}{a} \int g(x) dx + C$$

Soit G la fonction primitive de g . On a :

$$\ln |y| = -\frac{1}{a} G(x) + C$$

et :

$$y = K e^{-\frac{G(x)}{a}}, \quad K \in \mathbb{R}$$

On va alors considérer y comme pouvant être la solution de l'équation complète avec second membre, à condition d'envisager que K n'est plus une constante mais une fonction de x .

On différencie y et on reporte les valeurs de dy et y dans l'équation initiale ce qui donne une nouvelle équation permettant de déterminer K et qui s'écrit :

$$dy = dK e^{-\frac{G(x)}{a}} - \frac{K}{a} g(x) e^{-\frac{G(x)}{a}} dx$$

En reportant dans l'équation initiale à résoudre on trouve :

$$a \frac{dK}{dx} e^{-\frac{G(x)}{a}} - K g(x) e^{-\frac{G(x)}{a}} + g(x) K e^{-\frac{G(x)}{a}} = h(x)$$

soit :

$$a \frac{dK}{dx} = h(x) e^{\frac{G(x)}{a}}$$

$$\text{ainsi } dK = \frac{h(x)}{a} e^{\frac{G(x)}{a}} dx \text{ et :}$$

$$K = \int \frac{h(x)}{a} e^{\frac{G(x)}{a}} dx + C_1$$

(en général facile à intégrer)

d'où :

$$y = \left[\int \frac{h(x)}{a} e^{\frac{G(x)}{a}} dx + C_1 \right] e^{-\frac{G(x)}{a}}$$

• Résoudre l'équation $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$.

L'équation sans second membre s'écrit :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

d'où :

$$y = Cx, C \in \mathbb{R}$$

ainsi :

$$dy = x dC + C dx$$

en reportant les valeurs correspondantes de y et dy dans

l'équation initiale on obtient :

$$\left(x \frac{dC}{dx} + C \right) - C \frac{x}{x} = x^2$$

ce qui conduit à :

$$x \frac{dC}{dx} = x^2, \text{ soit } C = \frac{x^2}{2} + K$$

et :

$$y = \frac{x^3}{2} + Kx$$

$$y = \frac{x^3}{2} + Kx$$

• Résoudre l'équation $\frac{dy}{dx} \cos x + y \sin x = 1$.

L'équation sans second membre est :

$$\frac{dy}{dx} \cos x + y \sin x = 0$$

Par séparation de variable et intégration il vient :

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + C$$

soit :

$$\ln |y| = \ln |\cos x| + C$$

et :

$$y = K \cos x, \quad K \in \mathbb{R}$$

En différenciant y on a :

$$dy = -K \sin x dx + dK \cos x$$

et en reportant dans l'équation initiale on obtient :

$$\frac{dK}{dx} \cos^2 x - K \sin x \cos x + K \cos x \sin x = 1$$

soit :

$$dK = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow K = \tan x + C_1$$

donc :

$$y = (\tan x + C_1) \cos x$$

et :

$$y = \sin x + C_1 \cos x$$

$$y = \sin x + C_1 \cos x$$

1. 4. Équations différentielles du second ordre

L'étude ne portera que sur les cas où les coefficients sont constants puisque c'est ce type d'équation que l'on rencontre le plus souvent en Physique.

Elles sont de la forme :

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

ou avec second membre soit :

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = g(x)$$

$a, b, c, \in \mathbb{R}$ et sont des constantes, le second membre peut être nul, constant ou fonction de la seule variable x .

Dans la pratique on rencontre souvent des équations différentielles du second ordre incomplètes que l'on résoudra d'abord, car elles sont plus simples.

1. 4. 1. Équations du second ordre incomplètes

Elles sont de quatre types différents :

- $\frac{d^2 y}{dx^2} = g(x)$ ou Cte soit $y'' = g(x)$;
- $\frac{d^2 y}{dx^2} = g(y)$ soit $y'' = g(y)$;
- $\frac{d^2 y}{dx^2} = g\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$ soit $y'' = g(x, y')$;
- $\frac{d^2 y}{dx^2} = g\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$ soit $y'' = g(y, y')$.

- Équations différentielles du type $\frac{d^2 y}{dx^2} = g(x)$ ou Cte

Pour déterminer la solution y telle que $y = f(x)$ il suffit d'intégrer deux fois par rapport à x , en effet :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = g(x)$$

on multiplie les deux membres par dx ce qui donne $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = g(x) dx$; ensuite on procède à l'intégration

d'où :

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int g(x) dx + C_1$$

Si G est la fonction primitive de g on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = G(x) + C_1$$

ce qui implique :

$$dy = (G(x) + C_1) dx$$

On peut intégrer à nouveau soit :

$$\int dy = \int G(x) dx + \int C_1 dx + C_2$$

Si \mathcal{G} est alors fonction primitive de G il vient :

$$y = \mathcal{G}(x) + C_1 x + C_2$$

$$y = \mathcal{G}(x) + C_1 x + C_2$$

Deux constantes sont alors dans la solution car il y a eu deux intégrations successives.

• *Intégrer* l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2x = 0$.

On peut écrire :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -2x$$

soit en intégrant :

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int -2x dx + C_1$$

ou :

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 + C_1$$

ce qui conduit à :

$$dy = (-x^2 + C_1) dx$$

en intégrant à nouveau on obtient :

$$\int dy = \int (-x^2 + C_1) dx + C_2$$

et finalement :

$$y = -\frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

$$y = -\frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

On utilise la même méthode si le second membre est constant.

● **Équations différentielles du type $\frac{d^2 y}{dx^2} = g(y)$**

On ne peut utiliser la méthode précédente car $\int g(y) dx$ n'a pas de sens.

On multiplie alors les deux membres de l'équation par $2 \frac{dy}{dx} dx$ ce qui donne :

$$2 \frac{dy}{dx} dx \frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \frac{dy}{dx} dx g(y)$$

d'où la forme :

$$2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} dx = 2g(y) dy$$

et l'on intègre :

$$\int 2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int 2g(y) dy + C_1$$

la quantité $2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} dx$ est la différentielle de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

En effet :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2 \left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{ou} \quad d(y'^2) = 2y' y''$$

il vient alors :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2G(y) + C_1$$

soit :

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \sqrt{2G(y) + C_1} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1$$

La séparation de variable conduit à :

$$\frac{dy}{\sqrt{2G(y) + C_1}} = \varepsilon dx$$

En intégrant une seconde fois on obtient $y = f(x)$.

Deux exemples importants

• Résoudre l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 y$ ou $y'' = -a^2 y$.

On multiplie les 2 membres par $2 \frac{dy}{dx}$ ce qui donne :

$$2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} dx = -2a^2 y \frac{dy}{dx} dx$$

ou :

$$d \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = -2a^2 y dy$$

par intégration on obtient :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = -2a^2 \int y dy + C$$

soit :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = -a^2 y^2 + C$$

qui peut s'écrire :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + a^2 y^2 = C$$

C est une constante positive, on pose $C = K^2$. Alors :

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \sqrt{K^2 - a^2 y^2} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

En séparant les variables il vient :

$$\frac{dy}{\varepsilon \sqrt{K^2 - a^2 y^2}} = dx$$

et par intégration l'équation donne :

$$\int \frac{dy}{\varepsilon K \sqrt{1 - \frac{a^2 y^2}{K^2}}} = \int dx + C_1$$

soit encore :

$$\frac{1}{a \varepsilon} \int \frac{a \frac{dy}{K}}{\sqrt{1 - \frac{a^2 y^2}{K^2}}} = x + C_1$$

et :

$$\frac{1}{a \varepsilon} \arcsin \frac{ay}{K} = x + C_1$$

donc :

$$\frac{ay}{K} = \sin(\varepsilon ax + \varepsilon a C_1)$$

On peut alors poser $a C_1 = \varphi$ ainsi :

$$y = \frac{K_1}{a} \sin(ax + \varphi),$$

($K_1 \in \mathbb{R}$ tient compte du signe + ou -)

K_1 et φ sont les constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales.

• Résoudre l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 y$ ou $y'' = a^2 y$.

Si l'on multiplie les deux membres par $2 \frac{dy}{dx} dx$ on est conduit à :

$$2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} dx = 2a^2 y dy$$

l'intégration de cette équation donne alors :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = a^2 y^2 + C$$

dans ce cas $C > 0$ ou $C < 0$.

On traite l'une des éventualités ; soit $C < 0 \Leftrightarrow C = -K^2$ ainsi :

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \sqrt{a^2 y^2 - K^2} \quad \text{avec } \varepsilon \pm 1$$

Par séparation de variable on obtient :

$$\frac{dy}{\varepsilon K \sqrt{\frac{a^2 y^2}{K^2} - 1}} = dx$$

en intégrant il vient :

$$\frac{1}{\varepsilon a} \int \frac{a \frac{dy}{K}}{\sqrt{\frac{a^2 y^2}{K} - 1}} = \int dx + C_1$$

On rappelle que $(\text{Arg ch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ donc :

$$\frac{1}{\varepsilon a} \text{Arg ch } \frac{ay}{K} = x + C_1$$

soit :

$$\text{Arg ch } \frac{ay}{K} = \varepsilon a x + \varepsilon a C_1$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{ay}{K} = \text{ch}(\varepsilon a x + \varepsilon a C_1)$$

ou encore :

$$y = \frac{K}{a} \text{ch}(\varepsilon a x + \varepsilon a C_1)$$

et :

$$y = \frac{K}{a} \text{ch}(ax + a C_1) \text{ car la fonction "ch" est paire.}$$

On pose $a C_1 = \varphi$ et finalement :

$$y = \frac{K}{a} \text{ch}(ax + \varphi), \quad K \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{K}{a} \text{ch}(ax + \varphi)$$

• Équations différentielles du type $\frac{d^2 y}{dx^2} = g(x, \frac{dy}{dx})$ ou $g\left(\frac{dy}{dx}\right)$

On pose $\frac{dy}{dx} = u \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$. On est ainsi ramené à une équation différentielle du premier ordre.

• Résoudre $a \frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

On peut écrire :

$$a \frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2}$$

par séparation de variable on obtient :

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{a}$$

Le premier membre est une intégrale classique (voir tableau du chapitre 6) ce qui donne :

$$\ln \left| u + \sqrt{1+u^2} \right| = \frac{x}{a} + C$$

ce qui implique :

$$u + \sqrt{1+u^2} = K e^{\frac{x}{a}}, K \in \mathbb{R}$$

et :

$$\sqrt{1+u^2} = K e^{\frac{x}{a}} - u$$

En élevant au carré on obtient :

$$1 = -2uK e^{\frac{x}{a}} + K^2 e^{\frac{2x}{a}}$$

donc :

$$u = \frac{K}{2} e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{2K} e^{-\frac{x}{a}}$$

soit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{K}{2} e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{2K} e^{-\frac{x}{a}}$$

ou :

$$dy = \left(\frac{K}{2} e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{2K} e^{-\frac{x}{a}} \right) dx$$

et par intégration il vient finalement :

$$y = \frac{K}{2} a e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{2K} a e^{-\frac{x}{a}} + C_1$$

$$y = \frac{K}{2} a e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{2K} a e^{-\frac{x}{a}} + C_1$$

● **Équations différentielles du type** $\frac{d^2y}{dx^2} = g\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$

Le second membre ne contient que y et y' ou bien y' seul mais pas de terme en x .

On pose $\frac{dy}{dx} = u$ et ainsi $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} u$

d'où la nouvelle forme de l'équation :

$$u \frac{du}{dy} = g(y, u)$$

équation du premier ordre dont on peut séparer les variables.

• Résoudre $yy'' = 1 + y'^2$.

En posant $y' = u$ cette équation peut encore s'écrire :

$$yu \frac{du}{dy} = 1 + u^2$$

soit :

$$\frac{u du}{1 + u^2} = \frac{dy}{y}$$

en intégrant il vient :

$$\frac{1}{2} \ln(1 + u^2) = \ln|y| + C$$

et $y = K\sqrt{1 + u^2}$, $K \in \mathbb{R}$ ce qui implique :

$$u = \varepsilon \sqrt{\frac{y^2}{K^2} - 1} = \frac{dy}{dx} \quad \text{où } \varepsilon = \pm 1$$

Par séparation des variables on obtient :

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{K^2} - 1}} = \varepsilon dx$$

Le premier terme conduit à une intégrale classique dont le résultat est :

$$\ln \left| \frac{y}{K} + \sqrt{\frac{y^2}{K^2} - 1} \right| = \varepsilon x + C_2$$

On sort ensuite la valeur de y , ce qui n'est pas nécessairement simple.

1. 4. 2. Équations différentielles du second ordre complètes linéaires à coefficients constants

• Équations sans second membre

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad \text{ou} \quad ay'' + by' + cy = 0$$

On admettra que les solutions générales de ce type d'équations sont de la forme $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ où y_1 et y_2 forment un système fondamental de solutions. On cherche alors des solutions du type $y = e^{rx}$.

On en tire $y' = r e^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$. En reportant ces valeurs dans l'équation, on obtient : $ar^2 + br + c = 0$, qui est appelée *équation caractéristique*.

Cas n° 1 : l'équation caractéristique a deux racines réelles

Soit r_1 et r_2 ces racines, les deux solutions particulières sont $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$ qui vérifient l'équation.

La solution générale de l'équation est $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ soit :

$$y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

$$y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

λ et μ que l'on peut appeler "constantes d'intégration" sont déterminées par les conditions initiales, et d'autre part on a :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ r_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

| C'est le régime apériodique en électricité ou mécanique.

Cas particulier déjà vu

• Résoudre l'équation $y'' - a^2 y = 0$.

L'équation caractéristique peut s'écrire :

$$r^2 - a^2 = 0$$

les solutions évidentes sont :

$$r_1 = a \text{ et } r_2 = -a$$

d'où :

$$y = \lambda e^{ax} + \mu e^{-ax}$$

Ce qui peut se mettre sous la forme :

$$y = K \operatorname{ch}(ax + \varphi)$$

$$y = K \operatorname{ch}(ax + \varphi)$$

Cas n° 2 : l'équation caractéristique a une racine double

Si r est cette racine, elle est telle que $r = -\frac{b}{2a}$.

Il n'y a plus qu'une solution particulière du type :

$$y_1 = e^{rx}$$

Pour déterminer y on peut utiliser la méthode dite de "variation de constante" et poser que la solution est de la forme :

$$y = \lambda(x) e^{rx}$$

ce qui implique :

$$y' = \lambda' e^{rx} + \lambda r e^{rx}$$

et :

$$y'' = \lambda'' e^{rx} + 2\lambda' r e^{rx} + \lambda r^2 e^{rx}$$

soit :

$$y'' = e^{rx} (\lambda'' + 2\lambda' r + \lambda r^2)$$

En reportant ces expressions dans l'équation de départ il vient :

$$a e^{rx} (\lambda'' + 2\lambda' r + \lambda r^2) + b e^{rx} (\lambda' + \lambda r) + c \lambda e^{rx} = 0$$

ou :

$$a \lambda'' + \lambda' (2ar + b) + \lambda (ar^2 + br + c) = 0$$

mais $2ar + b = 0$, de même $ar^2 + br + c = 0$ donc $a\lambda'' = 0$ et $\lambda'' = 0$ car $a \neq 0$.

Ce qui implique :

$$\lambda' = C_1 = \frac{d\lambda}{dx}$$

et :

$$\lambda = C_1 x + C_2$$

soit :

$$y = (C_1 x + C_2) e^{rx}$$

$$y = (C_1 x + C_2) e^{rx}$$

C'est le régime critique en mécanique ou électricité.

Cas n° 3 : l'équation caractéristique a deux racines imaginaires

Si $b^2 - 4ac < 0$ alors :

$$r_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} = \alpha + j\beta$$

et :

$$r_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} = \alpha - j\beta$$

mais :

$$y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

Compte tenu des valeurs de r_1 et r_2 on peut écrire :

$$y = \lambda e^{(\alpha + j\beta)x} + \mu e^{(\alpha - j\beta)x}$$

ou :

$$y = e^{\alpha x} (\lambda e^{j\beta x} + \mu e^{-j\beta x})$$

Mais d'après les formules d'Euler :

$$e^{j\beta x} = \cos \beta x + j \sin \beta x$$

$$e^{-j\beta x} = \cos \beta x - j \sin \beta x$$

donc :

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

ou :

$$y = C_3 e^{\alpha x} \sin(\beta x + C_4)$$

$$y = C_3 e^{\alpha x} \sin(\beta x + C_4)$$

C'est le régime pseudo-périodique en Physique. Les constantes sont déterminées par les conditions initiales.

Cas particulier déjà vu

• Résoudre l'équation $y'' + a^2 y = 0$.

L'équation caractéristique peut s'écrire :

$$r^2 + a^2 = 0, \text{ ici } \alpha = 0$$

les solutions évidentes sont :

$$r_1 = ja \text{ et } r_2 = -ja$$

d'où :

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$$

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$$

soit encore :

$$y = C_3 \sin(ax + C_4)$$

$$y = C_3 \sin(ax + C_4)$$

• Le second membre existe et il est constant

$$ay'' + by' + cy = d$$

On utilise les mêmes méthodes que pour les équations du premier ordre :

- soit poser $cy - d = u$ et ramener à une équation sans second membre.
- soit écrire que la solution de l'équation est égale à la solu-

tion de l'équation sans second membre plus une solution particulière de l'équation avec second membre $\left(y = \frac{d}{c} \right)$.

● **Le second membre existe et c'est une fonction de x**

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Méthode utilisée : la solution globale est égale à la solution de l'équation sans second membre plus une solution particulière de l'équation avec second membre.

Cas n° 1

Si $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ la solution particulière sera un polynôme de degré inférieur ou égal à celui de $g(x)$.

On calcule les dérivées première et seconde à partir de $y_2 = \alpha x^2 + \beta x + \delta$ soit :

$$y'_2 = 2\alpha x + \beta$$

$$y''_2 = 2\alpha$$

On reporte ces valeurs dans l'équation et on calcule α, β, δ par identification.

Cas n°2 :

Si $g(x) = d e^{\alpha x}$ la solution particulière est de la forme:

$$y_2 = K e^{\alpha x}$$

si α n'est pas solution de l'équation caractéristique. Ensuite les dérivées sont :

$$y'_2 = K \alpha e^{\alpha x}$$

$$y''_2 = K \alpha^2 e^{\alpha x}$$

On reporte dans l'équation et on détermine K par identification.

Cas n° 3

Si $g(x) = d e^{r_1 x}$, r_1 est solution de l'équation caractéristique.

La solution particulière est de la forme :

$$y_2 = Kx e^{r_1 x}$$

Ainsi :

$$y'_2 = K e^{r_1 x} + Kx r_1 e^{r_1 x}$$

$$y''_2 = 2K r_1 e^{r_1 x} + Kx r_1^2 e^{r_1 x}$$

On reporte ces valeurs dans l'équation et on détermine K par identification.

2. APPLICATIONS À LA PHYSIQUE

2. 1. Application à la mécanique

2. 1. 1. Mouvement d'une particule soumise à l'action d'une force constante

On considère une particule mobile de masse m soumise à un ensemble de forces dont la résultante \vec{f} est constante. Soit \vec{v}_0 la vitesse à l'instant $t = 0$ et $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{r}_0$ la position de la particule à ce même instant par rapport à une origine O .

On note $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère dans lequel on considère la particule.

D'après le principe fondamental de la dynamique on peut écrire :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ position de la particule à l'instant t .

Soit :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{f}}{m} = \overrightarrow{Cte} \quad \text{ou} \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{f}}{m}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{f}}{m} = \overrightarrow{Cte} \quad \text{ou} \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{f}}{m}$$

En intégrant cette équation différentielle du second ordre il vient :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{f}}{m} t + \vec{C}$$

or :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}$$

et d'après les conditions initiales à $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ donc :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{f}}{m} t + \vec{v}_0$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{f}}{m} t + \vec{v}_0 \quad \text{ou} \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{f}}{m} t + \vec{v}_0$$

L'intégration de cette équation différentielle du premier ordre conduit à :

$$\vec{r} = \frac{1}{2} \frac{\vec{f}}{m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{C}_1$$

or à $t = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_0$ donc :

$$\vec{r} = \frac{1}{2} \frac{f}{m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad (1)$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2} \frac{f}{m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

● Cas particulier d'une particule en mouvement au voisinage de la Terre

On peut alors écrire :

$$\frac{f}{m} = \vec{g} \text{ avec } \vec{g} = -g \vec{k}$$

d'autre part nous supposons que \vec{v}_0 appartient au plan déterminé par \vec{i} et \vec{k} (Fig. 7.1). Donc :

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{i} + v_0 \sin \alpha \vec{k}$$

L'équation (1) projetée sur les axes Ox et Oz donne les équations horaires du mobile, soit :

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha) t \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \alpha) t \end{cases}$$

en choisissant $\vec{r}_0 = \vec{0}$ à $t = 0$.

On obtient l'équation de la trajectoire dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) en éliminant le paramètre temps dans les équations horaires, ce qui donne :

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha \quad (2)$$

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$$

la trajectoire a une forme parabolique.

● Cas particulier d'un mouvement rectiligne

Si $f = f \vec{i}$, $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$, $\vec{r}_0 = r_0 \vec{i}$, alors le mouvement est rectiligne uniformément varié dans le repère (O, \vec{i}).

Les différentes caractéristiques du mouvement sont :

$$r = \frac{1}{2} \frac{f}{m} t^2 + v_0 t + r_0$$

$$v = \frac{f}{m} t + v_0$$

$$\gamma = \frac{f}{m}$$

$$r = \frac{1}{2} \frac{f}{m} t^2 + v_0 t + r_0$$

$$v = \frac{f}{m} t + v_0$$

$$\gamma = \frac{f}{m}$$

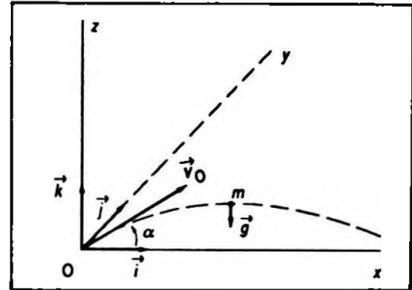


Figure 7.1

• Si $\gamma v > 0$

Soit $\dot{v}v > 0$, ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} > 0$$

alors v^2 croît et $\|\vec{v}\|$ croît également, le mouvement est uniformément accéléré.

- Si $\gamma v < 0$

Le mouvement est uniformément retardé (phase transitoire).

- Si $\gamma = 0$

Le mouvement est uniforme.

2. 1. 2. Oscillateur harmonique

On considère une particule de masse m soumise à l'action d'une *force centrale* (restant constamment dirigée vers un point fixe O) de la forme $\vec{f} = -k\vec{r}$ ($k > 0$) c'est-à-dire *attractive*, proportionnelle (mais de signe contraire) à la distance de la particule au centre de vibration ($OM = \vec{r}$) M étant la position de la particule.

Les conditions initiales sont :

$$\text{à } t = 0, \text{ position } \vec{r} = \vec{r}_0, \text{ vitesse } \vec{v} = \vec{v}_0$$

La force étant centrale, on admettra que le mouvement est plan, ce qui a été démontré au Chapitre 1.

D'après le principe fondamental de la dynamique on peut écrire :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r} \qquad m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r} \text{ ou } m \ddot{\vec{r}} = -k \vec{r}$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants qui peut encore se noter :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + k \vec{r} = \vec{0} \qquad m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + k \vec{r} = \vec{0}$$

ou :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{k}{m} \vec{r} = \vec{0} \qquad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{k}{m} \vec{r} = \vec{0}$$

On pose $\omega^2 = \frac{k}{m} > 0$, les solutions sont de la forme :

$$\vec{r} = \vec{A} \cos \omega t + \vec{B} \sin \omega t$$

\vec{A} et \vec{B} sont des constantes vectorielles qui seront déterminées par les conditions initiales.

Or à $t = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_0$ donc $\vec{A} = \vec{r}_0$; à $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ mais :

$$\vec{v} = -\omega \vec{A} \sin \omega t + \omega \vec{B} \cos \omega t$$

donc :

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}_0}{\omega}$$

et finalement :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega t$$

On peut montrer que la trajectoire est une ellipse, de centre le centre de force, inscrite dans un parallélogramme construit à partir de \vec{r}_0 et de $\frac{\vec{v}_0}{\omega}$ (Fig. 7.2). Le sens de parcours est défini à partir de \vec{v}_0 .

Les équations horaires du mouvement de la particule s'écrivent :

$$\begin{cases} x = r_0 \cos \omega t \\ y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

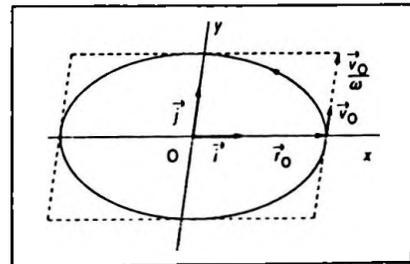


Figure 7.2

on élimine le paramètre t , d'où l'équation de la trajectoire en axes obliques :

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2 \omega^2}{v_0^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2 \omega^2}{v_0^2} = 1$$

La trajectoire est donc une ellipse de centre O .

Les autres caractéristiques du mouvement sont :

$$\vec{v} = -\vec{r}_0 \omega \sin \omega t + \vec{v}_0 \cos \omega t$$

$$\vec{v} = -\vec{r}_0 \omega \sin \omega t + \vec{v}_0 \cos \omega t$$

$$\vec{\gamma} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{\gamma} = -\omega^2 \vec{r}$$

● Cas particulier du mouvement circulaire uniforme

— La trajectoire est une circonférence lorsque $r_0 = \frac{v_0^2}{\omega^2}$; dans ce cas l'équation de la trajectoire est $x^2 + y^2 = r_0$.

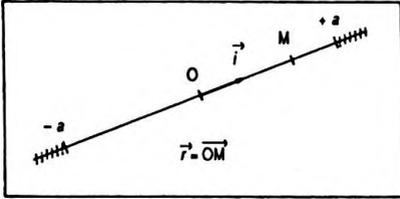


Figure 7.3

— Autre condition $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$. En effet il est nécessaire que la vitesse soit normale au rayon à chaque instant et en particulier à $t = 0$.

Le mouvement est alors circulaire uniforme, la vitesse initiale $v_0 = r_0 \omega = r_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$ est constante.

— La force reste constante en intensité mais est variable en direction :

$$\vec{f} = -k r \vec{u} \quad (\vec{u}, \text{ vecteur unitaire})$$

● **Cas particulier du mouvement rectiligne (Fig. 7.3)**

Si $\vec{f} = -k r \vec{i}$ et $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ c'est-à-dire si la force est attractive, d'intensité variable mais de direction constante, le mouvement est rectiligne sinusoidal et :

$$\vec{r} = \left(r_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \right) \vec{i}$$

$$\vec{r} = \left(r_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \right) \vec{i}$$

il se met également sous la forme :

$$\vec{r} = \left(a \sin (\omega t + \varphi) \right) \vec{i}$$

a et φ seront déterminés par les conditions initiales.

Dans tous les cas le mouvement est périodique de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Remarque

Si la force, au lieu d'être attractive, est répulsive du type :

$$\vec{f} = k r \vec{i} \quad (k > 0)$$

avec les conditions initiales semblables, l'équation différentielle peut s'écrire :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - \frac{k}{m} \vec{r} = \vec{0}$$

ou :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - \omega^2 \vec{r} = \vec{0}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - \omega^2 \vec{r} = \vec{0}$$

L'équation caractéristique admet ici deux racines réelles ; elle est telle que :

$$x^2 - \omega^2 = 0 \quad \text{ainsi} \quad x = \pm \omega$$

Les solutions de l'équation différentielle sont :

$$\vec{r} = \vec{A} e^{\omega t} + \vec{B} e^{-\omega t}$$

ce qui équivaut à :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \left(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right) + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \right)$$

que l'on peut écrire au moyen des lignes hyperboliques :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t$$

On rappelle que $\operatorname{ch}^2 \omega t - \operatorname{sh}^2 \omega t = 1$ ce qui permettra d'établir l'équation de la trajectoire.

Les équations horaires suivant les axes obliques sont :

$$\begin{cases} x = r_0 \operatorname{ch} \omega t \\ y = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t \end{cases}$$

D'où l'équation de la trajectoire :

$$\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{y^2}{v_0^2} \omega^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{y^2}{v_0^2} \omega^2 = 1$$

C'est l'équation d'une hyperbole. Le sens du parcours est indiqué par la vitesse initiale (Fig. 7.4). La particule est repoussée par le centre de force O.

2. 1. 3. Oscillations libres d'un système amorti

On considère un mobile de masse m se déplaçant sur un plan horizontal sous l'action d'un ressort de raideur k (Fig. 7.5). Le système est amorti grâce à un amortisseur à air produisant une force de frottement visqueux proportionnelle à la vitesse et d'expression $-f \frac{dx}{dt} = -fv$, $f > 0$.

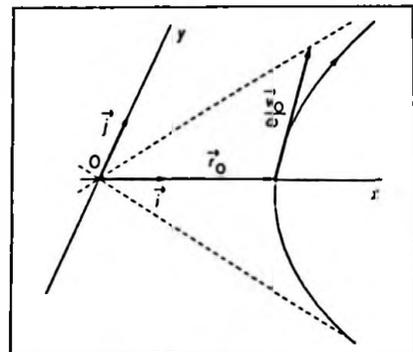


Figure 7.4

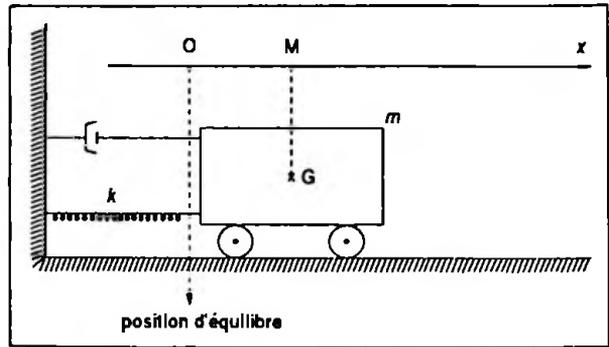


Figure 7.5

On veut déterminer la loi du mouvement sachant qu'à $t = 0$, le système est écarté de sa position d'équilibre d'une distance a et qu'il est abandonné sans vitesse initiale. Quelle condition doit alors vérifier f pour que le mouvement soit oscillatoire amorti ?

L'équation différentielle du mouvement s'exprime d'après la relation fondamentale de la dynamique par :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -f \frac{dx}{dt} - kx$$

soit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, que l'on appelle pulsation propre du système ; on en déduit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

L'équation caractéristique est de la forme :

$$r^2 + \frac{f}{m} r + \omega_0^2 = 0$$

et admet pour racines :

$$r = \frac{1}{2} \left(-\frac{f}{m} \pm \sqrt{\frac{f^2}{m^2} - 4\omega_0^2} \right)$$

Pour que le mouvement soit oscillatoire amorti il faut que les racines r_1 et r_2 soient imaginaires donc :

$$\frac{f^2}{m} - 4\omega_0^2 < 0$$

soit :

$$f < 2m\omega_0$$

$$f < 2m\omega_0$$

Si cette condition est satisfaite alors :

$$r_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{f}{m} + 2j\omega_1 \right) \text{ et } r_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{f}{m} - 2j\omega_1 \right)$$

avec $j^2 = -1$

$$\text{en posant } \omega_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - \frac{f^2}{m^2}}$$

La solution générale de l'équation différentielle du mouvement est alors une combinaison linéaire de $x_1 = e^{r_1 t}$ et de $x_2 = e^{r_2 t}$ soit :

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

que l'on peut encore écrire :

$$x = e^{-\frac{1}{2} \frac{f}{m} t} \left(C_1 e^{j\omega_1 t} + C_2 e^{-j\omega_1 t} \right)$$

Ce qui équivaut à :

$$x = e^{-\frac{f}{2m} t} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t)$$

ou encore :

$$x = A_0 e^{-\frac{f}{2m} t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

Les constantes A_0 et φ sont déterminées par les conditions initiales :

$$\text{à } t = 0, x = a \text{ ce qui implique } a = A_0 \cos \varphi \quad (1)$$

à $t = 0, v = 0$, or la vitesse est obtenue par dérivation de x soit :

$$v = A_0 \left(-\frac{f}{2m} \right) e^{-\frac{f}{2m} t} \cos(\omega_1 t + \varphi) - A_0 e^{-\frac{f}{2m} t} \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

d'où :

$$0 = A_0 \left(-\frac{f}{2m} \right) \cos \varphi - A_0 \omega_1 \sin \varphi \quad (2)$$

ce qui implique :

$$A_0 \sin \varphi = -\frac{f}{2m \omega_1} a \quad (2')$$

donc :

$$\tan \varphi = -\frac{f}{2m \omega_1} \quad \text{et} \quad A_0 = a \sqrt{1 + \frac{f^2}{4m^2 \omega_1^2}}$$

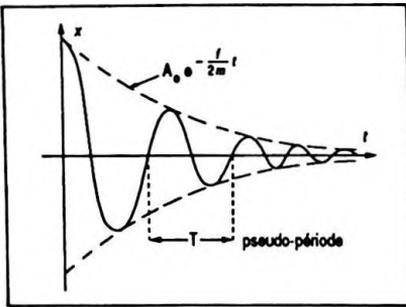


Figure 7.6

Le système effectue des oscillations de pseudo-fréquence $\frac{\omega_1}{2\pi}$ dont l'amplitude $A_0 e^{-\frac{f}{2m}t}$ décroît exponentiellement avec le temps (Fig. 7.6).

Si x_n et x_{n+1} désignent deux élongations maximales successives, on a $\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{+\frac{f}{2m}T}$

On définit le décrement logarithmique par :

$$\delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{f}{2m} T$$

avec :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{4\pi}{\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{f^2}{m^2}}}$$

soit :

$$\delta = \frac{2\pi \frac{f}{m}}{\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{f^2}{m^2}}} \quad \delta = \frac{2\pi \frac{f}{m}}{\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{f^2}{m^2}}}$$

2. 1. 4. Mouvement d'une chaîne

Une chaîne sans raideur repose sur le bord d'une table. Elle est maintenue à son extrémité A tandis que l'extrémité B est à la distance ℓ_0 du plan de la table. A l'instant $t = 0$ on abandonne la chaîne sans vitesse initiale. On désire déterminer l'équation différentielle régissant le

mouvement de la chaîne en supposant les frottements négligeables. On désigne par L sa longueur totale et par λ sa masselinéique. On déterminera également le temps nécessaire pour que la chaîne quitte la table.

À l'instant t tous les points de la chaîne ont même vitesse $\frac{dx}{dt}$; l'énergie cinétique est donc :

$$E_c = \frac{1}{2} \lambda L \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

Lorsque la longueur x de la chaîne pend dans le vide (Fig. 7.7), la masse de cette portion est $m_1 = \lambda x$ avec un centre d'inertie à la cote $\frac{x}{2}$ d'où l'énergie potentielle :

$$E_p = - \lambda x g \frac{x}{2} \quad (\text{niveau de référence table } E_p = 0)$$

soit :

$$E_p = - \lambda g \frac{x^2}{2}$$

l'énergie mécanique totale du système est donc :

$$E = \frac{1}{2} \lambda L \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \lambda g \frac{x^2}{2}$$

Or l'énergie se conserve en l'absence de tout frottement ainsi :

$$dE = 0 = \left(L \frac{d^2x}{dt^2} - g x \right) \lambda \frac{dx}{dt}$$

On en déduit l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{L} x = 0$$

Si l'on pose $\omega^2 = \frac{g}{L}$ la solution générale de cette équation différentielle est :

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$$

or à $t = 0$, $x = \ell_0$ et $\frac{dx}{dt} = 0$ ce qui implique :

$$\ell_0 = C_1 + C_2 \quad \text{et} \quad 0 = \omega (C_1 - C_2)$$

soit :

$$C_1 = C_2 = \frac{\ell_0}{2}$$

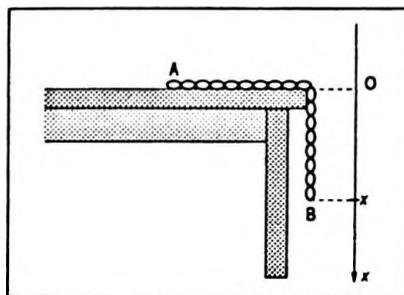


Figure 7.7

$$x = \ell_0 \operatorname{ch} \omega t$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{Arg} \operatorname{ch} \frac{L}{\ell_0}$$

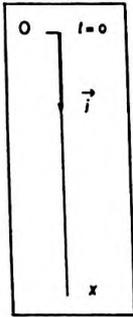


Figure 7.8

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$$

et :

$$x = \ell_0 \operatorname{ch} \omega t$$

Lorsque la chaîne quitte la table $x = L$, donc :

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{Arg} \operatorname{ch} \frac{L}{\ell_0}$$

2. 1. 5. Mouvement vertical avec résistance de l'air

On considère un mobile de masse m tombant suivant la verticale sous l'action de son poids. Il est freiné par la résistance de l'air que l'on supposera proportionnelle à la vitesse. À l'instant initial $t = 0$ ce mobile est lâché sans vitesse initiale du point O pris comme origine des espaces (Fig. 7.8).

On applique le principe fondamental de la dynamique au point matériel en mouvement soit :

$$m g \vec{i} - k v \vec{i} = m \gamma \vec{i}$$

ce qui est équivalent à :

$$m g - k v = m \frac{dv}{dt}$$

ou :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et avec second membre. Sa solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = 0$$

et d'une solution particulière de l'équation complète.

• Équation sans second membre.

La méthode de séparation de variable nous permet de résoudre l'équation :

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{k}{m} v$$

qui se met sous la forme :

$$\frac{dv}{v} = - \frac{k}{m} dt$$

en intégrant on obtient :

$$\ln v = -\frac{k}{m}t + C$$

et :

$$v = C_1 e^{-\frac{k}{m}t}$$

• Solution particulière de l'équation avec second membre.

Elle s'écrit $v = g \frac{m}{k}$ (c'est une constante, donc $\frac{dv}{dt} = 0$).

• Solution globale.

Compte tenu des résultats précédents on a :

$$v = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

• Conditions initiales.

À $t = 0, v = 0$ donc :

$$C_1 = -\frac{mg}{k}$$

et :

$$v = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

$$v = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

Si t est grand : $e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 0$ et $v \rightarrow \frac{mg}{k}$ qui est une vitesse limite constante.

Pour déterminer la distance parcourue au cours du temps il faut intégrer une nouvelle équation différentielle :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

soit :

$$x = \int \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) dt$$

et :

$$x = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right) + C$$

Or à $t = 0, x = 0$ donc $0 = \frac{m^2}{k^2}g + C$, soit $C = -\frac{m^2 g}{k^2}$

et finalement :

$$x = \frac{mg}{k} \left(-\frac{m}{k} + t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right) \qquad x = \frac{mg}{k} \left(-\frac{m}{k} + t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

On voit que si t est grand :

$$x = -\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{m g t}{k}$$

Le mouvement devient donc uniforme, avec la vitesse limite $\frac{mg}{k}$.

2. 1. 6. Mouvement d'une fusée sans résistance de l'air

Une fusée de masse totale au départ M contient une masse m_1 d'un mélange propulsif dont la quantité μ est éjectée par seconde à la vitesse v vers l'arrière. La fusée part verticalement du sol, sans vitesse initiale. L'intensité g de la pesanteur est supposée constante.

— À quelle condition décolle-t-elle ?

— Donner l'équation différentielle du mouvement pendant la phase propulsive.

— Comment varie la vitesse en fonction du temps ?

— Quelle est la vitesse v_1 en fin de combustion ?

— Quelle est l'altitude z_1 en fin de combustion ?

● Poussée due à l'éjection des gaz

Soit le système entre deux instants t et $t + dt$ très voisins :

$$\left\{ \begin{array}{l} m : \text{masse de la fusée à l'instant } t ; \\ m - dm : \text{masse de la fusée à l'instant } t + dt ; \\ \vec{V} \text{ est la vitesse à l'instant } t \text{ qui devient } \vec{V} + d\vec{V} \text{ à l'instant } t + dt. \end{array} \right.$$

dm : masse de gaz éjectés vers l'arrière à la vitesse \vec{v} par rapport à la fusée (entre les instants t et $t + dt$) ;
 $dm = \mu dt$ (μ étant le débit).

Pour déterminer la force de poussée des réacteurs on peut écrire la conservation de la quantité du mouvement dans le cas où le système serait mécaniquement isolé dans un repère galiléen soit :

$$m \vec{V} = (m - \mu dt) (\vec{V} + d\vec{V}) + \mu dt (\vec{V} + \vec{v})$$

en projetant sur l'axe de déplacement de la fusée il vient :

$$mV = (m - \mu dt)(V + dV) + \mu dt(V - v)$$

car les vitesses sont colinéaires, c'est-à-dire au second ordre près :

$$dV = \frac{\mu v}{m} dt$$

ou :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\mu v}{m} \quad \text{donc} \quad m \frac{dV}{dt} = \mu v$$

et la force de propulsion est $F = \mu v$.

Pour qu'il y ait décollage il faut $\mu v > Mg$.

• Équation différentielle du mouvement

À l'instant t la masse de la fusée est $M - \mu t$, la poussée $F = \mu v$ et le poids $(M - \mu t)g$.

Le principe fondamental de la dynamique appliquée au système dans un repère galiléen donne en projetant sur l'axe vertical du déplacement :

$$(M - \mu t) \frac{dV}{dt} = \mu v - (M - \mu t)g$$

On en déduit la variation de la vitesse au cours du temps soit :

$$dV = \frac{\mu v dt}{M - \mu t} - g dt$$

En intégrant les deux membres de cette équation différentielle il vient :

$$V = -v \ln(M - \mu t) - gt + C$$

or à $t = 0$, $V = 0$ soit $C = v \ln M$, et :

$$V = v \ln \frac{M}{M - \mu t} - gt$$

$$V = v \ln \frac{M}{M - \mu t} - gt$$

La vitesse en fin de combustion qui a lieu à l'instant $t_1 = \frac{m_1}{\mu}$ est :

$$V_1 = v \ln \frac{M}{M - m_1} - \frac{m_1 g}{\mu}$$

L'altitude atteinte en fonction du temps s'obtient à partir de la vitesse qui s'écrit :

$$V = \frac{dz}{dt} = v \ln \frac{M}{M - \mu t} - gt$$

soit en intégrant :

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + vt \ln M + \frac{v}{\mu} \left((M - \mu t) \ln (M - \mu t) - (M - \mu t) \right) + C$$

en effet, $\int \ln x dx = x \ln x - x$.

À $t = 0, z = 0$ ce qui permet de déterminer la constante ainsi :

$$C = -\frac{v}{\mu} (M \ln M - M)$$

et finalement :

$$z = v \left[t - \left(\frac{M}{\mu} - t \right) \ln \frac{M}{M - \mu t} \right] - \frac{1}{2}gt^2$$

$$z = v \left[t - \left(\frac{M}{\mu} - t \right) \ln \frac{M}{M - \mu t} \right] - \frac{1}{2}gt^2$$

L'altitude z_1 en fin de combustion c'est-à-dire à $t_1 = \frac{m_1}{\mu}$ est :

$$z_1 = \frac{v}{\mu} \left(m_1 - (M - m_1) \ln \frac{M}{M - m_1} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{m_1}{\mu} \right)^2$$

2. 2. Application à l'électricité

2. 2. 1. Charge d'un condensateur à travers une résistance

On considère un circuit comportant un générateur de f.e.m. E , un condensateur de capacité C et un conducteur ohmique de résistance R (Fig. 7.9). Le circuit est initialement ouvert. On le ferme à l'instant $t = 0$ et on suppose que le condensateur est complètement déchargé. A l'instant t le courant qui traverse le circuit a pour intensité i (variable car l'établissement du régime appelé régime permanent n'est pas instantané).

La différence de potentiel aux bornes de la résistance est donc Ri . D'autre part on sait que si q est la charge prise par le condensateur la différence de potentiel à ses bornes est u telle que $q = Cu$ donc :

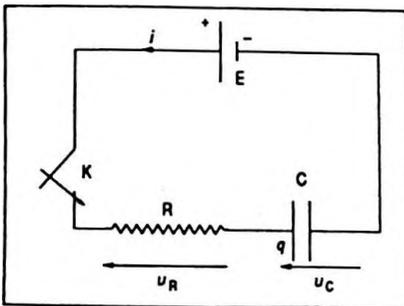


Figure 7.9

$$E = Ri + \frac{q}{C}$$

\downarrow \downarrow
 ddp aux bornes ddp aux bornes
 de la résistance du condensateur
 à l'instant t à l'instant t

or $i = \frac{dq}{dt}$ (convention : si le courant pénètre par l'armature portant la charge q , on note $i = \frac{dq}{dt}$) donc :

$$E = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$E = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et avec second membre dont la solution est de la forme :

$$S = S_{\text{générale équation}} + S_{\text{particulière équation}}$$

(sans second membre) (avec second membre)

L'équation sans second membre s'écrit :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

par séparation de variable il vient :

$$\frac{dq}{q} = - \frac{dt}{RC}$$

En intégrant les deux membres on obtient :

$$\ln q = - \frac{t}{RC} + \text{Cte}$$

d'où :

$$S_{\text{générale}} : q = K e^{-\frac{t}{RC}}$$

De plus :

$S_{\text{particulière}} : q = CE$ (c'est une constante en la reportant dans l'équation différentielle initiale $\frac{dq}{dt} = 0$ et elle vérifie cette équation) ; d'où la solution globale :

$$q = K e^{-\frac{t}{RC}} + CE$$

On détermine la constante d'intégration par les conditions initiales : $q = 0$ à $t = 0$ (en effet $q = 0$ et $t < 0$, avant la fermeture, donc $q = 0$ à $t = 0$ par continuité de q dans le condensateur), ce qui implique :

$$0 = K + CE$$

et :

$$q = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$q = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

On pose souvent $\tau = RC$ (*) on l'appelle constante de temps du circuit.

$$(*) \frac{dq}{dt} = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ ce qui implique } \left(\frac{dq}{dt} \right)_0 = \frac{CE}{\tau}$$

La constante de temps τ est le temps que mettrait le condensateur à se charger si sa vitesse de "charge" restait constante et égale à celle qu'il a initialement (Fig. 7.10).

À partir de la charge du condensateur, on peut déduire l'intensité instantanée du courant qui traverse le circuit soit $i = \frac{dq}{dt}$ ou :

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

On voit que le courant tend vers 0 quant t croît indéfiniment (Fig. 7.11).

2. 2. 2. Établissement d'un courant dans un circuit inductif

Soit un circuit comportant un générateur de f. e. m. E une bobine d'inductance L et un conducteur ohmique de résistance R . (Fig. 7.12). Le circuit est initialement ouvert ; on le ferme à l'instant $t = 0$ et on veut étudier l'évolution de l'intensité i du courant. Soit i l'intensité du courant à l'instant t quelconque après la fermeture. La "chute ohmique" de tension dans la partie résistante est Ri . La différence de potentiel aux bornes de la bobine u_L , qui est due à l'auto-inductance est telle que $u_L = -e$ avec $e = -L \frac{di}{dt}$.

D'où :

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et avec second membre dont les solutions générale et particulière sont respectivement :

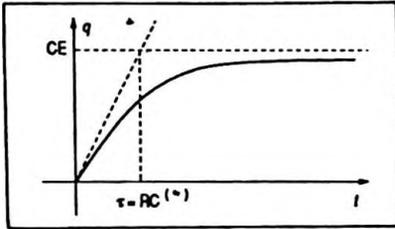


Figure 7.10

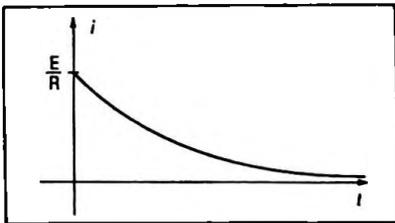


Figure 7.11

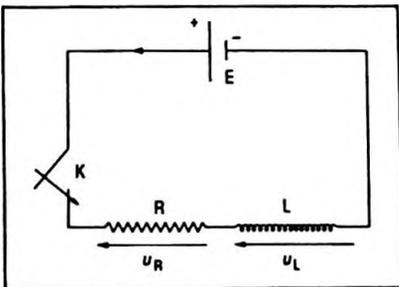


Figure 7.12

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$S_g : i = K e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$S_p : i = \frac{E}{R}$$

D'où la solution globale S qui est telle que :

$$i = K e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

On peut dire qu'à l'instant $t = 0$ l'intensité du courant est nulle. En effet pour $t < 0$ (avant la fermeture) $i = 0$, donc à $t = 0$ l'intensité est nulle, par continuité de i dans l'inductance, ainsi :

$$0 = K + \frac{E}{R}$$

et :

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad \left(\text{ici } \tau = \frac{L}{R} \right)$$

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

On voit que le courant tend vers $\frac{E}{R}$ lorsque t croît indéfiniment, c'est le régime permanent (Fig. 7.13).

2. 2. 3. Décharge d'un condensateur dans une bobine inductive et résistante

On considère un circuit comportant un condensateur de capacité C ayant initialement une charge Q , une bobine d'inductance L et une résistance totale du circuit R (Fig. 7.14). Le circuit est initialement ouvert ; on ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$; d'autre part on suppose qu'initialement l'intensité du courant est nulle.

On prend l'ensemble du circuit à un instant t quelconque : l'intensité du courant est i , la charge du condensateur q , la différence de potentiel aux bornes du condensateur $u = \frac{q}{C} = v_A - v_B$.

Si on applique la loi de Ohm au circuit à l'instant t il vient :

$$u = \frac{q}{C} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

or :

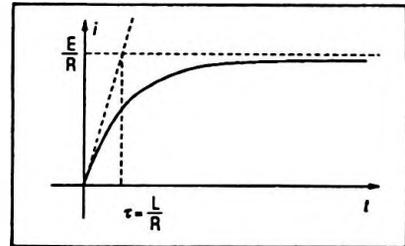


Figure 7.13

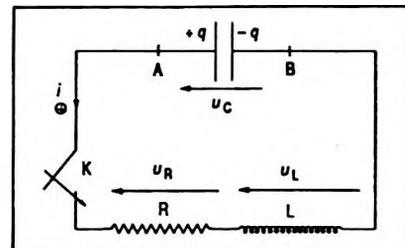


Figure 7.14

$$i = - \frac{dq}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = - \frac{d^2q}{dt^2}$$

* Selon convention (le sens du courant va de la plaque chargée + q à la plaque chargée - q) le signe - provient ici du fait que i est dû à la décharge du condensateur q décroît, donc $dq < 0$ (le sens positif choisi pour i étant de A vers B à l'extérieur du condensateur).

D'où l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants sans second membre :

$$\frac{q}{C} = - R \frac{dq}{dt} - L \frac{d^2q}{dt^2}$$

soit :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

L'intégrale de cette équation différentielle dépend de la nature des solutions de l'équation caractéristique qui est :

$$Lx^2 + Rx + \frac{1}{C} = 0$$

● Si $\Delta = R^2 - 4 \frac{L}{C} > 0$

L'équation caractéristique admet deux racines réelles négatives - α et - β .

L'intégrale générale est de la forme :

$$q = A e^{-\alpha t} + B e^{-\beta t}$$

et en tenant compte des conditions initiales $t = 0, q = Q, i = 0$, il vient :

$$Q = A + B$$

De plus :

$$i = - \frac{dq}{dt} = \alpha A e^{-\alpha t} + \beta B e^{-\beta t}$$

($t = 0, i = 0$) ce qui implique $0 = \alpha A + \beta B$.

D'où le système :

$$\begin{cases} A + B = Q \\ \alpha A + \beta B = 0 \end{cases}$$

soit :

$$B = \frac{\alpha Q}{\alpha - \beta} \quad \text{et} \quad A = \frac{-\beta Q}{\alpha - \beta}$$

On a donc :

$$q = \frac{Q}{\beta - \alpha} (\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t})$$

$$i = \frac{Q\alpha\beta}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$$

$$q = \frac{Q}{\beta - \alpha} (\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t})$$

$$i = \frac{Q\alpha\beta}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$$

avec $R^2 - 4 \frac{L}{C} > 0$.

q et i tendent asymptotiquement vers 0 lorsque t tend vers l'infini (Fig. 7.15 et Fig. 7.16) ; (i passe par un maximum).

Ce régime est appelé *décharge apériodique*.

• Si $R^2 - 4 \frac{L}{C} = 0 \Leftrightarrow R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$

La résistance s'appelle résistance critique et le régime correspondant régime critique ou décharge critique.

L'équation caractéristique admet une racine double

$$\alpha_0 = -\frac{R}{2L}$$

La solution générale est de la forme :

$$q = (At + B) e^{\alpha_0 t}$$

On détermine A et B par les conditions initiales : (à $t = 0, q = Q$) donc $Q = B$ et :

$$i = -\frac{dq}{dt} = -A e^{\alpha_0 t} - (At + B) \alpha_0 e^{\alpha_0 t}$$

(à $t = 0, i = 0$) donc $0 = A + B \alpha_0$ et $A = -Q \alpha_0$.

Ainsi :

$$q = Q(1 - \alpha_0 t) e^{\alpha_0 t}$$

$$i = Q \alpha_0^2 t e^{\alpha_0 t}$$

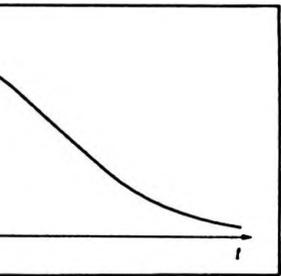


Figure 7.15

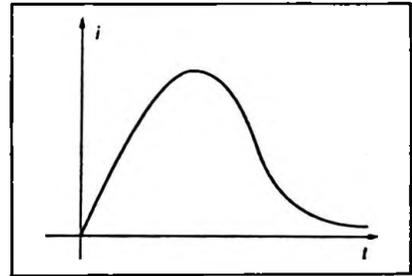


Figure 7.16

$$q = Q(1 - \alpha_0 t) e^{\alpha_0 t}$$

$$i = Q \alpha_0^2 t e^{\alpha_0 t}$$

• Si $R^2 - 4 \frac{L}{C} < 0$

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes

et s'écrivent sous la forme $-\lambda \pm j\omega$ avec $\lambda = \frac{R}{2L}$ et

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \text{ Les solutions sont du type :}$$

$$q = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

ou :

$$q = D e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$q = D e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

D et φ étant des constantes à déterminer par les conditions initiales ($t = 0, q = Q$) donc :

$$Q = D \cos \varphi$$

D'autre part :

$$i = -\frac{dq}{dt} = \lambda D e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) + \omega D e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi)$$

($t = 0, i = 0$) donne $0 = \lambda D \cos \varphi + D \omega \sin \varphi$ avec $D \neq 0$. On en déduit :

$$\tan \varphi = -\frac{\lambda}{\omega} \text{ et } D = \frac{Q}{\cos \varphi} = \frac{Q}{\omega} \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}$$

Ainsi :

$$i = D e^{-\lambda t} \left(\lambda \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi) \right)$$

$$i = D e^{-\lambda t} \left(\lambda \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi) \right)$$

La charge et l'intensité sont des fonctions sinusoïdales amorties du temps. La décharge est dite *oscillatoire amortie* (Fig. 7.17 et Fig. 7.18).

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ s'appelle la pseudo-période, sa valeur est $T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$ si R est faible.

2. 2. 4. Déplacement d'un circuit dans un champ magnétique

Un cadre MNPQ constitué d'un fil de cuivre a une forme rectangulaire ; son plan reste toujours vertical et peut se déplacer dans l'entrefer d'un électro-aimant produisant un champ magnétique horizontal perpendiculaire au plan du cadre pris pour plan de figure (Fig. 7.19). Le champ magnétique est supposé limité par le contour ABCD de forme carrée ($AB = CD > MQ$). Il est uniforme et dirigé d'avant en arrière. Le cadre est dépourvu d'inductance

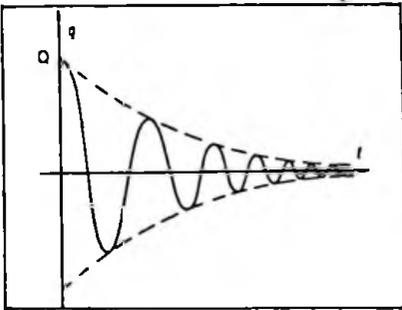


Figure 7.17

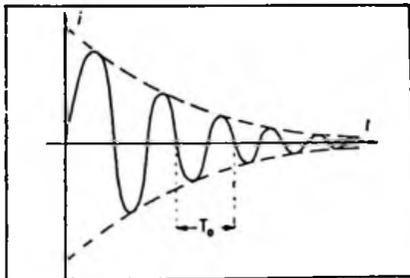


Figure 7.18

propre, il est fermé sur lui-même et placé à la limite du champ magnétique.

a. On l'abandonne sans vitesse initiale à $t = 0$; le côté PQ pénètre alors dans le champ. Trouver les équations du mouvement depuis la position initiale jusqu'au moment où MN traverse AB. On cherchera à déterminer d'abord la vitesse en fonction du temps et ensuite l'ordonnée y de PQ comptée à partir du plan horizontal AB.

b. Montrer que cette vitesse tend très rapidement vers une limite que l'on calculera.

a. Bilan des forces qui s'exercent sur le cadre :

- $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{k}$ (poids total du cadre) ;
- $\vec{F} = i \vec{PQ} \wedge \vec{B} = i \ell B \vec{k}$ (force de Laplace sur le brin PQ uniquement de longueur ℓ , $\vec{PQ} \wedge \vec{B} = \ell \vec{u} \wedge (-B\vec{r}) = \ell B \vec{k}$).

i est l'intensité du courant induit dans le circuit MNPQ à cause de la variation de flux magnétique (sens > 0 choisi de $P \rightarrow Q$).

Le flux a pour expression :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B (\ell Q'Q)$$

donc :

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \ell \frac{d(Q'Q)}{dt} = B \ell \frac{dy}{dt} = B \ell v$$

mais $e_{PQ} = - \frac{d\Phi}{dt}$ soit $e_{PQ} = - B \ell v$ (sens > 0 choisi de $P \rightarrow Q$) et le courant induit dans le circuit fermé est tel que $Ri - e_{PQ} = 0$ ce qui conduit à :

$$i = + \frac{e_{PQ}}{R} = - \frac{B \ell v}{R}$$

ainsi :

$$\vec{F} = - \frac{B^2 \ell^2 v}{R} \vec{k}$$

On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique au cadre (équation mécanique) cela donne :

$$m \vec{\gamma} = m g \vec{k} - \frac{B^2 \ell^2 v}{R} \vec{k}$$

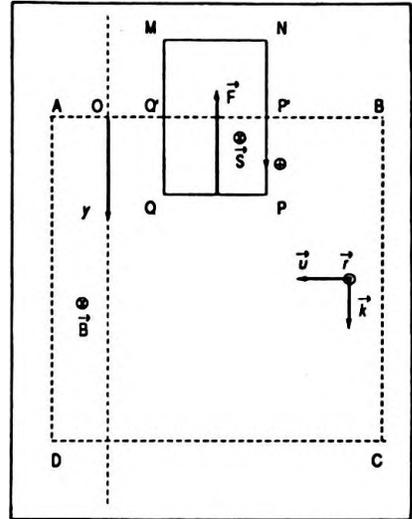


Figure 7.19

ou :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{B^2 \ell^2 v}{R}$$

et enfin :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 \ell^2 v}{mR} = g$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 \ell^2 v}{mR} = g$$

Équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

- Solution particulière $v = \frac{m R g}{B^2 \ell^2}$.

- Solution générale de l'équation sans second membre :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 \ell^2 v}{mR} = 0$$

par séparation des variables on obtient :

$$\frac{dv}{v} = - \frac{B^2 \ell^2}{mR} dt$$

En intégrant les deux membres il vient :

$$\ln v = - \frac{B^2 \ell^2}{mR} t + C$$

et :

$$v = K e^{-\frac{B^2 \ell^2}{mR} t}$$

- Solution globale.

Elle s'écrit :

$$v = K e^{-\frac{B^2 \ell^2}{mR} t} + \frac{mgR}{B^2 \ell^2}$$

- Conditions initiales $t = 0, y = 0, v = 0$ ainsi :

$$0 = K + \frac{mgR}{B^2 \ell^2}$$

d'où :

$$v = \frac{mgR}{B^2 \ell^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 \ell^2}{mR} t} \right)$$

$$v = \frac{mgR}{B^2 \ell^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 \ell^2}{mR} t} \right)$$

L'ordonnée y est telle que $v = \frac{dy}{dt}$.

On pose :

$$v_0 = \frac{m R g}{B^2 \ell^2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{m R}{B^2 \ell^2}$$

ce qui donne :

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

par séparation des variables on obtient :

$$dy = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) dt$$

en intégrant les deux membres de l'équation on est conduit à :

$$y = v_0 t + v_0 \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + C$$

la condition initiale à $t = 0$, soit $y = 0$ permet de calculer la constante d'où :

$$0 = v_0 \tau + C \Rightarrow C = -v_0 \tau$$

et donc :

$$y = v_0 \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

finalement :

$$y = \frac{m g R}{B^2 \ell^2} t - \frac{m^2 R^2}{B^4 \ell^4} g \left(1 - e^{-\frac{B^2 \ell^2}{m R} t} \right)$$

$$y = \frac{m g R}{B^2 \ell^2} t - \frac{m^2 R^2}{B^4 \ell^4} g \left(1 - e^{-\frac{B^2 \ell^2}{m R} t} \right)$$

b. Vitesse limite

Elle est obtenue si l'on fait tendre t vers l'infini, soit :

$$e^{-\frac{B^2 \ell^2}{m R} t} \longrightarrow 0$$

et :

$$v \longrightarrow \frac{m g R}{B^2 \ell^2} = v_0$$

$$v \longrightarrow \frac{m g R}{B^2 \ell^2} = v_0$$

C'est la vitesse atteinte par le cadre après un temps plus ou moins long fonction de τ .

Remarque

Lorsque le cadre est totalement dans le champ magné-

tique son mouvement est un mouvement de chute libre donc uniformément accéléré.

2. 3. Application à la thermodynamique

2. 3. 1. Équation d'une transformation adiabatique réversible

Une transformation d'un gaz est adiabatique s'il n'y a pas d'échange de chaleur entre le milieu extérieur et le système pendant l'évolution de celui-ci donc :

$$\delta Q = 0$$

On considère une masse invariable d'un gaz parfait subissant une transformation adiabatique réversible pour passer de l'état A (p_0, v_0, T_0) à un état voisin B ($p_0 + dp, v_0 + dv, T_0 + dT$).

De l'état A à l'état B, on peut supposer que le cheminement se produit réversiblement par l'intermédiaire d'un état D (Fig. 7.20).

→ de A à D, transformation de v_0 à $v_0 + dv$ à pression constante avec une variation de température dT_1 ; l'échange de chaleur avec le milieu extérieur est :

$$\delta Q_1 = C_p dT_1$$

C_p étant la capacité thermique de la masse gazeuse à pression constante.

→ de D à B, transformation à volume constant de p_0 à $p_0 + dp$ avec une variation de température dT_2 ; l'échange de chaleur avec le milieu extérieur est :

$$\delta Q_2 = C_v dT_2$$

C_v étant la capacité thermique de la masse gazeuse à volume constant.

La transformation globale conduit à un échange de chaleur qui compte tenu des remarques précédentes s'écrit :

$$\delta Q = 0 = \delta Q_1 + \delta Q_2$$

soit :

$$C_p dT_1 + C_v dT_2 = 0 \quad (a)$$

Le gaz étant parfait, son état est défini par $pv = nRT$ à chaque instant avec pour la transformation (1) :

$$p dv = n R dT_1 \quad (p \text{ constant})$$

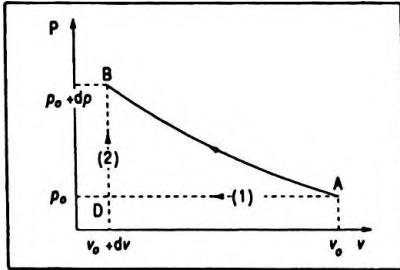


Figure 7.20

et pour la transformation (2) :

$$v dp = nR dT_2 \quad (v \text{ constante})$$

On remplace alors dT_1 et dT_2 par leur valeur dans l'équation (a) ce qui donne :

$$C_p \frac{p dv}{nR} + C_v \frac{v dp}{nR} = 0$$

soit en simplifiant :

$$C_p p dv + C_v v dp = 0$$

ou encore :

$$\frac{C_p}{C_v} \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0$$

en divisant par $C_v p v$ et si l'on pose $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ on obtient :

$$\gamma \frac{dv}{v} = - \frac{dp}{p} \qquad \gamma \frac{dv}{v} = - \frac{dp}{p}$$

qui est une équation différentielle du premier ordre.

On peut intégrer les deux membres de cette équation, il vient alors :

$$\gamma \ln v = - \ln p + \text{Cte}$$

(on supposera γ indépendant de T) ce qui équivaut à :

$$\ln v^\gamma + \ln p = \text{Cte}$$

ou :

$$\ln p v^\gamma = \text{Cte}$$

et :

$$p v^\gamma = \text{Cte}$$

$$p v^\gamma = \text{Cte}$$

Cette formule connue sous le nom d'équation de Laplace est donc applicable lors d'une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait.

2. 3. 2. Évolution de la température d'un corps chauffé et qui rayonne de l'énergie

Un conducteur parcouru par un courant reçoit de l'énergie par effet joule, sa température s'élève. Simultanément une certaine quantité de cette énergie se dissipe dans le milieu ambiant. On étudie la variation de la tem-

température en fonction du temps.

Soit :

\mathcal{P} , la puissance électrique reçue par le conducteur ;

m , la masse du conducteur ;

θ , l'élévation de température du corps par rapport à l'air ambiant ;

t , le temps ;

c , la chaleur massique du corps considéré comme homogène (en réalité c_p) ;

S , la surface de rayonnement du corps, à savoir celle en contact avec l'air ambiant ;

α , le coefficient de rayonnement : quantité de chaleur rayonnée par unité de surface, par unité de temps, par degré de différence entre le corps et le milieu ambiant.

Conservation de l'énergie

Pendant un intervalle de temps dt l'énergie produite par le générateur a servi à élever la température du corps de $d\theta$, une autre partie de cette énergie a été rayonnée par le corps vers le milieu extérieur ; si l'on note :

- l'énergie fournie par le générateur pendant le temps dt :

$$\mathcal{P} dt \quad (\text{en joule})$$

- l'énergie d'échauffement du corps : $mc d\theta$ (en joule) ;
- l'énergie de dissipation : $\alpha S \theta dt$ (en joule) ;

Alors :

$$\mathcal{P} dt = mc d\theta + \alpha S \theta dt$$

C'est une équation différentielle du premier ordre qui peut se mettre sous la forme :

$$mc \frac{d\theta}{dt} + \alpha S \theta = \mathcal{P}$$

$$mc \frac{d\theta}{dt} + \alpha S \theta = \mathcal{P}$$

La solution particulière est :

$$\theta = \frac{\mathcal{P}}{\alpha S}$$

La solution générale de l'équation sans second membre s'obtient par séparation des variables ce qui donne :

$$\frac{mc d\theta}{\theta} = - \alpha S dt$$

Si l'on intègre les deux membres il vient :

$$mc \ln \theta = -\alpha S t + \text{Cte}$$

ou encore :

$$\ln \theta = -\frac{\alpha S}{mc} t + \text{Cte}$$

et :

$$\theta = K e^{-\frac{\alpha S}{mc} t}$$

d'où la solution globale :

$$\theta = K e^{-\frac{\alpha S}{mc} t} + \frac{\mathcal{P}}{\alpha S}$$

$$\theta = K e^{-\frac{\alpha S}{mc} t} + \frac{\mathcal{P}}{\alpha S}$$

La constante K est déterminée par les conditions initiales.

a. Température atteinte en régime continu.

Si $t \rightarrow +\infty$ (ou devient très grand) alors :

$$\theta_L = \frac{\mathcal{P}}{\alpha S}$$

La température du corps tend vers une valeur limite (Fig. 7.21).

b. Augmentation de température au bout d'un temps quelconque.

Si à $t = 0$ le corps était à la température ambiante on peut écrire :

$$\text{à } t = 0, \quad \theta_0 = 0$$

donc :

$$0 = K + \frac{\mathcal{P}}{\alpha S}$$

et :

$$\theta = \frac{\mathcal{P}}{\alpha S} \left(1 - e^{-\frac{\alpha S}{mc} t} \right)$$

c. Variation θ de la température si on coupe l'alimentation.

$\mathcal{P} = 0$, soit :

$$\theta = \theta_L e^{-\frac{\alpha S}{mc} t}$$

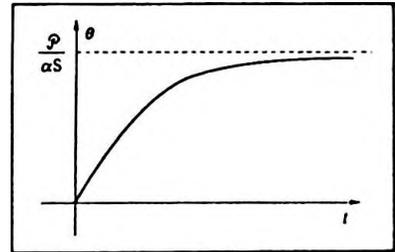


Figure 7.21

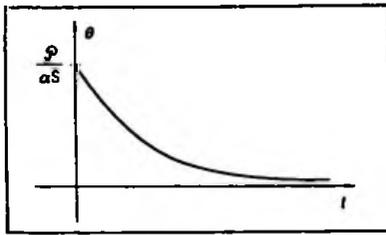


Figure 7.22

La température du corps tend asymptotiquement vers la température initiale qui est la température ambiante (Fig. 7.22).

3. EXERCICES D'APPLICATION

(M pour Mathématique ; P pour Physique ; *) pour un exercice résolu à l'aide d'une calculatrice, au chapitre 9)

■ Exercice M.7.1

Résoudre $y' - y = xy^3$ (E) ; (on pourra poser $u = \frac{1}{y^2}$).

La fonction constante correspondant à $y = 0$ est solution évidente.

On cherche les autres solutions.

En posant $u = \frac{1}{y^2}$ il vient $u' = -\frac{2y'}{y^3}$ et en remplaçant dans l'équation (E) on peut écrire :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{u'}{2} - u = x & (E') \\ u = \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

On est ramené à la résolution de l'équation linéaire (E') :

- Solution de l'équation sans second membre $u = K e^{-2x}$;
- Solution particulière de l'équation avec second membre $u = -x + \frac{1}{2}$;
- Solution de (E') : $u = K e^{-2x} - x + \frac{1}{2}$.

D'où les solutions de (E) :

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{\pm 1}{\sqrt{K e^{-2x} - x + \frac{1}{2}}}$$

■ Exercice M.7.2

Résoudre $y'' + y = \cos x$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$.

L'équation sans second membre a donc pour solution :

$$y_1 = \alpha \sin x + \beta \cos x$$

On peut écrire le second membre sous la forme

$$\cos x = \frac{e^{jx}}{2} + \frac{e^{-jx}}{2}$$

et chercher une solution particulière pour $\frac{e^{jx}}{2}$ puis pour $\frac{e^{-jx}}{2}$.

j étant solution de l'équation caractéristique, pour $\frac{e^{jx}}{2}$ on cherche une solution de la forme $Ax e^{jx}$.

Par identification immédiate, on trouve $A = \frac{1}{4j}$.

En effet :

$$y_{21} = Ax e^{jx}$$

$$y'_{21} = A e^{jx} + jAx e^{jx}$$

$$y''_{21} = 2jA e^{jx} - Ax e^{jx}$$

En reportant dans l'équation on obtient :

$$2jA e^{jx} = \frac{e^{jx}}{2}$$

et :

$$A = \frac{1}{4j}$$

De même pour $\frac{e^{-jx}}{2}$ on trouve une solution de la forme

$Bx e^{-jx}$ avec $B = -\frac{1}{4j}$, ce qui donne pour solution particulière de l'équation avec second membre :

$$y_2 = \frac{x}{2} \left[\frac{1}{2j} \left(e^{jx} - e^{-jx} \right) \right] = \frac{x}{2} \sin x$$

D'où les solutions de l'équation complète :

$$y = \left(\alpha + \frac{x}{2} \right) \sin x + \beta \cos x$$

Autre méthode

On cherche une solution particulière de la forme :

$$y_2 = x (a \cos x + b \sin x)$$

alors

$$y''_2 = -2a \sin x + 2b \cos x - ax \cos x - bx \sin x$$

et :

$$y''_2 + y = \cos x \Leftrightarrow -2a \sin x + 2b \cos x = \cos x$$

On obtient une solution particulière pour $a = 0$ et $b = \frac{1}{2}$, à savoir $y_2 = \frac{x}{2} \sin x$.

On retrouve la solution générale :

$$\left(\alpha + \frac{x}{2} \right) \sin x + \beta \cos x \text{ obtenue précédemment.}$$

■ Exercice P.7.3 (*)

On considère un mobile ponctuel de masse m , lancé d'un point O avec une vitesse oblique \vec{v}_0 faisant un angle α avec l'horizontale ; les frottements qui s'opposent au mouvement sont équivalents à une force unique de la forme $\vec{f} = -k\vec{v}$.

1. Ecrire les équations différentielles qui permettront de calculer les composantes v_x et v_y du vecteur vitesse \vec{v} .
2. Déterminer v_x et v_y , en déduire les équations horaires du mouvement selon les axes.
3. Nature de la trajectoire.

1. Equations différentielles du mouvement.

Dans un repère galiléen la relation fondamentale de la dynamique appliquée au mobile, considéré comme ponctuel, nous conduit à :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{v}$$

cette relation vectorielle se projette sur les axes dont l'origine O des espaces correspond à la position du mobile à $t = 0$ (Fig. 7.23).

• Sur Ox : $m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x$ (1)

• Sur Oy : $m \frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y$ (2)

2. En intégrant successivement les deux équations différentielles obtenues il vient :

• pour l'équation (1) : $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt$

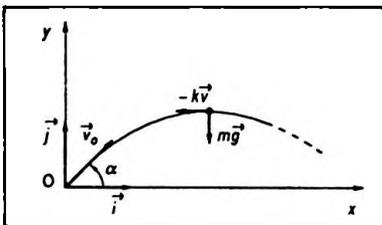


Figure 7.23

soit :

$$\ln v_x = -\frac{k}{m}t + C$$

et :

$$v_x = K e^{-\frac{k}{m}t}$$

or à $t = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ donc :

$$K = v_0 \cos \alpha$$

ainsi :

$$v_x = v_0 \cos \alpha e^{-\frac{k}{m}t} \quad (\text{a})$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha e^{-\frac{k}{m}t}$$

• pour l'équation (2) : $m \frac{dv_y}{dt} + kv_y = -mg$

— une solution particulière de cette équation est :

$$v_y = -\frac{mg}{k}$$

— la solution de l'équation sans second membre est :

$$v_y = K_1 e^{-\frac{k}{m}t}$$

d'où la solution globale de cette équation différentielle :

$$v_y = K_1 e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

or à $t = 0$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ ce qui implique :

$$v_0 \sin \alpha = K_1 - \frac{mg}{k}$$

et :

$$K_1 = v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k}$$

soit :

$$v_y = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k} \quad (\text{b})$$

$$v_y = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

par ailleurs $v_x = \frac{dx}{dt}$ d'où en intégrant la relation (a) par rapport à t on obtient :

$$x = v_0 \cos \alpha \left(-\frac{m}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} + \text{Cte}$$

si l'on prend l'origine des temps au point O, $x_0 = 0$ donc
 $Cte = + \frac{m v_0}{k} \cos \alpha$ et finalement :

$$x = \frac{m v_0 \cos \alpha}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right)$$

$$x = \frac{m v_0 \cos \alpha}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right)$$

de plus $v_y = \frac{dy}{dt}$ d'où en intégrant la relation (b) par rapport à t il vient :

$$y = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) \left(-\frac{m}{k} \right) e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{mg}{k} t + Cte_1$$

or à $t = 0, y = 0$ ce qui conduit à :

$$0 = -\frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) + Cte_1$$

$$\text{d'où : } Cte_1 = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right)$$

et :

$$y = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right) - \frac{mg}{k} t$$

$$y = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right) - \frac{mg}{k} t$$

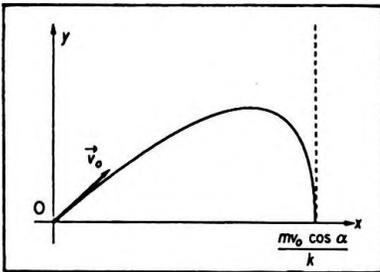


Figure 7.24

3. Si t est relativement important $\frac{k}{m}$ étant positif, $e^{-\frac{k}{m} t} \rightarrow 0$ ce qui implique $x \rightarrow \frac{m v_0 \cos \alpha}{k}$ et $y \rightarrow \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) - \frac{mg}{k} t$ ainsi le déplacement du mobile tend vers une limite selon Ox et son mouvement est uniforme selon Oy avec la vitesse constante :

$$v_y = -\frac{mg}{k}$$

la trajectoire admet une asymptote verticale d'équation (Fig. 7.24) :

$$x = \frac{m v_0 \cos \alpha}{k}$$

■ Exercice P.7.4

On considère un liquide incompressible qui peut osciller librement dans un tube en U placé verticalement. Calculer la période d'oscillation en fonction de l'intensité de la pesanteur g et de la longueur ℓ de la colonne de liquide.

Soit ρ la masse volumique de ce liquide, s la section du tube. A $t = 0$, on suppose que la surface supérieure dans l'une des branches est à la distance a de la position d'équilibre, et qu'à un instant t quelconque elle est repérée par l'abscisse x (Fig. 7.25).

La force entraînant le mouvement du liquide est alors le poids d'une colonne de hauteur $2x$ (supplément de liquide d'une branche par rapport à l'autre) ; son expression est :

$$p = s 2x \rho g$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - s 2x \rho g$$

Le signe $-$ s'explique par le fait que c'est une force de rappel qui tend à ramener le liquide dans la position d'équilibre.

Or $m = s \ell \rho$, donc :

$$s \ell \rho \frac{d^2 x}{dt^2} = - s 2x \rho g$$

et :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2g}{\ell} x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2g}{\ell} x = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants ; les solutions sont de la forme :

$$x = a \cos (\omega t + \varphi)$$

avec $\omega^2 = \frac{2g}{\ell}$ d'où :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{2g}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{2g}}$$

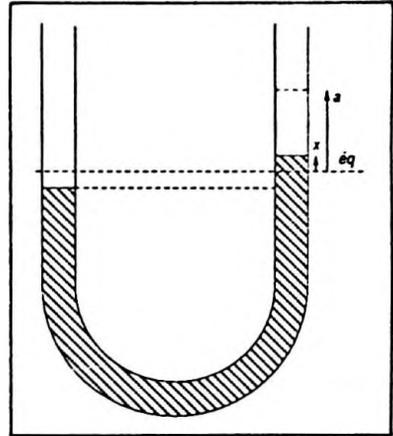


Figure 7.25

■ Exercice P.7.5

On considère une tige métallique de masse négligeable, de longueur ℓ pouvant tourner librement autour de son extrémité inférieure O. Cette tige est maintenue verticale par l'intermédiaire de deux ressorts identiques, de constante, de raideur k , placés horizontalement et fixés à la

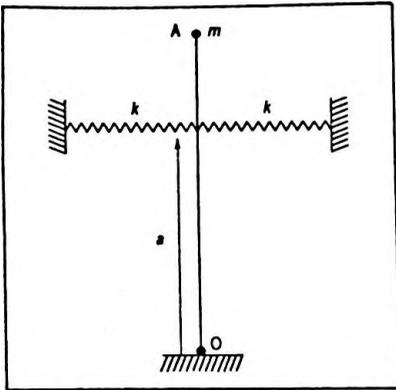


Figure 7.26

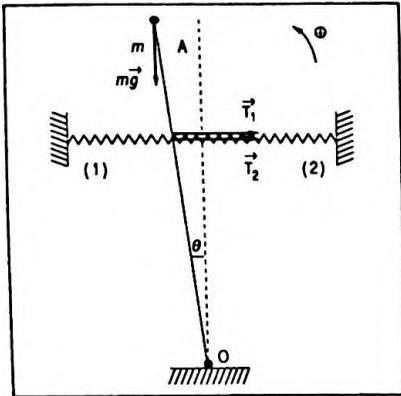


Figure 7.27

distance a de l'axe O (Fig. 7.26). La tige porte à son extrémité supérieure A une masse ponctuelle m . On écarte le système de sa position d'équilibre d'un petit angle θ . Ecrire l'équation différentielle du mouvement et calculer la période des petites oscillations.

On suppose qu'à l'instant t le système est écarté de sa position d'équilibre stable verticale d'un petit angle θ (Fig. 7.27) ; on lui applique alors le principe fondamental de la dynamique des solides en rotation autour d'un axe soit :

$$\Sigma \overline{M} = J \ddot{\theta}$$

— Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe O est $J = m \ell^2$ (en effet c'est celui de la masse ponctuelle).

— Bilan des forces appliquées et moment par rapport à l'axe O de ces forces :

- le poids $m\vec{g}$ dont le moment par rapport à O est $+ mg \ell \sin \theta \approx + mg \ell \theta$;
- les tensions \vec{T}_1 et \vec{T}_2 des ressorts qui agissent dans le même sens $T_1 = T_2 = k a \sin \theta = k a \theta$; leur moment par rapport à l'axe compte tenu du sens positif choisi est :

$$- k a \theta (a \cos \theta) \approx - k a^2 \theta$$

d'où l'équation différentielle du mouvement :

$$m \ell^2 \ddot{\theta} = mg \ell \theta - 2 k a^2 \theta$$

soit :

$$m \ell^2 \ddot{\theta} + (2 k a^2 - mg \ell) \theta = 0$$

Discussion

Pour que le mouvement soit oscillatoire autour de la position verticale, il faut que :

$$2 k a^2 - mg \ell = \alpha^2 > 0$$

donc $2 k a^2 \theta > mg \ell \theta$ c'est-à-dire que le moment de la force de rappel dû aux ressorts doit être supérieur au moment antagoniste du poids qui tend à écarter le système de sa position d'équilibre. Dans ce cas :

$$\omega = \sqrt{\frac{2 k a^2 - mg \ell}{m \ell^2}}$$

et :

$$m \ell^2 \ddot{\theta} + (2 k a^2 - mg \ell) \theta = 0$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2}{2ka^2 - mg\ell}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2}{2ka^2 - mg\ell}}$$

■ Exercice P.7.6

Un point matériel de masse m est abandonné sans vitesse initiale d'une altitude h au lieu de latitude λ dans l'hémisphère Nord. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à ce point en supposant que la Terre n'est pas un référentiel galiléen. Projeter cette relation sur des axes judicieusement choisis ; intégrer les équations différentielles obtenues ; montrer que le mobile dévie légèrement vers l'Est ; calculer le décalage en fonction de g , h , λ et ω vitesse angulaire de la Terre autour de l'axe des pôles.

On applique la relation fondamentale de la dynamique au point matériel en mouvement dans un repère terrestre non galiléen soit :

$$\Sigma \vec{f} - m \vec{\gamma}_e - m \vec{\gamma}_c = m \vec{\gamma}_1$$

Le repère R_1 d'origine O' est lié au sol ; \vec{i} et \vec{j} sont tangents à la surface de la Terre, quant à \vec{k} il est selon \overline{OH} (Fig. 7.28).

Comme force on peut noter l'attraction universelle \vec{A} dirigée vers le centre de la Terre. On pose alors $\vec{A} - m \vec{\gamma}_e = m \vec{g}$.

Ainsi en toute rigueur \vec{g} , sauf à l'équateur et aux pôles, n'est pas dirigé vers le centre de la Terre et comme $\vec{\gamma}_e$ est variable avec la latitude, il s'ensuit que $\|\vec{g}\|$ aussi est variable. Cependant pour une latitude λ donnée et des hauteurs pas trop importantes on peut considérer \vec{g} constant en norme et sa direction pratiquement vers le centre de la Terre. L'équation s'écrit donc :

$$m\vec{g} - m \vec{\gamma}_c = m \vec{\gamma}_1$$

ce qui équivaut à :

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{g} - \vec{\gamma}_c \quad (1)$$

or $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_1$ car $\vec{\omega}$ est constante ; \vec{v}_1 est la vitesse du mobile dans R_1 et $\vec{v}_1 = \frac{dz}{dt} \vec{k}$ avec $\frac{dz}{dt} < 0$; d'où :

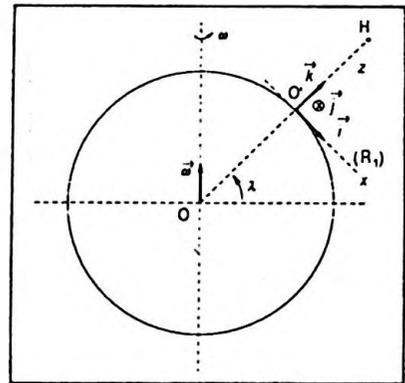


Figure 7.28

$$-\vec{\gamma}_c = -2 \frac{dz}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

soit :

$$-\vec{\gamma}_c = -2 \frac{dz}{dt} \omega \cos \lambda \vec{j}$$

ce qui est caractéristique d'une légère *dévi*ation vers l'Est et l'équation (1) s'écrit alors :

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{g} - 2 \frac{dz}{dt} \omega \cos \lambda \vec{j}$$

La projection de cette relation sur les deux axes concernés conduit à :

$$\text{sur } \vec{k} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g \quad (2)$$

$$\text{sur } \vec{j} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -2 \frac{dz}{dt} \omega \cos \lambda \quad (3)$$

L'intégration de l'équation (2) par rapport au temps nous donne :

$$\frac{dz}{dt} = -gt + C$$

or à $t = 0$ la vitesse initiale est nulle $\Rightarrow C = 0$ et $\frac{dz}{dt} = -gt$
soit :

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

on reporte cette expression dans l'équation (3) qui s'écrit alors :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = +2gt \omega \cos \lambda$$

En intégrant cette équation par rapport au temps il vient :

$$\frac{dy}{dt} = gt^2 \omega \cos \lambda + Cte_1$$

mais à $t = 0$ la vitesse est nulle $\Rightarrow Cte_1 = 0$ et :

$$\frac{dy}{dt} = gt^2 \omega \cos \lambda$$

En intégrant à nouveau par rapport à la variable temps

on obtient :

$$y = \frac{1}{3} g t^3 \omega \cos \lambda + \text{Cte}_2$$

or à $t = 0$, dans le repère choisi $y_0 = 0 \Rightarrow \text{Cte}_2 = 0$ et :

$$y = \frac{1}{3} g t^3 \omega \cos \lambda$$

$$y = \frac{1}{3} g t^3 \omega \cos \lambda$$

on peut exprimer t en fonction de z ce qui donne :

$$\frac{1}{2} g t^2 = h - z$$

le temps de chute t_1 correspond à l'altitude $z = 0$ soit,

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ et :}$$

$$y_1 = \frac{2}{3} h \sqrt{\frac{2h}{g}} \omega \cos \lambda$$

$$y_1 = \frac{2}{3} h \sqrt{\frac{2h}{g}} \omega \cos \lambda$$

■ Exercice p.7.7

Une particule électrisée de charge q positive et de masse m est soumise à l'action d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{B} orthogonaux (Fig. 7.29). La particule est abandonnée sans vitesse initiale à $t = 0$ en un point O. Ecrire les équations différentielles du mouvement selon les axes d'un repère que l'on précisera. Intégrer ces équations ; en déduire les équations horaires du mouvement. Donner la nature de la trajectoire de la particule.

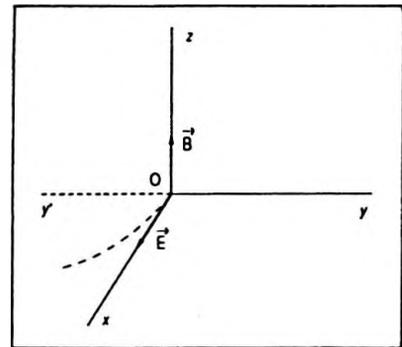


Figure 7.29

La particule est soumise au champ électrique et au champ magnétique. Les forces sont donc respectivement :

$$\vec{f}_e = q \vec{E} \text{ et } \vec{f}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

On applique la relation fondamentale de la dynamique à la particule supposée non relativiste puisqu'elle est initialement au repos dans un repère galiléen ce qui donne :

$$q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B} = m \vec{\gamma}$$

En prenant \vec{E} selon Ox et \vec{B} selon Oz les différentes grandeurs vectorielles ont pour composantes :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

donc :

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}B \\ -\dot{x}B \\ 0 \end{pmatrix}$$

par conséquent l'équation initiale devient :

$$q \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} \dot{y}B \\ -\dot{x}B \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Les équations différentielles du mouvement selon les axes sont donc :

$$\begin{aligned} (1) & \left\{ m\ddot{x} = qE + q\dot{y}B \right. \\ (2) & \left\{ m\ddot{y} = -q\dot{x}B \right. \\ (3) & \left\{ m\ddot{z} = 0 \right. \end{aligned}$$

$$\text{Mais à } t = 0, \vec{v}_0 = \vec{0}, \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

La relation (3) équivaut à $z = 0$; le mouvement se produit dans le plan xOy , en effet ceci est donné par la double intégration de (3) et les conditions initiales.

Les deux autres équations différentielles sont équivalentes à :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = q \frac{dy}{dt} B + qE \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -q \frac{dx}{dt} B \quad (2)$$

Si l'on intègre l'équation (2) par rapport au temps on en déduit :

$$m \frac{dy}{dt} = -qx B + Cte_1$$

or à $t = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ et $x = 0 \Rightarrow Cte_1 = 0$ et :

$$m \frac{dy}{dt} = -qxB$$

On reporte cette valeur de $\frac{dy}{dt}$ dans l'équation (1), on obtient donc :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{q^2B^2}{m}x + qE$$

ou encore :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{q^2B^2}{m^2}x = \frac{qE}{m}$$

Une solution particulière de cette équation est $x = \frac{mE}{qB^2}$.

L'équation sans second membre s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{q^2B^2}{m^2}x = 0$$

d'où la solution de la forme :

$$x = A \cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right)$$

la solution globale peut donc s'exprimer par :

$$x = A \cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right) + \frac{mE}{qB^2}$$

où A et φ sont des constantes d'intégration que l'on détermine par les conditions initiales.

Ainsi à $t = 0$, $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ d'où :

$$0 = A \cos \varphi + \frac{mE}{qB^2}$$

Sachant que :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{AqB}{m} \sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi\right)$$

il vient :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -\frac{AqB}{m} \sin \varphi = 0$$

donc $\varphi = 0$ et $A = -\frac{mE}{qB^2}$, ainsi :

$$x = -\frac{mE}{qB^2} \cos \frac{qB}{m} t + \frac{mE}{qB^2}$$

ou encore :

$$x = \frac{mE}{qB^2} \left(1 - \cos \frac{qB}{m} t \right)$$

$$x = \frac{mE}{qB^2} \left(1 - \cos \frac{qB}{m} t \right)$$

Par ailleurs on a vu que :

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{qB}{m} x$$

compte-tenu de l'expression de x on peut écrire :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{E}{B} \left(1 - \cos \frac{qB}{m} t \right)$$

en intégrant alors par rapport à t il vient :

$$y = -\frac{E}{B} \left(t - \frac{m}{qB} \sin \frac{qB}{m} t \right) + Cte_2$$

mais à $t = 0, y = 0 \Rightarrow Cte_2 = 0$ et :

$$y = -\frac{mE}{qB^2} \left(\frac{qB}{m} t - \sin \frac{qB}{m} t \right)$$

$$y = -\frac{mE}{qB^2} \left(\frac{qB}{m} t - \sin \frac{qB}{m} t \right)$$

Si nous posons $\frac{qB}{m} t = \theta$ on obtient finalement :

$$\begin{cases} x = \frac{mE}{qB^2} (1 - \cos \theta) \\ y = -\frac{mE}{qB^2} (\theta - \sin \theta) \end{cases}$$

c'est l'équation d'une cycloïde engendrée par un cercle de rayon $R = \frac{mE}{qB^2}$ qui roule sans glisser sur l'axe Oy' en effet, pour θ faible :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \varepsilon(\theta) \quad (\text{Cf. Chap. 8})$$

et :

$$y = -\frac{mE}{qB^2} \left(\frac{\theta^3}{3!} + \varepsilon(\theta) \right) < 0$$

■ Exercice P.7.8

Un disque circulaire en cuivre tourne horizontalement avec une vitesse angulaire ω_0 autour de son axe vertical dans un champ d'induction magnétique uniforme lui-même vertical caractérisé par \vec{B} (Fig. 7.30). Le centre et

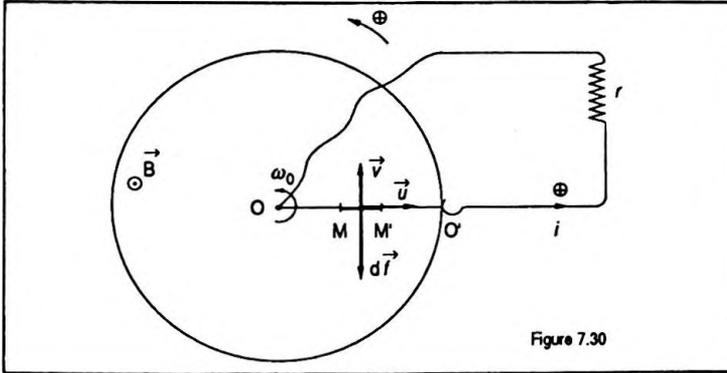


Figure 7.30

la périphérie du disque sont reliés par des contacts à frottements réduits à un conducteur de résistance r non inductif. Au bout de combien de temps la vitesse du disque abandonné à lui-même est-elle réduite de moitié après suppression de la force motrice ? La masse du disque est m et son rayon R .

On admet que le disque tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

● Équations électriques

On peut par la loi de Lenz prévoir le sens du courant à partir du sens de rotation. Algébrisons le sens de ce courant. Soit un élément MM' (du rayon OO') de longueur dr , orienté dans le sens conventionnel choisi. On peut écrire :

$$e_{OO'} = -u_{OO'} \Rightarrow V_{O'} - V_O = \int_O^{O'} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

or $\vec{v} \wedge \vec{B} = vB\vec{u}$ n'est autre que le champ électromoteur.

De plus :

$$(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{r} = vB dr$$

mais $v = r\omega$ d'où :

$$(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{r} = r\omega B dr$$

Donc :

$$V_{O'} - V_O = \int_0^R \omega B r \, dr = \frac{\omega B R^2}{2}$$

mais d'après la loi de Ohm $V_{O'} - V_O = r i$ d'où :

$$r i = \frac{\omega B R^2}{2} \quad (1)$$

● Équations mécaniques

C'est la relation fondamentale de la dynamique des solides en rotation :

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \Sigma \overline{\mathcal{M}} \quad (2)$$

or la seule force intervenant dans la rotation est la force électromagnétique, force s'exerçant sur l'élément MM' qui se note :

$$d\vec{f} = i \, d\vec{r} \wedge \vec{B}$$

son moment par rapport à l'axe de rotation est :

$$d\overline{\mathcal{M}} = \overline{OM} \wedge (i \, d\vec{r} \wedge \vec{B})$$

soit algébriquement :

$$d\overline{\mathcal{M}} = -i \, dr \, B r$$

d'où le moment résultant :

$$\overline{\mathcal{M}} = \int_0^R -i B r \, dr = -\frac{1}{2} i B R^2$$

Si l'on reprend la relation (2) avec $J = \frac{1}{2} m R^2$ et compte-tenu de l'expression de $\overline{\mathcal{M}}$ on a :

$$\frac{1}{2} m R^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{1}{2} B R^2 \frac{\omega B R^2}{2r}$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{B^2 R^2}{2mr} \frac{d\theta}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{B^2 R^2}{2mr} \omega$$

l'intégration de cette équation différentielle par rapport au temps conduit à :

$$\omega = K e^{-\frac{B^2 R^2}{2mr} t}$$

or à $t = 0$, $\omega = \omega_0$ donc $K = \omega_0$ et :

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{B^2 R^2}{2mr} t}$$

Le temps t_1 au bout duquel la vitesse est réduite de moitié est tel que :

$$\frac{\omega_0}{2} = \omega_0 e^{-\frac{B^2 R^2}{2mr} t_1}$$

soit :

$$-\frac{B^2 R^2}{2mr} t_1 = -\ln 2$$

et :

$$t_1 = \frac{2mr}{B^2 R^2} \ln 2$$

$$t_1 = \frac{2mr}{B^2 R^2} \ln 2$$

■ Exercice P.7.9

On considère deux rails conducteurs non résistifs, rectilignes, parallèles distants de ℓ situés dans un plan horizontal. Sur ces rails peuvent glisser sans frottement deux tiges $M_1 N_1$ et $M_2 N_2$ de masse m et de résistance R parallèles entre elles. L'ensemble est placé dans un champ magnétique vertical uniforme caractérisé par \vec{B} . On impose à la tige $M_1 N_1$ la vitesse $\vec{v}_1(t)$ parallèle aux deux rails. Étudier la vitesse $\vec{v}_2(t)$ de la tige $M_2 N_2$ dans le cas suivant :

$$\begin{cases} v_1(t) = v_0 e^{at}, & a > 0, t > 0 \\ v_1(t) = 0 & \text{à } t = 0. \end{cases}$$

Ayant raisonné avec le champ électromoteur dans l'exercice précédent, on peut introduire la notion de flux dans celui-ci. On impose un sens positif sur le circuit (Fig. 7.31).

Si $M_1 N_1$ se déplace de $dx_1 > 0$ le flux à travers le circuit augmente de $d\Phi_1 = B\ell dx_1$.

$M_2 N_2$ d'après la loi de Lenz tend à s'opposer à cette va-

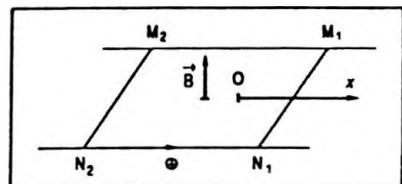


Figure 7.31

riation d'où son déplacement dans le même sens, ce qui entraîne une variation opposée du flux à travers le circuit fermé soit $d\Phi_2 = -B\ell dx_2$.

On en déduit que $d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2$, or :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right)$$

soit :

$$e = -B\ell (v_1 - v_2)$$

et :

$$i = -\frac{B\ell}{R} (v_1 - v_2)$$

sous l'effet de ce courant, il s'exerce une force de Laplace sur M_2N_2 ($\vec{f} = i \overrightarrow{M_2N_2} \wedge \vec{B}$) dont la mesure algébrique selon l'orientation Ox est :

$$f = -Bi\ell$$

soit :

$$f = \frac{B^2\ell^2}{R} (v_1 - v_2)$$

l'équation différentielle du mouvement de M_2N_2 est donc :

$$m \frac{dv_2}{dt} = \frac{B^2\ell^2}{R} (v_1 - v_2)$$

(le poids est compensé par la réaction des rails)

ou encore :

$$m \frac{dv_2}{dt} + \frac{B^2\ell^2}{R} v_2 = \frac{B^2\ell^2}{R} v_1$$

$$m \frac{dv_2}{dt} + \frac{B^2\ell^2}{R} v_2 = \frac{B^2\ell^2}{R} v_1$$

mais on sait que $v_1 = v_0 e^{at}$ donc :

$$m \frac{dv_2}{dt} + \frac{B^2\ell^2}{R} v_2 = \frac{B^2\ell^2}{R} v_0 e^{at}$$

la solution particulière est de la forme :

$$v_2 = A e^{at}$$

donc :

$$\frac{dv_2}{dt} = A a e^{at}$$

en remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$m A \alpha e^{at} + \frac{B^2 \ell^2}{R} A e^{at} = \frac{B^2 \ell^2}{R} v_0 e^{at}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

ou :

$$A \left(m \alpha + \frac{B^2 \ell^2}{R} \right) = \frac{B^2 \ell^2}{R} v_0$$

et :

$$A = \frac{\frac{B^2 \ell^2 v_0}{R}}{m \alpha + \frac{B^2 \ell^2}{R}}$$

en simplifiant on en déduit :

$$A = \frac{v_0}{\frac{m \alpha R}{B^2 \ell^2} + 1}$$

donc :

$$v_2 = \frac{v_0}{1 + \frac{m \alpha R}{B^2 \ell^2}} e^{at}$$

On détermine la solution de l'équation sans second membre qui est :

$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{B^2 \ell^2}{m R} v_2 = 0$$

soit :

$$v_2 = K e^{-\frac{B^2 \ell^2}{m R} t}$$

la solution globale peut alors s'écrire :

$$v_2 = \frac{v_0}{1 + \frac{m \alpha R}{B^2 \ell^2}} e^{at} + K e^{-\frac{B^2 \ell^2}{m R} t}$$

Mais à $t = 0$, $v_2 = 0$ donc :

$$0 = \frac{v_0}{1 + \frac{m \alpha R}{B^2 \ell^2}} + K$$

soit encore :

$$K = \frac{-v_0}{1 + \frac{maR}{B^2 \ell^2}}$$

et finalement :

$$v_2 = \frac{v_0}{1 + \frac{maR}{B^2 \ell^2}} \left(e^{at} - e^{-\frac{B^2 \ell^2}{mR} t} \right)$$

$$v_2 = \frac{v_0}{1 + \frac{maR}{B^2 \ell^2}} \left(e^{at} - e^{-\frac{B^2 \ell^2}{mR} t} \right)$$

Si t devient important $v_2 = \frac{v_1}{1 + \frac{maR}{B^2 \ell^2}}$ la tige (2) suit

la tige (1).

■ Exercice P.7.10

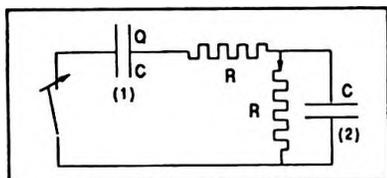
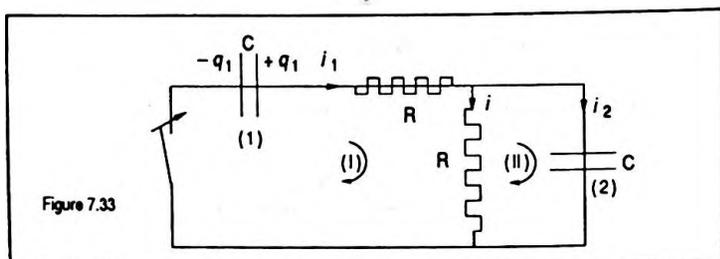


Figure 7.32

On considère le circuit suivant (Fig. 7.32), à l'instant $t = 0$ où l'on ferme l'interrupteur ; le condensateur (1) porte la charge Q et le condensateur (2) n'est pas chargé.

1. Établir l'équation différentielle donnant la charge q_2 du condensateur (2) en fonction du temps. On posera $\tau = RC$.
2. Calculer $q_2(t)$.
3. Déterminer l'intensité $i(t)$ au courant qui passe dans le conducteur ohmique monté en dérivation avec le condensateur (2).

1. Écriture des équations à partir des orientations choisies (Fig. 7.33) :



- décharge du condensateur (1) : $i_1 = \frac{-dq_1}{dt}$; (1)

- charge du condensateur (2) : $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$; (2)

- loi des nœuds : $i_1 = i + i_2$; (3)

• loi des mailles (II) : $\frac{q_2}{C} - Ri = 0$; (4)

• loi des mailles (I) : $-\frac{q_1}{C} + Ri_1 + Ri = 0$; (5)

On dérive l'équation (5) par rapport au temps ce qui donne :

$$-\frac{1}{C} \frac{dq_1}{dt} + R \frac{di_1}{dt} + R \frac{di}{dt} = 0$$

Compte-tenu des équations (1) et (3) il vient :

$$\frac{1}{C} (i + i_2) + R \left(\frac{di}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) + R \frac{di}{dt} = 0$$

or d'après (4) on a :

$$i = \frac{q_2}{RC} \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{RC} \frac{dq_2}{dt}$$

et d'après (2) :

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{d^2 q_2}{dt^2}$$

En remplaçant i et $\frac{di}{dt}$ par leur expression on obtient :

$$\frac{1}{C} \left(\frac{q_2}{RC} + \frac{dq_2}{dt} \right) + R \left(\frac{1}{RC} \frac{dq_2}{dt} + \frac{d^2 q_2}{dt^2} \right) + \frac{R}{RC} \frac{dq_2}{dt} = 0$$

ou :

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{dq_2}{dt} + \frac{1}{R^2 C^2} q_2 = 0$$

soit :

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \frac{dq_2}{dt} + \frac{1}{\tau^2} q_2 = 0$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \frac{dq_2}{dt} + \frac{1}{\tau^2} q_2 = 0$$

en posant $\tau = RC$.

2. Détermination de $q_2(t)$.

Pour ce faire, on pose l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{3}{\tau} r + \frac{1}{\tau^2} = 0$$

or :

$$\Delta = \frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = \frac{5}{\tau^2}$$

donc :

$$r_1 = \frac{-\frac{3}{\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{\tau}}{2}$$

ce qui s'écrit encore :

$$r_1 = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2\tau}$$

$$r_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2\tau}$$

Ainsi les solutions sont de la forme :

$$q_2(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

Mais à $t = 0$, $q_2(t) = 0$ donc $\frac{q_2}{C} = 0$ or d'après (4)

$Ri = \frac{q_2}{C}$ ce qui entraîne $i = 0$ puis dans l'équation (3)

$$i_1 = i_2.$$

Ainsi on peut en déduire que :

$$\frac{Q}{C} = Ri_1 = R \left(\frac{dq_2}{dt} \right)_{t=0} \quad \text{d'après (5) et (2)}$$

soit :

$$\left(\frac{dq_2}{dt} \right)_{t=0} = \frac{Q}{RC}$$

or :

$$\frac{dq_2}{dt} = Ar_1 e^{r_1 t} + Br_2 e^{r_2 t}$$

donc :

$$A + B = 0 \quad \text{soit } A = -B$$

et :

$$Ar_1 + Br_2 = \frac{Q}{RC}$$

on en tire :

$$A(r_1 - r_2) = \frac{Q}{\tau}$$

et finalement :

$$A = -B = \frac{Q}{\tau(r_1 - r_2)}$$

La solution de l'équation différentielle est alors :

$$q_2(t) = \frac{Q}{\tau(r_1 - r_2)} \left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t} \right)$$

$$q_2(t) = \frac{Q}{\tau(r_1 - r_2)} \left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t} \right)$$

L'expression de l'intensité i est obtenue à partir de l'équation :

$$\frac{q_2}{C} = Ri \quad \text{soit} \quad i = \frac{q_2}{\tau}$$

ainsi :

$$i(t) = \frac{Q}{\tau^2(r_1 - r_2)} \left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t} \right)$$

$$i(t) = \frac{Q}{\tau^2(r_1 - r_2)} \left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t} \right)$$

■ Exercice P.7.11

On considère le circuit suivant dans lequel un générateur de force électromotrice E est branché par l'intermédiaire de fils et d'un conducteur ohmique de résistance R à un condensateur de capacité C et à une lampe néon (Fig. 7.34). Cette lampe a une résistance infinie quand elle est éteinte, et une résistance r lorsqu'elle est allumée. On note respectivement V_a et V_e ses tensions d'allumage et d'extinction. Etudier le fonctionnement de ce néon.

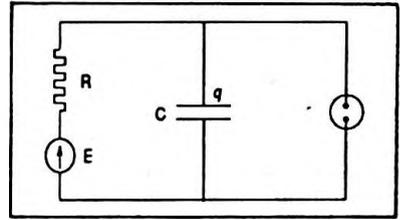


Figure 7.34

À l'instant $t = 0$ la lampe néon est éteinte ; elle se comporte comme une "coupure" donc une résistance infinie, le condensateur se charge normalement jusqu'à ce que la tension à ses bornes soit égale à la tension d'allumage.

Équation de maille (I) (Fig. 7.35) :

$$Ri + \frac{q}{C} = E$$

or $i = \frac{dq}{dt}$ ce qui implique :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

La solution particulière de cette équation différentielle est $q = CE$; la solution de l'équation sans second membre s'écrit :

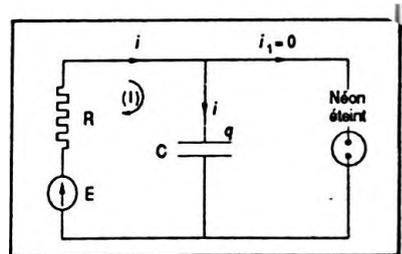


Figure 7.35

$$q = K e^{-\frac{t}{RC}}$$

d'où la solution globale :

$$q = K e^{-t/RC} + CE$$

Or à $t = 0, q = 0 \Rightarrow K = -CE$, et :

$$q = CE (1 - e^{-t/RC})$$

ainsi la tension aux bornes de ce condensateur peut se noter :

$$v = \frac{q}{C} = E (1 - e^{-t/RC})$$

$$v = \frac{q}{C} = E (1 - e^{-t/RC})$$

- Si $V_a \geq E \Rightarrow v < V_a$, la lampe ne s'allume jamais.
- Si $V_a < E$ la lampe s'allume à l'instant t_1 tel que :

$$V_a = E (1 - e^{-t_1/RC})$$

on en déduit :

$$t_1 = RC \ln \frac{E}{E - V_a}$$

$$t_1 = RC \ln \frac{E}{E - V_a}$$

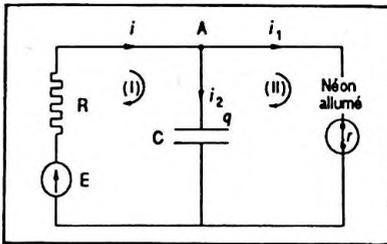


Figure 7.36

Dès que la lampe néon est allumée elle se comporte comme une résistance r et l'on a un nouveau mode de fonctionnement du circuit (Fig. 7.36).

La loi de nœud appliquée au point A s'écrit :

$$i = i_1 + i_2 \tag{1}$$

La loi de maille (I) donne :

$$E = Ri + \frac{q}{C} \tag{2}$$

avec

$$i_2 = \frac{dq}{dt} \tag{3}$$

La loi de maille (II) conduit à :

$$\frac{q}{C} = r i_1 \tag{4}$$

Si on pose $\frac{q}{C} = v$, tension aux bornes du condensateur l'équation (2) est de la forme :

$$E = Ri + v$$

ainsi en tenant compte de (1) il vient :

$$i = i_1 + i_2 = \frac{v}{r} + C \frac{dv}{dt}$$

d'où :

$$E = \left(\frac{R}{r} + 1 \right) v + RC \frac{dv}{dt}$$

La solution particulière de l'équation différentielle précédente est :

$$v = \frac{E}{1 + \frac{R}{r}}$$

La solution de l'équation sans second membre se note :

$$v = K_1 e^{-\frac{1}{RC} \left(1 + \frac{R}{r} \right) t}$$

d'où la solution globale :

$$v = K_1 e^{-\frac{1}{RC} \left(1 + \frac{R}{r} \right) t} + \frac{E}{1 + \frac{R}{r}}$$

Or à $t = t_1$, $v = V_a$ (tension d'allumage) donc :

$$V_a - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}} = K_1 e^{-\frac{1}{RC} \left(1 + \frac{R}{r} \right) RC \ln \frac{E}{E - V_a}}$$

et compte-tenu de la relation $t_1 = RC \ln \frac{E}{E - V_a}$ on obtient :

$$K_1 = \left(V_a - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}} \right) e^{\frac{1}{RC} \left(1 + \frac{R}{r} \right) t_1}$$

par conséquent :

$$v = \frac{E}{1 + \frac{R}{r}} + \left(V_a - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}} \right) e^{-\frac{1}{RC} \left(1 + \frac{R}{r} \right) (t - t_1)}$$

La tension est une fonction décroissante du temps, le néon s'éteint si $v \leq V_e$ à condition que $V_a - \frac{E}{1 + R/r}$ soit positif.

L'extinction aura lieu à l'instant t_2 pour lequel $v = V_e$ soit :

$$V_e = \frac{E}{1 + \frac{R}{r}} + \left(V_a - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}} \right) e^{-\frac{1}{RC} \left(1 + \frac{R}{r} \right) (t_2 - t_1)}$$

et :

$$t_2 = t_1 + \frac{RC}{1 + \frac{R}{r}} \ln \frac{V_a - \frac{E}{1 + R/r}}{V_e - \frac{E}{1 + R/r}}$$

$$t_2 = t_1 + \frac{RC}{1 + \frac{R}{r}} \ln \frac{V_a - \frac{E}{1 + R/r}}{V_e - \frac{E}{1 + R/r}}$$

A partir de cet instant t_2 on est ramené au cas 1/.

Le néon clignote donc s'allume lorsque la tension aux bornes du condensateur devient égale à V_a et s'éteint lorsque cette tension devient égale à V_e .

■ Exercice P.7.12

Le bismuth 210 de constante radioactive λ engendre, par désintégration, un second corps lui-même radioactif, le polonium 210 de constante λ' . A l'instant $t = 0$ l'échantillon contient N atomes de bismuth 210 et N' atomes de polonium 210. Soit n et n' le nombre des atomes à l'instant t respectivement du bismuth 210 et du polonium 210.

1. En admettant que la désintégration à l'instant t pour les deux corps suit respectivement les lois :

$$(1) \quad dn = -\lambda n \, dt$$

et

$$(2) \quad dn' = \lambda n \, dt - \lambda' n' \, dt$$

Ecrire les équations différentielles correspondant à n et n' et les intégrer.

2. Sachant que la période du bismuth 210 est de 5 jours, celle du polonium 210 de 138 jours, calculer λ et λ' .

On rappelle que la période est le temps de "demi-disparition" d'un corps radioactif non régénéré.

3. À $t = 0$ on disposait en réalité de $m_0 = 1$ g de bismuth et de $m'_0 = 0,1$ g de polonium. Calculer la masse des corps radioactifs au bout de 10 jours.

1. La désintégration pour le ^{210}Bi suit la loi $dn = -\lambda n \, dt$. En effet il provient d'un isotope radioactif du plomb dont la période est 21 ans donc qui influence peu les quantités de ^{210}Bi lorsqu'on le considère sur quelques jours ainsi :

$$\frac{dn}{n} = -\lambda dt$$

et :

$$n = K e^{-\lambda t}$$

mais à $t = 0$, $n = N$ donc :

$$n = N e^{-\lambda t}$$

$$n = N e^{-\lambda t}$$

La loi suivie par le ^{210}Po est de la forme :

$$dn' = \lambda n dt - \lambda' n' dt$$

• $\lambda n dt$ représente le nombre des noyaux engendrés par la désintégration du ^{210}Bi ;

• $-\lambda' n' dt$ représente le nombre de ceux qui disparaissent.

On en déduit :

$$dn' + \lambda' n' dt = \lambda n dt$$

et si l'on divise tous les termes par dt il vient :

$$\frac{dn'}{dt} + \lambda' n' = \lambda n = \lambda N e^{-\lambda t}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre avec second membre.

La solution de l'équation sans second membre s'écrit :

$$n' = K' e^{-\lambda' t}$$

La solution particulière de l'équation avec second membre est de la forme :

$$n' = A e^{-\lambda t}$$

en remplaçant dans l'équation différentielle on obtient :

$$-A\lambda e^{-\lambda t} + \lambda' A e^{-\lambda t} = \lambda N e^{-\lambda t}$$

et :

$$A = \frac{\lambda N}{\lambda' - \lambda}$$

Compte-tenu du fait que la solution globale de l'équation est la somme des solutions particulières et de l'équation sans second membre il vient :

$$n' = K' e^{-\lambda' t} + \frac{\lambda N}{\lambda' - \lambda} e^{-\lambda t}$$

K' étant la constante d'intégration ; or à $t = 0$, $n' = N'$ ce qui implique :

$$N' = K' + \frac{\lambda N}{\lambda' - \lambda} \quad \text{ou} \quad K' = N' - \frac{\lambda N}{\lambda' - \lambda}$$

soit :

$$n' = \left(N' - \frac{\lambda N}{\lambda' - \lambda} \right) e^{-\lambda' t} + \frac{\lambda N}{\lambda' - \lambda} e^{-\lambda t} \qquad n' = \left(N' - \frac{\lambda N}{\lambda' - \lambda} \right) e^{-\lambda' t} + \frac{\lambda N}{\lambda' - \lambda} e^{-\lambda t}$$

2. Détermination des constantes de désintégration λ et λ' .

On sait que :

$$n = N e^{-\lambda t}$$

avec $n = N/2$, si $t = T$ donc :

$$\frac{N}{2} = N e^{-\lambda T}$$

et :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

de même :

$$\lambda' = \frac{\ln 2}{T}$$

soit ici $\lambda = 0,139 \text{ j}^{-1}$ et $\lambda' = 0,005 \text{ j}^{-1}$.

3. Nombre de noyaux initiaux.

Une mole de matière contient \mathcal{N} atomes soit \mathcal{N} noyaux.

Or le nombre de moles de ^{210}Bi initialement présentes est environ $\frac{m_0}{210}$; de même le nombre de moles de ^{210}Po initialement présentes est environ $\frac{m'_0}{210}$ donc :

$$N = \frac{m_0}{210} \mathcal{N} \quad \text{et} \quad N' = \frac{m'_0}{210} \mathcal{N}$$

Pour le ^{210}Bi au bout de 10 jours il en restera 0,25g, en effet la période est de 5 jours, un calcul compliqué ne s'impose pas.

Pour le ^{210}Po le nombre de moles est :

$$n' = \left(\frac{m'_0}{210} \mathcal{N} - \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda} \frac{m_0}{210} \mathcal{N} \right) e^{-\lambda' t} + \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda} \frac{m_0}{210} \mathcal{N} e^{-\lambda t}$$

soit une masse :

$$m'_1 = \frac{210}{\mathcal{N}} n' = \left(m'_0 - \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda} m_0 \right) e^{-\lambda' t} + \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda} m_0 e^{-\lambda t}$$

le calcul numérique conduit à :

$$m'_1 = 0,82 \text{ g}$$

ce résultat est normal car le ^{210}Po est généré plus vite qu'il ne se désintègre.

Chapitre 8

Développements limités

1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES

1. 1. Pourquoi les développements limités ?

Les développements limités ont pour but, en Physique principalement, de remplacer une expression compliquée mais rigoureuse par une expression approchée donc moins rigoureuse mais facilement exploitable. On connaît l'ordre de grandeur de l'erreur ainsi introduite, on peut même fixer cette erreur en prenant un plus ou moins grand nombre de termes significatifs.

1. 2. Théorème de Rolle

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe au moins un élément c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

- Si f est constante sur $[a, b]$ le résultat est immédiat.
- Si f n'est pas constante sur $[a, b]$, étant continue elle admet sur $[a, b]$ une borne inférieure m et une borne supérieure M (Fig. 8.1).

L'une de ces bornes, m par exemple, est différente de $f(a)$ et de $f(b)$ puisque f n'est pas constante. De plus l'une des bornes étant atteinte, m par exemple, il existe c tel que $f(c) = m$ avec $c \in]a, b[$.

f étant dérivable, $f'(c)$ existe et :

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

or $f(c+h) - f(c) \geq 0$, donc :

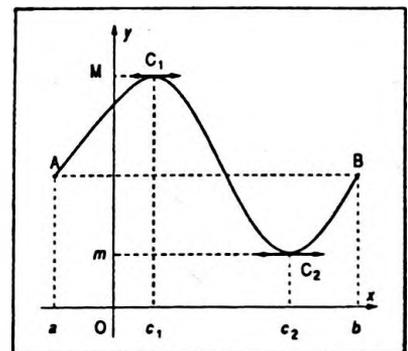


Figure 8.1

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

il en résulte :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$$

d'où :

$$f'(c) = 0$$

● Interprétation graphique

Il existe sur l'arc \widehat{AB} au moins un point C d'abscisse x tel que la tangente à l'arc soit parallèle à l'axe $x'Ox$.

1. 3. Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ alors il existe c de $]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration

On pose $\varphi(x) = f(x) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

φ est continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ avec $\varphi(a) = f(a) = \varphi(b)$; on est ainsi ramené à une fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Rolle et par l'utilisation de ce théorème on peut écrire :

$$(\exists c \in]a, b[) (\varphi'(c) = 0)$$

donc :

$$(\exists c \in]a, b[) \left(f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$$

● Interprétation graphique

Il existe sur l'arc \widehat{AB} au moins un point M_0 d'abscisse c tel que la tangente à l'arc en M_0 soit parallèle à la corde AB (Fig. 8.2). En effet $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ représente le coef-

ficient directeur de la corde AB

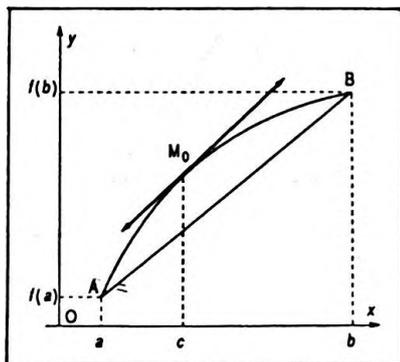


Figure 8.2

$f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point M_0 d'abscisse.

Remarque

Le théorème des accroissements finis qui permet de s'affranchir de la condition très restrictive $f(a) = f(b)$ apparaît comme une généralisation du théorème de Rolle.

Autres présentations du théorème des accroissements finis

Si l'on pose $b = a + h$, c qui appartient à $]a, b[$ est tel que $c = a + \theta h$ avec $0 < \theta < 1$ et le théorème des accroissements finis peut s'écrire sous la forme :

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

De même si l'on pose $a = 0$ et $h = x$, cas particulier du précédent, on obtient :

$$f(x) - f(0) = xf'(\theta x) \quad (0 < \theta < 1)$$

Application au sens de variation d'une fonction

Si f est définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $f'(x) = 0$ sur $]a, b[$ alors f est constante sur $[a, b]$.

Démonstration

On montre que $\forall x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [a, b], (x_1 < x_2), f(x_1) = f(x_2)$.

Le résultat découle de l'application du théorème des accroissements finis à l'intervalle $[x_1, x_2]$. En effet,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0.$$

De même si $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement croissante sur $[a, b]$, car $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0,$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Par conséquent si $f'(x) < 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

1. 4. Théorème de Taylor

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ admettant des dérivées $f', f'', \dots, f^{(n)}$ continues sur $[a, b]$ et telle qu'il existe pour f une dérivée $(n + 1)$ ième sur $]a, b[$, alors il existe au moins un point c de $]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Formule de Taylor (1)

Démonstration

On pose $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!} f'(a) \dots$

$$- \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - A \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où A est une constante telle que $\varphi(b) = 0$. Alors :

φ est définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. On est encore ramené à une fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Rolle et par l'utilisation de ce théorème on peut écrire :

$$(\exists x_1 \in]a, b[) (\varphi'(x_1) = 0)$$

or en dérivant l'expression de $\varphi(x)$ on obtient :

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a) - \frac{x-a}{1!} f''(a) \dots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a) - \frac{A(x-a)^n}{n!}$$

donc $\varphi'(x_1) = 0 = \varphi'(a)$ et elle remplit les autres conditions permettant de lui appliquer le théorème de Rolle ainsi :

$$(\exists x_2 \in]a, b[) (\varphi''(x_2) = 0)$$

or compte-tenu de l'expression de $\varphi'(x)$ et en dérivant il vient :

$$\varphi''(x) = f''(x) - f''(a) \dots - \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(a) - \frac{A(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

En continuant ainsi de proche en proche on montre qu'il existe x_n de $]a, x_{n-1}[$ donc de $]a, b[$ tel que $\varphi^{(n)}(x_n) = 0$ avec :

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) - A(x-a)$$

mais :

$$\varphi^{(n)}(x_n) = \varphi^{(n)}(a) = 0 \text{ donc}$$

$$(\exists c \in]a, b[) (\varphi^{(n+1)}(c) = 0)$$

ainsi :

$$\varphi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - A \text{ d'où } A = f^{(n+1)}(c)$$

L'égalité (1) est appelée formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n + 1$. On dit que $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est "le reste de Lagrange". Pour $n = 0$ on retrouve la formule des accroissements finis. En effet on a :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(c)$$

Remarque

On peut dire que la formule de Taylor est une extension ou généralisation de la formule des accroissements finis à l'ordre $n + 1$.

● Autre expression de la formule de Taylor-Lagrange

En posant $b = a + h$, $c = a + \theta h$, avec $0 < \theta < 1$, (1) devient :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots$$

$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad (2)$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots$$

$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h)$$

● Formule de Mac-Laurin

En posant $a = 0$, $h = x$, (2) devient :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), 0 < \theta < 1 \quad (3)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

$$+ \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), 0 < \theta < 1$$

Cette formule n'est autre qu'un cas particulier de la formule de Taylor.

1. 5. Développement de Taylor-Young d'une fonction f au voisinage d'un point a

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ continue et dérivable sur ce segment jusqu'à l'ordre n , admettant au

point a une dérivée d'ordre $n + 1$ alors :

$$\forall x \in]a, b[, f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots \\ + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) \\ + \varepsilon(x) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

$$\forall x \in]a, b[, f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots \\ + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) \\ + \varepsilon(x) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \quad (4)$$

ou si l'on pose $x = a + h$ il vient :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \dots \\ \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) \\ + \varepsilon_1(h) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \dots \\ \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) \\ + \varepsilon_1(h) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$$

Le terme complémentaire $\varepsilon(x) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ ou $\varepsilon_1(h) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$ est dit "reste de Young".

Remarque

Il faut noter la différence existant entre la formule de Taylor-Lagrange et la formule de Taylor-Young ; la première fait intervenir la dérivée d'ordre $(n + 1)$ sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et permet par exemple une étude globale de la fonction sur cet intervalle ; la seconde qui ne suppose plus nécessairement l'existence de la dérivée à l'ordre $(n + 1)$ sur $]a, b[$ mais qui l'exige au point a permet une étude plus locale de la fonction en particulier au voisinage de ce point.

Démonstration

On reprend la démonstration précédente en remplaçant l'existence de $f^{(n+1)}$ sur $]a, b[$ par l'existence de $f^{(n+1)}(a)$.

Soit φ définie sur $[a, x]$ telle que :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!} f'(a) \dots \\ - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - A \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où A est tel que $\varphi(x) = 0$. A dépend évidemment de x .

À tout x de $]a, b[$ la méthode précédente permet d'associer $x_n \in]a, x[$ tel que $\varphi^{(n)}(x_n) = 0 = \varphi^{(n)}(a)$ et l'application du théorème de Rolle qui donne :

$$f^{(n)}(x_n) - f^{(n)}(a) - A(x_n - a) = 0$$

et comme $x_n - a \neq 0$:

$$A = \frac{f^{(n)}(x_n) - f^{(n)}(a)}{x_n - a}$$

relation dans laquelle A et x_n sont des fonctions de x . Or $f^{(n+1)}(a)$ existe donc, lorsque x et à fortiori x_n tend vers a , la fonction $A(x)$ admet la limite $f^{(n+1)}(a)$ ce qui montre que $A(x) = f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque

• On peut également en déduire la formule de Mac-Laurin avec reste de Young soit :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots \\ &+ \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) \\ &+ \varepsilon(x) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

$\varepsilon(x) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ est appelé reste de Young.

Le polynôme $\sum_{p=0}^{n+1} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$ est la partie régulière du développement.

• La formule (4) constitue le *développement limité*, au voisinage de a , de la fonction f .

Si l'on arrête la série au terme de rang p elle constitue alors un *développement limité d'ordre p* de la fonction f .

1. 6. Développements limités

• Définition

| On dit qu'une fonction f définie au voisinage de 0 admet

un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 si l'on peut écrire :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Le polynôme $P_n(x)$ est appelé partie régulière du développement limité.

Dans cette définition générale on ne suppose pas que f soit dérivable mais on sait que si f est dérivable sur $[a, b]$ jusqu'à l'ordre n admettant une dérivée $(n+1)$ ème, alors f admet un développement limité en a d'ordre n qui est donné par la formule de Taylor et si $a = 0$ par la formule de Mac-Laurin qui constituent des procédés simples pour obtenir le développement limité d'un certain nombre de fonctions.

On prendra donc pour *développement limité d'ordre n au voisinage de a* :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0$

au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

● Propriétés

1. Si f' admet un développement limité alors on peut donner un développement limité de f ; on utilise la primitive de f' qui s'annule pour $x = 0$ et le théorème des accroissements finis.
2. Pour faire un développement limité au voisinage de a , on peut prendre le développement limité au voisinage de 0 et effectuer le changement de variable $x = a + t$, donc si $x \rightarrow a$ alors $t \rightarrow 0$.
3. Pour faire un développement limité au voisinage de $\pm\infty$, on peut prendre le développement limité au voisinage de

0 et effectuer le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, donc si $x \rightarrow \pm \infty$ alors $X \rightarrow 0$.

1.7. Développements limités de quelques fonctions usuelles au voisinage de zéro

(cf. tableau page suivante)

1.8. Exemples de développements limités

1.8.1. Développement limité au voisinage de 0 d'ordre 6 de e^x

Si $f(x) = e^x$ toutes les dérivées successives sont de la forme :

$$f^{(n)}(x) = e^x, n \in \mathbb{N}^*$$

le développement limité de e^x en 0 peut donc s'écrire en utilisant la formule de Mac-Laurin :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^6}{6!} + x^6 \varepsilon(x)$$

d'où en simplifiant l'écriture :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^6}{6!} + x^6 \varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^6}{6!} + x^6 \varepsilon(x)$$

1.8.2. Développement limité au voisinage de 0 d'ordre 5 de $\tan x$

● Méthode 1

On utilise les développements limités en zéro de $\sin x$ et $\cos x$ à l'ordre 5 et l'on effectue la division suivant les puissances croissantes de x ce qui conduit à :

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6 \varepsilon_1(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon_2(x)$$

donc :

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6 \varepsilon_1(x)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon_2(x)} \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6 \varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

Développements limités de quelques fonctions usuelles au voisinage de zéro

Fonction	Développement limité au voisinage de 0
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\sin x$	$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$
e^x	$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\sqrt{1+x}$	$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2.4} x^2 + \dots + (-1)^{p-1} \frac{1.3.5\dots(2p-3)}{2.4.6\dots 2p} x^p + x^p \varepsilon(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4} x^2 + \dots + (-1)^p \frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2.4.6\dots 2p} x^p + x^p \varepsilon(x)$
$\operatorname{sh} x$	$= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$
$\operatorname{ch} x$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$
$\operatorname{Arctan} x$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$
$\operatorname{Arcsin} x$	$= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$
$\operatorname{Argsh} x$	$= x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n+1)}{2.4.6\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$
$\operatorname{Argth} x$	$= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$

soit finalement :

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6 \varepsilon_3(x)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6 \varepsilon_3(x)$$

● Méthode 2

On calcule dans une première étape les dérivées successives jusqu'à l'ordre 5 et l'on applique la formule de Mac-Laurin :

$$f(x) = \tan x$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$f''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$f^{(3)}(x) = 2(1 + \tan^2 x)(1 + 3 \tan^2 x)$$

$$f^{(4)}(x) = 8 \tan x (1 + \tan^2 x)(2 + 3 \tan^2 x)$$

$$f^{(5)}(x) = 8(1 + \tan^2 x)(2 + 15 \tan^2 x + 15 \tan^4 x)$$

Ainsi :

$$f(0) = 0 ; f'(0) = 1 ; f''(0) = 0 ; f^{(3)}(0) = 2 ;$$

$$f^{(4)}(0) = 0 ; f^{(5)}(0) = 16$$

d'où :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^6 \varepsilon_3(x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^6 \varepsilon_3(x)$$

1. 8. 3. Développements limités à partir de la fonction logarithme népérien

● Développement limité en zéro d'ordre 6 de $\ln(1+x)$

On calcule les dérivées successives jusqu'à l'ordre 6 et l'on applique la formule de Mac-Laurin :

$$f(x) = \ln(1+x) ; f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} ; f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} ; f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = +\frac{2}{(1+x)^3} ; f^{(3)}(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} ; f^{(4)}(0) = -6$$

$$f^{(5)}(x) = + \frac{24}{(1+x)^5}; f^{(5)}(0) = 24$$

$$f^{(6)}(x) = - \frac{120}{(1+x)^6}; f^{(6)}(0) = -120$$

ce qui conduit à :

$$\ln(1+x) = + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + x^6 \varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + x^6 \varepsilon(x)$$

● Développement limité en $x = 1$ d'ordre 6 de $\ln x$

On utilise la même méthode que ci-dessus ce qui donne:

$$f_1(x) = \ln x; f_1(1) = 0$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{x}; f_1'(1) = 1$$

$$f_1''(x) = -\frac{1}{x^2}; f_1''(1) = -1$$

$$f_1^{(3)}(x) = -\frac{2}{x^3}; f_1^{(3)}(1) = -2$$

$$f_1^{(4)}(x) = +\frac{6}{x^4}; f_1^{(4)}(1) = 6$$

$$f_1^{(5)}(x) = -\frac{24}{x^5}; f_1^{(5)}(1) = -24$$

$$f_1^{(6)}(x) = \frac{120}{x^6}; f_1^{(6)}(1) = 120$$

il en découle :

$$\ln x = \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + (x-1)^6 \varepsilon(x-1)$$

$$\ln x = \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + (x-1)^6 \varepsilon(x-1)$$

Remarque

On ne peut pas donner un développement limité en 0 de l'expression $\ln x$ car elle n'est pas définie pour cette valeur.

1. 8. 4. Développement limité d'ordre 1 au voisinage de $+\infty$ de

$$\sqrt[3]{x^3 - x}$$

On peut écrire :

$$\sqrt[3]{x^3 - x} = \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$$

ou encore :

$$\sqrt[3]{x^3 - x} = x \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Si l'on pose $X = \frac{1}{x}$, alors quand $x \rightarrow +\infty \Rightarrow X \rightarrow 0^+$.

On est ramené à un développement limité en 0 pour l'expression en X soit :

$$\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{1 - X^2}$$

En opérant un développement limité à l'ordre 2 il vient :

$$\sqrt[3]{1 - X^2} = 1 - \frac{1}{3} X^2 + X^2 \varepsilon(X)$$

d'où :

$$x \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} = x \left(1 - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

le développement cherché est donc :

$$x \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} = x - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\sqrt[3]{x^3 + x} = x + \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

1.9. Application de la formule de Mac-Laurin au développement du binôme de Newton

On appelle binôme de Newton l'expression de la forme $(a + b)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{Z} ou \mathbb{Q} . L'étude se limitera au cas où $n \in \mathbb{Z}^+$.

On pose $f(x) = (a + x)^n$ et l'on procède au calcul des dérivées successives soit :

$$f(x) = (a + x)^n ; f(0) = a^n$$

$$f'(x) = n(a + x)^{n-1} ; f'(0) = n a^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1)(a + x)^{n-2} ;$$

$$f''(0) = n(n-1) a^{n-2}$$

$$f^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)(a + x)^{n-3} ;$$

$$f^{(3)}(0) = n(n-1)(n-2) a^{n-3}$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! ;$$

$$f^{(n)}(0) = n!$$

Le développement s'arrêtera à la dérivée nième les dérivées suivantes étant nulles quelque soit la valeur de x .

L'application de la formule de Mac-Laurin conduit alors à :

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} x^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} x^3 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2}{(n-1)!} a^1 x^{n-1} + \frac{n!}{n!} x^n$$

en posant $x = b$ on peut écrire :

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2}{(n-1)!} a b^{n-1} + b^n$$

les différents coefficients obtenus sont notés C_n^p avec $n \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $p < n$ et $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! p!}$ avec les propriétés suivantes :

$$C_n^0 = C_n^n = 1; C_n^p = C_n^{n-p}; C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

$$C_n^n = C_n^0 = 1; C_n^p = C_n^{n-p}; C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

d'où l'écriture de ce binôme :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2$$

$$+ \dots + C_n^p a^p b^{n-p} + \dots + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^0 b^n$$

ou :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2$$

$$+ \dots + C_n^{n-p} a^p b^{n-p} + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

1. 10. Application des formules de Taylor-Lagrange et de Mac-Laurin au calcul approché

Les calculs littéraux nous conduisent souvent en Physique à des expressions compliquées qui, si l'on en garde toute la rigueur, ne nous permettent pas de poursuivre le

raisonnement jusqu'à l'obtention d'un résultat.

On peut alors chercher un développement sous forme d'un polynôme ordonné suivant les puissances croissantes mais dont les termes sont de plus en plus petits et tendent vers zéro.

Le nombre des termes du développement qui seront conservés, dépend de la précision avec laquelle on est tenu de travailler.

Ainsi a étant une valeur approchée de x on peut poser $x = a + \Delta x$, la formule de Taylor montre que si l'on prend pour valeur approchée de $f(x)$ la quantité :

$$f(a) + \frac{\Delta x}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

on commet une erreur qui a pour valeur :

$$\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \text{ avec } c \in]a, x[$$

Si on connaît un majorant M de $|f^{(n+1)}(x)|$ sur $]a, x[$, la valeur absolue est majorée à $\frac{M(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!}$, ce qui représente l'erreur la plus grande que l'on pourra faire en prenant la valeur approchée ci-dessus.

Exemples

1. Détermination de la valeur approchée à 10^{-2} près de e .

La formule de Mac-Laurin nous permet d'écrire :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

En effet $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ainsi $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et si l'on choisit $x > 0$, $e^{\theta x} < e^x$ car $\theta \in]0, 1[$ on en déduit :

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$$

en réalité on prend $x = 1$ ce qui donne :

$$R_n < \frac{e}{(n+1)!}$$

et si l'on adopte la condition $e < 3$ il vient finalement :

$$0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}$$

Par ailleurs on désire que $R_n < 10^{-2}$ ce qui implique :

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-2} \text{ d'où } (n+1)! > 300$$

On retient donc $n = 6$ et :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2,718$$

2. Détermination de la valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-2} près.

On peut poser $f(x) = \ln(1+x)$ donc :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

d'où :

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(0) = 2$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

Ainsi d'après la formule de Mac-Laurin il vient :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\ &+ (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} \end{aligned}$$

on en déduit :

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

mais $x > 0$ et $\theta \in]0,1[$ donc :

$$R_n < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

et si l'on prend $x = 1$ on peut dire que :

$$R_n < \frac{1}{n+1}$$

De plus on désire que $R_n < 10^{-2}$ ce qui conduit à $\frac{1}{n+1} < 10^{-2}$ et :

$$n + 1 > 100$$

on retient donc $n = 100$.

On peut donc dire que ce type de développement dans l'exemple présent ne peut convenir pour atteindre une précision convenable car le nombre des termes à retenir est trop important. On constate par exemple en ne prenant que les six premiers termes que le résultat obtenu est de qualité médiocre :

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 0,61666\dots$$

En effet la valeur réelle est $\ln 2 \approx 0,69314\dots$; même à l'ordre 15 on arrive à $\ln 2 \approx 0,725\dots$

1. 11. Développements limités en Physique

Parmi les développements limités au voisinage de 0 il en est certains que l'on utilise fréquemment en Physique en ne conservant que les termes des premiers ordres car les autres ont des valeurs qui tendent rapidement vers 0. C'est le cas principalement du développement du binôme et des fonctions trigonométriques.

● Formules dérivant du développement du binôme

$(1 \pm \varepsilon)^n$ avec $\varepsilon \ll 1$ (ε étant au plus égal à 10^{-2})

$$(1 \pm \varepsilon)^n = 1 \pm n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!} \varepsilon^2 \dots$$

$$\dots + (\pm 1)^p \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \varepsilon^p + \varepsilon^p \beta(x)$$

En général on pose :

$$(1 \pm \varepsilon)^n \approx 1 \pm n\varepsilon$$

$$(1 \pm \varepsilon)^n = 1 \pm n\varepsilon$$

car les termes d'ordre supérieur sont négligeables à 10^{-4}

près ; il en découle :

si $n = 2$	$(1 + \varepsilon)^2 \approx 1 + 2\varepsilon$;	$(1 - \varepsilon)^2 \approx 1 - 2\varepsilon$
si $n = -1$	$\frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$;	$\frac{1}{1 - \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$
si $n = \frac{1}{2}$	$\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$;	$\sqrt{1 - \varepsilon} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2}$
si $n = -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2}$;	$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon}} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$
$\frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon'} \approx 1 + \varepsilon - \varepsilon'$		

● **Formules dérivant des développements limités des fonctions trigonométriques**

On sait que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \text{ selon l'ordre du développement choisi}$$

Pour x voisin de 0 on peut faire les approximations suivantes :

$\sin x = x$; $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$; $\tan x = x$
--

mais il ne faut pas oublier que x est exprimé en radians.

1. 12. Notions élémentaires sur les séries numériques

1. 12. 1. Série numérique

| Etant donné une suite de nombres réels (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, on

appelle série de terme général u_n la suite (S_n) , $n \in \mathbb{N}$ telle que :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

On dit que la série de terme général u_n converge vers S si la suite (S_n) admet la limite S lorsque $n \rightarrow +\infty$, ainsi :

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \text{ ou } S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Propriété

Si (S_n) est une suite convergente alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ c'est une condition nécessaire ; mais si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ la série peut être divergente, ce n'est donc pas une condition suffisante.

1. 12. 2. Critères de convergence pour une série à termes positifs

● Règle de Cauchy

Soit ℓ la limite de $\sqrt[n]{u_n}$ quand $n \rightarrow +\infty$:

- si $\ell < 1$: la série est convergente ;
- si $\ell > 1$: la série est divergente ;
- si $\ell = 1$: on ne peut rien dire.

Toutefois si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1^+$, la série est divergente.

● Règle de d'Alembert

Soit ℓ la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ quand $n \rightarrow +\infty$:

- si $\ell < 1$: la série est convergente ;
- si $\ell > 1$: la série est divergente ;
- si $\ell = 1$: on ne peut rien dire.

Toutefois si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$, la série est divergente.

Exemple

Soit la série définie par :

$$S_n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n, x > 0$$

Règle de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = x \sqrt[n]{n}$$

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x \sqrt[n]{n} = x \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = x^+$$

- si $x < 1$: la série est convergente ;
- si $x > 1$: la série est divergente ;
- si $x = 1$: ℓ tend vers 1^+ , la série est divergente.

Règle de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \frac{n+1}{n}x$$

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x^+$$

- si $x < 1$: la série est convergente ;
- si $x > 1$: la série est divergente ;
- si $x = 1$: ℓ tend vers 1^+ , la série est divergente.

1. 12. 3. Série entière

On appelle série entière de la variable x une série dont le terme général est de la forme $u_n = a_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$ ainsi elle peut se noter :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

C'est une généralisation de la notion de polynôme ; les coefficients a_n sont réels ou complexes ; dans la suite on ne traitera que le cas des $a_n \in \mathbb{R}$.

La somme partielle de rang n est notée :

$$S_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Une série entière peut évidemment être convergente ou divergente suivant les valeurs de x ; lorsqu'elle est convergente la somme S est une fonction de x .

Trois cas peuvent se présenter :

- la série entière ne converge que pour $x = 0$;
- la série entière converge pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- la série entière converge pour $|x| < R$ et diverge pour $|x| > R$. Dans le cas où $|x| = R$ on ne peut pas conclure directement, il faut faire une étude particulière.

L'intervalle $] -R, +R[$ est appelé intervalle de convergence de la série entière, 0 en est le centre et R le rayon de convergence.

Pour obtenir R on procède généralement de la manière suivante :

— si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ on a $R = \frac{1}{\ell}$ (Cauchy);

— si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ on a $R = \frac{1}{\ell}$ (d'Alembert).

Exemple

Domaine de convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n}{n+1} |x|$$

ainsi :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1}$$

donc :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

la série converge donc pour $|x| < R = \frac{1}{\ell} = 1$; l'intervalle de convergence est $] -1, 1 [$.

Si $x = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est une série divergente, résultat obtenu en comparant à la limite lorsque x tend vers l'infini de la fonction logarithme népérien.

1. 12. 4. Série entière de Mac-Laurin

Si sur un intervalle $] -R, +R [$ une fonction f est indéfiniment dérivable et si les dérivées successives sont majorées par un nombre fixe M indépendant de x , la fonction f est développable en série entière sur $] -R, +R [$ et d'après la formule de Mac-Laurin on obtient :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Exemples

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (R \text{ infini})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

(R infini)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

(R infini)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (R=1)$$

2. EXERCICES D'APPLICATION

(M pour Mathématique ; P pour Physique ; (*) pour un exercice résolu à l'aide d'une calculatrice, au chapitre 9)

■ Exercice M.8.1

Donner un développement limité d'ordre 4 de $\cos^3 x$ au voisinage de 0 en utilisant deux méthodes.

Méthode 1

On écrit un développement limité à l'ordre 4 de $\cos x$ soit :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x)$$

Sachant que les opérations sur les polynômes s'appliquent aux développements limités on en déduit :

$$\cos^3 x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x) \right)^3$$

d'où en effectuant il vient :

$$\cos^3 x = 1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{7}{8} x^4 + x^5 \varepsilon_1(x)$$

$$\cos^3 x = 1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{7}{8} x^4 + x^5 \varepsilon_1(x)$$

Méthode 2

Par linéarisation de $\cos^3 x$ on a :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x)$$

D'autre part, compte-tenu des développements limités :

$$\cos 3x = 1 - \frac{9x^2}{2!} + \frac{81x^4}{4!} + x^5 \varepsilon_1(x)$$

et :

$$3 \cos x = 3 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon_2(x) \right)$$

on obtient en additionnant et en multipliant par $\frac{1}{4}$:

$$\cos^3 x = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + x^5 \varepsilon_3(x)$$

$$\cos^3 x = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + x^5 \varepsilon_3(x)$$

■ Exercice M.8.2

Donner un développement limité d'ordre 4 de $\ln(\cos x)$ au voisinage de 0.

Le développement limité de $\cos x$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon_1(x)$$

donc :

$$\ln(\cos x) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon_1(x) \right)$$

On pose alors $X = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon_1(x)$ ce qui conduit à :

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + X)$$

or :

$$\ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + X^2 \varepsilon_2(x)$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \ln(\cos x) &= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon_1(x) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon_1(x) \right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon_1(x) \right)^2 \varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

soit :

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4 \varepsilon(x)$$

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4 \varepsilon(x)$$

■ Exercice M.8.3

Donner un développement limité d'ordre 2 en zéro de $\ln(1 + e^x)$.

Le développement limité à l'ordre 2 en zéro de $1 + e^x$ s'écrit :

$$1 + e^x = 1 + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x) \right)$$

ou :

$$1 + e^x = 2 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$$

Compte tenu de cette expression on est conduit à :

$$\ln(1 + e^x) = \ln \left[2 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2 \varepsilon_2(x) \right) \right]$$

et d'après les propriétés des logarithmes il vient :

$$\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2 \varepsilon_2(x) \right)$$

On pose alors :

$$X = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2 \varepsilon_2(x)$$

pour obtenir :

$$\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \ln(1 + X)$$

Connaissant le développement limité de $\ln(1 + X)$ on en déduit :

$$\ln(1 + e^x) = \ln 2 + X - \frac{X^2}{2} + X^2 \varepsilon_3(x)$$

ou :

$$\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon_4(x)$$

et finalement :

$$\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon_4(x)$$

$$\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon_4(x)$$

■ Exercice M.8.4

La précision des mesures dans une expérience est de 0,1 % ; jusqu'à quelle limite d'angle peut-on utiliser les approximations suivantes :

$$\sin \theta \approx \theta; \quad \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}; \quad \tan \theta \approx \theta.$$

Le développement limité au voisinage de zéro de $\sin \theta$ à l'ordre 3 est :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \theta^4 \varepsilon(\theta)$$

Si l'on prend $\sin \theta \approx \theta$ on commet une erreur absolue sur la valeur de $\sin \theta$ majorée par $\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$, avec $\Delta x = \theta$, $n = 2$ et $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ soit compte tenu du signe $-\frac{\theta^3}{6}$ et une erreur relative égale à :

$$\frac{-\frac{\theta^3}{6}}{\sin \theta} \approx -\frac{\theta}{6}$$

θ étant exprimé en radians.

Or il faut que :

$$\left| -\frac{\theta^2}{6} \right| < 0,1\%$$

soit :

$$\theta^2 < 0,006$$

et :

$$\theta < 0,0774 \text{ rad} = 4^\circ 26'$$

$$\theta < 0,0774 \text{ rad} = 4^\circ 26'$$

Le développement limité au voisinage de zéro de $\cos \theta$ à l'ordre 4 est :

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \theta^5 \varepsilon(\theta)$$

l'erreur relative commise en prenant $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ est majorée par :

$$\frac{\frac{\theta^4}{4!}}{\cos \theta} \approx \frac{\theta^4}{4!}$$

elle doit être inférieure à 10^{-3} ce qui implique :

$$\frac{\theta^4}{4!} < 10^{-3}$$

soit :

$$\theta < 0,3936 \text{ rad} = 22^\circ 33'$$

$$\theta < 0,3936 \text{ rad} = 22^\circ 33'$$

Le développement limité au voisinage de zéro de $\tan \theta$ à l'ordre 5 est :

$$\tan \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2}{15} \theta^5 + \theta^6 \varepsilon(\theta)$$

L'erreur relative commise en prenant $\tan \theta \approx \theta$ est :

$$\frac{\frac{\theta^3}{3}}{\tan \theta} \approx \frac{\theta^2}{3} < 10^{-3}$$

soit :

$$\theta < 0,0547 \text{ rad} = 3^\circ 8'$$

$$\theta < 0,0547 \text{ rad} = 3^\circ 8'$$

■ Exercice M.8.5

Ecrire le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x) = \text{Arc sin } x$.

Calculer la somme $R(x)$ des termes dont le rang est égal ou supérieur à $2n + 1$. Après avoir factorisé, donner un majorant de $R(x)$.

Sachant que $\frac{\pi}{6} = \text{Arc sin } \frac{1}{2}$, on veut calculer $\frac{\pi}{6}$ avec une erreur inférieure à 10^{-4} ce qui signifie $R(1/2) < 10^{-4}$; jusqu'à quel ordre doit-on écrire le développement limité correspondant ? (On procèdera par tâtonnement $n \leq 5$.) Calculer alors la valeur approchée correspondante de π à 10^{-4} près par défaut.

Le développement en série entière de $\text{Arc sin } x$ est obtenu à partir de la formule de Mac-Laurin qui conduit à :

$$\begin{aligned} \text{Arc sin } x &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \dots \end{aligned}$$

donc :

$$R(x) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \left(1 + \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} x^2 + \frac{(2n+1)^2(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)(2n+5)} x^4 + \dots \right)$$

or $\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$, $\frac{(2n+1)^2(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)(2n+5)}$...

peuvent être majorés par 1, d'où :

$$\text{maj. de } R(x) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} (1 + x^2 + x^4 + \dots)$$

mais :

$$1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2} \text{ pour } -1 < x < 1$$

ce qui implique :

$$\text{maj. de } R(x) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{1-x^2}$$

Compte-tenu du fait que $x = \frac{1}{2}$ dans l'exemple choisi, on est finalement amené à résoudre :

$$\text{maj. de } R(1/2) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{(1/2)^{2n+1}}{2n+1} \frac{4}{3} < 10^{-4}$$

en procédant par approche successive il vient :

$$\text{Pour } n = 2, \text{ maj. de } R(1/2) = 3,125 \cdot 10^{-3}$$

$$n = 3, \text{ maj. de } R(1/2) = 4,6 \cdot 10^{-4}$$

$$n = 4, \text{ maj. de } R(1/2) = 7,9 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$$

On prend donc pour le développement limité l'expression :

$$\begin{aligned} \text{Arc sin } \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} \end{aligned}$$

soit :

$$\text{Arc sin } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{24} + \frac{3}{640} + \frac{5}{7168} \right)$$

c'est-à-dire :

$$\text{Arc sin } \frac{1}{2} = 0,5235258$$

ou :

$$\frac{\pi}{6} = 0,5235258$$

et :

$$\pi = 3,14115$$

On remarque que même avec un développement limité comprenant quatre termes la valeur obtenue pour π n'est pas satisfaisante ; ceci est dû à la valeur du majorant de $R(x)$, il serait donc nécessaire de refaire les calculs avec un terme supplémentaire dans le développement limité, ce qui donnerait $\pi = 3,14151$.

■ Exercice P.8.6

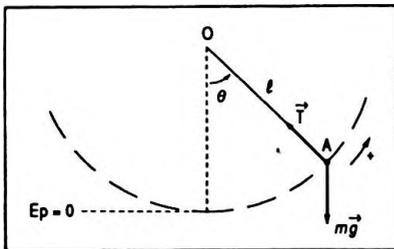


Figure 8.3

On considère un pendule simple constitué d'un point matériel de masse m accroché à l'extrémité inférieure A d'un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable (Fig. 8.3). L'extrémité supérieure O est fixée à un support. Etablir l'équation différentielle du mouvement obtenu lorsque le fil a été écarté d'un angle θ_m par rapport à la position d'équilibre puis abandonné à lui-même sans vitesse initiale.

Décrire l'allure du mouvement.

Donner l'expression de la période T en remarquant que le temps mis pour balayer un angle élémentaire $d\theta$ est $dT = \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$. Pour intégrer cette équation on fera un développement limité au second ordre. Donner alors l'expression de la période sous la forme d'un développement limité d'ordre 2 par rapport à l'amplitude θ_m des oscillations. Calculer la période T_0 des très petites oscillations. Sachant que l'on peut admettre sur la période une erreur relative égale à 10^{-3} , pour quelle valeur maximale de θ_m peut-on conserver T_0 ?

La relation fondamentale de la dynamique des solides

en rotation permet d'écrire :

$$\Sigma \overline{M}_0 = J \ddot{\theta}$$

soit :

$$- mgl \sin \theta = m \ell^2 \ddot{\theta}$$

et :

$$\ddot{\theta} = - \frac{g}{\ell} \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} = - \frac{g}{\ell} \sin \theta$$

Cette équation différentielle du second ordre n'est pas linéaire ; par conséquent son intégration n'est pas immédiate.

Le mouvement est oscillatoire non sinusoidal de part et d'autre de la position verticale d'équilibre. Il peut se décomposer en quatre phases, descente de l'angle θ_m à l'angle 0 remontée de l'angle 0 à l'angle $-\theta_m$, descente de l'angle $-\theta_m$ à l'angle 0 et remontée de l'angle 0 à l'angle θ_m . Ces phases sont symétriques et isochrones donc :

$$T = 4 \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{|\dot{\theta}|}$$

Pour calculer $\dot{\theta}$, vitesse angulaire du pendule à un instant donné, on peut utiliser la conservation de l'énergie mécanique totale du système, or on sait que :

$$E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$$

d'autre part :

$$E_p = mgl (1 - \cos \theta)$$

si l'on prend le point d'équilibre comme niveau de référence ($E_p = 0$).

De plus :

$$E_c + E_p = \text{Cte} = E_{p \max}$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mgl (1 - \cos \theta) = mgl (1 - \cos \theta_m)$$

On en tire :

$$\frac{1}{2} \ell \dot{\theta}^2 = g (\cos \theta - \cos \theta_m)$$

soit :

$$\dot{\theta} = \varepsilon \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_m}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

d'où :

$$T = 4 \int_0^{\theta_m} \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_m}}$$

mais :

$$\cos \theta = -2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 1 \quad \text{et} \quad \cos \theta_m = -2 \sin^2 \frac{\theta_m}{2} + 1$$

ainsi :

$$\cos \theta - \cos \theta_m = 2 \left(\sin^2 \frac{\theta_m}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

et :

$$T = 2 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_m}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

On pose $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_m}{2} \sin u$ puis on dérive cette relation, il vient alors :

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \sin \frac{\theta_m}{2} \cos u du$$

d'où :

$$d\theta = \frac{2 \sin \frac{\theta_m}{2} \cos u du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

avec :

$$\cos u = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_m}{2}}}$$

On note également que $\theta \in [0, \theta_m]$ ainsi $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
donc :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_m}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{2 \sin \frac{\theta_m}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_m}{2}}} du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta^2}{2}} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_m}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

soit encore :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_m}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{2 du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_m}{2} \sin^2 u}}$$

On procède alors à un développement limité d'ordre 2 au voisinage de zéro en considérant θ_m comme relativement faible, ce qui donne :

$$\frac{2 du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_m}{2} \sin^2 u}} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_m}{2} \sin^2 u \right) du$$

et :

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_m}{2} \sin^2 u \right) du$$

soit :

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_m}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \right)$$

ou encore :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_m}{2} \right)$$

Si θ_m est relativement faible un nouveau développement limité d'ordre 2 nous conduit à :

$$\sin^2 \frac{\theta_m}{2} \approx \frac{\theta_m^2}{4}$$

et :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{\theta_m^2}{16} \right)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{\theta_m^2}{16} \right)$$

La période des très petites oscillations est alors :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

L'erreur relative en prenant pour T la valeur T_0 est :

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\theta_m^2}{16} < 10^{-3}$$

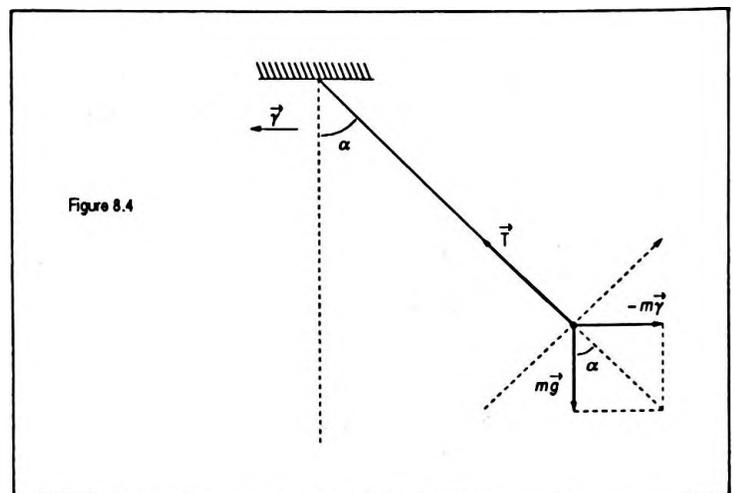
L'erreur relative est donc inférieure au 1/1000^{ème} si :

$$\theta_m < 7^\circ 14'$$

$$\theta_m < 7^\circ 14'$$

■ Exercice P.8.7

On considère un pendule simple formé d'un fil de longueur ℓ inextensible à l'extrémité inférieure duquel est suspendu un point matériel de masse m (Fig. 8.4). Le fil est attaché dans un véhicule animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré ($\vec{\gamma}$). Calculer l'angle fait par le pendule avec la verticale à l'équilibre relatif. Déterminer la période des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.



On applique la condition d'équilibre dans le repère lié au véhicule non galiléen, ce qui donne :

$$m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{\gamma} = \vec{0}$$

En projetant cette relation sur un axe normal au fil il vient :

$$m \gamma \cos \alpha_e - mg \sin \alpha_e = 0$$

soit :

$$\tan \alpha_e = \frac{\gamma}{g}$$

$$\tan \alpha_e = \frac{\gamma}{g}$$

Si le pendule est en mouvement on peut appliquer la relation fondamentale de la dynamique au point matériel dans le repère non galiléen, d'où la relation :

$$\Sigma \vec{f} = m \vec{\gamma}_r$$

ce qui équivaut à :

$$m \vec{g} + \vec{T} - m \vec{\gamma} = m \vec{\gamma}_r$$

Une projection de la relation sur l'axe normal au fil conduit à :

$$m \gamma_r = - mg \sin \alpha + m \gamma \cos \alpha$$

avec $\gamma_r = \ell \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$ ou $\ell \ddot{\alpha}$, soit :

$$\ell \ddot{\alpha} = - g \sin \alpha + \gamma \cos \alpha$$

C'est une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{\alpha} = f(\alpha) \text{ avec } f(\alpha) = - \frac{g}{\ell} \sin \alpha + \frac{\gamma}{\ell} \cos \alpha$$

Pour α voisin de α_e on peut utiliser un développement limité de Taylor, il en découle :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(\alpha_e) + \frac{(\alpha - \alpha_e)}{1!} f'(\alpha_e) \\ &\quad + \frac{(\alpha - \alpha_e)^2}{2!} f''(\alpha_e) + (\alpha - \alpha_e)^2 \varepsilon(\alpha - \alpha_e) \end{aligned}$$

or $f(\alpha_e) = 0$, d'autre part :

$$f'(\alpha) = - \frac{g}{\ell} \cos \alpha - \frac{\gamma}{\ell} \sin \alpha$$

ainsi :

$$f'(\alpha_e) = - \left(\frac{g}{\ell} \cos \alpha_e + \frac{\gamma}{\ell} \sin \alpha_e \right)$$

(on ne gardera que ce terme)

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{\alpha} = - (\alpha - \alpha_e) \left(\frac{g}{\ell} \cos \alpha_e + \frac{\gamma}{\ell} \sin \alpha_e \right)$$

On pose :

$$A = \frac{g}{\ell} \cos \alpha_e + \frac{\gamma}{\ell} \sin \alpha_e$$

par conséquent :

$$\ddot{\alpha} = - (\alpha - \alpha_e) A$$

ou :

$$\ddot{\alpha} + A \alpha = \alpha_e A$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et si l'on note $\omega^2 = A$ donc $\omega = \sqrt{A}$ qui ne peut être que positive alors :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \cos \alpha_e + \gamma \sin \alpha_e}} \quad \text{avec } \tan \alpha_e = \frac{\gamma}{g}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \cos \alpha_e + \gamma \sin \alpha_e}}$$

avec $\tan \alpha_e = \frac{\gamma}{g}$

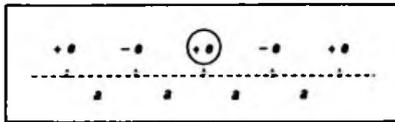


Figure 8.5

■ Exercice P.8.8

On considère un ion chargé $+e$, pris dans une suite infinie d'ions alignés chargés alternativement $+e$ et $-e$ que l'on assimilera à des charges ponctuelles équidistantes (Fig. 8.5). La distance séparant deux ions est a .

Calculer l'énergie électrostatique de cet ion.

L'énergie électrostatique d'une charge électrique en un point est donnée par $W = \frac{1}{2} q V$.

On peut déterminer le potentiel créé par l'ensemble de la distribution des charges à l'endroit où se trouve l'ion de charge e , ce qui donne :

$$V = 2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-e}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+e}{2a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-e}{3a} + \dots \right)$$

soit encore :

$$V = \frac{-e}{2\pi\epsilon_0 a} \left(+1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$$

On utilise un développement en série entière pour calculer la somme de la série numérique.

Sachant que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ et en faisant $x = 1$ il en découle :

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ainsi :

$$V = - \frac{e}{2\pi\epsilon_0 a} \ln 2$$

L'énergie électrostatique est donc :

$$W = \frac{1}{2} e \left(- \frac{e}{2\pi\epsilon_0 a} \ln 2 \right)$$

soit :

$$W = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \ln 2$$

$$W = - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \ln 2$$

■ Exercice P.8.9

On considère une distribution formée de quatre charges : q en $A(a, 0)$, $-q$ en $B(0, a)$, q en $C(-a, 0)$, $-q$ en $D(0, -a)$ (Fig. 8.6).

Calculer le potentiel créé par cette distribution en un point $M(x, y)$ tel que $x \ll a$ et $y \ll a$.

Le potentiel créé au point M par les charges a pour expression :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{CM} - \frac{1}{DM} \right]$$

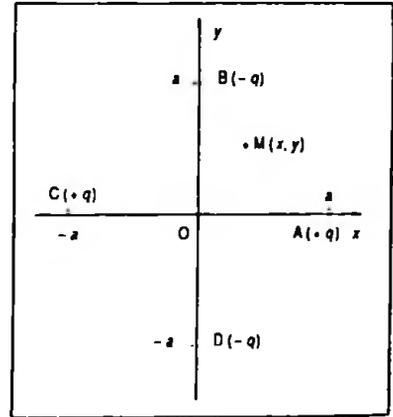


Figure 8.6

Les composantes des vecteurs permettant de calculer les distances des charges au point considéré sont :

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - a \\ y \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x \\ y - a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x + a \\ y \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DM} \begin{pmatrix} x \\ y + a \end{pmatrix}$$

Ainsi on peut écrire :

$$AM = \left[(x - a)^2 + y^2 \right]^{1/2} = a \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right)^{1/2}$$

ce qui conduit à :

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right)^{-1/2}$$

mais $x \ll a$ et $y \ll a$, on peut alors procéder à un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro soit :

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + \frac{n\varepsilon}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \theta(\varepsilon)$$

$$\text{avec } \theta(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0$$

il en découle :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right) \\ &\quad + \frac{3}{8} \left(-\frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right)^2 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{2x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2}$$

donc :

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{2x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2} \right)$$

Par un calcul analogue on obtient successivement :

$$BM = \left[x^2 + (y - a)^2 \right]$$

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{y}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{2y^2}{2a^2} \right)$$

$$CM = \left[(x + a)^2 + y^2 \right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{CM} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{x}{a} + \frac{2x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2} \right)$$

$$DM = \left[x^2 + (y + a)^2 \right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{DM} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{y}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{2y^2}{2a^2} \right)$$

Compte-tenu des calculs précédents il vient :

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{CM} - \frac{1}{DM} = \frac{3}{a} \left(\frac{x^2 - y^2}{a^2} \right)$$

d'où :

$$V = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - y^2}{a^3}$$

$$V = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - y^2}{a^3}$$

■ Exercice P.8.10

On considère un condensateur cylindrique. Le rayon de l'armature interne est R_1 ; celui de l'armature externe R_2 ; le diélectrique est de l'air dont la constante sera prise égale à ϵ_0 . Sachant que $R_2 - R_1 = e$ avec e très faible devant R_1 , calculer la capacité du condensateur ; on notera ℓ sa longueur.

La capacité d'un condensateur cylindrique est donnée par :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

On pose $R_2 = R_1 + e$ d'où :

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \frac{R_1 + e}{R_1}$$

soit encore :

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{e}{R_1} \right)$$

On peut faire un développement limité au premier ordre au voisinage de zéro ainsi :

$$\ln(1+x) \approx x$$

ce qui donne :

$$\ln \left(1 + \frac{e}{R_1} \right) \approx \frac{e}{R_1}$$

et :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\frac{e}{R_1}}$$

c'est-à-dire :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\ell R_1}{e}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\ell R_1}{e}$$

On peut considérer que $2\pi R_1 \ell$ est la surface d'une armature du condensateur d'où :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

On retrouve ainsi la capacité d'un condensateur mince.

■ Exercice P.8.11

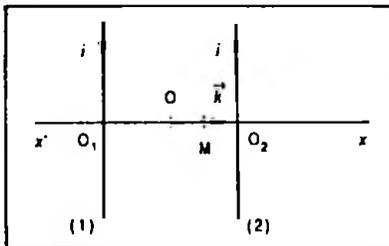


Figure 8.7

Les spires de Helmholtz. Soit deux spires S_1 et S_2 identiques, de même axe $x'Ox$, de centre O_1 et O_2 , d'abscisses respectives $x_1 = -d$ et $x_2 = +d$. Leur rayon est R (Fig. 8.7). Elles sont parcourues par des courants de même intensité i et de même sens. On appelle $\vec{B}(M)$ le champ magnétique créé par cet ensemble en un point M du segment O_1O_2 . Calculer $B(M)$ en M tel que $OM = x \ll d$. Etudier les variations de $B(M)$ au voisinage de O . Discuter en fonction de d et de R .

L'expression du champ magnétique créé par une spire parcourue par un courant nous conduit à :

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 i R^2 \vec{k}}{2 \left[R^2 + (d+x)^2 \right]^{3/2}} \quad \text{et}$$

$$\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 i R^2 \vec{k}}{2 \left[R^2 + (d-x)^2 \right]^{3/2}}$$

Le champ magnétique résultant au point M est alors :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \left[\frac{1}{[R^2 + (d+x)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (d-x)^2]^{3/2}} \right] \vec{k}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \left[\frac{1}{[R^2 + (d+x)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (d-x)^2]^{3/2}} \right] \vec{k}$$

et :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 i R^2}{(R^2 + d^2)^{3/2}} \vec{k}$$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 i R^2}{(R^2 + d^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Comportement de $B(M)$ au voisinage de O

Si M est proche de O alors $x \ll d$, on pourra ainsi procéder à un développement limité. L'intensité du champ magnétique s'écrit :

$$B(M) = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \left(\frac{1}{[R^2 + (d+x)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (d-x)^2]^{3/2}} \right)$$

pour en étudier les variations on calcule la dérivée soit :

$$\frac{dB(M)}{dx} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \left(-3(d+x)[R^2 + (d+x)^2]^{-5/2} + 3(d-x)[R^2 + (d-x)^2]^{-5/2} \right)$$

ou encore :

$$\frac{dB(M)}{dx} = \frac{-3\mu_0 i R^2}{2} \left((d+x)(R^2 + d^2 + 2d \cdot x)^{-5/2} - (d-x)(R^2 + d^2 - 2d \cdot x)^{-5/2} \right)$$

Si l'on met $(R^2 + d^2)^{-5/2}$ en facteur il vient :

$$\frac{dB(M)}{dx} = -\frac{3\mu_0 i R^2}{2(R^2 + d^2)^{5/2}} \left((d+x) \left(1 + \frac{2d \cdot x}{R^2 + d^2} \right)^{-5/2} - (d-x) \left(1 - \frac{2d \cdot x}{R^2 + d^2} \right)^{-5/2} \right)$$

On fait un développement limité au premier ordre au voisinage de zéro car le terme $\frac{5d \cdot x}{R^2 + d^2} \ll 1$ ce qui conduit à :

$$\frac{dB(M)}{dx} = -\frac{3\mu_0 i R^2}{2(R^2 + d^2)^{5/2}} \left((d+x) \left(1 - \frac{5d \cdot x}{R^2 + d^2} \right) - (d-x) \left(1 + \frac{5d \cdot x}{R^2 + d^2} \right) \right)$$

et finalement :

$$\frac{dB(M)}{dx} = -\frac{3\mu_0 i R^2 x}{(R^2 + d^2)^{7/2}} (R^2 - 4d^2)$$

On constate que $\frac{dB(x)}{dx}$ s'annule pour $x = 0$, donc $B(O)$ sera un extrémum dont il faut déterminer la nature.

Signe de $\frac{dB(M)}{dx} = \text{signe de } -x(R^2 - 4d^2)$:

Si $2d < R$ alors $B(O)$ est un maximum.

Si $2d > R$ alors $B(O)$ est un minimum.

Si $2d = R$ alors $B(M)$ est constant au voisinage de O .

● Interprétation graphique

Les courbes représentatives des fonctions $B_1(M)$ et $B_2(M)$ sont identiques et présentent un point d'inflexion situé à la distance $R/2$ de leur sommet (Fig. 8.8). Au voisinage de ce point d'inflexion chaque fonction se comporte comme une fonction affine.

Si $2d = R$ les points d'inflexion sont confondus ; on a donc à faire la somme de deux fonctions affines de pentes opposées ; on sait alors que le résultat est constant c'est pourquoi dans ce cas $B(M)$ est constant au voisinage de O .

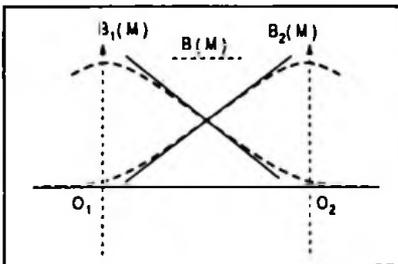


Figure 8.8

■ Exercice P.8.12

Soit deux fils conducteurs rectilignes infinis parallèles parcourus par des courants de même sens et de même intensité I_0 . Ils sont situés à la distance $2a$ l'un de l'autre. Dans un repère orthogonal les deux fils peuvent être parallèles à l'axe Oz et d'abscisses respectives $x = +a$ et $x = -a$ (Fig. 8.9). Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en point M dont les coordonnées (x, y) sont telles que $x \ll a$ et $y \ll a$.

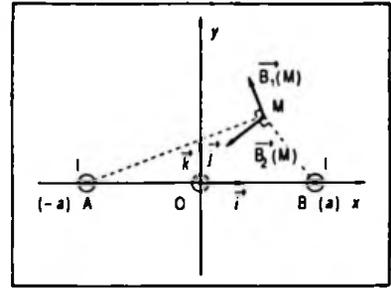


Figure 8.9

On place en ce point M un fil de longueur ℓ parallèle à l'axe Oz donc aux deux premiers fils. Il est parcouru par un courant d'intensité I de même sens que les précédents courants. Donner une expression de la force de Laplace \vec{F} qui s'exerce sur lui.

L'expression du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant conduit à :

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{\vec{k} \wedge \vec{AM}}{AM^2} \text{ et } \vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{\vec{k} \wedge \vec{BM}}{BM^2}$$

Le champ magnétique résultant au point M est alors :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$$

soit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{AM}}{AM^2} + \frac{\vec{BM}}{BM^2} \right)$$

or :

$$\vec{AM} = (a+x)\vec{i} + y\vec{j} \text{ et } \vec{BM} = (-a+x)\vec{i} + y\vec{j}$$

d'où :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \vec{k} \wedge \left(\frac{(a+x)\vec{i} + y\vec{j}}{(a+x)^2 + y^2} + \frac{(x-a)\vec{i} + y\vec{j}}{(x-a)^2 + y^2} \right)$$

et en factorisant $\frac{1}{a}$ il vient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a^2} \vec{k} \wedge \left(\frac{(a+x)\vec{i} + y\vec{j}}{1 + \frac{2x}{a} + \frac{x^2 + y^2}{a^2}} + \frac{(x-a)\vec{i} + y\vec{j}}{1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2 + y^2}{a^2}} \right)$$

Un développement limité au premier ordre des dénominateurs conduit à :

$$\left(1 + \frac{2x}{a} + \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{2x}{a} \quad \text{et}$$

$$\left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{2x}{a}$$

Ainsi, compte-tenu de ces expressions on en déduit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a^2} \vec{k} \wedge (-2x\vec{i} + 2y\vec{j})$$

soit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I_0}{\pi a^2} (-x\vec{j} - y\vec{i})$$

d'où :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I_0}{\pi a^2} (x\vec{j} + y\vec{i})$$

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I_0}{\pi a^2} (x\vec{j} + y\vec{i})$$

La force de Laplace a pour expression :

$$\vec{F} = I \ell \vec{k} \wedge \vec{B}(M)$$

D'après le résultat obtenu pour $\vec{B}(M)$ elle devient :

$$\vec{F} = -\frac{I \ell \mu_0 I_0}{\pi a^2} \vec{k} \wedge (x\vec{j} + y\vec{i})$$

et finalement :

$$\vec{F} = \frac{I \ell \mu_0 I_0}{\pi a^2} (x\vec{i} - y\vec{j})$$

$$\vec{F} = \frac{I \ell \mu_0 I_0}{\pi a^2} (x\vec{i} - y\vec{j})$$

■ Exercice P.8.13

On mélange dans une enceinte adiabatique et à pression constante une masse m de liquide à la température T avec une masse égale du même liquide à la température T' . Soit c_p la chaleur massique de ce liquide.

Calculer la variation d'entropie du système. Démontrer que cette variation d'entropie est un infiniment petit du second ordre si $T' - T = dT$ est un infiniment petit du premier ordre par rapport à T .

Si le mélange est effectué dans une enceinte adiabatique on peut écrire :

$$mc_p (T_f - T) + mc_p (T_f - T') = 0$$

On en déduit donc la température de ce mélange soit :

$$T_f = \frac{T + T'}{2}$$

Ainsi la variation d'entropie pour chacun des liquides lors de cette transformation est donnée par :

$$\Delta S_1 = \int_T^{T_f} mc_p \frac{dT}{T} \quad \text{et} \quad \Delta S_2 = \int_{T'}^{T_f} mc_p \frac{dT}{T}$$

D'où la variation totale d'entropie qui est :

$$\Delta S = mc_p \left[\int_T^{T_f} \frac{dT}{T} + \int_{T'}^{T_f} \frac{dT}{T} \right]$$

par intégration on obtient :

$$\Delta S = mc_p \left[\ln \frac{T + T'}{2T} + \ln \frac{T + T'}{2T'} \right]$$

soit :

$$\Delta S = mc_p \ln \frac{(T + T')^2}{4TT'}$$

$$\Delta S = mc_p \ln \frac{(T + T')^2}{4TT'}$$

On pose $T' = T + dT$, il vient alors :

$$\frac{(T + T')^2}{4TT'} = \frac{(2T + dT)^2}{4T(T + dT)}$$

ou encore :

$$\frac{(T + T')^2}{4TT'} = \frac{4T^2 \left(1 + \frac{dT}{2T}\right)^2}{4T^2 \left(1 + \frac{dT}{T}\right)}$$

et :

$$\frac{(T + T')^2}{4TT'} = \left(1 + \frac{dT}{2T}\right)^2 \left(1 + \frac{dT}{T}\right)^{-1}$$

en faisant un développement limité aux termes du second

ordre on obtient :

$$\frac{(T + T')^2}{4TT'} = \left(1 + \frac{dT}{T} + \frac{dT^2}{4T^2} \right) \left(1 - \frac{dT}{T} + \frac{dT^2}{T^2} \right)$$

et après simplification il vient :

$$\frac{(T + T')^2}{4TT'} = 1 + \frac{dT^2}{4T^2}$$

il en découle :

$$\Delta S = mc_p \ln \left(1 + \frac{dT^2}{4T^2} \right)$$

Un développement limité aux termes du second ordre du logarithme conduit finalement à :

$$\Delta S = mc_p \frac{dT^2}{4T^2}$$

$$\Delta S = mc_p \frac{dT^2}{4T^2}$$

■ Exercice P.8.14

L'équation d'état d'une mole d'un gaz réel peut être représentée par l'équation de Van der Waals :

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT \text{ avec } \frac{a}{v^2} \ll p \text{ et } b \ll v$$

Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$pv = RT \left(1 + \frac{\alpha}{v} + \frac{\beta}{v^2} + \frac{\delta}{v^3} \dots \right)$$

Calculer α , β , δ .

En effectuant l'équation de Van der Waals il vient :

$$pv = RT + pb - \frac{a}{v} + \frac{ab}{v^2} \quad (1)$$

D'autre part cette même équation nous donne :

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

Si l'on remplace p par sa valeur dans la relation (1) on obtient :

$$pv = RT + \frac{bRT}{v-b} - \frac{ab}{v^2} - \frac{a}{v} + \frac{ab}{v^2}$$

soit :

$$pv = RT - \frac{a}{v} + \frac{bRT}{v\left(1 - \frac{b}{v}\right)}$$

On peut faire un développement limité à l'ordre 2 de $\left(1 - \frac{b}{v}\right)^{-1}$, ce qui donne :

$$\left(1 - \frac{b}{v}\right)^{-1} = 1 + \frac{b}{v} + \frac{b^2}{v^2} + \dots$$

ainsi :

$$pv = RT - \frac{a}{v} + \frac{bRT}{v} \left(1 + \frac{b}{v} + \frac{b^2}{v^2} + \dots\right)$$

et :

$$pv = RT \left(1 + \left(b - \frac{a}{RT}\right) \frac{1}{v} + \frac{b^2}{v^2} + \frac{b^3}{v^3} + \dots\right)$$

$$pv = RT \left(1 + \left(b - \frac{a}{RT}\right) \frac{1}{v} + \frac{b^2}{v^2} + \frac{b^3}{v^3} + \dots\right)$$

$$\alpha = b - \frac{a}{RT}; \quad \beta = b^2; \quad \delta = b^3$$

$$\alpha = b - \frac{a}{RT}; \quad \beta = b^2; \quad \delta = b^3$$

Chapitre 9

Calcul numérique

1. GÉNÉRALITÉS

La résolution d'un problème de Physique peut, comme on l'a déjà mentionné, se décomposer en plusieurs étapes dont les trois principales sont :

- la prise de conscience du phénomène à partir des faits expérimentaux et sa mise en équation ;
- le traitement mathématique de ces équations ;
- l'élaboration de conclusions et les applications qui peuvent en découler.

Or le traitement mathématique peut lui-même s'articuler en deux phases, à savoir, la résolution littérale des équations obtenues ce qui généralement suffit au mathématicien mais qui doit être suivie d'une seconde phase, le calcul numérique à partir duquel le physicien pourra extraire des résultats concrets et ainsi se ramener à la réalité des faits.

C'est pourquoi il a été jugé nécessaire de donner un prolongement numérique à quelques-unes des parties de cours traitées lors des précédents chapitres ainsi qu'à certains exercices qui se prêtaient plus particulièrement à ce genre d'application.

Pendant le but de l'ouvrage n'étant pas le calcul numérique, ces exemples restent volontairement limités à des cas simples.

L'outil indispensable à une telle investigation est la calculatrice programmable ; le choix s'est porté sur des matériels d'usage courant assez bien adaptés aux problèmes à résoudre ; il s'agit en l'occurrence des calculatrices suivantes :

- Texas-Instrument 62 Galaxy,
- Hewlett-Packard 32 S,
- Casio FX 7000 G.

Le langage adopté tient évidemment compte des particularités propres à chaque machine. Enfin, la résolution des problèmes est généralement présentée en parallèle pour montrer aux étudiants les différentes approches.

2. PRODUITS DE VECTEURS

2. 1. Produit scalaire

2. 1. 1. Principe

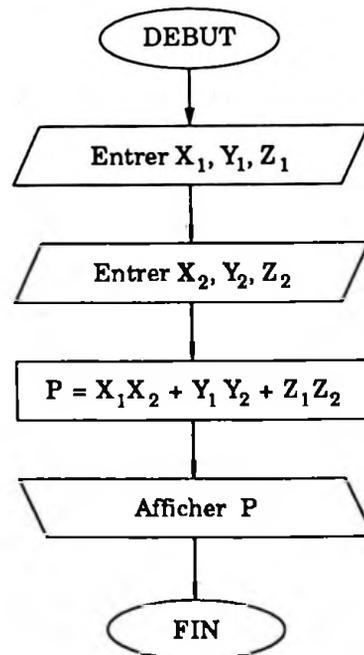
On calcule le produit scalaire de deux vecteurs

$\vec{U} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ de l'espace de dimension trois en

rappelant que :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

2. 1. 2. Algorithme



2. 1. 3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	$X_1 \rightarrow$ mémoire 0
01	R/S	
02	STO 1	$X_2 \rightarrow$ mémoire 1
03	R/S	
04	STO 2	$Y_1 \rightarrow$ mémoire 2
05	R/S	
06	STO 3	$Y_2 \rightarrow$ mémoire 3
07	R/S	
08	STO 4	$Z_1 \rightarrow$ mémoire 4
09	R/S	
10	STO 5	$Z_2 \rightarrow$ mémoire 5
11	RCL 0	} Calcul de $P = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$
12	x	
13	RCL 1	
14	+	
15	RCL 2	
16	x	
17	RCL 3	
18	+	
19	RCL 4	
20	x	
21	RCL 5	} Affichage de P
22	=	
23	R/S	

2. 1. 4. Programme H. P. 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	
01	INPUT A	} Mise en mémoire des composantes
02	INPUT B	
03	INPUT C	
04	INPUT D	
05	INPUT C	
06	INPUT F	
07	RCL A	} Calcul de P
08	RCL B	
09	x	
10	RCL C	

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
11	RCL D	Calcul de P
12	x	
13	+	
14	RCL E	
15	RCL F	
16	x	
17	+	
18	STO P	Affichage de P
19	VIEW P	

2. 1. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
"DIM" ? → N :	Demande la dimension de l'espace de vecteurs, la stocke en N;
0 → S :	Initialise S à 0 ;
1 → L :	Initialise L à 1 ;
Lbl 1 :	Début de boucle ;
"U" ? → A [L]	Demande composantes de \vec{U} , les stocke en A indicé ;
"V" ? → D [L]	Demande composantes de \vec{V} , les stocke en D indicé ;
S + A [L]	Calcul somme partielle ;
x D [L] → S :	
L + 1 → L :	Incrémente le compteur de L;
L ≤ N ⇒ Goto 1 :	Test d'arrêt ;
S ▲	Affichage de la somme finale qui est le résultat P.

Remarque

Ces programmes peuvent servir à calculer la norme d'un vecteur ; il suffit pour cela de prendre $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$, $Z_1 = Z_2$ qui sont les composantes de ce vecteur et de terminer par l'opération racine carrée de P.

2. 2. Produit vectoriel

2. 2. 1. Principe

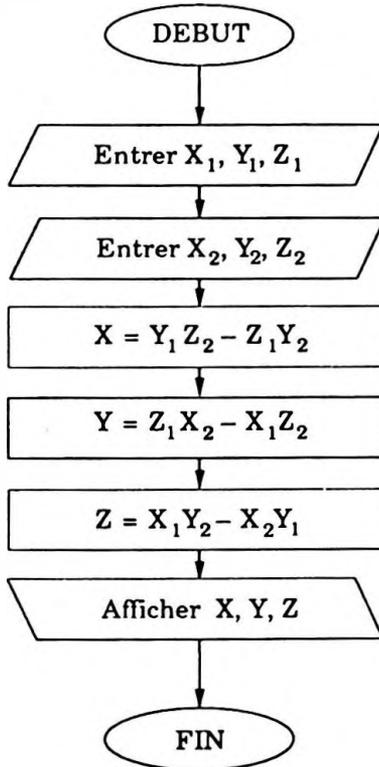
On calcule le produit vectoriel de deux vecteurs

$$\vec{U} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ de l'espace de dimension trois en}$$

rappelant que :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 \\ Z_1 X_2 - X_1 Z_2 \\ X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \end{pmatrix}$$

2. 2. 2. Algorithme



2. 2. 3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	X ₁ → mémoire 0
01	R/S	
02	STO 1	Y ₁ → mémoire 1
03	R/S	
04	STO 2	Z ₁ → mémoire 2
05	R/S	
06	STO 3	X ₂ → mémoire 3
07	R/S	
08	STO 4	Y ₂ → mémoire 4
09	R/S	
10	STO 5	Z ₂ → mémoire 5

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
11	RCL 1	Calcul de $X = Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2$
12	x	
13	RCL 5	
14	-	
15	RCL 2	
16	x	
17	RCL 4	Affichage de X ;
18	=	
19	R/S	
20	RCL 2	Calcul de $Y = Z_1 X_2 - X_1 Z_2$
21	x	
22	RCL 3	
23	-	
24	RCL 0	
25	x	
26	RCL 5	Affichage de Y ;
27	=	
28	R/S	
29	RCL 0	Calcul de $Z = X_1 Y_2 - Y_1 X_2$
30	x	
31	RCL 4	
32	-	
33	RCL 1	
34	x	
35	RCL 3	Affichage de Z.
36	=	
37	R/S	

2. 2. 4. Programme H. P. 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	Mise en mémoire des composantes
01	INPUT A	
02	INPUT B	
03	INPUT C	
04	INPUT D	
05	INPUT E	
06	INPUT F	Calcul de X ;
07	RCL B	
08	RCL F	
09	x	

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
10	RCL E	Calcul de X ;
11	RCL C	
12	x	
13	-	
14	STO X	
15	RCL C	
16	RCL D	Calcul de Y ;
17	x	
18	RCL A	
19	RCL F	
20	x	
21	-	
22	STO Y	Calcul de Z ;
23	RCL A	
24	RCL E	
25	x	
26	RCL B	
27	RCL D	
28	x	Affichage de X, Y, Z.
29	-	
30	STO Z	
31	VIEW X	
32	VIEW Y	
33	VIEW Z	

2. 2. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
1 → L :	Initialise L à 1 ;
Lbl 1 :	Début de boucle ;
"U" ? → A [L] :	Coordonnées de \vec{U} stockées en A ;
"V" ? → D [L] :	Coordonnées de \vec{V} stockées en D ;
L + 1 → L :	Incrémente le compteur de L ;
L ≤ 3 ⇒ Goto 1 :	Test de fin de saisie ;
"X =" : A [2] × D [3]	
- D [2] × A [3] ▲	Affichage de X ;
"Y =" : A [3] × D [1]	
- D [3] × A [1] ▲	Affichage de Y ;
"Z =" : A [1] × D [2]	
- D [1] × A [2] ▲	Affichage de Z.

3. CONVERSION DES COORDONNÉES

3.1. Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques et réciproquement

3.1.1. Principe

Les coordonnées cartésiennes d'un point M en dimension trois sont (x, y, z) ; les coordonnées cylindriques de ce même point sont (ρ, θ, z) , (Fig. 9.1).

Il existe l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\rightarrow (\rho, \theta, z) \end{aligned}$$

caractérisée par :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{x}{\rho}; \quad \sin \theta = \frac{y}{\rho}$$

C'est le principe du programme interne à la machine et qui permet cette conversion.

3.1.2. Algorithme

• Changement des coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques

• Changement des coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes

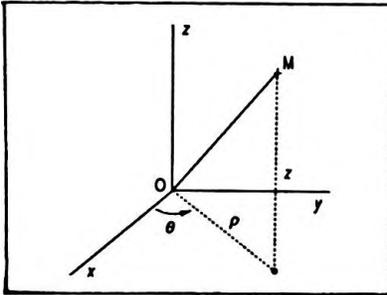
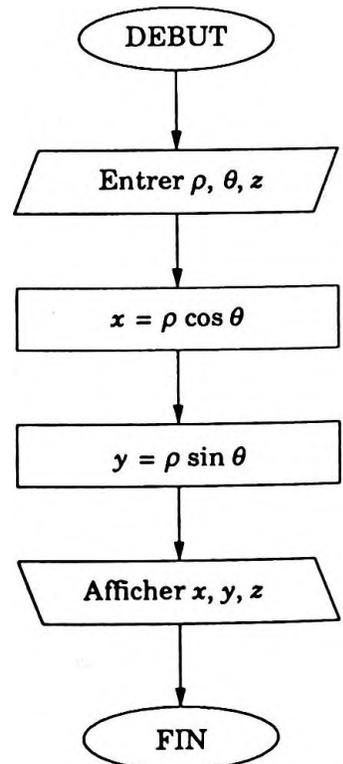
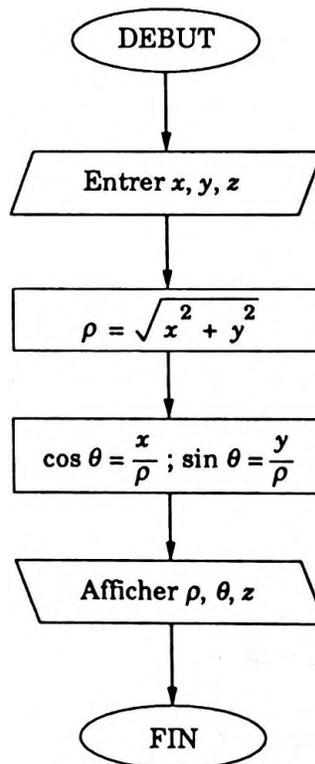


Figure 9.1



3. 1. 3. Programme T.I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES	PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	x stocké en 0 ;	00	STO 0	ρ stocké en 0 ;
01	R/S		01	R/S	
02	STO 1	y stocké en 1 ;	02	STO 1	θ stocké en 1 ;
03	R/S		03	R/S	
04	STO 2	z stocké en 2 ;	04	STO 2	z stocké en 2 ;
05	RCL 0	Transformation de (x, y) en (ρ, θ) ;	05	RCL 0	Transformation de (ρ, θ) en (x, y) ;
06	2 nd INV P \leftrightarrow R		06	2 nd P \leftrightarrow R	
07	$x \leftrightarrow t$		07	$x \leftrightarrow t$	
08	RCL 1	Affichage de ρ ;	08	RCL 1	Affichage de x ;
09	=		09	=	
10	R/S	Affichage de θ ;	10	R/S	Affichage de y ;
11	$x \leftrightarrow t$		11	$x \leftrightarrow t$	
12	R/S	Affichage de z .	12	R/S	
13	RCL 2		13	RCL 2	Affichage de z .

3. 1. 4. Programme H. P. 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES	PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP			PRGM TOP	
01	INPUT X	Saisie des coordonnées cartésiennes (x, y, z) ;	01	INPUT R	Saisie des coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) ;
02	INPUT Y		02	INPUT T	
03	INPUT Z		03	INPUT Z	
04	RCL Y	Transformation de (x, y) en (r, θ) :	04	RCL T	Transformation de (r, θ) en (x, y) ;
05	RCL X		05	RCL R	
06	$y, x \rightarrow \theta, r$	$\rho \rightarrow$ mémoire R ;	06	$\theta, r \rightarrow y, x$	$x \rightarrow$ mémoire X ;
07	STO R	2 ^{de} coordonnée ;	07	STO X	2 ^{de} coordonnée ;
08	$x \leftrightarrow y$	$\theta \rightarrow$ mémoire T ;	08	$x \leftrightarrow y$	$y \rightarrow$ mémoire Y ;
09	STO T		09	STO Y	
10	VIEW T	Affichage des coordonnées cylindriques.	10	VIEW X	Affichage des coordonnées cartésiennes.
11	VIEW R		11	VIEW Y	
12	VIEW Z		12	VIEW Z	

3. 1. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES	TOUCHE	COMMENTAIRES
"X=" ? \rightarrow X :	Saisie des coordonnées cartésiennes (x, y, z) ;	"R=" ? \rightarrow R :	Saisie des coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) ;
"Y=" ? \rightarrow Y :		"T=" ? \rightarrow T :	
"Z=" ? \rightarrow Z :		"Z=" ? \rightarrow Z :	

TOUCHE	COMMENTAIRES	TOUCHE	COMMENTAIRES
"R =" : POL (X, Y) ▲	Affichage de ρ ;	"X =" : Rec (R, T) ▲	Affichage de x ;
"T =" : J ▲	Affichage de θ ;	"Y =" : J ▲	Affichage de y ;
"Z =" : Z ▲	Affichage de z .	"Z =" : Z ▲	Affichage de z .

3. 2. Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques et réciproquement

3. 2. 1. Principe

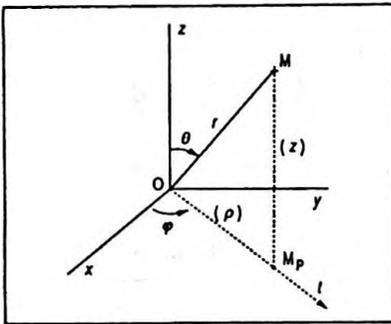


Figure 9.2

Les coordonnées cartésiennes d'un point M en dimension trois sont (x, y, z) ; les coordonnées sphériques de ce même point sont (r, θ, φ) (Fig. 9.2). On peut d'abord calculer les coordonnées polaires de M_p dans le plan xOy soit ρ et φ . Puis à partir des coordonnées cartésiennes de M dans zOt , soit ρ et z , on en déduit les coordonnées polaires de M soit r et θ .

Il s'agit en fait d'une double transformation de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires.

Le passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes est évidemment la transformation réciproque. Quant au passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées sphériques, il constitue la seconde opération qui a lieu dans le plan zOt .

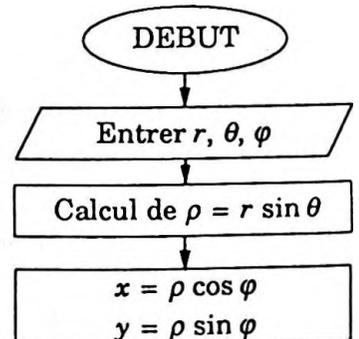
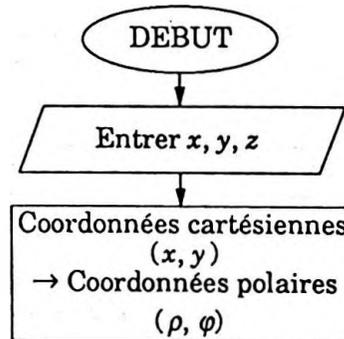
On rappelle également que :

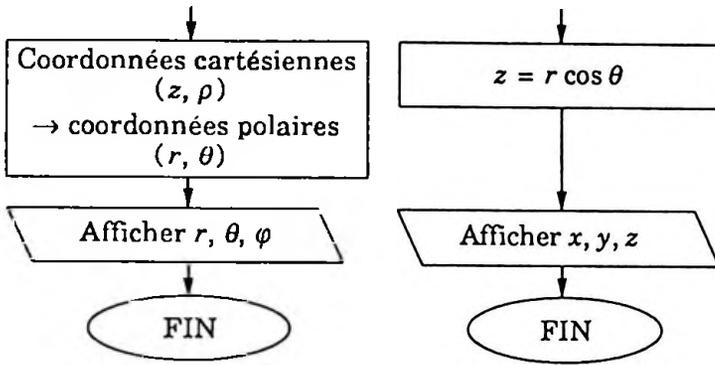
$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

3. 2. 2. Algorithme

• Changement de coordonnées cartésiennes en sphériques

• Changement de coordonnées sphériques en cartésiennes





3. 2. 3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES	PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	Saisie des coordonnées cartésiennes (x, y, z);	00	STO 0	Saisie des coordonnées sphériques (r, θ, φ)
01	R/S		01	R/S	
02	STO 1		02	STO 1	
03	R/S	Passage de (x, y) → (ρ, φ) avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$;	03	R/S	Passage de (r, θ) → (z, ρ) avec $z = r \cos \theta$;
04	STO 2		04	STO 2	
05	RCL 0		05	RCL 0	
06	2 nd INV P↔R	ρ stocké en 3;	06	2 nd P↔R	$\rho = r \sin \theta$;
07	x↔t		07	x↔t	
08	RCL 1		08	RCL 1	
09	=	Affichage de φ;	09	=	z stocké en 3;
10	STO 3		10	STO 3	
11	x↔t		11	x↔t	
12	R/S	Passage de (z, ρ) → (r, θ) avec $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$;	12	2 nd P↔R	Passage de (ρ, φ) → (x, y) avec $x = \rho \cos \phi$;
13	RCL 2		13	x↔t	
14	2 nd INV P↔R		14	RCL 2	
15	x↔t	Affichage de r;	15	=	Affichage de x;
16	RCL 3		16	R/S	
17	=		17	x↔t	
18	R/S	Affichage de θ;	18	R/S	Affichage de y;
19	x↔t		19	RCL 3	
20	R/S		20	R/S	

3. 2. 4. Programme H. P. 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES	PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	Saisie des coordonnées cartésiennes (x, y, z);		PRGM TOP	Saisie des coordonnées sphériques (r, θ, φ);
01	INPUT X		01	INPUT R	
02	INPUT Y		02	INPUT F	
03	INPUT Z		03	INPUT T	

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES	PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
04	RCL Y	Passage de $(x, y) \rightarrow (\rho, \varphi)$ avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$;	04	sin	Calcul de $\rho = r \sin \theta$;
05	RCL X		05	RCL R	
06	$y, x \rightarrow \theta, r$		06	x	
07	$x \leftrightarrow y$	Mise de $\varphi \rightarrow$ mémoire F ;	07	STO A	Passage de $(\varphi, \rho) \rightarrow$ (y, x) ;
08	STO F		08	RCL F	
09	$x \leftrightarrow y$	Rappel de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$;	09	RCL A	Mise en mémoire de x ; 2 ^{de} coordonnée ;
10	RCL Z	Passage de $(\rho, z) \rightarrow (r, \theta)$;	10	$\theta, r \rightarrow y, x$	
11	$y, x \rightarrow \theta, r$		11	STO X	
12	STO R	Mise de $r \rightarrow$ mémoire R ;	12	$x \leftrightarrow y$	Mise en mémoire de y ;
13	$x \leftrightarrow y$	Mise de $\theta \rightarrow$ mémoire T ;	13	STO Y	
14	STO T		14	RCL T	
15	VIEW R	Affichage des coordonnées sphériques	15	cos	Calcul de $z = r \cos \theta$;
16	VIEW F		16	RCL R	
17	VIEW T		17	x	
			18	STO Z	Mise en mémoire de z ;
			19	VIEW X	Affichage des coor-
			20	VIEW Y	données cartésiennes
			21	VIEW Z	(x, y, z)

3. 2. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES	TOUCHE	COMMENTAIRES
"X" ? \rightarrow X :	Saisie des coordon- nées cartésiennes (x, y, z) ;	"R" ? \rightarrow R :	Saisie des coordon- nées sphériques (r, θ, φ) ;
"Y" ? \rightarrow Y :		"T" ? \rightarrow T :	
"Z" ? \rightarrow Z :		"F" ? \rightarrow F :	
POL (X, Y) \rightarrow A :	$\sqrt{x^2 + y^2}$ en mémoi- re A et φ en mémoire F	"X" : Rec (R x sin T, F) \blacktriangleleft	Affichage de $x = r \sin \theta \cos \varphi$;
J \rightarrow F :		"Y" : J \blacktriangleleft	Affichage de $y = r \sin \theta \sin \varphi$;
"R, T, F" :	Affichage de r, θ et φ .	"Z" : R x cos T \blacktriangleleft	Affichage de $z = r \cos \theta$.
POL (Z, A) \blacktriangleleft			
J \blacktriangleleft			
F \blacktriangleleft			

4. CALCUL DE DÉRIVÉE

4.1. Principe

La méthode consiste à donner une valeur approchée de $f'(x_0)$ en prenant une petite valeur de $h > 0$, en calculant

$A = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ que l'on retiendra comme valeur approchée de la dérivée à droite, en calculant

$B = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$ que l'on retiendra comme valeur approchée de la dérivée à gauche, enfin en affichant

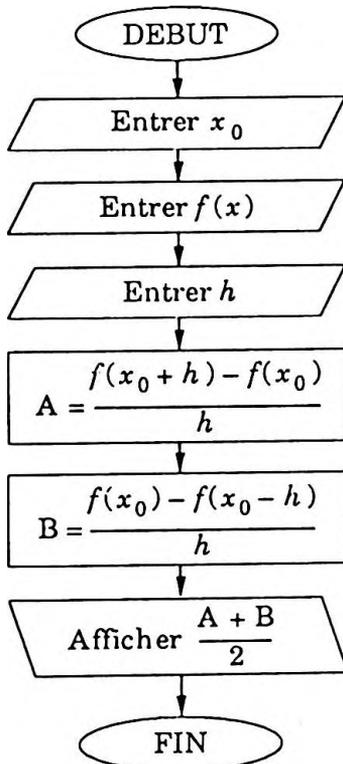
comme valeur approchée de $f'(x_0)$: $\frac{A + B}{2}$.

Ce résultat découle de la formule de définition d'une dérivée en un point :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

ceci n'est valable naturellement que pour les fonctions définies, continues et dérivables en x_0 .

4.2. Algorithme



Le calcul se fera sur la fonction :

$$f: x \rightarrow \frac{1}{x}$$

de $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

4.3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	$h \rightarrow$ mémoire 0
01	R/S	
02	STO 1	$x_0 \rightarrow$ mémoire 1
03	$1/x$	
04	STO 2	$1/x_0 \rightarrow$ mémoire 2
05	RCL 1	$\text{Calcul de : } A = \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h}$ et mise en mémoire 3 ;
06	+	
07	RCL 0	
08	=	
09	$1/x$	
10	-	
11	RCL 2	
12	=	
13	+	
14	RCL 0	
15	=	$\text{Calcul de : } B = \frac{\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0-h}}{h}$ et mise en mémoire 4 ;
16	STO 3	
17	RCL 1	
18	-	
19	RCL 0	
20	=	
21	$1/x$	
22	-	
23	RCL 2	
24	=	
25	+	$\text{Calcul de } \frac{A+B}{2};$
26	RCL 0	
27	=	
28	+/-	
29	+	
30	RCL 3	
31	=	
32	+	
33	2	
34	=	
35	R/S	Affichage de $f'(x_0)$.

4. 4. Programme H. P. 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	
01	INPUT X	$x_0 \rightarrow$ mémoire X ;
02	INPUT H	$h \rightarrow$ mémoire H ;
03	RCL X	Calcul de la dérivée à droite $A = \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h}$ et mise en mémoire A ;
04	+	
05	1/x	
06	RCL X	
07	1/x	
08	-	
09	RCL H	
10	+	
11	STO A	
12	RCL X	
13	RCL H	
14	-	
15	1/x	
16	RCL X	
17	1/x	
18	-	
19	RCL H	
20	+	Approximation de la dérivée par la demi-somme $\frac{A+B}{2}$;
21	+/-	
22	RCL A	
23	+	
24	2	
25	+	Affichage de $f'(x_0)$.
26	STO D	
27	VIEW D	

4. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
" x_0 =" ? \rightarrow X :	x_0 stocké en X ;
" h =" ? \rightarrow H :	h stocké en H ;
$(X+H)^{-1} - X^{-1}$	Calcul de A stocké en A ;
+ H \rightarrow A :	
$X^{-1} - (X-H)^{-1}$	Calcul de B stocké en B ;
+ H \rightarrow B :	
(A + B) \div 2 \blacktriangleleft	Calcul et affichage de $f'(x_0)$.

5. ÉTUDE D'UN AJUSTEMENT

5. 1. Principe

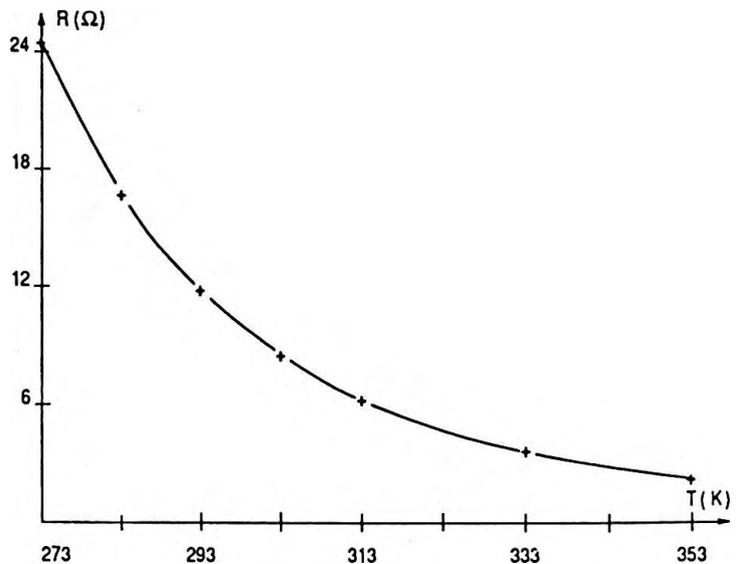
Une thermistance CTN est un composant électronique pour lequel la résistance diminue lorsque la température augmente. L'expression de cette résistance est :

$$R = R_f e^{B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_f} \right)}$$

où R_f est la résistance de référence à la température T_f ; B est un coefficient caractéristique du composant. Désirant connaître les différents paramètres d'une thermistance et sa loi de variation on en mesure la valeur de la résistance pour plusieurs températures et l'on trouve :

T (K)	273	283	293	303	313	333	353
R (Ω)	24,2	16,7	11,8	8,5	6,3	3,6	2,2

ce qui conduit à la représentation graphique suivante :



On veut déterminer R_f et B par la méthode d'ajustement linéaire.

● Calcul préliminaire

L'expression de la résistance peut se mettre sous la forme :

$$R = R_f e^{-\frac{B}{T_f}} \cdot e^{\frac{B}{T}}$$

d'où :

$$R = A e^{\frac{B}{T}} \quad \text{en posant } A = R_f e^{-\frac{B}{T_f}}$$

alors :

$$\ln R = \ln A + \frac{B}{T}$$

et si l'on note $y = \ln R$ et $x = \frac{1}{T}$ l'équation se ramène à :

$$y = Bx + \ln A$$

D'après la méthode des moindres carrés on sait que :

$$a = B = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

et :

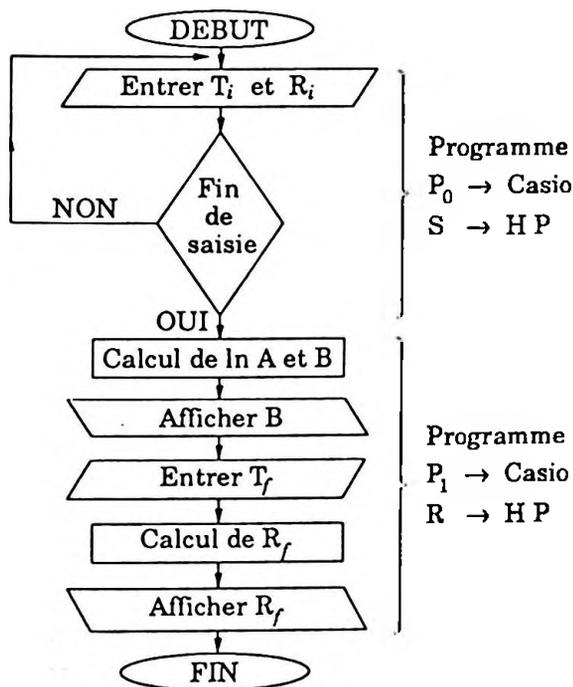
$$b = \ln A = \bar{y} - a \bar{x}$$

on en déduit :

$$\ln R_f = \ln A + \frac{B}{T_f} \quad \text{puis } R_f.$$

Ainsi à partir des points expérimentaux, on détermine l'équation de la droite d'ajustement qui nous permet d'obtenir les caractéristiques B et R_f de la thermistance.

5. 2. Algorithme



5. 3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	Nombre de boucles → mémoire 0 ;
01	2 VAR	Mode statistique à deux caractères ;
02	Lbl 1	Début de boucle ;
03	R/S	Saisie des R_i ;
04	ln	Calcul de $\ln R_i$
05	$x \leftrightarrow t$	Seconde donnée ;
06	R/S	Saisie des T_i ;
07	$1/x$	Calcul de $1/T_i$;
08	Σ_+	Exécution des fonctions statistiques ;
09	D s z	Test de fin de saisie ;
10	GTO 1	
11	2 nd B/A	Calcul et affichage de $\ln A$;
12	R/S	
13	STO 1	$\ln A$ stocké en mémoire 1 ;
14	$x \leftrightarrow t$	
15	STO 2	B stocké en mémoire 2 ;
16	R/S	Affichage de B ;
17	STO 0	Saisie de T_f ;
18	$1/x$	
19	x	
20	RCL 2	Calcul de $\ln R_f = \frac{B}{T_f} + \ln A$;
21	+	
22	RCL 1	
23	=	
24	INV ln x	Calcul et affichage de R_f
25	R/S	

5. 4. Programme H. P. 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
<i>Tapier XEQS pour la saisie, puis XEQR pour le résultat</i>		
	PRGM TOP	
S 01	LBL S	Début du programme de saisie ;
S 02	CL Σ	
T 01	LBL T	Début de boucle
T 02	INPUT X	Saisie des T_i ;
T 03	$1/x$	
T 04	STO X	Mise de $1/T_i$ en mémoire X ;
T 05	INPUT Y	Saisie des R_i ;
T 06	ln	
T 07	STO Y	Mise de $\ln R_i$ en mémoire Y ;

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
T 08	RCL X	
T 09	Σ_+	
T 10	GTO T	Fin de boucle ;
R 01	LBL R	
R 02	m (fn.Stat.)	Calcul de la pente de la droite ;
R 03	R/S	Affichage de B ;
R 04	STO B	Stockage en mémoire B ;
R 05	b (fn.Stat.)	Calcul de $\ln A$ stocké en mémoire
R 06	STO A	A ;
R 07	INPUT T	Saisie de T_f ;
R 08	$1/x$	
R 09	RCL B	
R 10	x	
R 11	RCL A	Calcul de R_f ;
R 12	+	
R 13	e^x	
R 14	STO R	
R 15	VIEW R	Affichage de R_f .

5. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
PROG \emptyset	(Mode de calcul LR2)
SCL : Lbl 1 :	Effacement de mémoire, début de boucle ;
"T=" ? \rightarrow X : $X^{-1} \rightarrow$ X :	$1/T$: mis en mémoire X ;
"R=" ? \rightarrow Y : $\ln Y \rightarrow$ Y :	$\ln R_f$ mis en mémoire Y ;
X, Y D/T	Prise en compte des données ;
Goto 1 :	Fin de boucle ;
PROG 1	
" T_f =" ? \rightarrow T :	T_f stocké en mémoire T ;
B \blacktriangle	Affichage de B ; (*)
$A + B + T \rightarrow$ R :	$\ln A + \frac{B}{T_f}$ stocké en mémoire R ;
$e^R \rightarrow$ R \blacktriangle	Calcul et affichage de R_f .

L'exécution du programme s'effectue en tapant PROG \emptyset pour la saisie des données puis PROG 1 pour l'obtention des résultats.

(*) A et B : en calcul statistique.

6. SOMME DE DEUX VECTEURS : VITESSE ET CAP D'UN BATEAU

6. 1. Principe

Un bateau se déplace avec une vitesse propre \vec{v}_1 dans une direction faisant un angle θ_1 avec la direction Sud-Nord. Le courant possède une vitesse \vec{v}_2 par rapport au sol dans une direction faisant un angle θ_2 avec la référence précédemment choisie. On désire calculer la vitesse effective du bateau par rapport au sol ainsi que son cap.

D'après la relation des vitesses on peut écrire :

$$\vec{v}_{b/s} = \vec{v}_{b/e} + \vec{v}_{e/s}$$

- $\vec{v}_{b/s}$: vitesse du bateau par rapport au sol ;
- $\vec{v}_{b/e} = \vec{v}_1$: vitesse propre du bateau ;
- $\vec{v}_{e/s} = \vec{v}_2$: vitesse du courant par rapport au sol ;

soit plus simplement :

$$\vec{v}_{b/e} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (\text{Fig. 9.3})$$

L'opération consiste à exécuter une somme de deux vecteurs définis par leur norme et leur angle par rapport à la direction Sud-Nord (Fig. 9.4).

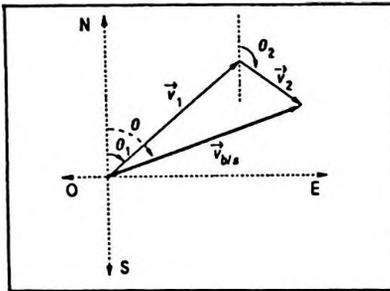


Figure 9.3

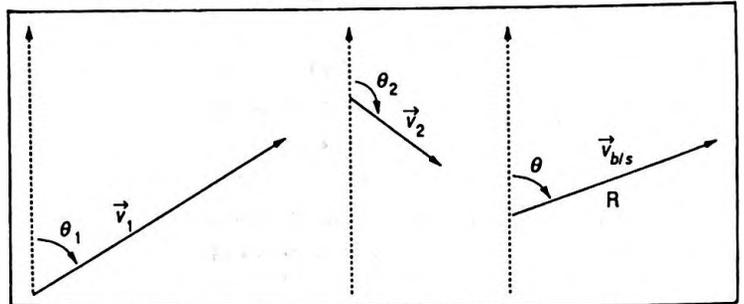


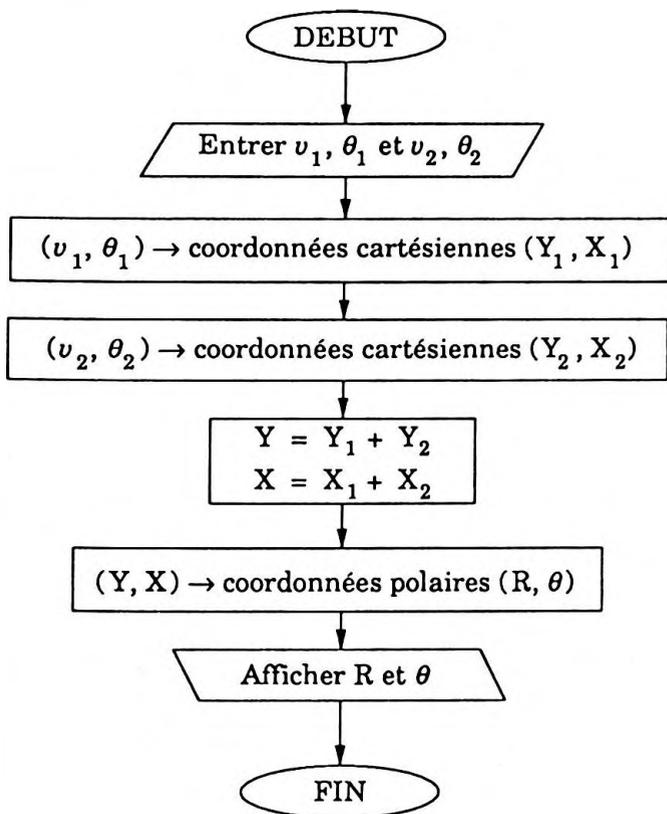
Figure 9.4

On transforme les coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes mais les angles étant comptés à partir de la direction Sud-Nord verticale ces coordonnées cartésiennes sont permutées ainsi :

- à (R_1, θ_1) correspond (Y_1, X_1) ;
- à (R_2, θ_2) correspond (Y_2, X_2) ;

on fait ensuite la somme des composantes respectives soit $(Y_1 + Y_2, X_1 + X_2)$ et l'on repasse en coordonnées polaires ce qui donne (R, θ) , tel que $R = \|\vec{v}_{b/s}\|$ et θ soit le cap cherché.

6. 2. Algorithme



6. 3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	$v_1 (R_1) \rightarrow$ mémoire 0 ;
01	R/S	
02	STO 1	$\theta_1 \rightarrow$ mémoire 1 ;
03	P \rightarrow R	
04	RCL 0	} $(R_1, \theta_1) \rightarrow (Y_1, X_1) ;$
05	$x \leftrightarrow t$	
06	RCL 1	
07	=	
08	STO 2	$Y_1 \rightarrow$ mémoire 2 ;
09	$x \leftrightarrow t$	
10	STO 3	$X_1 \rightarrow$ mémoire 3 ;
11	R/S	
12	STO 0	$v_2 (R_2) \rightarrow$ mémoire 0 ;
13	R/S	
14	STO 1	$\theta_2 \rightarrow$ mémoire 1 ;

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
15	2 nd P → R	$(R_2, \theta_2) \rightarrow (Y_2, X_2);$
16	RCL 0	
17	$x \leftrightarrow t$	
18	RCL 1	
19	=	$Y = Y_1 + Y_2 \rightarrow$ mémoire 2 ;
20	STO + 2	
21	$x \leftrightarrow t$	$X = X_1 + X_2 \rightarrow$ mémoire 3 ;
22	ST + 3	
23	R → P	$(Y, X) \rightarrow (R, \theta);$
24	RCL 2	
25	$x \leftrightarrow t$	
26	RCL 3	Affichage de R ;
27	=	
28	R/S	Affichage de θ .
29	$x \leftrightarrow t$	
30	R/S	

6. 4. Programme H. P. 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	
01	INPUT R	Saisie de $v_1 (R_1)$ et θ_1 ;
02	INPUT T	
03	RCL R	Transformation des coordonnées polaires (R_1, θ_1) en coordonnées cartésiennes (Y_1, X_1) ;
04	$\theta, r \rightarrow y, x$	
05	STO B	Y_1 stocké en B ;
06	$x \leftrightarrow y$	X_1 stocké en A ;
07	STO A	
08	INPUT R	Saisie de $v_2 (R_2)$ et θ_2 ;
09	INPUT T	
10	RCL R	Transformation des coordonnées polaires (R_2, θ_2) en coordonnées cartésiennes (Y_2, X_2) ;
11	$\theta, r \rightarrow y, x$	
12	STO + B	$Y = Y_1 + Y_2$ stocké en B ;
13	$x \leftrightarrow y$	$X = X_1 + X_2$ stocké en A ;
14	STO + A	
15	RCL A	Transformation des coordonnées cartésiennes (Y, X) en coordonnées polaires (R, θ) ;
16	RCL B	
17	$y, x \rightarrow \theta, r$	

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
18	STO R	Module de \vec{v} stocké en R ;
19	$x \leftrightarrow y$	
20	STO T	θ stocké en T ;
21	VIEW T	Affichage de θ ;
22	VIEW R	Affichage de $R = \ \vec{v}\ $.

6. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
"R ₁ =" ? → R :	Saisie de $v_1 (R_1)$ et θ_1 , mise en mémoire ;
"T ₁ =" ? → T :	
Rec (R, T) → A :	
J → B :	
"R ₂ =" ? → R :	Saisie de $v_2 (R_2)$ et θ_2 , mise en mémoire ;
"T ₂ =" ? → T :	
Rec (R, T) + A → X :	$X_1 + X_2$ mise en mémoire X ;
J + B → Y :	$Y_1 + Y_2$ mise en mémoire Y ;
Pol (X, Y) ▲	Passage de (X, Y) à (R, θ), affichage de R ;
J ▲	Affichage de θ .

7. SOMME DE FONCTIONS SINUSOIDALES. ADDITION DE TENSIONS ALTERNATIVES

7. 1. Principe

On désire par exemple calculer la ddp instantanée qui existe entre les bornes de la portion de circuit AB (Fig. 9.5).

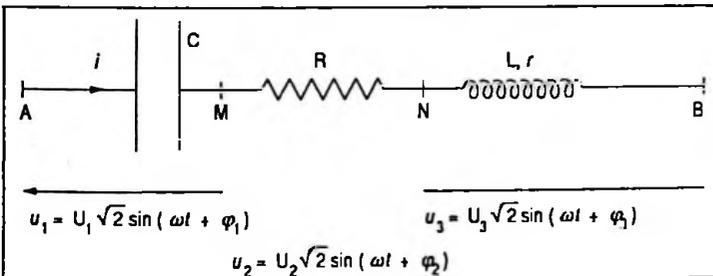


Figure 9.5

Le montage étant en série on sait que :

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

soit :

$$u = U_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_1) + U_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_2) \\ + U_3 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_3)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$u = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

Connaissant l'intensité $i = I \sqrt{2} \sin \omega t$ du courant qui parcourt le circuit et la nature des éléments composant ce circuit, on peut, dans un premier temps, passer par des sous-programmes simples donnant :

$$U_1, \varphi_1 \quad U_2, \varphi_2 \quad U_3, \varphi_3$$

ici :

$$\bullet U_1 = \frac{I}{C\omega}, \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2};$$

$$\bullet U_2 = RI, \quad \varphi_2 = 0;$$

$$\bullet U_3 = \sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}, \quad \varphi_3 \text{ est tel que } \tan \varphi_3 = \frac{L\omega}{r}.$$

Le principe du calcul consiste ensuite à faire consécutivement deux fois la somme de deux quantités sinusoidales.

D'abord $U_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + U_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ conduit à $U' \sin(\omega t + \varphi')$.

On pose alors :

$$U' = U_1 \quad U_3 = U_2$$

$$\varphi' = \varphi_1 \quad \varphi_3 = \varphi_2$$

et l'on applique à nouveau la méthode précédente.

Pour additionner deux fonctions sinusoidales on calcule :

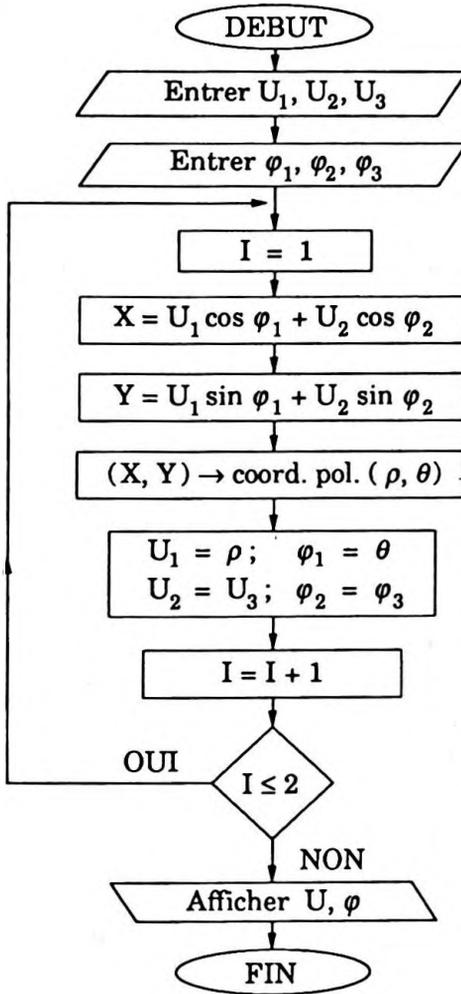
$$X = U_1 \cos \varphi_1 + U_2 \cos \varphi_2$$

et :

$$Y = U_1 \sin \varphi_1 + U_2 \sin \varphi_2$$

puis l'on convertit les coordonnées cartésiennes (X, Y) en coordonnées polaires (ρ, θ); ρ et θ représenteront respectivement l'amplitude et la phase résultantes.

7.2. Algorithme



7.3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	2	Nombre de passages en mémoire 0 ;
01	STO 0	
02	R/S	
03	STO 1	$U_1 \rightarrow$ mémoire 1 ;
04	R/S	
05	STO 2	$U_2 \rightarrow$ mémoire 2 ;
06	R/S	
07	STO 3	$U_3 \rightarrow$ mémoire 3 ;
08	R/S	
09	STO 4	$\varphi_1 \rightarrow$ mémoire 4 ;
10	R/S	

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
11	STO 5	$\varphi_2 \rightarrow$ mémoire 5 ;
12	R/S	
13	STO 6	$\varphi_3 \rightarrow$ mémoire 6 ;
14	Lbl 0	Début de boucle ;
15	RCL 4	
16	cos	
17	x	
18	RCL 1	
19	+	Calcul de $X = U_1 \cos \varphi_1 + U_2 \cos \varphi_2$;
20	RCL 5	
21	cos	
22	x	
23	RCL 2	
24	=	
25	STO 7	X \rightarrow mémoire 7 ;
26	RCL 4	
27	sin	
28	x	
29	RCL 1	
30	+	Calcul de $Y = U_1 \sin \varphi_1 + U_2 \sin \varphi_2$;
31	RCL 5	
32	sin	
33	x	
34	RCL 2	
35	=	
36	STO 1	Y \rightarrow mémoire 1 ;
37	R \rightarrow P	Passage des coordonnées (X, Y) \rightarrow (ρ , θ) ;
38	RCL 7	
39	x \leftrightarrow t	
40	RCL 1	
41	=	
42	STO 1	$\rho \rightarrow$ mémoire 1 ;
43	x \leftrightarrow t	
44	STO 4	$\theta \rightarrow$ mémoire 4 ;
45	RCL 3	U ₃ \rightarrow mémoire 2 ;
46	STO 2	
47	RCL 6	U ₃ \rightarrow mémoire 2 ;
48	STO 5	
49	DS Z	$\varphi_3 \rightarrow$ mémoire 5 ;
49	DS Z	Décrémentation de la mémoire 0 ;
50	GTO 0	Fin de boucle ;
51	RCL 1	
52	R/S	Affichage de U ;
53	RCL 4	
54	R/S	Affichage de φ .

7. 4. Programme H. P. 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	
01	INPUT A	Saisie de $U_1, U_2, U_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; $U_1 \rightarrow$ mémoire A, $U_2 \rightarrow$ mémoire B, $U_3 \rightarrow$ mémoire C, $\varphi_1 \rightarrow$ mémoire D, $\varphi_2 \rightarrow$ mémoire E, $\varphi_3 \rightarrow$ mémoire F ;
02	INPUT B	
03	INPUT C	
04	INPUT D	
05	INPUT E	
06	INPUT F	
07	1. 002	Nombre de boucles : 2, pas : 1, stocké en I ;
08	STO I	
B01	Lbℓ B	Début de boucle ;
B02	RCL D	
B03	cos	
B04	RCL A	
B05	x	
B06	RCL E	Calcul de $X = U_1 \cos \varphi_1 + U_2 \cos \varphi_2$;
B07	cos	
B08	RCL B	
B09	x	
B10	+	
B11	STO X	X stocké en X ;
B12	RCL D	
B13	sin	
B14	RCL A	
B15	x	Calcul de $Y = U_1 \sin \varphi_1 + U_2 \sin \varphi_2$;
B16	RCL E	
B17	sin	
B18	RCL B	
B19	x	
B20	+	
B21	STO Y	Y stocké en Y ;
B22	RCL Y	
B23	RCL X	
B24	(Y, X) \rightarrow (θ, r)	Transformation des coordonnées cartésiennes (X, Y) en coordonnées polaires (ρ, θ) ;
B25	STO A	
B26	$x \leftrightarrow y$	
B27	STO D	
B28	RCL C	$\rho \rightarrow$ mémoire A, $\theta \rightarrow$ mémoire D
B29	STO B	
B30	RCL F	Préparation du calcul suivant ;
B31	STO E	
B32	ISG I	Décrémentation ;
B33	GTO B	
B34	VIEW A	Visualisation de U ;
B35	VIEW D	Visualisation de φ .

7. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
"U ₁ =" ? → A : "U ₂ =" ? → B : "U ₃ =" ? → C :	Tensions stockées en A, B, C ;
"F ₁ =" ? → D : "F ₂ =" ? → E : "F ₃ =" ? → F :	Phases stockées en D, E, F ;
1 → K :	Initialisation du compteur de boucles ;
Lbl 1 :	Début de boucle ;
A x cos D + B x cos E → X :	U ₁ cos φ ₁ + U ₂ cos φ ₂ → mémoire X ;
A x sin D + B x sin E → Y :	U ₁ sin φ ₁ + U ₂ sin φ ₂ → mémoire Y ;
Pol (X, Y) → A : J → D :	Coordonnées cartésiennes → coordonnées polaires ;
C → B : F → E :	U ₂ → mémoire B, φ ₃ → mémoire E ;
K + 1 → K :	Incrémentation du compteur ;
K ≤ 2 ⇒ Goto 1 :	Test de fin de programme ;
"R:" : A ▲	Affichage de U ;
"T:" : D ▲	Affichage de φ.

8. LES NOMBRES COMPLEXES ET APPLICATION AU CALCUL D'UNE IMPÉDANCE ET D'UNE ADMITTANCE

8.1. Principe

On considère un circuit composé d'un ensemble de conducteurs ohmiques de résistance totale R_t , de deux bobines d'inductance respective L_1 et L_2 , de deux condensateurs de capacité respective C_1 et C_2 . Tous ces dipôles sont montés en série et alimentés par une source de tension sinusoïdale de fréquence N , donc de pulsation $\omega = 2\pi N$.

On peut élaborer le programme permettant d'obtenir respectivement :

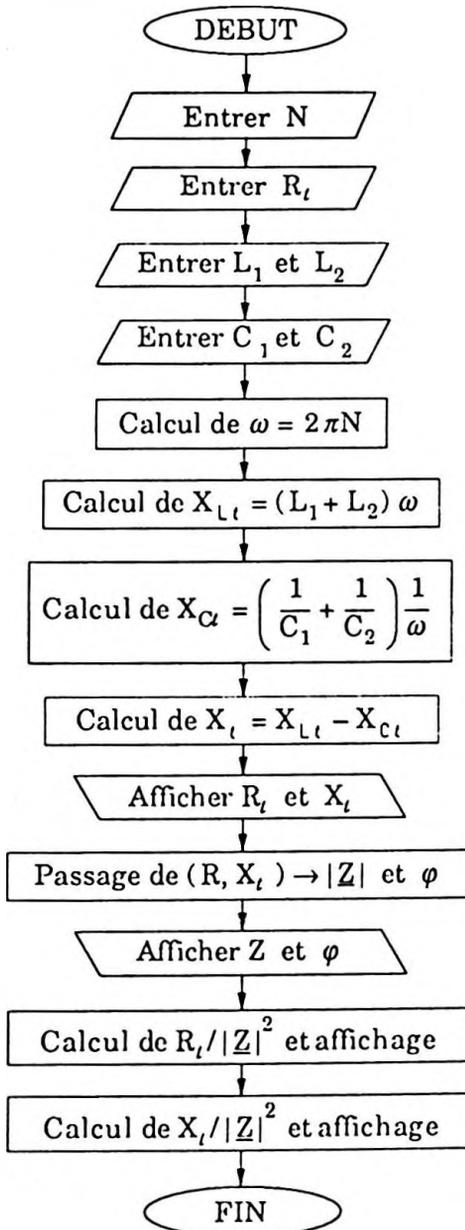
- l'impédance globale $X_{L_t} = (L_1 + L_2) \omega$ des bobines (hors effet résistif) ;
- l'impédance globale $X_{C_t} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{\omega}$ des condensateurs ;
- la réactance totale $X_t = X_{L_t} - X_{C_t}$;
- l'impédance complexe $Z = R_t + jX_t$;
- la valeur de l'impédance $Z_0 = |Z|$;
- le déphasage $\varphi = \text{Arg } Z$ de l'intensité par rapport à la tension ;
- l'admittance du circuit $Y = \frac{R_t}{R_t^2 + X_t^2} - j \frac{X_t}{R_t^2 + X_t^2}$ per-

mettant ainsi le calcul de l'impédance lors du couplage de cette branche en dérivation avec une ou plusieurs autres similaires.

Remarque

Le calcul de R_t n'a pas été développé dans le programme car immédiat, $R_t = \Sigma R_i$. D'autre part le programme se limite à deux inductances et deux capacités mais peut se généraliser à un nombre quelconque de ces paramètres.

8.2. Algorithme



8.3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	$N \rightarrow$ mémoire 0 ;
01	2	} Calcul de $\omega = 2\pi N$;
02	x	
03	PI	
04	=	
05	STO x 0	$\omega \rightarrow$ mémoire 0 ;
06	R/S	
07	STO 1	$R_t \rightarrow$ mémoire 1 ;
08	R/S	
09	STO 2	$L_1 \rightarrow$ mémoire 2 ;
10	R/S	
11	STO 3	$L_2 \rightarrow$ mémoire 3 ;
12	R/S	
13	STO 4	$C_1 \rightarrow$ mémoire 4 ;
14	R/S	
15	STO 5	$C_2 \rightarrow$ mémoire 5 ;
16	RCL 1	Affichage de R_t ;
17	R/S	
18	RCL 3	} $L_1 + L_2 \rightarrow$ mémoire 2 ;
19	STO + 2	
20	RCL 0	} $(L_1 + L_2) \omega \rightarrow$ mémoire 2 ;
21	ST x 2	
22	RCL 4	
23	1/x	
24	+	} $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow$ mémoire 4 ;
25	RCL 5	
26	1/x	
27	=	
28	STO 4	
29	RCL 4	
30	x	
31	RCL 0	} $(L_1 + L_2) \omega - \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{\omega}$
32	1/x	
33	=	\rightarrow mémoire 2 ;
34	STO - 2	
35	RCL 2	
36	R/S	Affichage de X_t ;
37	2 nd INV P \leftrightarrow R	
38	RCL 1	} Passage des coordonnées cartésiennes (R_t, X_t) aux coordonnées polaires (Z, φ) ;
39	x \leftrightarrow t	
40	RCL 2	
41	=	
42	STO 3	$ Z = Z \rightarrow$ mémoire 3 ;

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
43	R/S	Affichage de Z ;
44	$x \leftrightarrow t$	Affichage de φ ;
45	R/S	Calcul et affichage de $\frac{R_t}{Z^2}$;
46	RCL 3	
47	$2^{\text{nd}} x \nearrow 2$	
48	+	
49	RCL 1	
50	=	
51	1/x	
52	R/S	
53	RCL 3	
54	$2^{\text{nd}} x \nearrow 2$	
55	+	
56	RCL 2	
57	=	
58	1/x	
59	+/-	
60	R/S	

8. 4. Programme H. P. 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	
01	INPUT N	Saisie de N → mémoire N ;
02	2	Calcul de $\omega = 2\pi N$ stocké en mémoire O ;
03	π	
04	x	
05	x	
06	STO O	
07	INPUT R	
08	INPUT L	Saisie de L_1 → mémoire L ;
09	INPUT M	Saisie de L_2 → mémoire M ;
10	INPUT C	Saisie de C_1 → mémoire C ;
11	INPUT D	Saisie de C_2 → mémoire D ;
12	RCL M	$(L_1 + L_2)\omega$ → mémoire L ;
13	STO + L	
14	RCL O	
15	STO x L	

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
16	RCL C	$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow$ mémoire C ;
17	$1/x$	
18	STO C	
19	RCL D	
20	$1/x$	
21	STO + C	
22	RCL O	$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{\omega} \rightarrow$ mémoire C ;
23	$1/x$	
24	STO x C	Affichage de R_t ;
25	VIEW R	
26	RCL L	Calcul de X_t ;
27	RCL C	
28	-	Affichage de X_t ;
29	STO S	
30	VIEW S	Coordonnées cartésiennes (R_t , X_t) en coordonnées polaires ($ Z $, $\text{Arg } Z$) ;
31	RCL R	
32	$y, x \rightarrow \theta, r$	$Z \rightarrow$ mémoire N ;
33	STO N	
34	$x \leftrightarrow y$	$\varphi \rightarrow$ mémoire T ;
35	STO T	
36	VIEW N	Affichage de Z ; Z : impédance.
37	VIEW T	Affichage de φ ;
38	RCL R	Calcul de $\frac{R_t}{Z^2}$
39	RCL N	
40	x^2	et \rightarrow mémoire R ;
41	+	
42	STO R	Affichage de $\frac{R_t}{Z^2}$;
43	VIEW R	
44	RCL S	Calcul de $-\frac{X_t}{Z^2}$;
45	RCL N	
46	x^2	
47	+	
48	+/-	et \rightarrow mémoire S ;
49	STO S	
50	VIEW S	Affichage de $-\frac{X_t}{Z^2}$.

8. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
"N=" : ? → F : "R=" : ? → R "L ₁ " : ? → L [1] : "L ₂ " : ? → L [2] : "C ₁ " : ? → C [1] : "C ₂ " : ? → C [2] : 2 x π x F → O : R _t ▲ (L [1] + L [2]) x O - ((C [1] ⁻¹ + C [2] ⁻¹) x O ⁻¹) → S ▲ POL (R , S) → M ▲ J ▲ R + M ² ▲ (-) S + M ² ▲	Saisie de N et R _t en mémoire F et R ; Saisie de L ₁ et L ₂ en mémoire L [1] et L [2] ; Saisie de C ₁ et C ₂ en mémoire C [1] et C [2] ; Calcul de ω = 2πN en mémoire O ; Affichage de R _t ; Calcul de X _t → mémoire S et affichage de X _t ; Passage des coordonnées cartésiennes (R _t , X _t) aux coordonnées polaires (Z, φ) ; Z → mémoire M et affichage, φ → mémoire J et affichage ; Calcul et affichage de $\frac{R}{Z^2}$; Calcul et affichage de $-\frac{X_t}{Z^2}$.

9. CALCUL D'UNE INTÉGRALE DE LA FORME $I = \int_a^b f(x) dx$

9. 1. Principe

D'une façon générale on peut approcher I par :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f \left[a + k \frac{(b-a)}{n} \right] \frac{b-a}{n} \text{ ou}$$

$$S = \sum_{k=1}^n f \left[a + k \frac{(b-a)}{n} \right] \frac{b-a}{n}$$

l'intervalle [a, b] ayant été divisé en n segments de longueur $\frac{b-a}{n}$; $f \left[a + k \frac{(b-a)}{n} \right] \frac{b-a}{n}$ représente l'aire d'un rectangle (Fig. 9.6), valeur approchée de l'aire délimitée par la courbe, l'axe Ox et les abscisses du segment $[x_k, x_{k+1}]$ avec $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

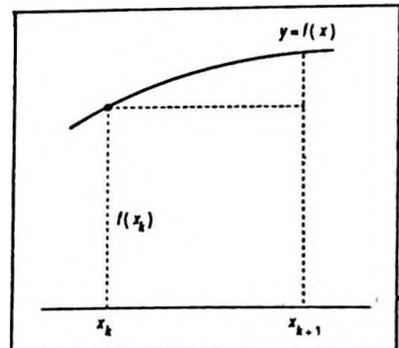


Figure 9.6

Remarques

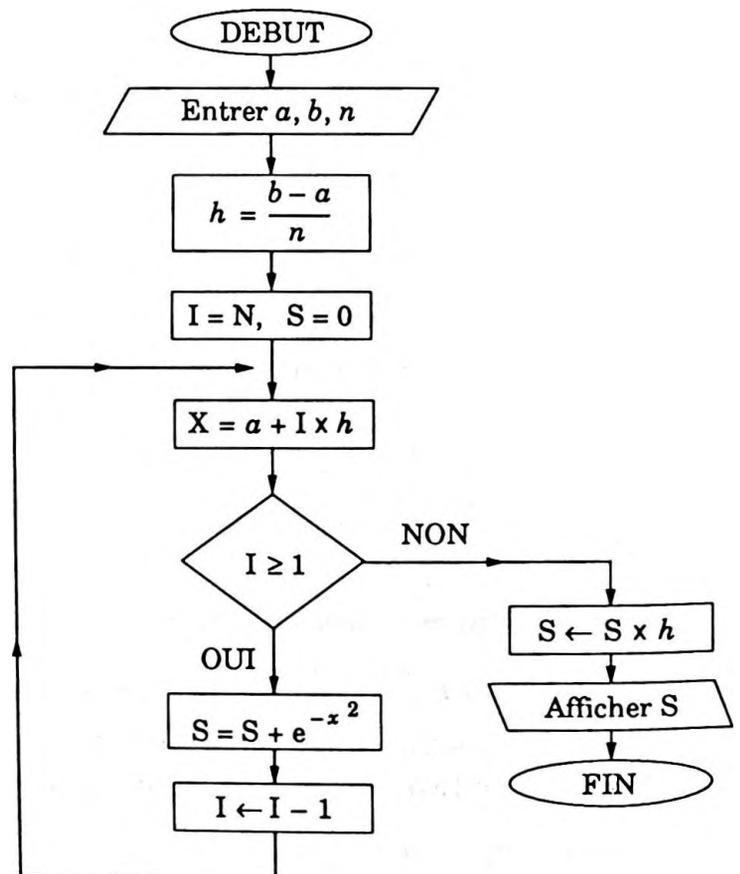
• Si la fonction f est croissante sur $[a, b]$, en posant $x_0 = a$, $\left[f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right] \frac{b-a}{n}$ représente une valeur approchée A par valeurs inférieures de I et $\left[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \right] \frac{b-a}{n}$ représente une valeur approchée B par valeurs supérieures de I. Prendre $\frac{A+B}{2}$ comme valeur approchée de I revient à introduire la "méthode des trapèzes".

Pour f décroissante sur $[a, b]$ on peut faire des considérations analogues.

• Le résultat de ces méthodes est d'autant plus précis que n est grand.

A titre d'exemple on procède au calcul de $I = \int_a^b e^{-x^2} dx$.

9. 2. Algorithme



9. 3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	Nombre de pas → mémoire 0 ;
01	R/S	
02	STO 1	Valeur de a → mémoire 1 ;
03	R/S	
04	STO 2	Valeur de b → mémoire 2 ;
05	-	
06	RCL 1	
07	=	Calcul du pas stocké en mémoire 3 ;
08	+	
09	RCL 0	
10	=	
11	STO 3	
12	0	Mémoire 4 initialisée à 0 ;
13	STO 4	
14	2 nd Lbl 1	Début de boucle ;
15	RCL 1	
16	+	
17	RCL 0	
18	x	
19	RCL 3	Calcul de $e^{-\left[a + \frac{k(b-a)}{n}\right]^2}$;
20	=	
21	x^2	
22	±	
23	INV ln x	
24	=	
25	STO + 4	Somme de ces termes ;
26	RCL 4	
27	R/S	
28	2 nd DSZ	
29	GTO 1	Fin de boucle ;
30	RCL 3	
31	STO x 4	Multiplication de la somme par le pas ;
32	RCL 4	
33	=	
34	R/S	Valeur de l'intégrale.

9. 4. Programme H.P. 32 S

Le calcul d'une intégrale est pré-programmé sur H.P.

TOUCHE \square SOLVE \int FN .

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
		(Pour exécuter taper XEQ C)
	PRGM TOP	
F01	Lbl F	
F02	RCL X	
F03	x^2	
F04	+ / -	Saisie de la fonction $x \xrightarrow{f} e^{-x^2}$;
F05	e^x	
F06	RTN	
C01	Lbl C	
C02	INPUT A	Saisie des bornes ;
C03	INPUT B	
C04	RCL A	
C05	RCL B	
C06	FN = F	Calcul de $\int_a^b f(x) dx$;
C07	\int FN dX	
C08	STO P	
C09	VIEW P	Affichage du résultat ;

9. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
"A=" ? → A : "B=" ? → B :	Saisie des bornes ;
"N=" ? → N :	Saisie du nombre d'intervalles ;
(B - A) + N → H :	Pas mis en mémoire H ;
N → I : 0 → S :	Initialisation de I et S ;
Lbl 1	Début de boucle ;
A + I x H → X :	Calcul d'une abscisse de la subdivision considérée ;
$S + e^{-x^2} \rightarrow S :$	Calcul de la somme partielle ;
I - 1 → I :	Décrémentation de la subdivision ;
I ≥ 1 ⇒ Goto 1 :	Test de fin de programme ;
S x H → S ◀	Calcul et affichage de l'intégrale.

10. CALCUL DE L'AIRES D'UNE ELLIPSE (E)

$$\text{D'ÉQUATION } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

10. 1. Principe

L'aire est donnée par la relation :

$$S = 2 \int_{-a}^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

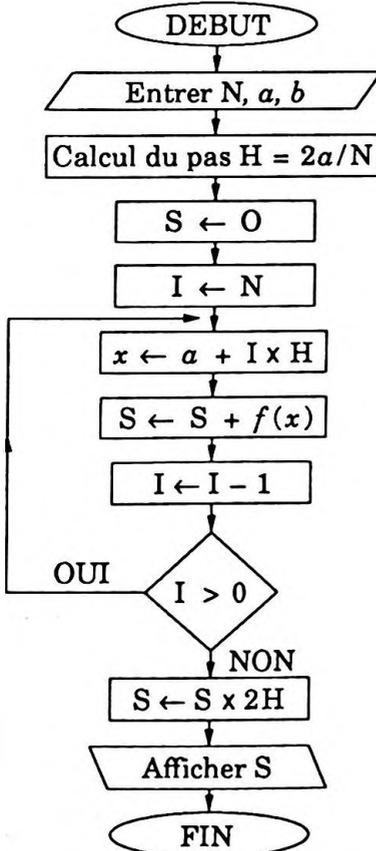
elle a pour valeur approchée :

$$S = 2 \frac{2a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(-a + kh)$$

avec $h = \frac{2a}{n}$ et $f(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Selon le principe de calcul d'une intégrale le résultat sera d'autant plus précis que n sera important ($n \in \mathbb{N}$).

10. 2. Algorithme



10. 3. Programme T.I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	Nombre de pas → mémoire 0 ;
01	R/S	
02	STO 1	a → mémoire 1 ;
03	R/S	
04	STO 2	b → mémoire 2 ;
05	RCL 1	Calcul du pas $H = \frac{2a}{N}$;
06	x	
07	2	
08	+	
09	RCL 0	
10	=	
11	STO 3	H → mémoire 3 ;
12	0	Initialisation de S à 0 ;
13	STO 4	Mise en mémoire 4 ;
14	2 nd Lbl 0	Début de boucle ;
15	RCL 1	Calcul de $x_0 + kH$;
16	+/-	
17	+	
18	RCL 0	
19	x	
20	RCL 3	
21	=	
22	2 nd x ²	Calcul de $f(x_0 + kH)$ avec $f(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} ;$
23	/	
24	RCL 1	
25	2 nd x ²	
26	-	
27	1	
28	=	
29	+/-	
30	\sqrt{x}	
31	x	
32	RCL 2	
33	=	
34	STO + 4	Somme partielle ;
35	2 nd DSZ	Test de fin de programme ;
36	GTO 0	
37	RCL 3	Calcul de l'intégrale ;
38	STO x 4	
39	RCL 4	
40	x	Calcul de l'aire ;
41	2	
42	=	
43	R/S	Affichage du résultat.

10. 4. Programme H. P 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	(Pour exécuter taper XEQ C)
F01	Lbl F	Calcul de $b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$;
F02	RCL X	
F03	x^2	
F04	RCL A	
F05	x^2	
F06	+	
F07	1	
F08	-	
F09	+/-	
F10	SQRT	
F11	RCL B	
F12	x	
F13	RTN	
C01	Lbl C	Saisie de a et b ;
C02	INPUT A	
C03	INPUT B	Mise en place des bornes $-a$ et a ;
C04	RCL A	
C05	+/-	
C06	RCL A	
C07	FN = F	
C08	\int FN dX	Calcul de l'intégrale ;
C09	2	Calcul de l'aire ;
C10	x	
C11	STO P	Affichage de l'aire.
C12	VIEW P	

10. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
"A=" ? → A : "B=" ? → B :	Saisie de A et B ;
"N=" ? → N :	Saisie de N nombre d'intervalles de la subdivision ;
2 x A + N → H :	Calcul du pas de la subdivision ;
N → I : 0 → S :	Initialisation de I et S ;
Lbl 1 :	Début de boucle ;
(-) A + I x H → X :	Calcul d'une abscisse de la subdivision → mémoire X ;
S + B x $\sqrt{(1 - X^2 + A^2)}$ → S :	Calcul de la somme partielle correspondante ;
I - 1 → I :	Incrémentation de I ;
I ≥ 1 ⇒ Goto 1	Test de fin de programme ;
2 x S x H → S ▴	Calcul et affichage de l'aire.

11. LONGUEUR ET FLÈCHE D'UNE CHAÎNETTE

11. 1. Principe

La chaînette a pour équation :

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \text{ ou } y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

La forme de la chaînette n'est autre que celle d'un fil qui pend sous l'action de son poids. a est un paramètre tel que $a = \frac{F}{P}$ où F est la tension du fil et P son poids par unité de longueur.

D'après l'exercice (M.6.8.) :

$$\ell = \int_0^{d_1} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx$$

d_1 étant la distance entre les deux points de suspension du fil.

On peut encore écrire :

$$\ell = a \int_0^{d_1} \operatorname{ch} \frac{x}{a} d\left(\frac{x}{a}\right)$$

soit :

$$\ell = a \left[\operatorname{sh} \frac{x}{a} \right]_0^{d_1}$$

et :

$$\ell = a \operatorname{sh} \frac{d_1}{a}$$

D'autre part on peut dire que la flèche f est donnée par la relation $f = y_B - y_C$ (Fig. 9.7), où $y_B = a \operatorname{ch} \frac{d_1}{2a}$ et $y_C = a$ ce qui implique :

$$f = a \left(\operatorname{ch} \frac{d_1}{2a} - 1 \right)$$

ou :

$$f = 2a \operatorname{sh}^2 \frac{d_1}{4a}$$

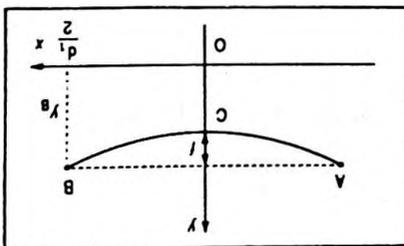
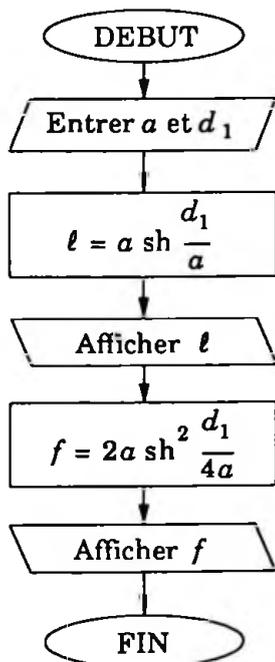


Figure 9.7

On peut réaliser un programme permettant de calculer la longueur ℓ et la flèche f d'un câble électrique sus-

pendu à la même altitude entre deux poteaux distants de d_1 avec $a = 30$ et $d_1 = 70$ m.

11. 2. Algorithme



11. 3. Programme T.I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	$a \rightarrow$ mémoire 0 ;
01	R/S	
02	STO 1	$d_1 \rightarrow$ mémoire 1 ;
03	+	
04	RCL 0	Calcul de d_1/a ;
05	=	et mise en mémoire 2 ;
06	STO 2	
07	e^x	
08	STO 3	$e^{d_1/a} \rightarrow$ mémoire 3 ;
09	-	
10	RCL 3	Calcul de $e^{d_1/a} - e^{-d_1/a}$;
11	$1/x$	
12	=	
13	x	
14	RCL 0	
15	+	Calcul et affichage de l ;
16	2	
17	=	
18	R/S	

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
19	RCL 2	Calcul de $e^{d_1/4a}$;
20	+	
21	4	
22	=	
23	e^x	$e^{d_1/4a} \rightarrow$ mémoire 4 ;
24	STO 4	
25	-	Calcul de $e^{d_1/4a} - e^{-d_1/4a}$;
26	RCL 4	
27	1/x	
28	=	
29	x^2	Calcul et affichage de $2a \operatorname{sh}^2 \frac{d_1}{4a} = f.$
30	x	
31	RCL 0	
32	+	
33	2	
34	=	
35	R/S	

11. 4. Programme H. P 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	
01	INPUT A	Saisie de $a \rightarrow A$;
02	INPUT D	Saisie de $d_1 \rightarrow D$;
03	RCL D	Calcul de $\ell = \operatorname{sh} d_1/a$; (SINH = sinus hyperbolique) ;
04	RCL A	
05	+	
06	SINH	
07	RCL A	$\ell \rightarrow$ mémoire L ; Affichage de ℓ ;
08	x	
09	STO L	
10	VIEW L	
11	RCL D	Calcul de $f = 2a \operatorname{sh}^2 \frac{d_1}{4a}$;
12	RCL A	
13	4	
14	x	
15	+	
16	SINH	
17	x^2	
18	2	
19	RCL A	
20	x	
21	x	
22	STO F	
23	VIEW F	Affichage de $f.$

11. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
"A : " ? → A :	Saisie de a ;
"D ₁ : " ? → D :	Saisie de d_1 ;
A x sinh (D + A) → L ▲ 2 x A x	Calcul et affichage de ℓ ;
$\left(\sinh \left(D + (4 \times A) \right) \right)^2$ → F ▲	Calcul et affichage de f .

12. CHARGE D'UN CONDENSATEUR À TRAVERS UNE RÉSISTANCE

12. 1. Principe

Si l'on considère un circuit comportant en série un générateur de tension de f. e. m. constante E , un conducteur ohmique de résistance R et un condensateur de capacité C initialement non chargé, dès la fermeture de ce circuit la charge q du condensateur obéit à l'équation différentielle :

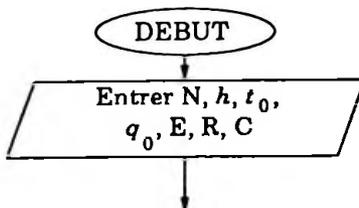
$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$$

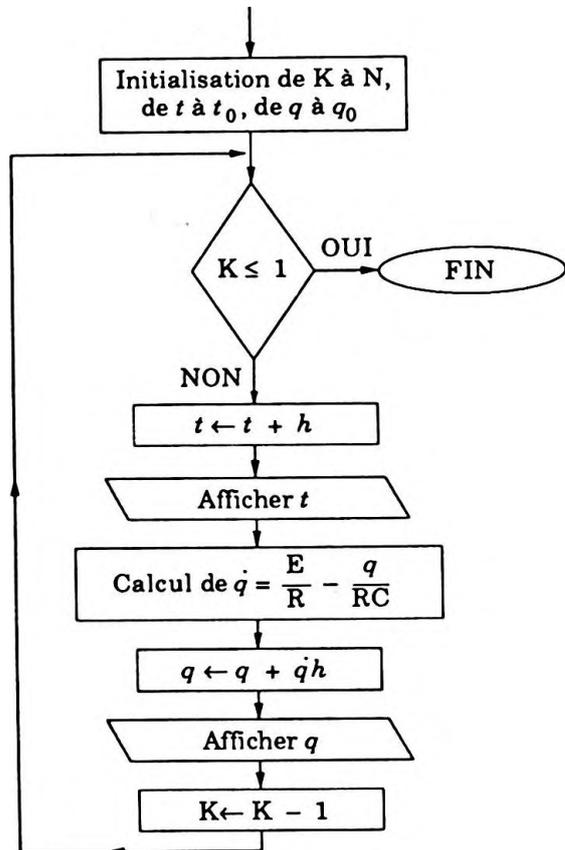
avec pour condition initiale $t = t_0, q = q_0, \dot{q}_0 = 0$.

On peut établir un programme de résolution approchée de cette équation qui fait ressortir selon les valeurs de t souhaitées, la charge q du condensateur.

La méthode consiste à donner une valeur approchée de $q(t+h)$ à l'aide de $q(t)$, h et $\dot{q}(t)$. On initialise t par t_0 et $q(t)$ par q_0 ainsi la première valeur approchée de q pour $t+h$ est $q_0 + t\dot{q}(t_0)$; la seconde valeur approchée de q pour $t+2h$ est $q(t_0+h) + t\dot{q}(t_0+h)$ et ainsi de suite. La méthode donne des résultats d'autant plus précis que h sera petit.

12. 2. Algorithme





12.3. Programme T.I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	Nombre de pas → mémoire 0 ;
01	R/S	
02	STO 1	h : pas → mémoire 1 ;
03	R/S	
04	STO 2	t_0 → mémoire 2 ;
05	R/S	
06	STO 3	q_0 → mémoire 3 ;
07	R/S	
08	STO 4	E → mémoire 4 ;
09	R/S	
10	STO 5	R → mémoire 5 ;
11	R/S	
12	STO 6	C → mémoire 6 ;
13	2 nd Lbl 1	Début de boucle ;
14	RCL 1	$t \leftarrow t + h$;
15	STO + 2	
16	RCL 2	Affichage de t ;
17	R/S	

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
18	(Calcul de \dot{q} ;
19	RCL 4	
20	+	
21	RCL 5	
22	-	
23	RCL 3	
24	+	
25	RCL 5	
26	+	
27	RCL 6	
28)	Calcul de $h\dot{q}$;
29	x	
30	RCL 1	Nouvelle valeur de q ;
31	=	$q \rightarrow$ mémoire 3 ;
32	STO + 3	
33	RCL 3	
34	R/S	Affichage de q ;
35	DSZ	Décrémentation ;
36	GTO 1	Fin de boucle.

12. 4. Programme H. P 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	
01	INPUT N	Nombre de boucles \rightarrow mémoire N ;
02	INPUT H	Pas \rightarrow mémoire H ;
03	INPUT T	$t_0 \rightarrow$ mémoire T ; ($t \leftarrow t_0$) ;
04	INPUT Q	$q_0 \rightarrow$ mémoire Q ; ($q \leftarrow q_0$) ;
05	INPUT E	E \rightarrow mémoire E ;
06	INPUT R	R \rightarrow mémoire R ;
07	INPUT C	C \rightarrow mémoire C ;
B01	LBL B	Début de boucle ;
B02	RCL H	
B03	STO + T	$t \leftarrow t + h$;
B04	VIEW T	Affichage de t ;
B05	RCL E	Calcul de $\dot{q}h$;
B06	RCL R	
B07	+	
B08	RCL Q	
B09	RCL R	
B10	RCL C	
B11	x	
B12	+	

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
B13	-	Calcul de $\dot{q}h$;
B14	RCL H	
B15	x	
B16	STO + Q	
B17	VIEW Q	
B16	STO + Q	$q \leftarrow q + \dot{q}h$;
B17	VIEW Q	Affichage de q ;
B18	DSE N	Décrémentement de N ;
B19	GTO B	Fin de boucle.

12. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
"L=" : ? → L : "H=" : ? → H :	Entrée du nombre de boucles K (mémoire L) et du pas ;
"T=" : ? → T : "Q=" : ? → Q :	Entrée de t_0 et q_0 (initialisation de t et q) ;
"E=" : ? → E : "R=" : ? → R :	
"C=" : ? → C :	Entrée de E, R, C ;
N → L :	Initialisation de K à N ;
Lb1 1 :	Début de boucle ;
T + H → T ▲	$t \leftarrow t + h$ et affichage de t ;
$\left(E + R - \left(Q + (R \times C) \right) \right) \times H$	$q \leftarrow q + \left(\frac{E}{R} - \frac{q}{RC} \right) h$ et affichage de q ;
+ Q → Q ▲	
L - 1 → L :	$K \leftarrow K - 1$, décrémentement de K ;
L ≥ 1 ⇒ Goto 1 :	Test de fin de boucle.

13. DÉTERMINATION DES POINTS DE LA TRAJECTOIRE D'UN MOBILE SOUMIS À LA FORCE DE FROTTEMENT DU TYPE $\vec{f} = -k\vec{v}$

13. 1. Principe

Un mobile de masse m est lancé avec une vitesse initiale \vec{v}_0 dont la direction fait un angle α avec l'horizontale dans le champ de pesanteur considéré comme uniforme ; les forces de frottement ont pour expression $\vec{f} = -k\vec{v}$, on en a déduit les équations paramétriques de la trajectoire :

$$x = \frac{m v_0 \cos \alpha}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right)$$

$$y = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right) - \frac{mg}{k} t$$

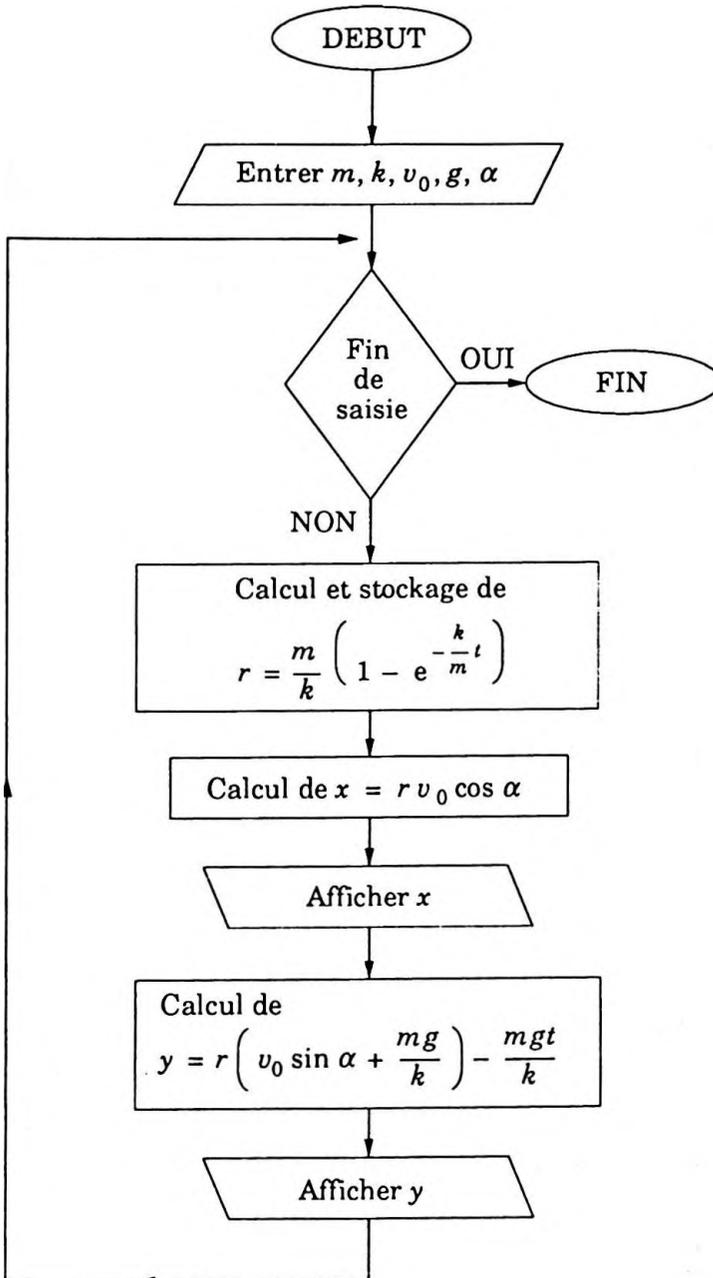
Il apparaît intéressant de tracer point par point, la

trajectoire en donnant à t différentes valeurs. On stocke en mémoire la valeur m/k ainsi que la quantité

$$r = \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \frac{m}{k} \text{ qui interviennent plusieurs fois.}$$

On peut choisir par exemple les valeurs numériques, $m = 1 \text{ kg}$; $v_0 = 70 \text{ m.s}^{-1}$; $\alpha = 45^\circ$; $k = 0,3 \text{ (SI)}$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

13. 2. Algorithme



13. 3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	$m \rightarrow$ mémoire 0 ;
01	R/S	
02	STO + 0	$k, m/k \rightarrow$ mémoire 0 ;
03	R/S	
04	STO 1	$v_0 \rightarrow$ mémoire 1 ;
05	R/S	
06	STO 2	$\alpha \rightarrow$ mémoire 2 ;
07	R/S	
08	STO 3	$g \rightarrow$ mémoire 3 ;
09	2nd Lbl 0	
10	R/S	
11	STO 4	Valeur de t ;
12	x	
13	RCL 0	
14	1/x	Calcul de $e^{-\frac{k}{m}t}$;
15	+/-	
16	=	
17	INV ln x	
18	-	
19	1	
20	=	Calcul de $\frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$;
21	+/-	
22	x	
23	RCL 0	
24	=	
25	STO 5	
26	x	et mise en mémoire 5 ;
27	RCL 1	
28	x	
29	RCL 2	Calcul et affichage de x ;
30	cos	
31	=	
32	R/S	
33	RCL 1	
34	x	
35	RCL 2	
36	sin	
37	+	Calcul de $v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k}$;
38	RCL 0	
39	x	
40	RCL 3	
41	=	

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
42	x	Calcul et affichage de y ;
43	RCL 5	
44	-	
45	RCL 0	
46	x	
47	RCL 4	
48	x	
49	RCL 3	
50	=	
51	GTO 0	
52	R/S	

13. 4. Programme H. P 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	
01	INPUT M	Saisie de $m \rightarrow$ mémoire M ;
02	INPUT K	Saisie de $k \rightarrow$ mémoire K ;
03	STO + M	$m/k \rightarrow$ mémoire M ;
04	INPUT V	Saisie de $v_0 \rightarrow$ mémoire V ;
05	INPUT A	Saisie de $\alpha \rightarrow$ mémoire A ;
06	INPUT G	Saisie de $g \rightarrow$ mémoire G ;
B01	LBL B	Début de boucle ;
B02	INPUT T	Saisie de t ;
B03	RCL M	Calcul de $r = \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$ stocké en R ;
B04	1/x	
B05	+/-	
B06	x	
B07	e^x	
B08	1	
B09	-	
B10	+/-	
B11	RCL M	
B12	x	
B13	STO R	Calcul de $x = r v_0 \cos \alpha$ stocké en X ;
B14	RCL V	
B15	x	
B16	RCL A	
B17	cos	

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
B18	x	Calcul de $x = r v_0 \cos \alpha$ stocké en X;
B19	STO X	
B20	VIEW X	Affichage de x;
B21	RCL V	Calcul de $v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k}$;
B22	RCL A	
B23	sin	
B24	x	
B25	RCL M	
B26	RCL G	
B27	x	
B28	+	
B29	RCL R	
B30	x	
B31	RCL M	Calcul de $y = r \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) - \frac{mg}{k} t$;
B32	RCL T	
B33	x	
B34	RCL G	
B35	x	
B36	-	
B37	STO Y	y stocké en Y;
B38	VIEW Y	Affichage de y;
B39	GTO B	Fin de boucle.

13. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
"M=" ? → M : "K=" ? → K :	Saisie de m → mémoire M, de k → mémoire K;
M ÷ K → B :	m/k → mémoire B;
"V ₀ " ? → V : "A" ? → A :	Saisie de v_0 → mémoire V, de α → mémoire A;
"g" ? → G :	Saisie de g → mémoire G;
Lbl 1 :	Début de boucle;
"T" ? → T :	Saisie de t → mémoire T;
$1 - e^{-T/B}$ → C :	$(1 - e^{-k/m^t})$ → mémoire C;
B × C × V × cos A → X ▲	Calcul et affichage de X;
(V × sin A + B × G) × B × C	Calcul et affichage de Y;
- B × G × T → Y ▲	
Goto 1 :	Fin de boucle.

14. CALCUL DE LA PÉRIODE D'UN NÉON QUI CLIGNOTE

14. 1. Principe

Les résultats de l'exercice sont les suivants :

$$t_1 = RC \ln \frac{E}{E - V_a}$$

$$t_2 = t_1 + \frac{RC}{1 + \frac{R}{r}} \ln \frac{V_a - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}}}{V_e - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}}}$$

t_0 est tel que $v = V_e$ ce qui implique :

$$t_0 = RC \ln \frac{E}{E - V_e}$$

d'où la période des clignotements du néon (Fig. 9.8) :

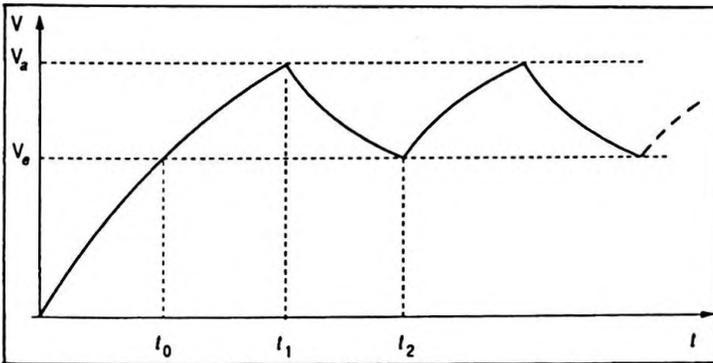


Figure 9.8

$$T = t_2 - t_0 = (t_2 - t_1) + (t_1 - t_0)$$

soit :

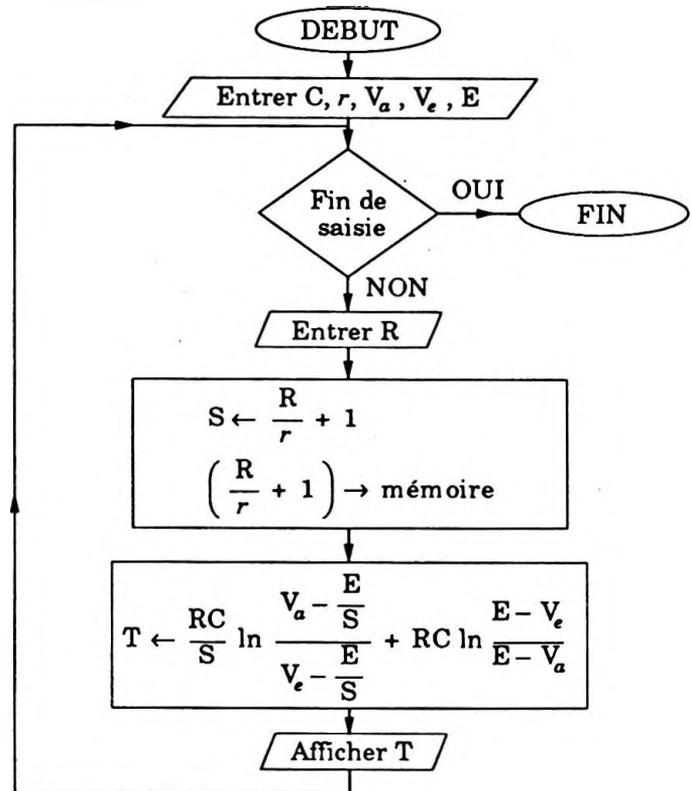
$$T = \frac{RC}{1 + \frac{R}{r}} \ln \frac{V_a - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}}}{V_e - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}}} + RC \ln \frac{E - V_e}{E - V_a}$$

On peut faire le programme permettant de moduler la période T en faisant varier les valeurs de la résistance R .

On choisit par exemple pour cela :

$V_a = 90 \text{ V}$; $V_e = 78 \text{ V}$; $r = 6 \cdot 10^{-3} \Omega$; $E = 120 \text{ V}$;
 $C = 1 \mu\text{F}$ et R variant entre $10 \text{ k}\Omega$ et $100 \text{ k}\Omega$.

14. 2. Algorithme



14. 3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	C → mémoire 0 ;
01	R/S	
02	STO 1	r → mémoire 1 ;
03	R/S	
04	STO 2	V _a → mémoire 2 ;
05	R/S	
06	STO 3	V _e → mémoire 3 ;
07	R/S	
08	STO 4	E → mémoire 4 ;
09	Lbl 0	
10	R/S	Affichage de T après la première boucle ;
11	STO 5	R → mémoire 5 ;
12	+	
13	RCL 1	
14	+	Calcul de S = 1 + R/r
15	1	
16	=	

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
17	STO 6	et mise en mémoire 6 ;
18	RCL 2	
19	-	
20	RCL 4	
21	+	
22	RCL 6	
23	=	
24	÷	
25	(Calcul de $\ln \frac{V_a - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}}}{V_e - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}}}$;
26	RCL 3	
27	-	
28	RCL 4	
29	+	
30	RCL 6	
31)	
32	=	
33	ln x	
34	x	
35	RCL 5	$\frac{RC}{1 + \frac{R}{r}}$
36	x	
37	RCL 0	
38	+	
39	RCL 6	
40	+	
41	(
42	(
43	RCL 4	
44	-	
45	RCL 3	Calcul de $RC \ln \frac{E - V_e}{E - V_a}$;
46)	
47	+	
48	(
49	RCL 4	
50	-	
51	RCL 2	
52)	
53)	
54	ln x	
55	x	Fin du calcul de T ;
56	RCL 5	
57	x	
58	RCL 0	
59	=	
60	GTO 0	

14. 4. Programme H. P 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	
01	INPUT C	C → mémoire C ;
02	INPUT K	r → mémoire K ;
03	INPUT V	V _a → mémoire V ;
04	INPUT W	V _e → mémoire W ;
05	INPUT E	E → mémoire E ;
B01	LBL B	Début de boucle ;
B02	INPUT R	Saisie de R → mémoire R ;
B03	RCL C	
B04	x	
B05	STO I	RC → mémoire I ;
B06	RCL R	
B07	RCL K	
B08	+	
B09	1	Calcul de $S = 1 + \frac{R}{r}$;
B10	+	
B11	STO S	et mise en mémoire S ;
B12	RCL I	
B13	+	Calcul de $\frac{RC}{1 + \frac{R}{r}}$
B14	1/x	
B15	RCL E	
B16	RCL S	
B17	+	
B18	RCL V	$V_a - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}}$
B19	-	
B20	RCL E	Calcul de $\frac{V_a - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}}}{V_e - \frac{E}{1 + \frac{R}{r}}}$;
B21	RCL S	
B22	+	
B23	RCL W	
B24	-	
B25	+	
B26	LN	
B27	x	
B28	RCL W	
B29	RCL E	
B30	-	Calcul de $\frac{E - V_e}{E - V_a}$;
B31	RCL V	
B32	RCL E	
B33	-	
B34	+	
B35	LN	
B36	RCL I	Fin du calcul de T ;
B37	x	
B38	+	
B39	STO T	
B40	VIEW T	Affichage de T ;
B41	GTO B	Fin de boucle.

14. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
"C"? → C : "R ₀ "? → K :	Saisie de C et de r ;
"V _a "? → V : "V _e "? → W :	Saisie de V _a et de V _e ;
"E"? → E :	Saisie de E ;
Lbl 1 :	Début de boucle ;
"R"? → R :	Saisie de R ;
(R + K + 1) → S :	$1 + \frac{R}{r}$ en mémoire S ;
$R \times C + S \times \ln \left((V - E + S) + (W - E + S) \right)$	Calcul et affichage de T.
$+ R \times C \times \ln \left((E - W) + (E - V) \right) \rightarrow T \blacktriangleleft$	
Goto 1	

15. CHARGE D'UN CONDENSATEUR
DANS UN CIRCUIT INDUCTIF ET RÉSISTIF

15. 1. Principe

On considère un circuit comportant en série un générateur de tension de f. e. m. constante E, un conducteur ohmique de résistance R, une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C initialement non chargé (Fig. 9.9).

L'équation différentielle que vérifie la charge q du condensateur est :

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

avec $i = \frac{dq}{dt}$ ce qui donne :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

D'autre part si l'on cherche la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur on peut écrire :

$$v = \frac{q}{C}$$

ce qui conduit à :

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = E$$

soit encore :

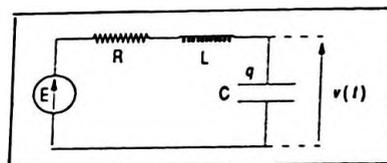


Figure 9.9

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{E}{LC}$$

et, en posant $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $2\lambda = \frac{R}{L}$, il vient :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2\lambda \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 E$$

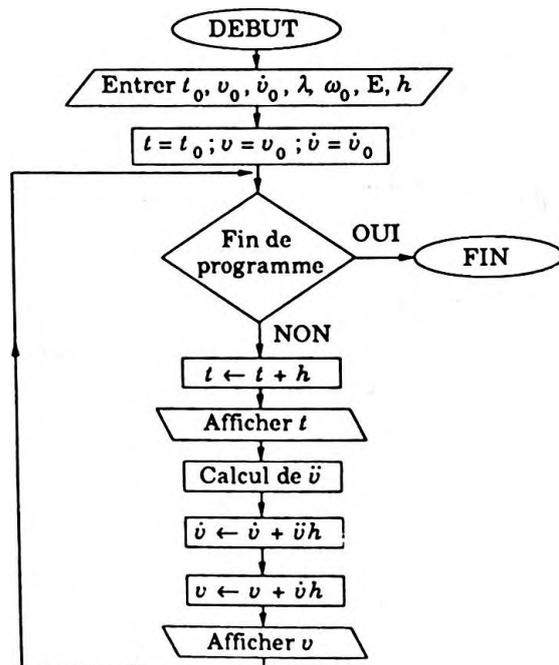
avec pour conditions initiales $t = t_0$, $q(t_0) = q_0$ soit $v(t_0) = \frac{q_0}{C}$ et $i(t_0) = C \left(\frac{dv}{dt} \right)_{t=t_0}$. Généralement $t_0 = 0$, $v(t_0)$ et $i(t_0)$ sont également nuls.

On peut établir un programme de résolution approchée de cette équation qui fait ressortir selon les valeurs de t souhaitées, la tension $v(t)$ existant entre les bornes du condensateur au cours de sa charge.

Comme pour l'équation différentielle du premier ordre, la méthode consiste à donner pour valeur approchée de $v(t+h)$ la valeur $v(t) + h\dot{v}(t)$, $\dot{v}(t+h)$ ayant de même pour valeur approchée $\dot{v}(t) + h\ddot{v}(t)$.

On initialise par $t = t_0$, $v = v_0$ et $\dot{v} = \dot{v}_0$; ce qui conduit au calcul de \ddot{v}_0 , puis de $\dot{v}(t+h)$ et $v(t+h)$ et ainsi de suite.

15. 2. Algorithme



15. 3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	$t_0 \rightarrow$ mémoire 0 ;
01	R/S	
02	STO 1	$v_0 \rightarrow$ mémoire 1 ;
03	R/S	
04	STO 2	$\dot{v}_0 \rightarrow$ mémoire 2 ;
05	R/S	
06	STO 3	$\lambda \rightarrow$ mémoire 3 ;
07	R/S	
08	STO 4	$\omega_0 \rightarrow$ mémoire 4 ;
09	R/S	
10	STO 5	E \rightarrow mémoire 5 ;
11	R/S	
12	STO 6	$h \rightarrow$ mémoire 6 ;
13	Lbl 0	Début de boucle ;
14	RCL 4	
15	x^2	
16	x	
17	RCL 5	
18	-	
19	RCL 3	
20	x	
21	RCL 2	Calcul de \ddot{v} ;
22	x	
23	2	
24	-	
25	RCL 4	
26	x^2	
27	x	
28	RCL 1	
29	=	
30	STO 7	$\ddot{v} \rightarrow$ mémoire 7 ;
31	RCL 6	
32	STO + 0	$t \leftarrow t + h$;
33	RCL 0	Affichage de t ;
34	R/S	
35	RCL 6	
36	x	Calcul de $h\ddot{v}$;
37	RCL 2	
38	=	
39	STO + 1	$v \leftarrow v + h\ddot{v} \rightarrow$ mémoire 1 ;
40	RCL 1	Affichage de v ;

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
41	R/S	Calcul de $h\ddot{v}$; $\dot{v} \leftarrow \dot{v} + h\ddot{v} \rightarrow$ mémoire 2.
42	RCL 7	
43	x	
44	RCL 6	
45	=	
46	STO + 2	
47	GTO 0	

15. 4. Programme H. P 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	
01	INPUT T	$t = t_0$ stocké en mémoire T ;
02	INPUT V	$v = v_0 \rightarrow$ mémoire V ;
03	INPUT D	$\dot{v}_0 \rightarrow$ mémoire D ;
04	INPUT L	$\lambda \rightarrow$ mémoire L ;
05	INPUT O	$\omega_0 \rightarrow$ mémoire O ;
06	INPUT E	E \rightarrow mémoire E ;
07	INPUT H	h (pas) \rightarrow mémoire H ;
B01	LBL B	Début de boucle ;
B02	RCL E	Calcul de $\ddot{v} = E \omega_0^2 - \omega_0^2 v - 2 \lambda \dot{v}$;
B03	RCL 0	
B04	x^2	
B05	x	
B06	RCL 0	
B07	x^2	
B08	RCL V	
B09	x	
B10	-	
B11	RCL D	
B12	RCL L	
B13	x	
B14	2	
B15	x	
B16	-	
B17	STO S	$\ddot{v} \rightarrow$ mémoire S ;
B18	RCL H	
B19	STO + T	$t \leftarrow t + h$;
B20	VIEW T	Affichage de t ;

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
B21	RCL H	Calcul de $h\dot{v}$;
B22	RCL D	
B23	x	
B24	STO + V	$v \leftarrow v + h\dot{v} \rightarrow$ mémoire V ;
B25	VIEW V	Affichage de V ;
B26	RCL S	Calcul de $h\ddot{v}$;
B27	RCL H	
B28	x	
B29	STO + D	$\dot{v} \leftarrow \dot{v} + h\ddot{v}$.
B30	GTO B	

15. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
"T=" : ? \rightarrow T : "V=" : ? \rightarrow V :	Saisie de $t_0 \rightarrow$ mémoire T, $v_0 \rightarrow$ mémoire V ;
"D=" : ? \rightarrow D : "L=" : ? \rightarrow L :	$\dot{v}_0 \rightarrow$ mémoire D et $\lambda \rightarrow$ mémoire L ;
"O=" : ? \rightarrow O : "E=" : ? \rightarrow E :	$\omega_0 \rightarrow$ mémoire O et E \rightarrow mémoire E ;
"H=" : ? \rightarrow H :	Saisie du pas $h \rightarrow$ mémoire H ;
Lbl 0 :	Début de boucle ;
E x O ² - O ² x V - 2 x L x D \rightarrow S :	Calcul de $\ddot{v} = \omega_0^2 E - \omega_0^2 v - 2\lambda\dot{v} \rightarrow$ mémoire S ;
T + H \rightarrow T \blacktriangleleft	Nouvelle valeur de $t \rightarrow$ mémoire T et affichage ;
D x H + V \rightarrow V \blacktriangleleft	$v \leftarrow v + h\dot{v}$ et affichage de v ;
S x H + D \rightarrow D :	$\dot{v} \leftarrow \dot{v} + h\ddot{v} \rightarrow$ mémoire D ;
Goto 0 :	Fin de boucle.

16. CALCUL D'UNE VALEUR APPROCHÉE À L'AIDE D'UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

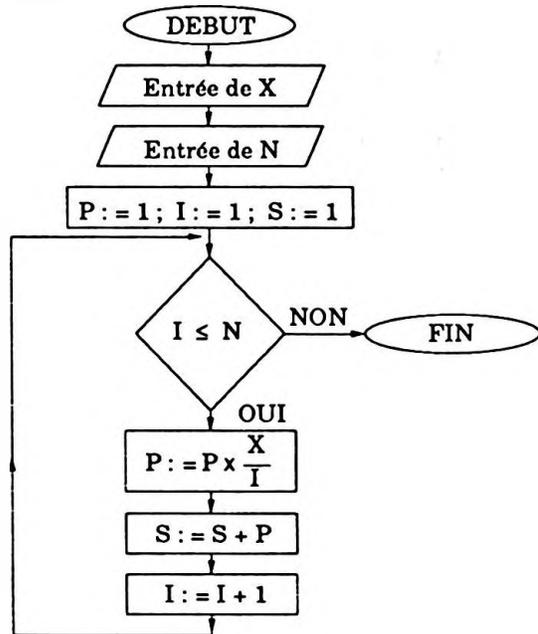
16. 1. Principe

On peut programmer le calcul approché de e^x au voisinage de zéro à l'aide du développement :

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

L'emploi de la calculatrice est alors très pratique car à l'aide du système des boucles et en prenant n relativement grand on arrive ainsi rapidement à la valeur approchée de e^x avec une bonne précision. La méthode peut s'appliquer à de nombreuses fonctions.

16. 2. Algorithme



16. 3. Programme T. I. 62 Galaxy

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
00	STO 0	X → mémoire 0 ;
01	R/S	
02	STO 1	N → mémoire 1 ;
03	1	
04	STO 2	Initialisation de I à 1 ;
05	STO 3	Initialisation de P à 1 ;
06	STO 4	Initialisation de S à 1 ;
07	Lbl 0	Début de boucle ;
08	RCL 0	Calcul de $\frac{X}{I}$;
09	+	
10	RCL 2	
11	=	
12	STO X 3	$P \leftarrow P \frac{X}{I}$;
13	RCL 3	
14	STO + 4	$S \leftarrow S + P$;
15	1	
16	STO + 2	$I \leftarrow I + 1$;
17	RCL 1	
18	$x \leftrightarrow t$	Test de comparaison $I \leq N$;
19	RCL 2	
20	2 nd INV $x > t$	
21	GTO 0	Fin de boucle ;
22	RCL 4	
23	R/S	Affichage de S.

16. 4. Programme H. P 32 S

PAS	TOUCHE	COMMENTAIRES
	PRGM TOP	
01	INPUT X	X → mémoire X ;
02	1	
03	STO P	1 → mémoire P ;
04	INPUT N	Nombre de boucles ;
05	1	
06	STO I	Initialisation de I ;
07	1	
08	STO S	S initialisé à 1 ;
B01	LBL B	Début de boucle ;
B02	RCL X	
B03	RCL I	
B04	+	
B05	STO x P	$P \leftarrow P \frac{X}{I}$;
B06	RCL P	
B07	STO + S	$S \leftarrow S + P$;
B08	1	
B09	STO + I	$I \leftarrow I + 1$;
B10	DSE N	Décrémentation ;
B11	GTO B	Fin de boucle ;
B12	VIEW S	Affichage de S.

16. 5. Programme Casio FX 7000 G

TOUCHE	COMMENTAIRES
"X =" ? → X :	Saisie de X ;
"N =" ? → N :	Saisie de N ;
1 → I : 1 → P : 1 → S :	Initialisation de I, P, S ;
Lbl 1 :	Début de boucle ;
P x X ÷ I → P : S + P → S :	Calcul des sommes partielles ;
I + 1 → I :	Incrémentation de I ;
I ≤ N ⇒ Goto 1 :	Test de fin de programme ;
S ▲	Affichage de S valeur approchée de e^x .

INDEX

- A**ccroissements finis, théorème des : 194
Adiabatique, transformation : 61, 160,
Aperiodique, régime : 155
Auto-inductance (d'un tore) : 107
- B**inôme de Newton : 205
Binôme, développement du : 209
Biot et Savart, loi de : 48
- C**alcul approché : 206
Calotte sphérique, aire d'une : 106
Cardioïde, longueur d'une : 80
Cauchy, règle de : 211
Centre de gravité ou d'inertie : 66
 d'une courbe pesante : 67
 d'une surface pesante : 68
 d'un volume pesant : 70
Champ électrostatique : 33, 38, 39
Champ magnétique : 48
Compression isotherme réversible : 60
 adiabatique réversible : 61
Condensateur
 charge d'un : 150
 décharge d'un : 153
Convergence, critères de : 211
Cycloïde
 aire d'une : 88
 longueur d'une : 89
- D**'Alembert, règle de : 211
Décharge oscillatoire amortie : 156
Désintégration radioactive, loi de : 188
Développements limités : 199
 au voisinage de zéro : 201
 de la fonction logarithme : 203
 des fonctions trigonométriques : 210
 pour la Physique : 209
 propriétés des : 200
 tableau des : 202
Déviation vers l'Est : 171
Dipôle électrique : 43
- É**lectromagnétisme, application à : 48
Électrostatique, application à : 32
Ellipse, aire de : 91
Énergie électrostatique d'un ion : 226
Énergie libérée par un courant alternatif : 57
Entropie d'un gaz : 62, 235
Équation (s) différentielle (s) : 114
 du premier ordre : 114
 du second ordre complètes : 131
 du second ordre incomplètes : 124
 homogènes : 116
 linéaires : 118
 séparation de variable d'une : 114
- F**iltré, courant alternatif : 55, 85
Flux du champ électrostatique : 45
Flux du champ magnétique : 54
Fourier, série de : 82, 85.
- G**auss, théorème de : 45, 102
- H**elmholtz, bobine de : 230
Huyghens, théorème de : 71
- I**nductif, circuit : 152
Induction électromagnétique : 177, 179
Intégrale (s)
 définition : 3
 immédiates : 6

- propriétés des : 4
- usuelles, tableau des : 5
- Intégrale**
 - curviligne : 26
 - double (ou de surface) : 27
 - triple (ou de valeur) : 30
- Intégration**
 - des expressions trigonométriques : 19
 - des fractions rationnelles : 15
 - par changement de variable : 6
 - par parties : 10
- Intensité efficace** : 58
- Isotherme, compression** : 60
- Laplace, loi de** : 52
- Mac-Laurin**
 - formule de : 197
 - série de : 213
- Moment d'inertie**
 - définition : 71
 - d'un cylindre : 74
 - d'un disque : 73
 - d'une sphère : 76
 - d'une tige rectiligne : 73
 - d'un tore : 111
- Mouvement circulaire uniforme** : 139
 - d'une chaîne : 144
 - d'une fusée : 148
 - rectiligne : 140
- Newton, binôme de** : 205
- Oscillations d'un néon** : 188
- Oscillations libres** : 141
- Oscillateur harmonique** : 158
- Période du pendule** : 220, 224
- Potentiel électrostatique** : 36, 38, 39, 42
- Primitive**
 - notion de : 2
 - propriétés des : 2
- Puissance moyenne en alternatif** : 58
- Quadripôle** : 227
- Rayonnement d'un corps** : 161
- Redressé, courant** : 55, 85
- Régime transitoire** : 182
- Rolle, théorème de** : 193
- Série entière** : 212
- Série numérique** : 210
- Sinusoïdal, courant alternatif** : 55
- Solénoïde, champ magnétique d'un** : 50
- Surface latérale** : 65
 - du cône : 65
- Taylor**
 - formule de : 196
 - théorème de : 195
- Taylor-Lagrange, formule de** : 197
- Taylor-Young, développement limité de** : 197
- Van der Waals, équation de** : 236
- Volume**
 - calcul d'un : 63
 - du cône : 64
 - de la sphère : 64

LOUIS - JEAN
avenue d'Embrun, 05003 GAP cedex
Tél. : 92.53.17.00
Dépot légal : 543 — Août 1992
Imprimé en France