

Physique des plasmas

1

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.

Jean-Loup Delcroix
Université Paris-Sud, Orsay
École Supérieure d'Électricité, Gif-sur-Yvette

Abraham Bers
Department of Electrical Engineering
and Computer Science (M.I.T.), Cambridge, États-Unis
Plasma Fusion Center (M.I.T.), Cambridge, États-Unis
Research Laboratory of Electronics (M.I.T.), Cambridge, États-Unis

Physique des plasmas

1

S A V O I R S A C T U E L S

InterÉditions / CNRS Éditions

Dessin de couverture : représentation de la couronne solaire

© 1994, **InterEditions**, 7, rue de l'Estrapade, 75005 Paris
et
CNRS Editions, 20/22, rue Saint-Amand, 75015 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle).

Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. 43.26.95.35.

ISBN 2-7296-0484-7

ISBN 2-271-05126-6

Table des matières

Avant-propos	XXI
Notations	XXV
1 Gaz ionisés et plasmas	1
1.1 Introduction	1
1.1.1 Historique	1
1.1.2 Plan du chapitre	4
1.2 Gaz ionisés et plasmas	5
1.2.1 Degré d'ionisation	5
1.2.2 Ionisation thermique d'un gaz	7
1.2.3 Plasmas hors d'équilibre thermique	8
1.2.4 Densité et température des plasmas usuels	9
1.2.5 Familles de gaz ionisés	9
1.3 Oscillations de plasma	11
1.3.1 Description qualitative	11
1.3.2 Oscillations de charge d'espace électronique en volume	13
1.3.3 Oscillations de gaine	15
1.3.4 Impédance d'un plasma et ondes électromagnétiques	17
1.4 Longueurs de Debye et de Landau	20
1.4.1 Longueurs critiques d'interaction	20
1.4.2 Gaines à la frontière d'un plasma	24
1.4.3 Corrélations de position dans un plasma	26
1.5 Plasmas sans interactions. Trajectoires des particules	31
1.6 Plasmas avec interactions coulombiennes	32
1.6.1 Classification des plasmas	33
1.6.2 Collisions coulombiennes. Fréquences caractéristiques	36
1.7 Ondes dans les plasmas	40
1.7.1 Ondes planes dans un plasma	40
1.7.2 Plasma sans champ magnétique. Fréquence de coupure	41
1.7.3 Propagation parallèle à un champ magnétique	43

1.7.4	Propagation oblique et transversale	44
1.7.5	Classification des plasmas par rapport aux ondes . .	46
1.8	Plasmas et rayonnement	48
1.8.1	Émission de rayonnement par les plasmas	48
1.8.2	Interactions entre photons et matière	49
1.9	Gaz faiblement ionisés	51
1.10	Fusion thermonucléaire contrôlée	53
1.10.1	Réaction de fusion des noyaux légers	53
1.10.2	Réacteurs nucléaires à fusion contrôlée	56
1.10.3	Confinement magnétique d'un plasma	58
1.10.4	Confinement inertiel d'un plasma	61
1.11	Décharges électriques dans les gaz	65
1.11.1	Décharges en courant continu à basse pression . . .	65
1.12	Problèmes	75
P1-1	Distribution maxwellienne des vitesses	75
P1-2	Distribution gaussienne et théorème de la limite cen- trale	77
P1-3	Démonstration simple de l'équation de Saha	77
P1-4	Gaines de plasma et sondes de Langmuir	78
P1-5	Énergie potentielle d'un plasma	81
P1-6	Grandeurs caractéristiques dans un plasma	82
2	Trajectoires dans un champ magnétique	83
2.1	Introduction	83
2.2	Champ magnétique uniforme constant	85
2.2.1	Trajectoires hélicoïdales	85
2.2.2	Moment magnétique orbital. Diamagnétisme du plasma	89
2.2.3	Valeurs numériques	92
2.3	Champs magnétique et électrique uniformes et constants . .	93
2.3.1	Dérive électrique	93
2.3.2	Dérives produites par un champ de gravité	97
2.4	Champs magnétique uniforme constant et électrique oscillant	99
2.4.1	Approximation du champ électrique uniforme	99
2.4.2	Conductivité électrique. Résonance cyclotron	100
2.5	Champ magnétique lentement variable. Orbites adiabatiques	101
2.5.1	Approximation adiabatique	101
2.5.2	Orbites adiabatiques	103
2.6	Compression magnétique. Gel de B . Invariance de μ	104
2.6.1	Mouvement des tubes de force	104
2.6.2	Gel du plasma dans les tubes de force	105
2.6.3	Invariance de μ . Compression magnétique	107

2.7	Champ magnétique statique non uniforme	110
2.7.1	Orbites adiabatiques tracées sur les tubes de force	110
2.7.2	Miroirs magnétiques	112
2.8	Dérives	115
2.8.1	Dérives électriques et dérivés gravitationnelles	115
2.8.2	Dérive de courbure magnétique	115
2.8.3	Dérive de gradient de B	116
2.9	Invariants adiabatiques	119
2.9.1	Pseudo-périodes et invariants adiabatiques	119
2.10	Constantes exactes du mouvement	122
2.10.1	Équations de Lagrange	122
2.10.2	Champ statique à symétrie de révolution	123
2.11	Appendices	125
A2-1	Conductivité d'un plasma froid sans collisions	125
A2-2	Résonance cyclotron	127
A2-3	Propriétés du gradient d'un champ de vecteurs	130
A2-4	Champ statique de révolution avec deux miroirs	131
2.12	Problèmes	138
P2-1	Calcul relativiste de la dérive électrique	138
P2-2	Adiabaticité temporelle dans une compression magnétique	138
P2-3	Calcul de la force de freinage dans un miroir magnétique	139
P2-4	Calcul de la force (moyenne) de gradient	139
P2-5	Dérive magnétique avec diamagnétisme	139
P2-6	Puissance transmise par un champ alternatif à un plasma	139
P2-7	Résonance cyclotron électronique	140
P2-8	Deuxième invariant adiabatique	140
3	Collisions élastiques	141
3.1	Introduction	141
3.2	Théorie classique des collisions binaires élastiques	142
3.2.1	Mouvement du centre de gravité et mouvement relatif	142
3.2.2	Propriétés du mouvement relatif	145
3.2.3	Potentiels d'interaction dans un gaz ionisé	149
3.2.4	Exemples de calcul de la déviation	150
3.3	Section efficace différentielle angulaire	153
3.3.1	Définition de la section efficace différentielle	153
3.3.2	Section efficace et paramètre d'impact	157
3.4	Sections efficaces en mécanique quantique	159
3.4.1	Diffusion de l'onde de de Broglie par un centre fixe	159

3.4.2	Ondes partielles ; déphasages	160
3.4.3	Remarques	161
3.4.4	Cas des particules identiques	161
3.5	Sections efficaces intégrées	162
3.5.1	Définitions	162
3.5.2	Divergence coulombienne de σ_1 . Coupure de Debye .	164
3.5.3	Résultats expérimentaux	169
3.6	Appendices	173
A3-1	Système du laboratoire et système du centre de gravité	173
A3-2	Sections efficaces de transport et déphasages	177
3.7	Problèmes	180
P3-1	Collisions avec un potentiel attractif en $1/r^4$	180
P3-2	Section efficace pour l'échange d'énergie	180
P3-3	Méthode des faisceaux mélangés	180
4	Collisions inélastiques	181
4.1	Introduction	181
4.2	Particules présentes dans un gaz ionisé. Niveaux d'énergie .	181
4.2.1	Niveaux d'énergie des atomes	181
4.2.2	Niveaux d'énergie des molécules	182
4.2.3	Ions négatifs	186
4.3	Seuils de réaction	188
4.3.1	Énergie de réaction	188
4.3.2	Seuils de réaction	188
4.3.3	Collisions binaires. Cas du système du laboratoire .	190
4.4	Principaux types de collisions inélastiques	190
4.5	Collisions inélastiques binaires	191
4.5.1	Section efficace totale	191
4.5.2	Taux de réaction	195
4.6	Collisions inélastiques ternaires	197
4.7	Information sur les sections efficaces et les taux de réaction	199
4.8	Problèmes	200
P4-1	Constante de réaction pour deux distributions maxwelliennes	200
P4-2	Relation graphique entre les courbes de sections efficaces inélastique et superélastique	200
5	Propriétés macroscopiques des gaz faiblement ionisés	201
5.1	Introduction	201
5.2	Mobilité et diffusion libre des électrons	202
5.2.1	Équation de transport de la quantité de mouvement des électrons	202

5.2.2	Mobilité des électrons	203
5.2.3	Diffusion libre des électrons	206
5.2.4	Relation d'Einstein. Température de diffusion	207
5.3	Mobilité et diffusion libre des ions	208
5.4	Modes propres et longueurs de diffusion d'une cavité	213
5.4.1	Hypothèses générales	213
5.4.2	Équations générales	216
5.4.3	Évolution d'une post-décharge	217
5.5	Décharge HF dans une cavité	219
5.5.1	Régime transitoire	219
5.5.2	Régime stationnaire	220
5.6	Diffusion ambipolaire	223
5.6.1	Comparaison des coefficients de transport des électrons et des ions	223
5.6.2	Coefficient de diffusion ambipolaire dans un plasma contenant une seule espèce d'ions	224
5.6.3	Détermination du coefficient de proportionnalité. Domaine de validité de la diffusion ambipolaire parfaite	226
5.7	Colonnes de plasma contrôlées par diffusion	229
5.7.1	Formules générales et règles de similitude	229
5.7.2	Formules explicites pour une fréquence de collision constante	232
5.8	Colonnes de plasma en régime de chute libre	233
5.8.1	Limite du régime de Schottky vers les basses pressions	233
5.8.2	Régime de chute libre	234
5.9	Recombinaison en volume. Attachement	235
5.9.1	Généralités	235
5.9.2	Comparaison des pertes par diffusion et par recombinaison en volume	236
5.9.3	Évolution de la densité dans un plasma en recombinaison	237
5.9.4	Attachement électronique	238
5.10	Appendices	239
A5-1	Modes propres et longueurs de diffusion de cavités cylindriques ou parallélépipédiques	239
5.11	Problèmes	241
P5-1	Création d'un plasma par un faisceau d'électrons . .	241
P5-2	Colonne positive (modèle simple)	243
P5-3	Diffusion ambipolaire avec plusieurs espèces d'ions .	243

6 Faisceaux d'électrons : ondes et instabilités

électrostatiques	245
6.1 Introduction	245
6.2 Dynamique à une dimension	247
6.2.1 Équations générales non linéaires	247
6.2.2 Modes propres du faisceau	248
6.3 Énergie et flux d'énergie associés aux ondes	253
6.3.1 Énergie et modèle linéaire	253
6.3.2 Énergie dans les ondes rapides et lentes	254
6.3.3 Énergie associée aux ondes	256
6.3.4 Conservation de l'énergie de perturbation	257
6.4 Excitation et stabilité des ondes	261
6.4.1 Grilles "dipolaires"	261
6.4.2 Grilles séparées par une distance finie ; faisceaux de sections transversales finies	264
6.5 Instabilité faisceau-milieu dissipatif	267
6.5.1 Équation de dispersion	268
6.5.2 Cas des faibles dissipations	269
6.5.3 Conservation de l'énergie avec petite dissipation	274
6.5.4 Flux d'énergie dans l'amplificateur résistif	276
6.6 Instabilité par couplage avec un milieu réactif	277
6.6.1 Équation de dispersion	277
6.6.2 Bilans d'énergie	278
6.6.3 Milieux avec $\chi_L^M = \chi_L^M(\omega)$	280
6.7 Problèmes	280
P6-1 Fonction de réponse longitudinale	280
P6-2 Développement en série de l'énergie cinétique	282
P6-3 Flux d'énergie cinétique de perturbation	283
P6-4 Énergie dans un faisceau non homogène	283
P6-5 Conditions aux limites pour des grilles dipolaires	284
P6-6 Perturbations produites par des grilles dipolaires	285
P6-7 Le klystron amplificateur	285
P6-8 Couplage des perturbations au circuit extérieur	287
P6-9 Valeurs propres pour la diode de Pierce	288
P6-10 Stabilité de la diode de Pierce	291
P6-11 Admittance de deux grilles avec charge d'espace quelconque	291
P6-12 Admittance de deux grilles avec charge d'espace nulle	293
P6-13 Stabilité avec dissipation interne	294
P6-14 Conservation de l'énergie avec dissipation interne	295

7	Instabilités de courant dans les plasmas	297
7.1	Introduction	297
7.2	Instabilité faisceau-plasma	299
7.2.1	Équation de dispersion	299
7.2.2	Solutions du type $\omega(k_r)$	301
7.2.3	Solutions du type $k(\omega_r)$	305
7.2.4	Aspects non linéaires de l'instabilité	308
7.3	Instabilités de courant dans un plasma	309
7.3.1	Instabilité de Buneman	309
7.3.2	Aspects non linéaires	312
7.4	Instabilité électrostatique à deux courants	313
7.4.1	Faisceaux d'électrons opposés	313
7.4.2	Faisceaux parallèles	315
7.4.3	Faisceaux opposés, avec mouvement des ions	317
7.4.4	Aspects non linéaires	317
7.5	Instabilités électromagnétiques	320
7.5.1	Modèle relativiste des plasmas froids	320
7.5.2	Dynamique non relativiste linéarisée	322
7.5.3	Instabilité de Weibel non relativiste	323
7.5.4	Modèle relativiste	333
7.6	Problèmes	340
P7-1	Instabilité faisceau-plasma : domaine d'instabilité	340
P7-2	Instabilité faisceau-plasma avec gradient de densité	341
P7-3	Instabilité de Buneman : domaine d'instabilité	342
P7-4	Instabilité de Buneman : taux de croissance maximum	342
P7-5	Instabilité à faisceaux parallèles : amplification spatiale	342
P7-6	Faisceaux opposés avec mouvement des ions	342
P7-7	Dynamique relativiste électrostatique à une dimension	343
P7-8	Conservation relativiste de l'énergie dans un plasma froid	344
P7-9	Faisceaux opposés : champs électromagnétiques transversaux avec $\vec{E}_1 \perp \vec{v}_0$	344
P7-10	Instabilité de Weibel non relativiste : conservation de l'énergie de perturbation	345
P7-11	Linéarisation de la quantité de mouvement relativiste	345
P7-12	Instabilité de Weibel relativiste : énergie de perturbation	345

P7-13 Ondes se propageant transversalement à un faisceau d'électrons	346
P7-14 Ondes transverses à un faisceau d'électrons : analyse non relativiste	347
P7-15 Ondes transverses à un faisceau d'électrons par changement de repère	347
P7-16 Ondes transverses à un faisceau : énergie de perturbation	348
Bibliographie	349
Crédits des figures	364
Index	365

Contenu du tome 2

8 Équations cinétiques	1
8.1 Introduction	1
8.2 Équation de Liouville d'un gaz pur	3
8.2.1 Densité dans l'espace des phases	3
8.2.2 Équation de Liouville pour des variables conjuguées	5
8.2.3 Système sans interactions dépendant de la vitesse	6
8.2.4 Application aux plasmas	7
8.3 Système d'équations de BBGKY	9
8.3.1 Fonction de distribution et densité simples	9
8.3.2 Fonction de distribution et densité doubles	10
8.3.3 Fonctions de distribution et densités multiples	12
8.3.4 Système d'équations de BBGKY	12
8.4 Équations cinétiques d'un gaz pur	15
8.4.1 Équation de Liouville à une particule	15
8.4.2 Équation de Vlasov	16
8.4.3 Équation de Boltzmann	17
8.4.4 Propriétés de l'équation de Boltzmann	23
8.5 Équations cinétiques des mélanges	27
8.5.1 Fonctions de distribution	27
8.5.2 Équations cinétiques	28
8.6 Théorie des gaz réactifs (effets des collisions inélastiques)	29
8.6.1 Introduction des collisions inélastiques	29
8.6.2 Collisions du type 12/34. Équation de Boltzmann	29

8.6.3	Collisions 12/14 et 12/114 avec $m_1 \ll m_2, m_4$	31
8.7	Appendices	32
A8-1	Particules chargées dans un champ électro-magnétique	32
8.7.2	Équation d'évolution de f_1	34
8.7.3	Régime de fluide. Régime moléculaire	36
8.7.4	Notions sur la théorie cinétique des gaz réactifs	37
8.8	Problèmes	40
P8-1	Structure des corrélations à l'équilibre thermodynamique	40
P8-2	Corrélations dans un plasma à l'équilibre thermodynamique	41
P8-3	Invariants intégraux de l'équation de Boltzmann	42
P8-4	Solution générale maxwellienne déplacée	42
9	Hydrodynamique et magnétohydrodynamique	43
9.1	Introduction	43
9.2	Équations hydrodynamiques d'un gaz pur	44
9.2.1	Définitions des grandeurs hydrodynamiques	44
9.2.2	Équation de transport d'une grandeur $A(\vec{r}, \vec{w}, t)$	47
9.2.3	Propriétés des termes d'interaction $C(A)$	49
9.2.4	Les trois équations fondamentales de conservation	50
9.2.5	Équation de transport des moments d'ordre 2	53
9.2.6	Fermeture du système des équations hydro-dynamiques	54
9.3	Hydrodynamique des mélanges gazeux et des plasmas	57
9.3.1	Variables partielles et variables globales	57
9.3.2	Propriétés des termes d'interaction	59
9.3.3	Conservation de la masse et de l'électricité	60
9.3.4	Conservation de la quantité de mouvement globale	61
9.3.5	Loi d'Ohm généralisée	62
9.4	Notions de magnétohydrodynamique	65
9.4.1	Liquides conducteurs	66
9.4.2	Gaz faiblement ionisés	73
9.4.3	Gaz totalement ionisés	75
9.5	Confinement et diamagnétisme	77
9.5.1	Confinement magnétique d'un plasma	77
9.5.2	Diamagnétisme d'un plasma	79
9.5.3	Vitesses macroscopiques et vitesses de dérives des particules	80
9.6	Effets des collisions inélastiques	83
9.7	Appendices	84

A9-1	Termes d'interaction dans les équations de transport	84
A9-2	Équations de transport des moments d'ordre 2 . . .	92
A9-3	Compressions adiabatiques sans collisions	93
A9-4	Loi d'Ohm dans les plasmas complexes	97
9.8	Problèmes	100
P9-1	Équation d'évolution de U_P	100
P9-2	Décomposition de f_{12} en trois termes	100
P9-3	Hydrodynamique des corrélations	100
P9-4	Loi d'Ohm pour un plasma binaire	101
P9-5	Courant de déplacement négligeable	101
10	Théorie cinétique de Vlasov-Landau	103
10.1	Introduction	103
10.2	Modèle de Vlasov-Maxwell	107
10.2.1	Réversibilité par rapport au temps	108
10.2.2	Incompressibilité dans l'espace des phases	108
10.2.3	Conservation de l'entropie	118
10.2.4	Conservation de l'énergie et de la quantité de mou- vement	120
10.3	Dynamique électrostatique, linéarisée, à une dimension . .	122
10.3.1	Solution des équations linéarisées par transformation de Fourier-Laplace	123
10.3.2	Perturbations périodiques dans l'espace	131
10.3.3	Excitation externe d'un plasma stable	139
10.3.4	Modes naturels faiblement croissants ou décroissants	145
10.3.5	Énergie d'onde et puissance dissipée dans l'effet Landau	148
10.3.6	Ondes électrostatiques dans un plasma maxwellien .	155
10.4	Plasmas non magnétisés sans champ	164
10.4.1	Formules générales	164
10.4.2	Distributions d'équilibre isotropes	166
10.5	Modes de van Kampen et Case	175
10.6	Effets collisionnels	180
10.6.1	Collisions dans la dynamique linéarisée	180
10.6.2	Modèle simple de relaxation par collisions	181
10.6.3	Modèle BGK de collisions	182
10.6.4	Modèles de collisions du type Fokker-Planck	183
10.7	Effets non linéaires	188
10.7.1	Piégeage des particules	189
10.7.2	Paquets d'ondes et diffusion quasi linéaire	195
10.7.3	Couplages non linéaires onde-onde et onde-particu- les. Ondes non linéaires	206

10.7.4	Échos d'ondes de plasma	216
10.8	Appendice	218
A10-1	Fonction de dispersion des plasmas	218
10.9	Problèmes	222
P10-1	Écoulement libre et équations hydrodynamiques	222
P10-2	Écoulement libre avec des perturbations initiales générales	223
P10-3	Distribution d'équilibre dans un plasma inhomogène	223
P10-4	Conservation non relativiste de l'énergie et de la quantité de mouvement	224
P10-5	Solution par la méthode des caractéristiques	224
P10-6	Plasma de Lorentz-Cauchy : susceptibilité	224
P10-7	Plasma de Lorentz-Cauchy : réponse aux conditions initiales	225
P10-8	Instabilité faisceau d'électrons-plasma : solutions ap- prochées	225
P10-9	Flux d'énergie moyen pour les ondes	225
P10-10	Développement asymptotique de la susceptibilité pour $v_p \gg v_{te}$	226
P10-11	Champs dans les ondes longitudinales faiblement amorties	226
P10-12	Coupure relativiste de l'amortissement de Landau	226
P10-13	Propriétés des racines de la relation de dispersion des ondes de plasma électroniques	227
P10-14	Tenseur de susceptibilité pour un plasma isotrope, non magnétisé	227
P10-15	Épaisseur de peau collisionnelle	228
P10-16	Analogie du champ électrique pour la résolution de la relation de dispersion de Vlasov	228
P10-17	Orthogonalité des fonctions propres de Case	228
P10-18	Modèle BGK de collisions : relation de dispersion	229
P10-19	Relaxation dans le modèle de collisions de Lenard- Bernstein	229
P10-20	Diffusion quasi linéaire dans l'approximation des phases aléatoires	229
P10-21	Puissance dissipée dans un état stationnaire produit par la diffusion quasi linéaire et les collisions	230
P10-22	Création de courant dans un plasma	230
P10-23	Relations de Manley-Rowe pour les couplages cohérents onde-onde	230

<i>P10-24 Équations des ondes couplées dans l'approximation des phases aléatoires</i>	230
<i>Bibliographie</i>	232

11 Théorie cinétique des instabilités dans les plasmas

non magnétisés	231
11.1 Introduction	231
11.2 Conditions de stabilité de Newcomb-Gardner	232
11.2.1 Perturbations quelconques	232
11.2.2 Perturbations électrostatiques	236
11.3 Critères de Penrose (perturbations électrostatiques)	241
11.3.1 Généralités	241
11.3.2 Méthode de Nyquist	242
11.3.3 Critères de Penrose	244
11.3.4 Plasma équivalent à un faisceau	248
11.3.5 Distributions unidimensionnelles à un minimum	251
11.4 Théorie cinétique des instabilités électromagnétiques	272
11.4.1 Discussion générale	272
11.4.2 Distributions anisotropes symétriques perpendicu- lairement à \vec{k}	274
11.5 Problèmes	283
P11-1 Non-unicité de l'équation de conservation de l'énergie de perturbation	283
P11-2 Équation de conservation au second ordre par rap- port aux champs	283
P11-3 Équation de conservation de l'énergie de perturba- tion moyennée sur l'espace, pour des distributions isotropes	283
P11-4 Conditions nécessaires et suffisantes de Penrose pour l'instabilité électrostatique	284
P11-5 Ondes faiblement amorties sur un faisceau maxwel- lien d'électrons	284
P11-6 Interaction faisceau d'électrons-plasma : faisceau chaud et plasma froid	284
P11-7 Faisceaux d'électrons opposés maxwelliens	284
P11-8 Conditions d'existence de modes indépendants transverses électromagnétiques et longitudinaux électrostatiques	285
P11-9 Relation de dispersion électrostatique pour des dis- tributions anisotropes	285

P11-10 Modes TEM pour des distributions isotropes perpendiculairement à \vec{k}	285
P11-11 Modes TEM pour des distributions isotropes	285
P11-12 Faisceaux opposés avec anisotropies de températures : relations de dispersion TEM	285
P11-13 Instabilité de Weibel : effet de l'élargissement thermique dans la direction de \vec{B}_1	286
Bibliographie	287
12 Théorie cinétique des gaz faiblement ionisés	287
12.1 Introduction	287
12.2 Gaz de Lorentz électrons-neutres	289
12.2.1 Couplages électrons-ions-neutres	289
12.2.2 Modèle de Lorentz électrons-neutres	290
12.3 Relaxation des anisotropies électroniques	292
12.3.1 Définition des fréquences de relaxation	292
12.3.2 Données théoriques sur les fréquences de relaxation	295
12.3.3 Données expérimentales sur les fréquences de relaxation	296
12.4 Conductivité sans échauffement des électrons	297
12.4.1 Approximation des champs faibles	297
12.4.2 Tenseur de conductivité électronique	299
12.5 Échauffement du gaz d'électrons : effet Joule	302
12.5.1 Expression de la partie isotrope de f	302
12.5.2 Effet Joule	305
12.6 Refroidissement des électrons par collisions élastiques	306
12.6.1 Modèle de Lorentz imparfait	306
12.6.2 Relaxation de la partie isotrope de f	307
12.7 Équilibre effet Joule-refroidissement par collisions	309
12.7.1 Méthode quasi linéaire. Formule de Margenau en HF	309
12.7.2 Formule de Margenau pour les champs continus et BF	311
12.7.3 Discussion de la formule de Margenau	312
12.7.4 Mobilité électronique. Loi de similitude	314
12.8 Diffusion libre des électrons	315
12.8.1 Formules générales	315
12.8.2 Détermination de α_o	318
12.8.3 Flux et coefficients de diffusion	321
12.8.4 Flux d'énergie et conductivité thermique	323
12.9 Plasmas intermédiaires	325

12.9.1	Définition des plasmas "intermédiaires"	325
12.9.2	Théorie cinétique des plasmas intermédiaires	329
12.10	Appendices	330
A12-1	Anisotropies et hydrodynamique	330
A12-2	Développement de l'équation de Boltzmann	335
A12-3	Formule de Chapman et Cowling	339
12.11	Problèmes	340
P12-1	Règle de sélection pour le terme de diffusion	340
P12-2	Terme de diffusion dans l'approximation linéaire	340
P12-3	Règle de sélection pour les termes électriques	340
P12-4	Terme électrique dans l'approximation linéaire	341
P12-5	Terme magnétique	341
P12-6	Effet Joule en présence d'un champ magnétique	341
P12-7	Normalisation de la formule de Margenau	341
P12-8	Champ critique en présence d'un champ magnétique	342
P12-9	Distribution de Druyvesteyn	342
P12-10	Fréquences de collisions moyennes pour la mobilité et la diffusion	342
P12-11	Plasmas intermédiaires : mobilité et température électroniques	343
P12-12	Diffusion dans les plasmas intermédiaires	343
	Bibliographie	345
13	Théorie cinétique collisionnelle des plasmas	345
13.1	Introduction	345
13.2	Étude préliminaire des collisions électron-ion	347
13.2.1	Relaxation électrons-ions. Coupure de Debye	347
13.2.2	Coupure à la longueur de Debye	348
13.3	Coefficients de transport dans l'espace des vitesses	352
13.3.1	Définitions générales	352
13.3.2	Collisions $e-i$. Relations avec les fréquences de relaxation	355
13.3.3	Collisions $a-b$. Distribution maxwellienne dans la cible	357
13.3.4	Coefficients de ralentissement dans un plasma	359
13.3.5	Coefficients de dispersion angulaire dans un plasma	361
13.4	Les temps de relaxation dans un plasma	363
13.4.1	Définitions	363
13.4.2	Temps de relaxation moyens dans un plasma	364
13.4.3	Relation entre les deux fréquences fondamentales ω_p et ν_1	366
13.5	Équation de Fokker-Planck	367

13.6	Équations cinétiques des plasmas	370
13.6.1	Forme générale pour les collisions lointaines	371
13.6.2	Passage de l'équation de Liouville aux équations cinétiques	372
13.7	Conductivité électrique	378
13.7.1	Conductivité sans échauffement	378
13.7.2	Échauffement et emballement des électrons	381
13.8	Autres coefficients de transport	385
13.9	Appendices	387
A13-1	Coefficients de transport dans l'espace des vitesses	387
A13-2	Équation de Landau	394
A13-3	"Maxwellianisation" des électrons ou des ions par self-interaction	395
A13-4	Écriture de l'équation de Landau sous la forme de Fokker-Planck	398
13.10	Problèmes	399
P13-1	Linéarisation de l'équation de Fokker-Planck	399
P13-2	Conductivité électrique de Lorentz	399
P13-3	Conductivité thermique de Lorentz	399
	Bibliographie	400
14	Plasmas et rayonnement	401
14.1	Introduction	401
14.2	Émission de rayonnement par les électrons libres	403
14.2.1	Champs d'une particule chargée (formules rela- tivistes)	403
14.2.2	Rayonnement d'une particule non relativiste ($v \ll c$)	406
14.3	Rayonnement cyclotron	410
14.3.1	Puissance totale rayonnée	410
14.3.2	Distribution spectrale et angulaire	411
14.3.3	Discussion des approximations	412
14.3.4	Corrections relativistes	413
14.4	Bremsstrahlung électron-neutre	413
14.4.1	Remarques préliminaires	413
14.4.2	Bremsstrahlung électron-neutre	414
14.5	Bremsstrahlung électron-ion ($v \ll c$)	418
14.5.1	Quelques quantités fondamentales	418
14.5.2	Puissance totale rayonnée	419
14.5.3	Dépendance spectrale	421
14.5.4	Effets de dispersion	426
14.5.5	Théorie quantique	427
14.5.6	Longueurs d'absorption	428

14.6	Description d'un champ de rayonnement dans le vide	429
14.6.1	Intensité spécifique et distribution photonique	429
14.6.2	Quantités macroscopiques associées au rayonnement	433
14.6.3	Anisotropies de I_ν . Champs de rayonnement iso-	
	trope	434
14.7	Description d'un champ de rayonnement dans un plasma . .	437
14.7.1	Microchamps et macrochamps	437
14.7.2	Ondes dans un plasma homogène	438
14.7.3	Plasmas faiblement inhomogènes	438
14.7.4	Grandeurs hydrodynamiques radiatives	439
14.7.5	Plasma à l'équilibre thermodynamique	439
14.8	Transfert radiatif dans un plasma	440
14.8.1	L'équation de transfert	440
14.8.2	Théorie cinétique et hydrodynamique des photons .	445
14.8.3	Analyse des termes collisionnels des photons	448
14.8.4	Approximations physiques du transfert radiatif . .	453
14.9	Classification des plasmas en hydrodynamique radiative .	457
14.9.1	Équation de Boltzmann pour les photons	457
14.9.2	Densités d'énergie	459
14.9.3	Longueurs d'interaction photon-électron	460
14.9.4	Longueurs d'interaction des électrons	461
14.9.5	Familles de plasmas	462
14.10	Interactions laser-matière à très haut flux	465
14.10.1	Propriétés des lasers de grande puissance	465
14.10.2	Effets stimulés dans les interactions $h\nu$ - e	465
14.10.3	Effets multiphotoniques sur les atomes	466
14.10.4	Oscillation relativiste des électrons dans une onde .	466
14.10.5	Effets multiphotoniques sur les particules	467
14.11	Appendices	467
A14-1	Développement de I_ν en harmoniques sphériques .	467
14.12	Problèmes	468
P14-1	Champs de convection	468
P14-2	Refroidissement par rayonnement cyclotron	469
P14-3	Pertes d'énergie dans les collisions e - o	469
P14-4	Bremsstrahlung électron-neutre	470
P14-5	Opérateur de Lorentz pour $h\nu$ - e	470
P14-6	Libre parcours moyen de Rosseland	470
P14-7	Opérateur de Boltzmann avec effets stimulés	470

Avant-propos

Le présent traité (en deux volumes) résulte de l'expérience des auteurs dans l'enseignement de la physique des plasmas, à l'université de Paris-Sud et au Massachusetts Institute of Technology depuis une trentaine d'années. Il contient notamment la matière enseignée au D.E.A. de physique des gaz et des plasmas à l'université Paris-Sud. C'est un ouvrage d'enseignement à l'usage des professeurs et des étudiants. Mais il a été également conçu comme un ouvrage de référence pour les chercheurs et les ingénieurs sur les méthodes générales et les données de base de la physique des plasmas.

Le mot "plasma" y est pris dans son sens large de gaz ionisé. Il est en effet utile de décrire dans un même ouvrage à la fois la physique des "vrais" plasmas (gaz totalement ionisés), dont les principales applications sont en astrophysique et dans la fusion thermonucléaire, et celle des gaz faiblement ionisés dont les applications technologiques n'ont cessé de se diversifier depuis les premières études de décharges dans les gaz. En fait les deux domaines sont étroitement liés, tant du point de vue des concepts que des techniques expérimentales. Ils présentent d'ailleurs de nombreuses (et intéressantes) difficultés didactiques que nous avons essayé de surmonter :

- Un exposé cartésien et linéaire serait peu satisfaisant : il conduirait à ne présenter certains concepts fondamentaux qu'après plusieurs centaines de pages. C'est pourquoi le livre est organisé en trois vagues successives, en revenant ainsi plusieurs fois sur le même sujet mais à des niveaux de plus en plus approfondis.
 - Le chapitre 1 est une introduction générale à toute la physique des plasmas. Les notions fondamentales y sont présentées de façon qualitative, ou avec des calculs élémentaires. Il se situe au niveau du premier cycle des universités.
 - Les chapitres 2 (trajectoires dans un champ magnétique), 3 (collisions élastiques), 4 (collisions inélastiques), 5 (description macroscopique des gaz faiblement ionisés), 6 et 7 (description hydrodynamique des ondes sur les faisceaux d'électrons et des instabilités de courant dans les plasmas), se situent au niveau du second cycle des

universités. Les chapitres 1 à 7 forment le volume 1.

– Les chapitres 8 et 9 (équations générales de la théorie cinétique et de l'hydrodynamique), 10 et 11 (théorie de Vlasov-Landau et instabilités cinétiques dans les plasmas non collisionnels), 12 et 13 (théorie cinétique collisionnelle des gaz faiblement ionisés et des plasmas) et 14 (plasmas et rayonnements) se situent au niveau du troisième cycle des universités. Ils constituent le volume 2.

- Il faut éviter de noyer l'exposé dans des formalismes mathématiques trop lourds dont la physique serait absente. Mais on ne peut se contenter non plus d'exposés qualitatifs. Pour résoudre ce dilemme nous proposons :
 - un exposé en trois vagues comme on vient de le voir ;
 - l'étude approfondie (et mathématiquement rigoureuse) de quelques problèmes de base (équations cinétiques et hydrodynamiques, amortissement de Landau, ondes et instabilités dans les plasmas non magnétisés, modèle de Lorentz, équation de Fokker-Planck), en accompagnant les calculs de commentaires sur leur signification physique et leurs limitations ;
 - l'impression en petits caractères et/ou le renvoi de nombreux calculs dans des appendices ou des problèmes¹.

Dans un tel ouvrage de référence sur les méthodes générales de la physique des plasmas, il a fallu laisser de côté de nombreux domaines considérés comme des applications : décharge dans les gaz, fusion thermonucléaire, ondes et instabilités dans les plasmas magnétisés. . . Pour pallier cette limitation nous offrons au lecteur :

- une présentation qualitative assez détaillée de certains sujets (ondes dans les plasmas, fusion nucléaire, décharges dans les gaz) au chapitre 1 ;
- une étude détaillée au niveau des méthodes de certains cas essentiels (ondes et instabilités hydrodynamiques dans les chapitres 6 et 7, ondes et instabilités cinétiques dans les chapitres 10 et 11) ;
- une bibliographie permettant d'aborder les développements récents.

En terminant il nous faut remercier les organismes et les personnes qui nous ont permis de mener cette œuvre à bien :

- nos établissements (U.P.S. et M.I.T.) qui ont très tôt encouragé les enseignements et les recherches en physique des plasmas ;
- l'École Supérieure d'Électricité qui nous a donné les moyens nécessaires à la mise au point finale de ce livre et le C.N.R.S. qui a aidé au financement ;

1. Les problèmes qui sont en fait des compléments du texte principal sont marqués d'un astérisque (*).

– les nombreuses secrétaires telles que E. Claudon qui, dans l'ère pré-informatique, ont dactylographié des textes à distribuer aux étudiants, et les personnes, secrétaires (H. Budd, L. Doughty et A.M. Pozdrec) ou informaticiens (F. Katsonis) qui nous ont aidés ensuite à faire la saisie informatique ;

– les nombreux collègues et étudiants qui nous ont fait des critiques constructives, et tout spécialement dans la phase finale C. Fabre qui au nom de l'éditeur a été un "referee" vigilant et nous a permis d'apporter de très nombreuses améliorations au texte définitif.

Jean-Loup Delcroix
Abraham Bers

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.

Notations

Il est impossible dans un livre de la taille de celui-ci d'éviter les conflits de notations. Certains symboles peuvent donc désigner deux ou plusieurs grandeurs différentes en des endroits différents du texte. Un effort de rationalisation a cependant été fait. On a tout d'abord les règles générales suivantes :

- La nature *vectorielle* des grandeurs est notée comme suit : a désigne un scalaire, \vec{a} un vecteur, \bar{a} un tenseur du deuxième ordre et $\bar{\bar{a}}$ un tenseur du troisième ordre.
- Les diverses *moyennes* introduites sont : $\langle a \rangle$ pour une moyenne d'ensemble (cf. chapitre 8) ou, dans les ondes, une moyenne dans l'espace ou le temps (cf. chapitres 6 et 7) et \bar{a} pour une moyenne locale représentant une grandeur hydrodynamique (cf. chapitre 9).
- Dans l'étude des *perturbations*, l'indice inférieur 0 est affecté aux grandeurs dans l'état non perturbé, et l'indice inférieur 1 aux perturbations du premier ordre.
- Dans les mélanges gazeux (comme les plasmas) l'indice inférieur a ou s se rapporte à une espèce de particules (e pour les électrons, i pour les ions, o pour les neutres et ϕ ou ν pour les photons), et l'indice inférieur ab se rapporte aux interactions entre les particules a et b .
- Pour diverses grandeurs hydrodynamiques qui contiennent des composantes dues aux champs électromagnétiques, les indices inférieurs E , M , EM se rapportent aux champs électriques, magnétiques ou électromagnétiques.
- Le système d'*unités* utilisé dans toutes les formules théoriques est le système légal international (**SI**). Les applications numériques sont faites, soit dans celui-ci, soit dans le système (**CGS**), soit dans un système pratique dit (**eVcT**), où les seules grandeurs qui apparaissent littéralement sont la température en eV, la densité en cm^{-3} , et l'induction magnétique en Tesla. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, le système utilisé est indiqué en caractères gras comme ci-dessus.

Les notations le plus souvent adoptées pour désigner les diverses grandeurs sont rassemblées dans le tableau ci-dessous, où la dernière colonne renvoie à la section (sans parenthèses) ou la formule (entre parenthèses) dans laquelle chaque grandeur est définie :

a_0	rayon de la première orbite de Bohr ($= 5.29 \cdot 10^{-11} \text{m}$)	14.10
\vec{A}	potentiel vecteur	2.10
α	coefficient de recombinaison en volume	5.9
α	degré d'ionisation	1.2
α	polarisabilité d'un atome	3.2
α_0	partie isotrope d'une fonction de distribution	(12.20)
$\alpha_{\ell m}$	coefficients d'anisotropie d'une fonction de distribution	(12.20)
$B_{0\nu}$	fonction de Planck	(14.140)
\vec{B}	induction magnétique	1.5
$\beta = n\kappa T/p_M$	paramètre de confinement magnétique	9.5
$\beta = w/c$	paramètre relativiste	7.5
$\beta_{\ell m}$	coefficients d'anisotropie d'une fonction de distribution	(12.20)
$\vec{\Gamma} = n \vec{v}$	flux de particules	6.2
dr	élément de volume dans l'espace \vec{r}	8.2
dw	élément de volume dans l'espace \vec{w}	8.2
d_e	distance moyenne entre électrons	1.6
$d\Omega$	élément d'angle solide	3.3
$d\Omega$	élément de l'espace des phases	8.2
D	densité dans l'espace des phases	8.2
D	diamètre d'interaction de deux sphères dures	3.2
D_a	coefficient de diffusion ambipolaire parfaite	(5.77)
D_e	coefficient de diffusion libre des électrons	5.2
D_i	coefficient de diffusion libre des ions	5.3
$D(\omega, \vec{k}) = 0$	équation de dispersion	1.7
$\vec{\delta}$	tenseur diagonal unitaire	
$\langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t$	coefficient de déplacement dans l'espace des vitesses	13.3
$\langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t$	coefficient de diffusion dans l'espace des vitesses	13.3
$\langle \Delta w_{a\parallel} \rangle_b / \Delta t$	coefficient de ralentissement	13.3
$\langle (\Delta w_{a\perp})^2 \rangle_b / \Delta t$	coefficient de dispersion angulaire	13.3
$e = -q_e$	charge de l'électron ($= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$)	1.3
\vec{E}	champ électrique	1.3
η	viscosité	9.2
$\eta_\omega(\vec{s}, \vec{v})$	émissivité spectrale d'un électron	14.2
f_1 ou f	fonction de distribution simple	8.3
$\hat{f} = f/n$	fonction de distribution normalisée	10.3
f_{12}	fonction de distribution double	(8.40)
$F(w_k)$	fonction de distribution réduite à une dimension	(10.269)
$g_1(w, \vec{k})$	valeur initiale de la perturbation de f	(10.100)
\vec{g}	vitesse relative dans une collision	3.2
\vec{G}	densité de quantité de mouvement	(10.81)
$G_{ab}(\vec{w}_a)$	Pseudo-potentiel de Rosenbluth (diffusion)	(13.50)
$\hat{G}_0(w_k)$	Fonction caractéristique (critères de Penrose)	(11.34)
H	hamiltonien	8.2

$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$	champ magnétique	2.2
$H_{ab}(\vec{w}_a)$	Pseudo-potential de Rosenbluth (ralentissement)	(13.49)
$H(\omega)$	Fonction caractéristique (critères de Penrose)	(13.36)
I	terme de source de particules	9.2
$I_\nu(\vec{r}, \vec{s}, t)$	intensité spectrale de rayonnement	(14.106)
$I(\omega/k_r)$	fonction caractéristique (critères de Penrose)	(11.33)
j_ν	coefficient d'émission	14.8
j_ω	émissivité spectrale des électrons	14.5
\vec{J}_{ab}	flux dans l'espace des vitesses (collisions lointaines)	(13.84)
$J(f)$	intégrale de Boltzmann	(8.78)
\vec{J}	courant électrique	1.3
J_ν	coefficient d'injection dans un petit faisceau lumineux	14.8
\vec{k}	vecteur d'onde	1.7
k_i	partie imaginaire de k	6.5
k_r	partie réelle de k	6.5
$K(\vec{k}, \omega)$ ou \bar{K}	permittivité	(11.119)
$K_L(k, \omega)$	permittivité longitudinale	(10.114)
K_ν	coefficient d'extraction dans un petit faisceau lumineux	14.8
κ	constante de Boltzmann	1.2
κ_ν	coefficient d'absorption apparent	14.8
$\kappa_{\nu a}$	coefficient d'absorption vrai	14.8
$\kappa_{\nu s}$	coefficient d'émission stimulée	14.8
\mathcal{K}	conductivité thermique	9.2
χ	angle de déviation dans une collision	3.2
$\chi(k, \omega)$ ou $\bar{\chi}$	susceptibilité	(10.255)
$\chi_L(k, \omega)$	susceptibilité longitudinale	(6.24)
ℓ	libre parcours moyen	8.4
ℓ_b	longueur d'absorption par bremsstrahlung $e-i$	14.5
ℓ_c	libre parcours moyen Compton	14.8
ℓ_R	libre parcours moyen de Rosseland	(14.249)
\ln	logarithme népérien	3.5
$\ln \Lambda$	logarithme coulombien (collisions)	3.5
$\ln \Gamma$	logarithme coulombien (bremsstrahlung)	14.5
λ_B	longueur de de Broglie	3.5
λ_D	longueur de Debye électronique	(1.49)
λ_s	longueur d'écran exacte	(1.68)
Λ_j	longueur de diffusion du mode j	5.4
\log	logarithme décimal	1.6
m	masse d'une particule	1.5
μ	masse réduite dans une collision	3.2
μ ou $\bar{\mu}$	mobilité	5.2
$\vec{\mu}$	moment magnétique orbital	(2.27)
n_1 ou n	densité simple	8.3
n_{12}	densité double	8.3
n_{ab12}	densité double (mélanges)	8.3
$N = kc/\omega$	indice de réfraction	1.3
N	nombre de particules d'un ensemble	8.2
N_D	nombre d'électrons dans la sphère de Debye	1.4
N_r	indice de réfraction des rayons lumineux	14.8
ν_{ei} ou ν_1	fréquence de collision électron-ion	13.2

ν_{eo} ou ν_1	fréquence de collision électron-neutre	12.3
ν_I	fréquence d'ionisation	5.4
ω	fréquence (angulaire)	1.3
ω_i	partie imaginaire de ω	6.5
ω_r	partie réelle de ω	6.5
ω_{pe}	fréquence plasma électronique	1.3
ω_{pi}	fréquence plasma ionique	1.3
ω_p	fréquence plasma totale	1.3
Ω	fréquence cyclotron	1.5
$\vec{\Omega}$	vecteur rotation cyclotron	(2.6)
p	pression	9.2
p	paramètre d'impact	3.2
p_0	paramètre d'impact critique	3.2
p_i	moment canonique	2.10
\vec{P}	échange de quantité de mouvement	9.2
$P(\vec{s}, t)$	puissance rayonnée par un électron	14.2
ϕ	coordonnée d'azimut	2.2
ϕ	potentiel électrostatique	2.10
$\overline{\pi}$	pression interparticulaire	(9.38)
$\overline{\Psi}$	pression cinétique	(9.4)
q	charge d'une particule	1.2
\vec{q}	vecteur flux de chaleur	(9.16)
\overline{Q}	tenseur flux de chaleur	(9.5)
\vec{r}	vecteur position	3.2
\vec{r}	vecteur position du mouvement relatif	3.2
$R(u)$	fonction de ralentissement par collisions	(13.63)
\vec{r}_G	vecteur position du centre de masse	3.2
\vec{R}	position du centre guide	2.2
r_0	longueur de Landau	(1.41)
r_0	rayon classique de l'électron ($= 2.82 \cdot 10^{-15}$ m)	14.8
ρ	densité de charge d'espace	1.4
ρ	rayon d'orbite	2.2
ρ	résistivité	9.3
ρ_m	densité de masse	9.3
s	terme d'échange d'énergie par collisions	9.2
$S(u)$	fonction de dispersion angulaire par collisions	(13.65)
\vec{S}	flux d'énergie	9.2
\vec{S}_K	flux d'énergie cinétique	10.2
S_ν	fonction source (transfert du rayonnement)	(14.180)
σ ou $\overline{\sigma}$	conductivité électrique	1.5
σ	constante de Stefan ($= 5.67 \cdot 10^{-8}$ W m ⁻² K ⁻⁴)	14.6
$\sigma(\chi, \phi)$	section efficace différentielle angulaire	(3.52)
σ_0	section efficace totale	(3.85)
σ_1	section efficace de transfert de quantité de mouvement	(3.87)
σ_2	deuxième section efficace de transport	13.2
σ_I	section efficace d'ionisation	5.4
t	temps	1.5
t_D	temps de relaxation de déflexion	13.4
t_r	temps de relaxation de ralentissement	13.4

T	température	1.2
T_{ab}	température de Boltzmann des niveaux a et b	14.8
T_ν	température de radiation	14.8
\overline{T}	flux de quantité de mouvement	(9.9)
τ_ν	taux d'occupation des états quantiques du rayonnement	14.6
θ_m	angle au sommet dans une trajectoire de collision	3.2
u	énergie d'une particule	3.2
u ou u_K	énergie cinétique d'une particule	3.2
u_P	énergie potentielle d'une particule	3.2
U	densité d'énergie	9.2
U_E	densité d'énergie électrostatique	10.2
U_{EM}	densité d'énergie électromagnétique	10.2
U_k	énergie d'onde	6.3
U_K	densité d'énergie cinétique	9.2
U_M	densité d'énergie magnétique	10.2
U_P	densité d'énergie potentielle	9.2
\overrightarrow{v}	vitesse de fluide	9.2
\overline{v}	vitesse d'une particule (chapitres 2 et 14)	2.1
$v_T = \sqrt{\kappa T/m}$	vitesse "thermique"	1.12
$v_t = \sqrt{2\kappa T/m}$	vitesse la plus probable	1.12
v_p ou v_ϕ	vitesse de phase	1.3
v_g	vitesse de groupe	6.2
\overline{w}	vitesse d'une particule	8.2
\overrightarrow{V}	vitesse de masse	9.3
V_a	vitesse d'Alfvén	(9.123)
V_s	vitesse du son	(1.114)
$x = \log n_e$	coordonnée pour la classification des plasmas (CGS)	1.6
\overrightarrow{X}_{12}	force d'interaction entre deux particules	3.2
$y = \log T_e$	coordonnée pour la classification des plasmas (K)	1.6
z_ν	profondeur optique	14.8
Z_ie	charge d'un ion	1.4

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.

Chapitre 1

Gaz ionisés et plasmas

1.1 Introduction

1.1.1 Historique

Le terme “plasma” a été introduit en physique en 1928 [1] par le physicien américain I. Langmuir pour désigner, dans les tubes à décharge, certaines régions équipotentielles contenant un gaz ionisé électriquement neutre. Par la suite, ce mot a été utilisé, surtout en astrophysique, pour désigner un état dilué de la matière, analogue à un gaz, mais constitué de particules chargées, électrons et ions positifs, en proportions telles que le milieu soit globalement neutre. Le plus simple des plasmas est celui d’hydrogène, formé d’électrons et de protons libres en concentrations égales. Ainsi définis, les plasmas se confondent donc avec le quatrième état de la matière, faisant suite, dans l’échelle des températures, aux trois états classiques, solide, liquide et gaz. Les propriétés spéciales des plasmas sont dues au long rayon d’action de la force entre particules (force coulombienne) : un électron ou un ion du plasma interagit à chaque instant avec beaucoup d’autres. On peut même décrire de nombreuses propriétés des plasmas (effets collectifs) en considérant ceux-ci comme des mélanges de deux fluides continus d’électricité positive et négative. Par suite de leur faible densité, les plasmas conservent cependant certaines propriétés des gaz (grande compressibilité, énergie interne et pression proportionnelles à la température absolue, etc.).

La transition entre les gaz neutres et les plasmas complètement ionisés est assurée par les gaz partiellement ionisés. Par abus de langage, on donne également souvent à ceux-ci le nom de plasmas dans la mesure où ils sont électriquement neutres. En fait, les propriétés mécaniques (écoulements,

ondes acoustiques, etc.) des gaz faiblement ionisés sont analogues à celles des gaz neutres, tandis que leurs propriétés électromagnétiques (conductivité électrique, indice de réfraction, par exemple) en diffèrent par suite de la présence d'électrons libres en leur sein.

Plusieurs applications technologiques ont stimulé le développement de la physique des plasmas :

- Dès le début de ce siècle, Heaviside (et d'autres chercheurs) ont compris que les radiocommunications à très grande distance pourraient utiliser une réflexion des ondes sur une couche ionisée dans la haute atmosphère (c'est-à-dire par ce qu'on appelle maintenant l'ionosphère). Cette application a suscité les premières études de propagation d'ondes dans les gaz ionisés ; plus tard il a fallu, pour analyser les effets du champ magnétique terrestre, généraliser ces études au cas des gaz ionisés plongés dans un champ magnétique.
- Les travaux de Langmuir ont été consacrés au développement de divers dispositifs à décharge dans les gaz (arcs, lampes) et il lui a fallu comprendre les propriétés de l'état plasma qu'il avait identifié dans ces dispositifs. Plus tard, des dispositifs à décharge furent produits avec des ondes et cela conduisit au développement des tubes TR (transmission/réception) et d'interrupteurs pour le radar.
- Depuis les années 20, on s'est intéressé également aux tubes à faisceau d'électrons, à commencer par le magnétron de Hull, comme sources de rayonnement cohérent de haute fréquence. Bien que les faisceaux d'électrons ne soient pas en général neutres ils possèdent des propriétés dynamiques collectives (les ondes de charge d'espace) analogues à celles des plasmas. L'étude de ces propriétés a été poussée par le développement rapide entre 1935 et 1960 de divers types de tubes pour hyperfréquences (klystrons, tubes à onde progressive, carcinotrons...). Depuis 1970, avec l'arrivée des faisceaux intenses d'électrons relativistes, des dispositifs tels que les gyrotrons et les lasers à électrons libres continuent de susciter de l'intérêt pour l'étude des propriétés dynamiques de ces plasmas non neutres que sont les faisceaux d'électrons.
- Les études sur la décharge dans les gaz sont toujours très actives. En plus des applications traditionnelles liées notamment à l'éclairagisme et au transport de l'énergie électrique à de très hautes tensions, elles interviennent dans de nombreuses techniques nouvelles : production de hautes températures dans les chalumeaux à plasma, de lumière cohérente intense dans les lasers à gaz, méthodes de traitement de surface par plasma en mécanique et en microélectronique (par exemple gravure et dépôt de films en milieu non aqueux).

- Enfin, une application des plasmas, la production d'énergie par fusion thermonucléaire contrôlée, qui paraît encore futuriste mais qui peut être capitale pour l'avenir de l'humanité, a fait l'objet, surtout depuis 1955, de vastes programmes de recherches. L'objectif poursuivi est la domestication des réactions nucléaires que l'on produit dans les bombes H, à savoir les réactions de fusion des noyaux légers (deutérium, tritium) en noyaux d'hélium. Pour réussir à faire fonctionner un tel réacteur à fusion, il faut tout d'abord produire et confiner pendant un temps suffisant un plasma de deutérium et de tritium de densité assez élevée et de température dans la gamme dite thermonucléaire (10^8 K). Les méthodes proposées utilisent des champs magnétiques (confinement magnétique) ou des implosions (confinement inertiel) pour isoler le plasma des parois froides extérieures, mais le but visé se révèle très difficile à atteindre, du fait des nombreuses oscillations et instabilités qui tendent à se produire dans les plasmas confinés. D'importants progrès ont cependant été fait depuis le début des années 90, et des projets internationaux grandioses se préparent en ce moment.

Bien que l'analyse théorique des plasmas soit relativement simple (forces entre particules connues exactement, description par la mécanique classique possible en général), leur étude ne s'est développée que tardivement. La complexité de l'état plasma dans ses diverses formes a conduit à un grand nombre de méthodes d'analyse théoriques apparemment distinctes. Pour les plasmas faiblement ionisés l'attention se concentre sur la description des processus de collision et leurs relations avec divers aspects de la physique atomique. Pour la propagation des ondes dans l'ionosphère, le plasma est traité comme un mélange de deux fluides chargés électriquement (l'un positif, l'autre négatif) ; les déséquilibres de densités produisent alors des effets de charge d'espace et l'accent est mis surtout sur les effets éventuels d'un champ magnétique d'origine extérieure. L'intérêt des astrophysiciens pour l'étude des mouvements d'un fluide conducteur dans un champ magnétique a conduit au contraire à la description MHD (magnétohydrodynamique) des plasmas dans laquelle on néglige les effets de charge d'espace ; cette description monofluide des plasmas qui s'applique aux phénomènes dynamiques de basse fréquence est devenue une extension à plusieurs facettes de la dynamique classique des fluides. Enfin, la théorie cinétique des plasmas complètement ionisés est devenue, en particulier avec la turbulence des plasmas, l'un des chapitres les plus intéressants de la théorie moderne du problème à N corps. Ce n'est que vers 1950 que ces derniers travaux ont commencé à progresser rapidement.

Du point de vue expérimental, des techniques sont apparues (hyper-

fréquences, et plus récemment lasers) qui permettent de mesurer avec précision les paramètres fondamentaux des plasmas : densité et température électroniques, fréquence de collision des électrons. Grâce au développement de la radioastronomie puis de la recherche spatiale, on a pu explorer les plasmas de l'environnement terrestre : ionosphère, magnétosphère, vent et couronne solaires... De manière plus générale, la physique des plasmas joue maintenant un rôle très important dans toute l'astrophysique et la cosmologie : on pense que plus de 99% de l'Univers est constitué par de la matière à l'état de plasma. Des problèmes de plasmas sont apparus dans de nombreuses techniques nouvelles : explosions nucléaires, conversions magnétohydrodynamique et thermoionique de l'énergie, rentrée des objets spatiaux dans l'atmosphère, propulsion électrique des satellites, lasers à gaz, découpage des métaux par chalumeau à plasma, traitements de surface en microélectronique, par exemple.

1.1.2 Plan du chapitre

Le présent chapitre est une introduction générale assez détaillée à la physique des plasmas. Il a paru utile de faire une présentation relativement élémentaire de toutes les notions qui seront ensuite développées de façon plus détaillée et plus rigoureuse dans les chapitres suivants. Cela permet au lecteur de se familiariser avec les propriétés principales des plasmas en évitant l'arsenal mathématique, parfois lourd, nécessaire dans une étude plus approfondie. Les sujets abordés seront les suivants :

- Grandeurs de base permettant de décrire un plasma : densité n_e et température T_e électronique (section 1.2).
- Classification des plasmas, résumée sur un diagramme (n_e, T_e) avec deux variantes : interactions dans la matière (section 1.6), interactions matière-rayonnement (section 1.8 développée dans le chapitre 14).
- Fréquences fondamentales : fréquence plasma ω_p des oscillations collectives de charge d'espace (section 1.3 développée dans le chapitre 10), et fréquence ν_{ei} de collision $e-i$ (section 1.6 développée dans le chapitre 13) reliées en général par la relation $\omega_p \gg \nu_{ei}$.
- Longueurs fondamentales : longueur r_o de Landau (interactions binaires), longueur λ_D de Debye (interactions collectives), avec en général $\lambda_D \gg r_o$ (section 1.4).
- Trajectoires de particules (section 1.5 développée dans le chapitre 2).
- Modèles de théorie cinétique : avec interactions collectives dominantes pour les plasmas fortement ionisés (section 1.6 développée

- dans les chapitres 6 et 10), et collisions binaires dominantes pour les gaz faiblement ionisés (section 1.9 développée dans le chapitre 12).
- Plasmas et rayonnement (section 1.8 développée dans le chapitre 14).
 - Ondes dans les plasmas : ondes électromagnétiques transversales, ondes électroacoustiques longitudinales dans les cas simples, et en général quatre modes hybrides en présence d'un champ magnétique (section 1.7).
 - Applications des plasmas : décharges dans les gaz, sujet classique bien vivant (section 1.11) et fusion thermonucléaire contrôlée, sujet futuriste mais très important pour l'avenir de l'humanité (section 1.10).

Les deux derniers domaines mentionnés ci-dessus ne sont pas ensuite développés dans le corps de l'ouvrage. Pour ceux-là, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de référence des derniers paragraphes de la bibliographie donnée à la fin du livre.

1.2 Gaz ionisés et plasmas

1.2.1 Degré d'ionisation

Dans leur état normal, les gaz sont des isolants électriques. Cela tient au fait qu'ils ne contiennent pas de particules chargées libres, mais seulement des molécules neutres. Cependant, si on leur applique des champs électriques assez intenses, ils deviennent conducteurs ; les phénomènes complexes qui se produisent alors portent le nom de décharges dans les gaz et sont dus à l'apparition d'électrons et d'ions libres.

Le résultat d'une décharge dans un gaz est donc la production d'un gaz ionisé contenant par exemple n_e électrons, n_i ions positifs et n_0 neutres (atomes ou molécules) par unité de volume. La haute atmosphère terrestre, les atmosphères stellaires et les nébuleuses sont également constituées de gaz ionisés ; en général, le gaz est macroscopiquement neutre. On a alors :

$$n_e = n_i = n \quad (1.1)$$

Cette neutralité est la conséquence des forces électrostatiques très intenses qui apparaissent dès que l'on a $n_e \neq n_i$.

Le degré d'ionisation d'un gaz est défini par le rapport :

$$\alpha = \frac{n}{n_0 + n} \quad (1.2)$$

où n_0 est la densité (nombre de particules par unité de volume) des neutres et n celle des électrons (ou des ions positifs). La valeur du degré d'ionisation

dans les divers types de gaz ionisés varie en pratique depuis des valeurs très faibles, de l'ordre de 10^{-10} , par exemple, jusqu'à 1. On peut classer les gaz ionisés en deux grandes familles selon le degré d'ionisation, en prenant comme critère la nature des interactions dominantes :

- Les gaz faiblement ionisés dans lesquels la fréquence des collisions ν_{e0} entre les électrons et les neutres est supérieure aux deux fréquences de collisions $\nu_{ee} \approx \nu_{ei}$ des électrons entre eux ou avec les ions. Cette inégalité $\nu_{e0} > \nu_{ee}, \nu_{ei}$ correspond à des degrés d'ionisation α inférieurs à une valeur critique α_0 que nous discuterons ci-dessous.
- Les gaz fortement ionisés dans lesquels on a au contraire $\nu_{e0} < \nu_{ee}, \nu_{ei}$; qui correspondent à des degrés d'ionisation $\alpha > \alpha_0$.

Le calcul du degré d'ionisation critique α_0 doit se faire à partir de la théorie cinétique des gaz ionisés qui permet de donner des définitions précises des fréquences de collision et de calculer leurs valeurs. Celles-ci peuvent se mettre sous la forme :

$$\nu_{e2} = n_2 \sigma_{e2} w_e \quad (1.3)$$

où w_e est la vitesse des électrons considérés, n_2 la densité des particules cibles 2 et σ_{e2} la section efficace (en général fonction de w_e) pour les collisions e -2. La figure 1.1 montre le résultat du calcul de α_0 pour les électrons “moyens” ($w_e = \sqrt{2\kappa T_e/m_e}$, cf. problème P1-1) dans l'hélium. Pour une valeur typique $\kappa T_e \sim 1$ eV on a $\alpha_0 \sim 10^{-7}$.

Il suffit donc de degrés d'ionisation très faibles pour que le gaz soit dans la famille des “fortement ionisés”. Ce paradoxe tient au fait que le potentiel d'interaction coulombienne entre deux particules chargées est à très longue portée (faible décroissance avec la distance $\sim 1/r$) de sorte que les sections efficaces d'interaction correspondantes sont supérieures de plusieurs ordres de grandeur aux sections efficaces électron-neutre.

Quand le degré d'ionisation est égal à l'unité, la densité des molécules neutres est nulle ; on dit que le gaz est totalement ionisé, ou encore qu'il constitue un plasma. Ce nom rappelle que le milieu peut alors être le support d'oscillations de charge d'espace qu'on décrira plus loin, qu'on appelle “oscillations de plasma”, et qui ressemblent à des vibrations d'un milieu gélatineux¹. En fait, on désigne maintenant souvent sous le nom de plasma n'importe quel gaz ionisé.

1. En fait, nous avons vu dans l'introduction que le terme “plasma” a été introduit dans la physique des gaz ionisés par I. Langmuir en 1929. Bien que cette dénomination ne soit pas justifiée dans l'article original, on peut penser qu'elle se rattache au sens du mot grec $\pi\lambda\alpha\sigma\mu\alpha$: matière informe.

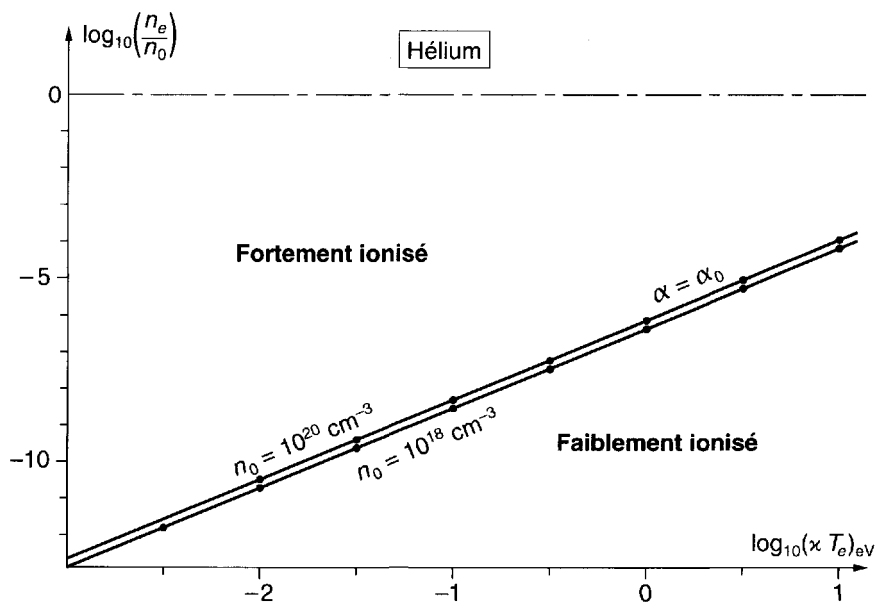


Figure 1.1 : Les deux familles de gaz ionisés. Cas de l'hélium.

n_e, n_o densité des électrons et des neutres, κT_e température électronique en eV, α degré d'ionisation.

1.2.2 Ionisation thermique d'un gaz

Lorsqu'on chauffe un gaz à une température T suffisamment élevée (de l'ordre de 10^4 K), l'énergie moyenne $3\kappa T/2$ de translation de ses molécules peut devenir du même ordre que leur énergie d'ionisation E_i ; dans ces conditions, lorsque deux molécules entrent en collision, il peut y avoir ionisation de l'une d'entre elles.

Si le gaz est en équilibre thermodynamique, l'ionisation par collisions est contrebalancée par des processus de recombinaison entre électrons et ions et il en résulte que les trois variables α , n et T ne sont pas indépendantes : l'ionisation est déterminée par la pression et la température ; on dit alors que le gaz est en état d'équilibre d'ionisation thermique. Les propriétés de cet équilibre sont décrites dans le cas simple d'un gaz monoatomique par une formule établie en 1920 par l'astrophysicien M.N. Saha [1b] (cf. problème P1-3) :

$$\frac{n_e n_i}{n_o} = \frac{\pi_e \pi_i}{\pi_o} \frac{(2\pi m_e \kappa T)^{3/2}}{h^3} \exp(-E_i / \kappa T) \quad (1.4)$$

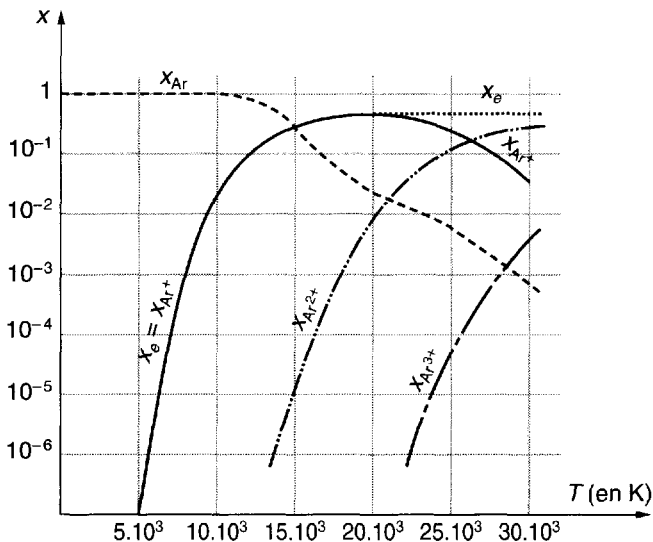


Figure 1.2 : Ionisation thermique de l'argon pour $p = 1$ atm.

X_a concentration relative de l'espèce a , T température en 10^3 K.

où m_e est la masse de l'électron, κ la constante de Boltzmann, h la constante de Planck, π_e, π_i et π_0 , les poids statistiques respectifs de l'électron, de l'ion et de l'atome neutre ; π_0 et π_i dépendent de l'espèce atomique considérée mais on a toujours $\pi_e = 2$ (deux états de spin). En remplaçant les constantes par leur valeur numérique l'équation (1.4) devient :

$$\frac{n_e n_i}{n_0} \approx 6.04 \times 10^{27} \frac{\pi_e \pi_i}{\pi_0} (\kappa T)^{3/2} \exp(-E_i/\kappa T) \quad (\mathbf{eVcT}) \quad (1.5)$$

A des températures plus élevées, les atomes du gaz peuvent d'ailleurs s'ioniser plusieurs fois. A titre d'exemple, la figure 1.2 montre en fonction de T les concentrations relatives X_{Ar} , X_{Ar+} , $X_{Ar^{2+}}$, ... des diverses espèces d'ions dans l'argon en équilibre à la pression atmosphérique (on appelle concentration relative de l'espèce j la quantité $X_j = n_j / \sum n_j$). On voit que le gaz est ionisé à 90% vers 16 000 K et doublement ionisé vers 28 000 K.

1.2.3 Plasmas hors d'équilibre thermique

Dans de nombreux cas, l'ionisation est due à un champ électrique extérieur, et le gaz n'est pas en équilibre thermodynamique. Il atteindra souvent un

état stationnaire qu'on pourra caractériser par les paramètres α , n , T_e (température des électrons), T_i (température des ions) et T_0 (température des molécules).

Les trois températures ainsi introduites sont définies par la condition que $(3\kappa T_a/2)$ représente l'énergie cinétique moyenne des particules d'espèce a , dans un repère où elles ont une vitesse moyenne nulle. L'écart entre T_e , T_i et T_0 peut être important : par exemple, dans un tube à décharge typique, on pourra avoir : $T_0 \approx T_i \simeq 300$ K et $T_e \simeq 3.10^4$ K. La forte valeur de T_e est due à l'action du champ électrique sur les électrons, et l'ionisation est alors produite par les collisions de ces électrons chauds sur les molécules neutres du gaz.

1.2.4 Densité et température des plasmas usuels

Les valeurs de n et de T que l'on a à considérer dans les divers plasmas variant énormément, il est commode de représenter les plasmas sur un diagramme (cf. Fig. 1.3) dont les coordonnées sont :

$$x = \log_{10} n_e \quad (\text{CGS}) \quad (1.6)$$

$$y = \log_{10} T_e \quad (\text{CGS}) \quad (1.7)$$

Si le gaz est en équilibre thermodynamique, $T_e = T$ et le diagramme permet de définir, comme on vient de le dire, tous les états du gaz ; si celui-ci est simplement dans un régime stationnaire hors équilibre, il ne le permettra que si on suppose fixés les paramètres α , T_i et T_0 . À titre d'exemple, le tableau 1.1 et la figure 1.3 fournissent des valeurs typiques de x et y pour les plasmas rencontrés dans divers domaines de la physique. Les divisions du plan visibles sur cette figure sont décrites au paragraphe 1.6.

Pour exprimer les températures dans les plasmas chauds, on utilise souvent l'électron-Volt au lieu du degré K. Par définition, la valeur de T en eV est en fait la valeur numérique de kT mesurée avec cette unité. La règle de conversion est alors :

$$1 \text{ eV} = 1.16 \times 10^4 \text{ K} \quad (1.8)$$

1.2.5 Familles de gaz ionisés

Parmi tous les gaz ionisés, nous distinguons maintenant trois familles :

- Les gaz faiblement ionisés ($\alpha < \alpha_0$) dans lesquels quelques ions et électrons se déplacent au milieu d'une mer de molécules neutres ; ce

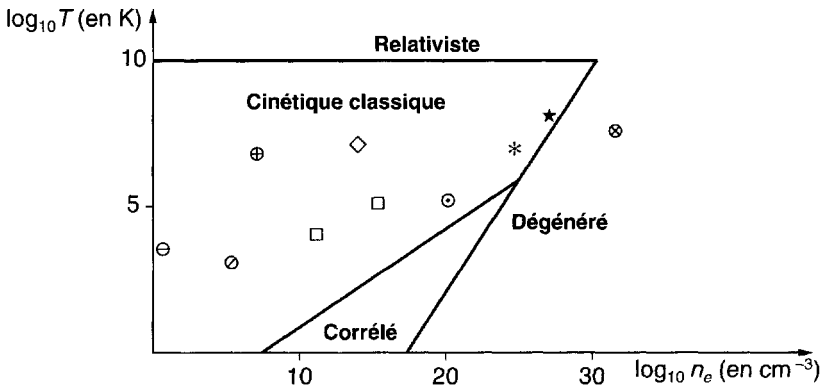


Figure 1.3 : Diagramme de classification des plasmas et position de quelques plasmas typiques (CGS).

- \ominus Espaces interstellaires.
- \odot Ionosphère couche F.
- \oplus Couronne solaire.
- 2 Décharges dans les gaz.
- 3 Tokamak.
- \odot Plasma produit par laser.
- $*$ Explosion nucléaire.
- \star Intérieur des étoiles.
- \otimes Intérieur des naines blanches.

sont alors les collisions binaires entre un électron (ou un ion) et une molécule qui déterminent la dynamique des particules chargées.

- Les gaz fortement ionisés sans interactions entre particules ; ce sont des plasmas suffisamment dilués (par exemple, le vent solaire) dans lesquels les particules chargées suivent sans aucune collision une trajectoire essentiellement déterminée par les champs électromagnétiques d'origine extérieure.
- Les gaz fortement ionisés ($\alpha > \alpha_0$) avec interactions entre particules. On démontre alors que, souvent, un électron particulier peut être considéré comme en interaction avec un grand nombre d'autres particules chargées. Ce sont ces interactions coulombiennes dites collectives qui déterminent essentiellement la dynamique du plasma.

PLASMAS USUELS	$\log_{10} n_e$	$\log_{10} T_e$	$\log_{10} f_p$	$\log_{10} \lambda_D$
Gaz faiblement ionisés				
ionosphère, couche D , altitude 70 km	3	2.5	7.5	0.5
décharge dans les gaz-courant faible	11	4	9.5	-3
décharge dans les gaz-courant fort	15	5	11.5	-4
convertisseur M.H.D.	16	3	12	-6
Gaz fortement ionisés				
gaz interstellaire	0	3.5	4	2.5
vent solaire	0.5	5	4	3
ionosphère, couche F , altitude 250 km	5.5	3	7	-0.5
couronne solaire ($R_\odot \approx 1.6$)	7	6.5	7.5	0.5
plasmas de tokamak	14	7	11	-3
plasmas d'ionisation de surface	12	3	10	-4
plasmas produits par laser	19	5	13.5	-6
explosion nucléaire	20	6	14	-6
magnétosphère de pulsar	12	16	10	3
Matière dense				
électrons dans les métaux	23	2.5	15.5	-9.5
intérieur des étoiles	27	7.5	17.5	-9.5
intérieur des naines blanches	32	7	20	-12

Tableau 1.1 : Paramètres de quelques plasmas typiques (CGS).

n_e densité électronique, T_e température électronique.
 f_p fréquence plasma (cf. paragraphe 1.3).
 λ_D longueur de Debye (cf. paragraphe 1.4).

1.3 Oscillations de plasma

1.3.1 Description qualitative

Si, dans un plasma initialement neutre, on produit une perturbation locale sous la forme d'un excès de charge électrique positive ou négative, celui-ci va tendre à revenir vers l'état d'équilibre de neutralité. Cependant, on peut voir facilement que la perturbation initiale engendre en général une oscillation pendulaire non amortie du plasma autour de son état d'équilibre. La première analyse de ce genre de mouvement a été faite par Lord Rayleigh qui a établi la fréquence naturelle des oscillations d'électrons libres plongés

dans un fond continu de charges positives [1c]. Considérons, par exemple, la situation représentée sur la figure 1.4. À l'instant initial [Fig. 1.4(a)], la région grisée contient un excès d'électrons et la région tout autour un déficit d'électrons. Cela produit un champ électrique tendant à créer un mouvement des électrons dans le sens des flèches. Dans ce mouvement, ceux-ci acquerront une certaine énergie cinétique et ils pourront, au bout d'un certain temps, dépasser la position d'équilibre. Un trop grand nombre d'électrons ayant quitté la région grisée, il y aura un défaut d'électrons dans cette région [Fig. 1.4(b)] et un champ électrique tendant à les ramener vers elle. Au bout d'un certain temps, la situation initiale est reconstituée et le cycle recommence. Les vibrations ainsi produites sont appelées oscillations de plasma électroniques.

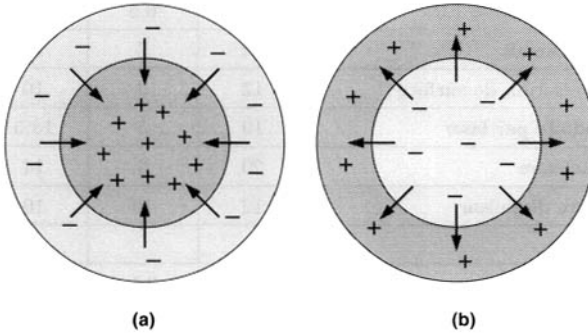


Figure 1.4 : Oscillation de plasma à symétrie sphérique (ions immobiles). Les flèches représentent la force de rappel qui s'exerce sur les électrons.

(a) Déficit d'électrons au centre. (b) Excès d'électrons au centre.

Dans ces oscillations, les ions beaucoup plus lourds que les électrons restent pratiquement immobiles. L'agitation thermique et les collisions jouent en général un rôle négligeable, et un calcul simple développé ci-dessous permet alors d'obtenir la pulsation ω_p des oscillations de plasma par la formule :

$$\omega_{pe} = (n_{e0}q_e^2/m_e\epsilon_0)^{1/2}, \quad (1.9)$$

où q_e est la charge de l'électron² et n_{e0} la densité électronique du plasma non perturbé. Cette pulsation est souvent appelée improprement *fréquence plasma*. En toute rigueur la fréquence plasma est la quantité :

$$f_{pe} = \omega_{pe}/2\pi \quad (1.10)$$

2. Dans cet ouvrage, nous désignons par q_e la charge de l'électron en valeur algébrique et par e cette même charge en valeur absolue, de sorte que l'on a : $q_e = -e$.

qui s'écrit en remplaçant les constantes fondamentales par leurs valeurs :

$$f_{pe} \approx 9000 \sqrt{n_{e0}} \quad (\text{CGS}) \quad (1.11)$$

La fréquence plasma est une fréquence fondamentale qui intervient à tout instant dans la physique des plasmas. Les valeurs de cette fréquence pour quelques plasmas typiques sont données dans le tableau 1.1. Pour mieux en comprendre la signification physique, nous discutons dans les deux sections qui suivent trois situations simples où apparaît ω_{pe} .

Les oscillations de plasma ont été observées pour la première fois par F.M. Penning [1d] et étudiées ensuite en détail par L. Tonks et I. Langmuir [1c].

1.3.2 Oscillations de charge d'espace électronique en volume

On vient de voir qu'une perturbation locale de la densité électronique dans le volume d'un plasma pouvait engendrer des oscillations. On peut étudier quantitativement ce problème en posant les équations générales d'une oscillation de charge d'espace électronique et moyennant les hypothèses suivantes :

1. Les ions sont supposés immobiles et leur densité uniforme égale à n_{i0} .
2. L'agitation thermique est négligeable.
3. Les collisions sont négligeables.
4. Les oscillations sont de faible amplitude.
5. Il n'y a pas de champ électrique ou magnétique imposé par des sources extérieures.

On peut alors écrire les équations hydrodynamiques (cf. paragraphe 9.2) des électrons :

- Équation de conservation des particules :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot n_e \vec{v}_e = 0 \quad (1.12)$$

- Équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$n_e m_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \nabla \right) \vec{v}_e = n_e q_e \vec{E} \quad (1.13)$$

Dans la deuxième on a négligé le terme de pression cinétique [cf. équation (9.45)] et le terme de collision (hypothèses 2 et 3) et négligé le champ magnétique lié à l'oscillation ; on peut simplifier ces équations en utilisant l'hypothèse 4 sous la forme :

$$n_e(\vec{r}, t) = n_{e0} + n_{e1}(\vec{r}, t) \quad (1.14)$$

où $n_{e1}(\vec{r}, t)$ est une petite perturbation ; on peut alors linéariser les équations ci-dessus, en considérant $\vec{v}_e = \vec{v}_{e1}$ et $\vec{E} = \vec{E}_1$ comme des petites perturbations et en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur ; supposons de plus que les quantités variables varient à la fréquence ω ; ces équations s'écrivent finalement en notation³ complexe :

$$-i\omega n_{e1} + n_{e0} \nabla \cdot \vec{v}_{e1} = 0 \quad (1.15)$$

$$n_{e0} m_e (-i\omega) \vec{v}_{e1} = n_{e0} q_e \vec{E}_1 \quad (1.16)$$

Mais on a d'autre part l'équation de Poisson :

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = (n_{i0} q_i + n_{e1} q_e) / \epsilon_0 = n_{e1} q_e / \epsilon_0 \quad (1.17)$$

compte tenu de la condition de neutralité du plasma non perturbé, $n_{i0} q_i + n_{e0} q_e = 0$. Éliminons \vec{v}_{e1} and n_{e1} entre ces trois équations ; il vient successivement :

$$\vec{v}_{e1} = \frac{q_e}{-i\omega m_e} \vec{E}_1 \quad (1.18)$$

$$n_{e1} = \frac{n_{e0} q_e}{\omega^2 m_e} \nabla \cdot \vec{E}_1 \quad (1.19)$$

et finalement en reportant ce résultat dans (1.17) et introduisant la fréquence plasma définie par (1.9) :

$$(\nabla \cdot \vec{E}_1)(1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2) = 0 \quad (1.20)$$

Dans les oscillations de charge d'espace que nous sommes en train d'étudier on a par définition $\nabla \cdot \vec{E}_1 \neq 0$. La relation ci-dessus conduit donc à la condition :

$$\omega = \omega_{pe} \quad (1.21)$$

La méthode que nous avons suivie dans cet exemple simple sera une méthode très générale pour l'étude des propagations d'ondes dans un

3. Les notations complexes ont été introduites en posant par exemple : $\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}_1(\vec{r}) \exp(-i\omega t)]$ où $\vec{E}_1(\vec{r})$ est un vecteur complexe.

plasma homogène : on écrit les équations de la dynamique et les équations de Maxwell (ici l'équation de Poisson) ; on linéarise ces équations pour des petites perturbations. On tombe alors sur un système d'équations aux dérivées partielles. En supposant que les champs varient avec \vec{r} et t comme $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ et $e^{-i\omega t}$ (où \vec{k} est le vecteur d'onde et ω la pulsation) ce système se réduit à un système linéaire homogène d'équations algébriques. Il n'admet de solution non nulle que si son déterminant est nul. Cette condition de compatibilité est en général de la forme :

$$D(\omega, \vec{k}) = 0 \quad (1.22)$$

où ω et \vec{k} sont la fréquence angulaire et le vecteur d'onde de la perturbation. C'est ce qu'on appelle l'équation de dispersion du plasma. Ici nous n'avons pas eu besoin d'introduire \vec{k} et avons trouvé par élimination directe la condition (1.21) qui ne fait intervenir que ω . La pulsation des petites oscillations de charge d'espace est donc toujours égale à ω_p quelle que soit la forme de l'oscillation. On peut aussi dire que les oscillations de plasma décrites ici sont des oscillations stationnaires à l'intérieur de celui-ci ; si, comme nous l'avons supposé, les électrons et les ions n'ont pas d'agitation thermique, elles ne correspondent à aucune propagation d'onde ; l'étude des oscillations de plasma dans un milieu doué d'une agitation thermique (cf. chapitre 10) conduit avec le modèle le plus simple à remplacer la relation $\omega = \omega_p$ par l'équation de dispersion :

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 v_{Te}^2 \quad (1.23)$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est la constante de propagation et $v_{Te} = \sqrt{kT_e/m_e}$ une vitesse moyenne d'agitation thermique des électrons.

L'analyse de cette équation montre que les oscillations de plasma peuvent, à cause de l'agitation thermique, se propager avec une vitesse de phase comprise entre la vitesse d'agitation thermique des particules et la vitesse de la lumière. La discussion du paragraphe 1.7 montrera qu'il y a dans un plasma plusieurs autres modes de propagation d'ondes, en particulier des ondes électromagnétiques transversales dans lesquelles on a $\nabla \cdot \vec{E} = 0$.

1.3.3 Oscillations de gaine

Considérons maintenant un plasma borné limité par une frontière assez nette qui le sépare du vide. En lui appliquant un champ électrique E_0 , ayant une composante perpendiculaire à la frontière, on perturbe son

équilibre : les électrons se déplacent par rapport aux ions et l'on voit apparaître sur la frontière du plasma des gaines d'électrons ou d'ions [Fig. 1.5(a)]. Il en résulte un champ de polarisation E_p opposé au champ extérieur et tendant à ramener les électrons vers leur position d'équilibre. Si l'on fait cesser l'action du champ extérieur, l'ensemble des électrons va effectuer des oscillations autour de la position d'équilibre déterminée par la position des ions.

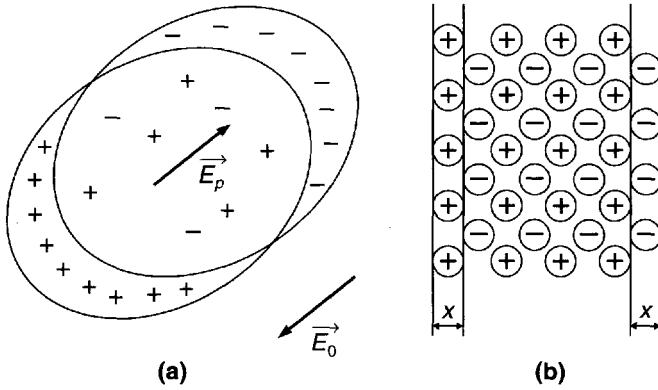


Figure 1.5 : Polarisation d'un plasma par un champ électrique et oscillations de gaine.

- (a) Géométrie quelconque : E_0 champ extérieur, E_p champ de polarisation.
 (b) Géométrie plane : oscillation longitudinale d'une tranche de plasma.

Dans le cas d'une lame plane de plasma, le calcul de la fréquence de ces oscillations se fait facilement au moyen du schéma simple de la figure 1.5(b) : on considère une tranche plane contenant un bloc d'ions immobiles et on suppose que l'on déplace en bloc des électrons qui leur étaient associés. On crée ainsi un champ électrique donné par la formule :

$$E = \sigma / \epsilon_0 \quad (1.24)$$

où σ est la densité superficielle dans la couche mince de charge positive, qu'on a laissée à gauche de la figure, ou de charge négative, qu'on a fait apparaître à droite.

On a donc :

$$\sigma = n_e q_e x \quad (1.25)$$

et

$$E = n_e q_e x / \epsilon_0 \quad (1.26)$$

Chaque électron du nuage est donc soumis à une force de rappel

$$F = -n_e q_e^2 x / \epsilon_0 \quad (1.27)$$

Il va donc effectuer des oscillations de pulsation⁴ $\omega = \omega_{pe}$. Si on refait ce même calcul pour un plasma uniforme de forme différente on trouve pour la pulsation des oscillations :

$$\omega = A\omega_{pe} \quad (1.28)$$

où A est un facteur numérique voisin de l'unité qui dépend de la forme du plasma (pour un cylindre $A = 1/\sqrt{2}$, pour une sphère $A = 1/\sqrt{3}$). Remarquons que dans tous les cas nous avons, comme dans le paragraphe précédent, négligé l'agitation thermique des électrons et les collisions. Cette dernière hypothèse est justifiée par la condition $\omega_{pe} \gg \nu_{\text{collision}}$ que nous discuterons au paragraphe 1.6.

1.3.4 Impédance d'un plasma et ondes électromagnétiques

Les ondes électromagnétiques dans le vide sont des ondes transverses, en ce sens que les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires au vecteur d'onde \vec{k} . Des champs de petite amplitude de ce type peuvent aussi exister dans un plasma. Du fait de la nature transverse de ces champs les perturbations de densité dans le plasma seront nulles (comme on peut le voir à partir de l'équation de Poisson). La dynamique du plasma peut alors se décrire simplement en considérant les trajectoires des particules individuelles dans ces champs.

Imaginons donc qu'un champ électrique alternatif \vec{E} de pulsation ω soit appliqué localement dans un plasma ; il en résulte des oscillations des électrons et des ions à la même fréquence. Si l'on néglige les collisions, la vitesse \vec{v}_e des électrons est fournie par la loi fondamentale de la dynamique :

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = q_e \vec{E}_1 \quad (1.29)$$

dans laquelle on a négligé le terme de perturbation du deuxième ordre

4. Il faut remarquer cependant que les électrons et les ions dans les deux couches externes (gaines) sont soumis à des champs tout à fait non uniformes. Leur mouvement est donc plus complexe et peut conduire à une absorption non linéaire de l'énergie du champ appliqué (cf. [1f] et [1g]).

$q_e \vec{v}_{e1} \times \vec{B}_1$. En régime sinusoïdal et en notation complexe on en déduit :

$$\vec{v}_{e1} = \frac{q_e}{m_e} \int \vec{E}_1 dt = \frac{q_e}{m_e} \frac{\vec{E}_1}{(-i\omega)} = i\omega \frac{q_e}{m_e \omega^2} \vec{E}_1 \quad (1.30)$$

Le vecteur courant électrique associé est :

$$\vec{J}_{e1} = n_{e0} q_e \vec{v}_{e1} \quad (1.31)$$

où n_{e0} est la densité électronique supposée constante. Compte tenu de (1.30) cette densité de courant s'écrit :

$$\vec{J}_{e1} = i\omega \epsilon_0 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \vec{E}_1 \quad (1.32)$$

On voit que ce courant de conduction électronique est en quadrature de phase retard par rapport au champ \vec{E}_1 ; cette situation est la même que dans une self et l'on peut dire que du fait de leur inertie, les électrons ont un comportement "selfique"⁵. Il existe de même un courant de conduction ionique également selfique :

$$\vec{J}_{i1} = i\omega \epsilon_0 \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \vec{E}_1 \quad (1.33)$$

en désignant par ω_{pi} la fréquence de plasma ionique définie en remplaçant m_e par m_i dans la formule (1.9). Cependant le courant total qu'il faut introduire dans les équations de Maxwell pour décrire le comportement du plasma est la somme

$$\vec{J}_1 = \vec{J}_{D1} + \vec{J}_{e1} + \vec{J}_{i1} \quad (1.34)$$

où \vec{J}_D est le courant de déplacement :

$$\vec{J}_{D1} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = -i\omega \epsilon_0 \vec{E}_1 \quad (1.35)$$

qui est de nature "capacitive" et qui est une propriété du vide. En pratique on peut vérifier que $\vec{J}_{i1} = (m_e/m_i) \vec{J}_{e1}$ est négligeable devant \vec{J}_{e1} . Le courant total peut donc s'écrire :

$$\vec{J}_1 = -i\omega \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}\right) \vec{E}_1 = -i\omega \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \vec{E}_1 \quad (1.36)$$

5. Remarquons que nous avons convenu d'une dépendance en $\exp(-i\omega t)$ des grandeurs ; cette convention conduit pour les impédances selfiques ou capacitives à des signes opposés à ceux que l'on trouve en général dans les livres d'électricité, où l'on convient d'habitude d'une dépendance en $\exp(j\omega t)$, avec $i = j = \sqrt{-1}$.

où l'on a introduit la fréquence de plasma "totale" exacte :

$$\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \quad (1.37)$$

En pratique on a $\omega_{pi}^2/\omega_{pe}^2 = m_e/m_i \ll 1$ et la fréquence de plasma totale ω_p est très voisine de ω_{pe} .

On voit sur la formule (1.36) que la permittivité du plasma est :

$$K = (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) \approx (1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}) \quad (1.38)$$

Remarquons enfin que la théorie classique des ondes électromagnétiques s'applique au plasma isotrope que nous sommes en train de considérer : K est donc égale au carré de l'indice de réfraction N de ces ondes, ce qui s'écrit :

$$N^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (1.39)$$

La courbe de dispersion des ondes électromagnétiques est donc la droite représentée sur la figure 1.6(a) où l'on a pris comme coordonnées $x = \omega_p^2/\omega^2$, $y = k^2 c^2/\omega^2$ (représentation des ionosphéristes). Sur la figure 1.6(b) on a représenté cette même courbe sur un diagramme dit de Brillouin ($x = k$, $y = \omega$).

La fréquence de plasma ω_p est donc une fréquence critique séparant les fréquences en deux domaines :

- Pour $\omega > \omega_p$, la permittivité K est positive et plus petite que l'unité. Le courant de déplacement J_D est supérieur au courant de conduction J_{e1} ; le plasma a donc un comportement capacitif et propage sans atténuation les ondes électromagnétiques comme un diélectrique ordinaire, à ceci près que sa permittivité est plus petite que l'unité et que de ce fait la vitesse de phase v_φ des ondes électromagnétiques est supérieure à la vitesse de la lumière. Lorsque ω tend vers ω_p , ϵ tend vers zéro et v_φ vers l'infini. On peut vérifier cependant que la vitesse de groupe $[\vec{v}_g \equiv \partial\omega/\partial\vec{k} = (\partial\omega/\partial k)(\vec{k}/k)]$ est toujours plus petite que c , décroissant depuis la limite $v_g = c$ quand $\omega \gg \omega_p$ jusqu'à zéro lorsque ω tend vers ω_p .
- Pour $\omega < \omega_p$, la permittivité K est négative. Le courant de conduction est maintenant supérieur au courant de déplacement. Le plasma a alors un comportement selfique. Les ondes électromagnétiques ne peuvent plus se propager sans atténuation dans le plasma. L'indice de propagation est purement imaginaire et les ondes électromagnétiques

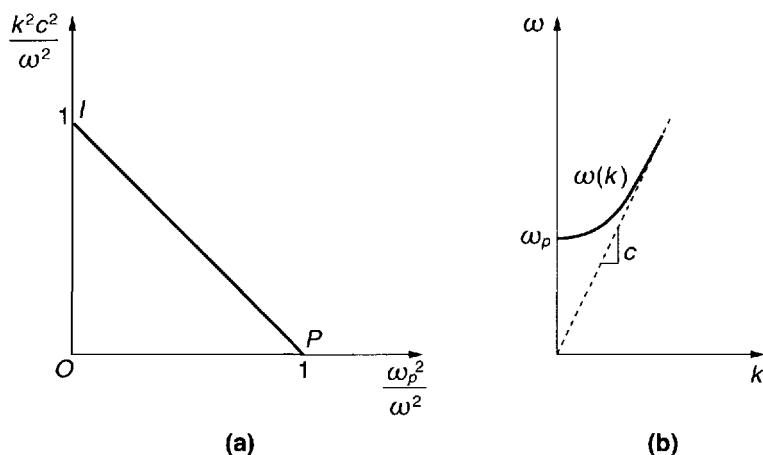


Figure 1.6 : Diagrammes de dispersion pour les ondes électromagnétiques.

(a) Représentation des ionosphéristes ($x = \omega_p^2/\omega^2$, $y = k^2 c^2/\omega^2$).

(b) Diagramme de Brillouin ($x = k$, $y = \omega$).

sont donc évanescentes. Si le plasma est limité par une interface avec un espace vide (ou rempli de diélectrique) les ondes électromagnétiques de fréquence $\omega < \omega_p$ qui pourraient arriver de cet espace extérieur subissent une réflexion “métallique” à la frontière du plasma.

1.4 Longueurs de Debye et de Landau

1.4.1 Longueurs critiques d'interaction

Au paragraphe précédent, on a vu comment un plasma écarté de l'état de neutralité électrique se met à osciller à la fréquence ω_p autour de cet état d'équilibre. L'agitation thermique des particules du plasma ne joue de rôle que pour assurer une certaine propagation de ces oscillations.

Il existe par ailleurs des situations, notamment aux frontières d'un plasma, où peut s'établir un état stationnaire dans lequel le milieu n'est plus neutre électriquement. Dans ces régions appelées gaines, la non-neutralité est entretenue par l'agitation thermique et freinée par les interactions coulombiennes. Avant de décrire de telles situations, on peut introduire de façon abstraite des longueurs critiques d'interaction en égalant l'énergie d'agitation thermique à des énergies potentielles d'interaction.

a) Longueur de Landau : longueur critique d'interaction binaire

On appelle longueur de Landau la longueur r_0 définie par la relation :

$$\kappa T = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \quad (1.40)$$

soit :

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \kappa T} \quad (1.41)$$

On voit que r_0 est la distance à laquelle il faut que deux électrons s'approchent pour que leur énergie potentielle d'interaction binaire soit du même ordre de grandeur que leur énergie cinétique d'agitation thermique. La longueur de Landau intervient dans l'analyse des phénomènes de collisions et dans celle des corrélations de position dans un plasma (cf. paragraphes 3.5 et 8.7.3).

b) Longueur de Debye : longueur critique d'interaction collective

α) Importance des interactions lointaines collectives Les interactions collectives (de charge d'espace) jouent en général un rôle plus important que les interactions binaires dans la dynamique d'un plasma. Pour le voir on peut d'abord essayer de calculer par un modèle très simple l'énergie d'interaction u_{ee} d'un électron du plasma avec l'ensemble des autres électrons. En supposant le plasma homogène et infini, on peut exprimer u_{ee} par l'intégrale :

$$\langle u_{ee} \rangle = \int_0^\infty \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) (n_e 4\pi r^2 dr) \quad (1.42)$$

Le signe $\langle \rangle$ désigne la valeur moyenne, obtenue en remplaçant le nombre d'électrons contenus dans la couche $r \dots r + dr$ par sa valeur moyenne $n_e 4\pi r^2 dr$ (Fig. 1.7).

Ceci étant, l'intégrale (1.42) diverge à cause de sa borne supérieure et on a donc :

$$\langle u_{ee} \rangle = +\infty \quad (1.43)$$

Ce résultat n'est pas inquiétant physiquement parce que l'électron considéré interagit aussi avec les ions du plasma, et qu'il en résulte une énergie moyenne d'interaction

$$\langle u_{ei} \rangle = -\langle u_{ee} \rangle = -\infty \quad (1.44)$$

L'énergie moyenne d'interaction de l'électron avec tout le reste du plasma est donc nulle dans ce modèle. En fait, la forme indéterminée $+\infty - \infty$

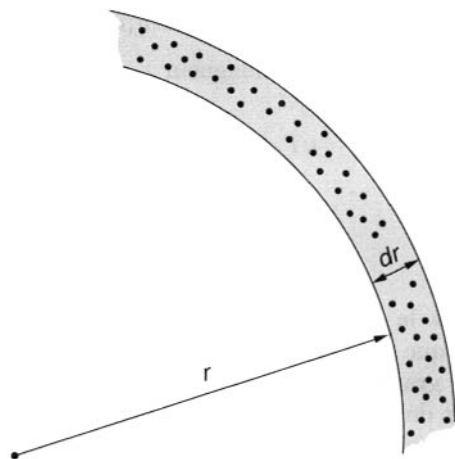


Figure 1.7 : Énergie moyenne d'interaction d'un électron avec l'ensemble des autres électrons du plasma.

doit être analysée de plus près, ce que l'on peut faire en tenant compte des corrélations de positions dans le plasma (cf. problème P1-5), et on trouve alors un résultat fini, faible mais non nul.

Le principal intérêt de ce calcul est de montrer que du fait de la décroissance très lente du potentiel de Coulomb avec la distance, les interactions lointaines sont statistiquement plus importantes que les interactions proches : un électron interagit à chaque instant avec un très grand nombre d'autres électrons ou ions. Ces interactions collectives lointaines peuvent se décrire par un modèle de fluide continu. Oubliant la structure particulière de la matière, le plasma est décrit comme un mélange de deux fluides continus d'électricité, l'un négatif (les électrons) de densité de charge ρ_e et l'autre positif (les ions) de densité de charge ρ_i . La charge d'espace totale étant $\rho = \rho_e + \rho_i$, les interactions d'un électron avec le reste du plasma s'analysent au moyen du potentiel électrostatique Φ de charge d'espace défini par l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \Phi = -\rho / \epsilon_0 \quad (1.45)$$

β) Définition de la longueur de Debye On peut définir une longueur critique d'interaction collective en analysant le modèle unidimensionnel de la figure 1.8 : un plasma neutre de densité constante n_e se prolonge par une gaine d'électrons de densité également constante n_e . Le champ électrique dans le plasma est constant (puisque ρ y est nul). Il peut être nul ou non

selon les conditions aux limites qu'on suppose réalisées lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

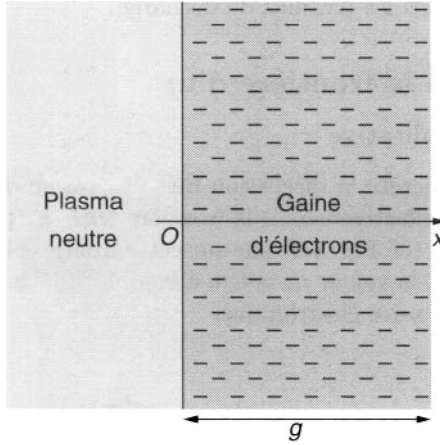


Figure 1.8 : Modèle de gaine pour la définition de la longueur de Debye.

Dans la gaine, le champ est variable et non nul ; le potentiel y obéit à l'équation de Poisson :

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -n_e q_e / \epsilon_0 \quad (1.46)$$

dont la solution générale est :

$$\Phi(x) = a + bx - (n_e q_e / 2\epsilon_0) x^2 \quad (1.47)$$

où a et b sont deux constantes déterminées par les valeurs de Φ et $d\Phi/dx$ pour $x = 0$. Le terme quadratique représente l'effet sur la distribution de potentiel de la charge d'espace constante $\rho = n_e q_e$ dans la gaine, c'est-à-dire l'effet cumulatif des interactions collectives dans cette gaine.

On peut donc définir une longueur critique d'interaction collective par la condition :

$$\kappa T / 2 = |q_e (n_e q_e / 2\epsilon_0) x^2| \quad (1.48)$$

La valeur de x ainsi définie est la longueur de Debye λ_D qui d'après (1.47) et (1.48) est donnée par :

$$\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 \kappa T}{n_e q_e^2} \quad (1.49)$$

ce qui donne en remplaçant les constantes fondamentales par leurs valeurs

$$\lambda_D \approx 6.9 (T_e / n_e)^{1/2} \quad (\text{CGS}) \quad (1.50)$$

Les valeurs de cette longueur pour quelques plasmas typiques sont données dans le tableau 1.1. On y voit par exemple que λ_D est typiquement de 1 à 10 microns dans les plasmas de décharge.

1.4.2 Gaines à la frontière d'un plasma

a) Description qualitative

Pour rendre plus concrète la discussion du paragraphe précédent, examinons ce qui se passe effectivement à la frontière entre un plasma et le vide. Pour cela on suppose (cf. Fig. 1.9) que sur cette frontière la densité ionique passe brutalement de la valeur $n_i = \text{Cste}$ à la valeur nulle et on examine ce qu'il advient de la densité électronique.

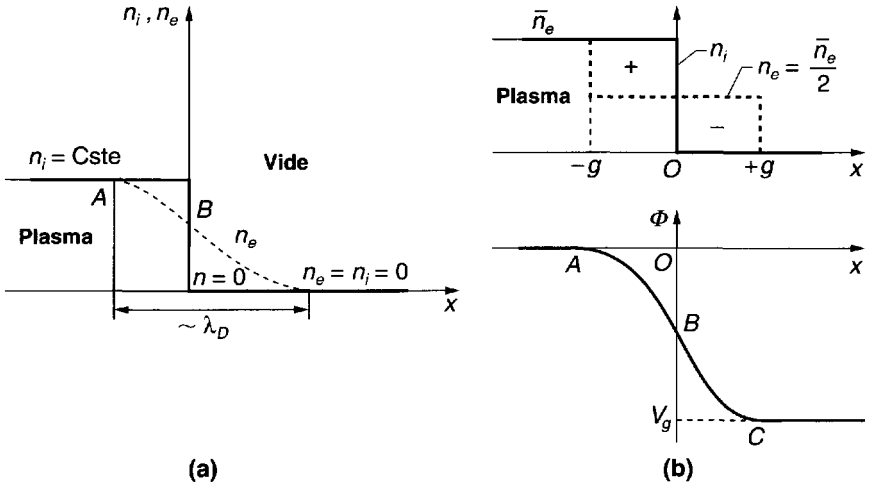


Figure 1.9 : Gaine électronique à la frontière plasma-vide.

(a) Description qualitative.

(b) Modèle académique à densité constante.

On peut supposer qu'à un certain instant initial la répartition de n_e est la même que celle de n_i . Mais il est clair que cette situation va évoluer du simple fait de l'agitation thermique des électrons (pour simplifier nous négligerons celle des ions) ; les électrons du plasma franchissent la frontière ; une gaine commence à se constituer, et le processus se poursuit jusqu'à ce que le potentiel de charge d'espace répulsif produit par la gaine soit suffisant pour renvoyer dans le plasma les nouveaux électrons ar-

rivant. La situation est alors celle représentée sur la figure 1.9(a) avec une densité n_e décroissant progressivement de la valeur n_i jusqu'à la valeur zéro. L'analyse détaillée de cette répartition de n_e n'est pas très simple (cf. problème P1-4 pour un cas analogue : gaine au contact d'une paroi métallique), mais il est clair d'après l'analyse du paragraphe précédent que l'épaisseur totale de la gaine est de l'ordre de grandeur de la longueur de Debye λ_D du plasma.

La longueur de Debye représente donc un compromis entre l'agitation thermique, qui tend à produire une non-neutralité du plasma, et la densité des particules qui impose la neutralité par l'intermédiaire des forces électrostatiques. C'est ce qu'exprime aussi la formule en $\sqrt{T_e/n_e}$ définissant λ_D .

b) Modèle de gaine à densité constante

A titre d'exemple simple, on peut examiner le modèle de gaine représenté sur la figure 1.9(b). On suppose que la gaine électronique a une densité constante $n_e = \bar{n}_e/2$, qu'elle a une épaisseur $2g$ répartie symétriquement autour de la frontière. La transition plasma-vide est donc constituée d'une partie positive de densité $\rho = +|\bar{n}_e q_e|/2$, entre les abscisses $-g$ et 0 et d'une partie négative $\rho = -|\bar{n}_e q_e|/2$ entre les abscisses 0 et $+g$.

La résolution de l'équation de Poisson dans deux régions conduit (compte tenu des conditions aux limites $\Phi = d\Phi/dx = 0$ dans le plasma et dans le vide) à la répartition de potentiel représentée sur la figure 1.9(b). Cette courbe est constituée de deux arcs de parabole AB et BC de courbures opposées. Le potentiel de gaine qui en résulte est négatif et donné par la formule :

$$V_g = n_e q_e g^2 / 2\epsilon_0 \quad (1.51)$$

En écrivant la condition :

$$\kappa T / 2 = |q_e V_g| \quad (1.52)$$

on obtient une valeur critique de g égale à λ_D comme on s'y attendait. Dans ce modèle simple on voit que la longueur de Debye donne l'ordre de grandeur de l'épaisseur maximum d'une gaine électronique susceptible d'être traversée par les électrons du plasma sous le simple effet de leur agitation thermique. Répétons cependant, comme nous l'avons dit au paragraphe précédent, que ce modèle est trop simple et qu'il faut faire une analyse self-consistante de la répartition de n_e dans la zone de transition ABC [363], [364], [365]. Notons enfin que des gaines dont l'épaisseur est de l'ordre de λ_D s'établissent également dans des régions reliant un plasma neutre à une paroi isolante ou à une électrode collectrice de courant [363], [364], [365].

1.4.3 Corrélations de position dans un plasma

a) Théorie élémentaire des corrélations ions-électrons

La neutralité électrique, qui s'exprime par la condition :

$$n_{e0}q_e + n_{i0}q_i = 0 \quad (1.53)$$

où q_e est la charge de l'électron, et q_i le charge des ions du plasma, n'est qu'une propriété des valeurs moyennes n_{e0} et n_{i0} des densités électronique et ionique⁶. Une analyse plus fine fait apparaître des corrélations de position entre les électrons et les ions : autour de chaque ion, il y a un excès d'électrons. L'analyse théorique de ces corrélations sera développée dans l'appendice A8-3 à partir des équations cinétiques des plasmas. Nous allons dans cette section étudier ces corrélations par une méthode élémentaire initialement proposée par Debye dans la théorie des électrolytes.

Supposons que l'on sache qu'en un certain point du récipient il y a un ion, autrement dit prenons des axes de coordonnées dont l'origine coïncide à tout instant avec la position d'un ion. On doit s'attendre que, dans le voisinage de cet ion, il y ait en moyenne plus d'électrons que d'ions, puisque l'ion considéré attire les premiers et repousse les deuxièmes.

Cherchons donc la distribution d'équilibre des électrons autour de cet ion ; au voisinage de l'ion, le potentiel Φ sera déterminé par la charge de l'ion considéré et par un nuage d'électrons. Appelons n_{e0} la valeur moyenne de la densité des électrons dans le plasma et admettons qu'en tout point la densité des ions est constante et égale à $-n_{e0}q_e/q_i$ mais que, par suite du choix de l'origine, il y a une légère variation de la densité des électrons au voisinage de l'ion considéré, de sorte que la densité électronique sera :

$$n_e(r) \neq n_{e0} \quad (1.54)$$

Admettons d'autre part que les électrons sont en équilibre thermodynamique à la température T dans le puits de potentiel constitué par l'ion positif, de sorte que la densité électronique satisfait à l'équation :

$$n_e(r) = n_{e0} \exp(-q_e \Phi / \kappa T) \quad (1.55)$$

Les perturbations de densité étant supposées faibles, on écrit cela sous la forme linéarisée :

$$n_e(r) = n_{e0}(1 - q_e \Phi / \kappa T) \quad (1.56)$$

6. Dans de nombreux cas le plasma contient plusieurs espèces d'ions (positifs ou négatifs) ; il faut alors dans la formule (1.53) remplacer $n_{i0}q_i$ par $\sum_i n_{i0}q_i$ où n_{i0} et q_i sont la densité et la charge des ions d'espèce i .

D'autre part Φ doit satisfaire à l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}(n_e - n_{e0})q_e = \frac{n_{e0}q_e^2}{\epsilon_0 kT} \Phi \quad (1.57)$$

Compte tenu de la formule (1.49) de définition de λ_D et de la symétrie sphérique du potentiel autour de l'ion, l'équation (1.57) s'écrit finalement :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{\Phi}{\lambda_D^2} \quad (1.58)$$

Cette équation différentielle du second ordre s'intègre facilement en faisant le changement de variable :

$$\Phi = \frac{u}{r}, \quad \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{r^2}u + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \quad (1.59)$$

ce qui donne pour u l'équation :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \frac{u}{\lambda_D^2} \quad (1.60)$$

dont la solution générale donne en revenant à Φ :

$$\Phi = \frac{1}{r} \left(A e^{-r/\lambda_D} + B e^{+r/\lambda_D} \right) \quad (1.61)$$

En tenant compte des conditions aux limites ($\Phi \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$ et $\Phi \sim q_i/4\pi\epsilon_0 r$ lorsque $r \rightarrow 0$) on obtient finalement pour Φ la solution :

$$\Phi = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D} \quad (1.62)$$

En reportant ce résultat dans (1.56) et en posant $q_i = Z_i e$ on peut écrire la densité électronique perturbée sous la forme :

$$n_e(r) = n_{e0} \left(1 + Z_i \frac{r_0}{r} e^{-r/\lambda_D} \right) \quad (1.63)$$

où r_0 est la longueur de Landau définie par la formule (1.41).

Le deuxième terme de cette formule est toujours positif : les corrélations de position $i - e$ sont positives et ce terme représente un nuage d'électrons supplémentaires autour de chaque ion ; la densité de ce nuage décroît exponentiellement avec r et "l'épaisseur" du nuage est de l'ordre de λ_D . En intégrant la densité du nuage de $r = 0$ à $r = \infty$ on vérifie facilement que la charge totale qu'il contient est égale à $Z_i q_e = -q_i$. Il en résulte comme le montre la formule (1.62) que le champ de Coulomb de l'ion est atténué

(on dit aussi “écrané”) par le nuage d’électrons qui lui sont corrélés ; le potentiel de Coulomb $q_i/4\pi\epsilon_0 r$ de l’ion est remplacé par le potentiel de Debye exprimé par la formule (1.62). L’effet d’écran est pratiquement total dès que r dépasse nettement λ_D .

Remarquons cependant que les formules ci-dessus ne sont valables que si les corrélations sont faibles, c’est-à-dire pratiquement si $r \gg r_0$ (sinon l’approximation linéaire de la formule (1.56) tombe en défaut). Cette limitation n’est pas importante dans la plupart des plasmas qui satisfont, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, à la condition :

$$r_0 \ll \lambda_D \quad (1.64)$$

et dans ces plasmas les effets de corrélation les plus importants dans le comportement du milieu sont ceux pour lesquels on a :

$$r_0 \ll r \ll \lambda_D \quad (1.65)$$

En principe, il est toutefois facile de calculer les corrélations à courte distance, qui devraient être de la forme :

$$n_e(r) = n_{e0} e^{-q_e(q_i/4\pi\epsilon_0 r)/\kappa T} = e^{Z_i r_0/r} \quad (1.66)$$

On voit que cette formule présente une singularité pour $r = 0$; celle-ci ne peut être en principe supprimée que dans une théorie quantique, car elle est liée à l’hypothèse que les particules sont des charges ponctuelles sans dimension.

b) Effet des corrélations $i-i$. Longueur d’écran exacte

Dans le calcul précédent, nous avons négligé les corrélations $i-i$, en supposant que l’on avait $n_i = n_{i0}$. Il est facile d’en tenir compte en admettant que l’on a pour n_i autour d’un ion donné une formule analogue à (1.55), ce qui donne dans l’approximation des faibles corrélations :

$$n_i(r) = n_{i0}(1 - q_i\Phi/\kappa T) \quad (1.67)$$

On obtient ainsi pour Φ une équation analogue à (1.58) mais où λ_D est remplacée par la longueur d’écran exacte donnée par :

$$\lambda_s^2 = \frac{\epsilon_0 \kappa T}{n_{e0} q_e^2 + n_{i0} q_i^2} = \frac{\lambda_D^2}{1 + Z_i} \quad (1.68)$$

Les formules (1.62), (1.63) et (1.67) deviennent alors :

$$\Phi = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_s} \quad (1.69)$$

$$n_e(r) = n_{e0} \left(1 + Z_i \frac{r_0}{r} e^{-r/\lambda_s} \right) \quad (1.70)$$

$$n_i(r) = n_{i0} \left(1 - Z_i^2 \frac{r_0}{r} e^{-r/\lambda_s} \right) \quad (1.71)$$

Sous sa première forme la formule (1.68) montre que l'effet d'écran comporte de façon tout à fait symétrique une contribution électronique et une contribution ionique. L'effet des ions a été éliminé de façon artificielle dans le calcul du paragraphe précédent, en remplaçant ceux-ci par un fluide continu d'électricité positive. Et, de fait, λ_s devient égal à λ_D si l'on fait tendre Z vers zéro.

C'est λ_s que l'on doit utiliser pour calculer les propriétés statistiques d'un plasma en équilibre, par exemple l'énergie moyenne d'interaction entre particules. On trouve (cf. problème P1-5) que cette énergie est par unité de volume :

$$U_{int} = - \left(\frac{n_{e0} + n_{i0}}{2} \right) \frac{Z_i e^2}{4\pi\epsilon_0\lambda_s} \quad (1.72)$$

On verra cependant au paragraphe 3.5 que, dans la théorie des collisions où l'effet d'écran intervient, il est plus raisonnable de négliger les corrélations $i-i$ et d'utiliser λ_D au lieu de λ_s .

Notons enfin que le formalisme utilisé ici pour décrire les corrélations n'est pas très satisfaisant. Les corrélations doivent s'exprimer non pas en termes des densités simples mais plutôt en termes des densités doubles que nous introduirons au chapitre 8. La formule (1.70) par exemple doit plutôt s'écrire sous la forme :

$$n_{ie}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = n_{i0}n_{e0} \left(1 + Z_i \frac{r_0}{r} e^{-r/\lambda_s} \right) \quad (1.73)$$

où r désigne la distance entre les points 1 et 2.

c) Comparaison des énergies cinétiques et potentielles ; paramètre de plasma

Revenons sur la formule (1.72) qui donne l'énergie U_{int} d'interaction moyenne totale entre les particules du plasma. S'il n'y avait pas de corrélation, U_{int} serait nulle, les énergies potentielles positives $e-e$ et $i-i$ étant exactement compensées par les énergies potentielles négatives $e-i$. La valeur non nulle de U_{int} est due aux corrélations (cf. problème P1-5) ; elle est négative, ce qui veut dire que le plasma est en quelque sorte un édifice moléculaire stable ; du fait des corrélations il a une énergie de liaison ($-U_{int}$) qui est positive. La formule (1.72) montre que l'énergie

d'interaction est la même que celle d'un ensemble de couples $e-i$ en nombre $(n_{e0} + n_{i0})/2$ par unité de volume et dans lesquels l'ion et l'électron seraient à la distance d'écran λ_s .

On peut par ailleurs comparer l'énergie de corrélation U_{int} à l'énergie d'agitation thermique U_{th} qui est présente dans le plasma à raison de $\frac{3}{2}\kappa T$ par particule soit :

$$U_{th} = \frac{3}{2}(n_{e0} + n_{i0})\kappa T \quad (1.74)$$

On obtient ainsi :

$$\frac{|U_{int}|}{U_{th}} = \frac{1}{3\kappa T} \frac{Z_i e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\lambda_s} = \frac{Z_i}{3} \frac{r_0}{\lambda_s} \quad (1.75)$$

Le rapport entre les deux formes d'énergie est, au facteur $Z_i/3$ près, égal à celui des deux longueurs critiques d'énergie r_0 et λ_s ; rappelons que ce rapport a été supposé petit pour pouvoir faire un calcul linéaire des corrélations.

La formule (1.75) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{|U_{int}|}{U_{th}} = \frac{1/9}{\frac{4}{3}\pi\lambda_s^3 n} \equiv \frac{1}{9N_D} \quad (1.76)$$

où $n = n_{e0} + n_{i0}$ et N_D est le nombre total de particules chargées dans la sphère d'écrantage de Debye ; N_D est couramment appelé le paramètre de plasma. La théorie de Debye des corrélations a utilisé un modèle quasi fluide du plasma et nous avons vu qu'elle n'est valide que si

$$N_D \gg 1 \quad (1.77)$$

ou plus simplement

$$n\lambda_D^3 \gg 1 \quad (1.78)$$

Cela veut dire aussi que la longueur de Debye est bien plus grande que la distance moyenne entre deux particules. Dans ces conditions on a $|U_{int}| \ll U_{th}$. Cette inégalité signifie du point de vue thermodynamique que le plasma se rapproche d'un gaz parfait, avec une pression p donnée par la loi classique

$$p = n\kappa T \quad (1.79)$$

avec $T = T_e = T_i$. Dans certains cas les électrons et les ions sont séparément en quasi-équilibre avec $T_e \neq T_i$; la formule ci-dessus s'applique alors séparément aux pressions partielles p_e et p_i . Nous verrons au chapitre 9 que, de manière générale, il correspond au petit terme d'énergie potentielle $|U_{int}|$ un terme de correction à la loi des gaz parfaits (1.79) qu'on appelle la pression interparticulaire.

1.5 Plasmas sans interactions

Trajectoires des particules

Lorsque la densité d'un plasma est assez basse, on peut souvent négliger les interactions entre particules ; les mouvements des électrons et des ions sont alors déterminés uniquement par les champs électromagnétiques régnant dans le plasma. On obtient ainsi ce qu'on peut appeler un gaz d'électrons et d'ions libres. Bien entendu, ce modèle est un cas limite ; tous les gaz réels contiennent les trois types de particules déjà mentionnées, de sorte que les électrons par exemple effectueront toujours des collisions avec une certaine fréquence ν_{coll} . Cependant, considérons un électron soumis soit à un champ magnétique uniforme \vec{B} , soit à un champ électrique alternatif de pulsation ω ; dans les deux cas, son mouvement contient une composante périodique. Supposons que l'on ait l'une des deux inégalités :

$$\Omega_e \gg \nu_{\text{coll}} \quad (1.80)$$

Ω_e étant la vitesse angulaire gyromagnétique de l'électron, ou bien :

$$\omega \gg \nu_{\text{coll}} \quad (1.81)$$

Le mouvement de l'électron aura ainsi l'allure représentée sur les figures 1.10(a) ou 1.10(b). On conçoit alors que les propriétés du gaz seront peu affectées par les collisions ; on pourra étudier comme une première approximation un modèle obtenu en négligeant totalement les collisions.

Dans les conditions que l'on vient d'évoquer, l'étude des propriétés d'un plasma se ramène à celle des trajectoires des particules chargées dans un champ électromagnétique d'origine extérieure. Autrement dit on doit trouver, pour un champ électromagnétique donné $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$, l'ensemble des solutions de l'équation fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{w}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B}) \quad (1.82)$$

Chacune de ces trajectoires est définie par les conditions initiales (position et vitesse) de la particule considérée. Ces conditions initiales varient d'une particule à l'autre et en les faisant varier de façon aléatoire on peut décrire l'agitation thermique désordonnée qui règne dans le plasma. La résolution de l'équation (1.82) pour des champs \vec{E} , \vec{B} quelconques n'est en général possible que par des méthodes numériques. Il existe cependant un certain nombre de cas simples où un calcul analytique est possible : dans les champs magnétiques presque uniformes et presque statiques on

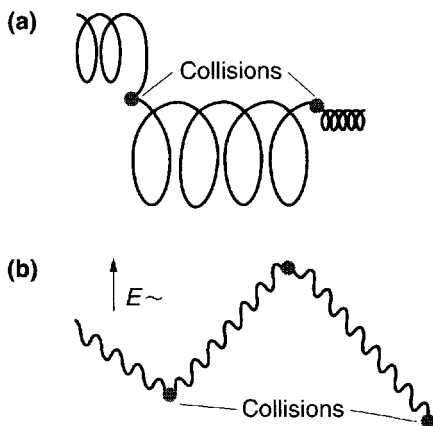


Figure 1.10 : Trajectoires avec collisions peu fréquentes.

(a) Champ magnétique statique uniforme.

(b) Champ électrique oscillant.

peut faire une analyse approchée par une méthode de perturbation (théorie des orbites adiabatiques). Cette théorie sera développée dans le chapitre 2. Nous nous contenterons ici de rappeler le cas le plus simple :

Dans un *champ magnétique* \vec{B} *uniforme et statique* et en l'absence de tout champ électrique, les trajectoires des électrons et des ions sont des hélices régulières enroulées autour du champ magnétique et décrites pour chaque espèce de particules avec la vitesse angulaire :

$$\Omega = \frac{|q|}{m} B \quad (1.83)$$

où q et m sont la charge électrique et la masse de la particule.

Les rayons et les pas des hélices ont une distribution statistique déterminée par les fonctions de distribution des vitesses électroniques et ioniques. En général, ces mouvements désordonnés ne donnent lieu à aucun mouvement d'ensemble dans le repère considéré.

1.6 Plasmas avec interactions coulombiennes

Nous allons maintenant considérer des plasmas complètement ionisés, mais dont la densité est suffisamment élevée pour qu'on ne puisse plus négliger les interactions coulombiennes entre les particules.

1.6.1 Classification des plasmas

Pour étudier les interactions entre particules dans un plasma complètement ionisé, on peut introduire les longueurs fondamentales suivantes : r_0 , longueur de Landau ; λ_s , longueur d'écran de Debye ; d_e , distance moyenne entre électrons. Ces trois longueurs peuvent s'exprimer en fonction de la densité n_e et de la température T des électrons par les formules suivantes :

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\kappa T} \quad (1.84)$$

$$\lambda_s^2 = \frac{\epsilon_0\kappa T}{n_e q_e^2 + n_i q_i^2} \quad (1.85)$$

$$d_e = n_e^{-1/3} \quad (1.86)$$

Les deux premières formules et la signification de r_0 et λ_D ont été discutées au paragraphe 1.4. L'expression de la distance moyenne d_e entre deux électrons s'obtient immédiatement en supposant que les électrons sont disposés sur un réseau cubique d'arête d_e . Comme il doit y avoir un électron par cellule, cela donne :

$$n_e d_e^3 = 1 \quad (1.87)$$

Ce modèle est évidemment faux, mais il donne certainement l'ordre de grandeur correct de d_e ; on pourrait définir une distance moyenne entre les ions ou entre un électron et un ion ; ces distances sont toutes du même ordre de grandeur que d_e .

Il est intéressant de comparer systématiquement les valeurs des trois longueurs fondamentales r_0 , λ_s et d_e . Pour cela, on peut tout d'abord, en remplaçant les constantes fondamentales par leurs valeurs numériques, écrire les définitions de r_0 et λ_s sous les formes pratiques :

$$r_0 = \frac{1.672 \times 10^{-3}}{T} \quad (\text{CGS}) \quad (1.88)$$

$$\lambda_s = 6.90 \left[\frac{T}{n_e(Z_i + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{CGS}) \quad (1.89)$$

En formant le rapport de ces expressions deux à deux on obtient :

$$\frac{r_0}{d_e} = 1.672 \times 10^{-3} (n_e/T^3)^{1/3} \quad (\text{CGS}) \quad (1.90)$$

$$\frac{r_0}{\lambda_s} = 2.42 \times 10^{-4} \left[\frac{n_e(Z_i + 1)}{T^3} \right]^{1/2} \quad (\text{CGS}) \quad (1.91)$$

$$\frac{d_e}{\lambda_s} = 1.449 \times 10^{-1} \left[\frac{n_e (Z_i + 1)^3}{T^3} \right]^{1/6} \quad (\text{CGS}) \quad (1.92)$$

Ces formules permettent d'introduire une *classification générale des plasmas* selon les valeurs relatives de la densité et de la température ; les ordres de grandeur variant énormément d'un plasma à un autre, il est commode d'utiliser un diagramme (Fig. 1.11) en coordonnées logarithmiques :

$$x = \log_{10} n_e \quad (\text{CGS}) \quad (1.93)$$

$$y = \log_{10} T \quad (\text{CGS}) \quad (1.94)$$

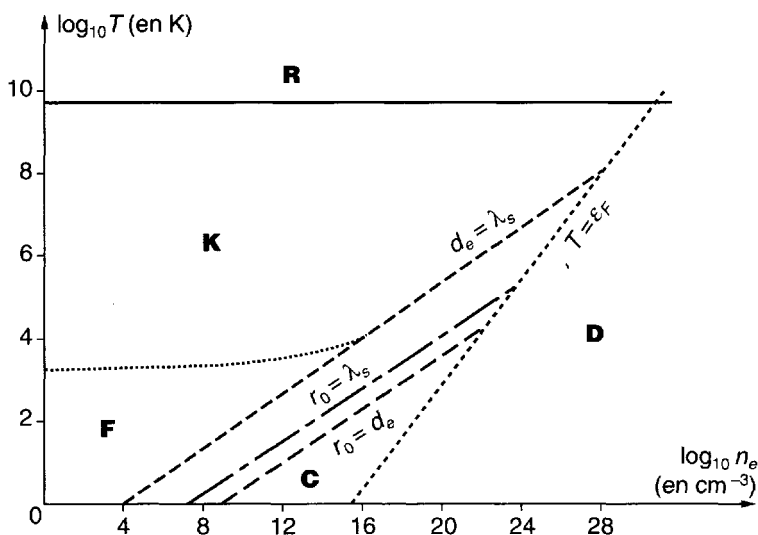


Figure 1.11 : Diagramme de classification des plasmas (CGS).

R plasmas relativistes.

K plasmas cinétiques classiques.

C plasmas denses à fortes corrélations.

D plasmas dégénérés quantiquement (métaux).

F gaz faiblement ionisés.

Sur ce diagramme, on a représenté les lieux géométriques des points pour lesquels deux des longueurs fondamentales r_0 , d_e , λ_s sont égales ; on vérifie facilement que ces trois conditions s'écrivent :

$$y - x/3 + 2.78 = 0 \quad (r_0 = d_e) \quad (\text{CGS}) \quad (1.95)$$

$$y - x/3 + 2.41 - \frac{1}{3} \log_{10}(Z_i + 1) = 0 \quad (r_0 = \lambda_s) \quad (\text{CGS}) \quad (1.96)$$

$$y - x/3 + 1.68 - \log_{10}(Z_i + 1) = 0 \quad (d_e = \lambda_s) \quad (\text{CGS}) \quad (1.97)$$

Autrement dit, les trois lieux considérés sont en coordonnées x et y trois droites de pente $1/3$ relativement voisines sur le diagramme.

On a représenté également deux autres droites critiques :

- la droite

$$\kappa T = m_e c^2 \quad (1.98)$$

soit $T = 5.97 \cdot 10^9$ K qui représente la limite du domaine d'application de la mécanique classique *non relativiste* ;

- la limite de *dégénérescence quantique*

$$\kappa T = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3} = \epsilon_F \quad (1.99)$$

qui, en coordonnées x, y , est une droite de pente $2/3$ représentant la limite du domaine d'application des théories non quantiques (ϵ_F est l'énergie de Fermi d'un gaz d'électrons dégénéré).

On voit ainsi apparaître sur la figure 1.11, tracée pour $Z_i = 1$, plusieurs régions théoriques ; pour pouvoir y situer les plasmas réels, on peut se reporter à la figure 1.3 où l'on a marqué les points représentatifs de quelques plasmas typiques ; on voit que les plasmas “gazeux” que l'on rencontre dans de nombreuses situations pratiques (faible densité, haute température) se situent dans une grande région centrale que l'on peut appeler celle des *plasmas cinétiques classiques* ; ces plasmas obéissent à la double inégalité forte

$$r_0 \ll d_e \ll \lambda_s \quad (1.100)$$

La condition $r_0 \ll d_e$ montre que *les corrélations sont peu importantes* dans le plasma puisqu'elles sont faibles pour deux électrons situés à la distance moyenne d_e ; on peut vérifier (cf. problème P1-5) que cela se traduit par le fait que l'énergie de liaison de plasma est faible devant son énergie d'agitation thermique ou, ce qui revient au même, que la pression inter-particulaire est faible devant la pression cinétique. On peut dire que les plasmas de cette famille se rapprochent de l'état des gaz parfaits.

Pour $\lambda_s < d_e$, c'est-à-dire $n\lambda_D^3 < 1$, on a des plasmas dans lesquels les corrélations deviennent importantes : ce sont des plasmas *corrélés* dits aussi à *fort couplage*. Des études récentes ont montré que de tels plasmas ont tendance à prendre une structure ordonnée quasi cristalline. On les

trouve dans certains états de la matière condensée, dans des dispositifs à l'état solide et en astrophysique.

Dans la région située au-dessous des trois droites parallèles de pente $1/3$, les inégalités (1.100) sont renversées ; les propriétés des plasmas correspondants sont très différentes ; ils sont caractérisés essentiellement par le fait que les corrélations y sont très fortes ; on les désigne souvent sous le nom un peu vague de *plasmas denses*. Il vaut mieux dire *plasmas corrélés classiques*. Les propriétés de ces plasmas ne sont pas très bien connues, car ils sont assez difficiles à produire.

1.6.2 Collisions coulombiennes Fréquences caractéristiques

Dans les sections précédentes nous avons montré que les interactions binaires coulombiennes entre les particules d'un plasma jouaient un rôle moins important que les interactions collectives de charge d'espace. Le modèle de fluide continu qui en découlait ne permet pas cependant de représenter pleinement les propriétés des plasmas : il faut tenir compte de la nature particulière de l'électricité et ce de deux manières ; il y a d'une part des interactions entre les particules individuelles d'un plasma et les ondes collectives se propageant dans le plasma ; nous discuterons ces effets au paragraphe 1.7. Mais d'autre part les interactions binaires conduisent, lorsque deux particules passent près l'une de l'autre, à des collisions binaires : ce mécanisme permet des échanges d'énergie entre les différentes espèces de particules et conduit à des effets dissipatifs (amortissement) dans les ondes. Dans l'exemple simple des oscillations de plasma discuté dans la section 1.3, les collisions des électrons sur les ions produisent à la longue un amortissement de celles-ci.

Examinons donc rapidement les phénomènes de collisions en nous limitant ici au cas des collisions électron-ion qui sont plus simples à décrire parce que dans un tel processus l'ion, de masse beaucoup plus élevée que celle de l'électron, peut être supposé immobile. La trajectoire de l'électron est d'ailleurs comme on le sait depuis Kepler une hyperbole. Comme nous le verrons en détail au paragraphe 3.2, l'angle de déviation χ (Fig. 1.12) est déterminé par le paramètre d'impact p de la collision et la vitesse initiale w_e de l'électron et il existe une valeur critique de p :

$$p_0 = \frac{Z_i e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e w_e^2} \quad (1.101)$$

qui conduit à une déviation $\chi = \pi/2$.

Pour $p \gg p_0$ on a $\chi \ll \pi/2$; de telles collisions seront appelées lointaines. Les collisions proches sont au contraire celles pour lesquelles

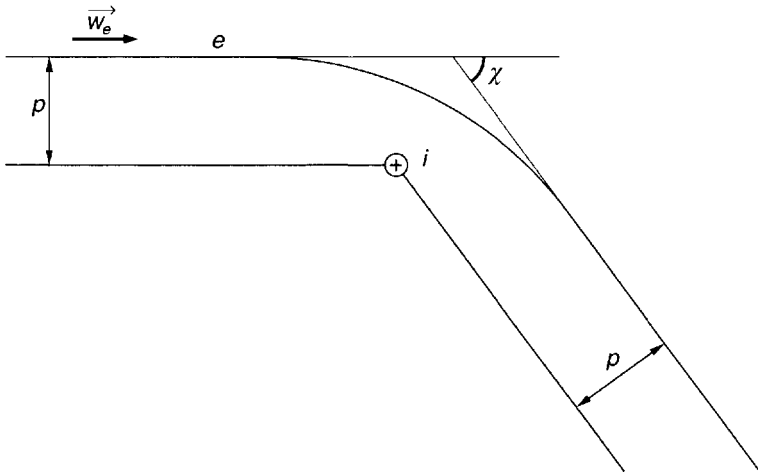


Figure 1.12 : Collision binaire électron-ion.

p paramètre d'impact.

χ angle de déviation.

on a $p \sim p_0$ et une déviation χ importante. Si on applique la formule (1.101) aux électrons ayant la vitesse la plus probable, c'est-à-dire tels que $m_e w_e^2 = 2\kappa T$, on obtient une valeur moyenne du paramètre d'impact critique :

$$\bar{p}_0 = \frac{Z_i e^2}{8\pi\epsilon_0 \kappa T} = \frac{Z_i}{2} r_0 \quad (1.102)$$

On voit que \bar{p}_0 et la longueur de Landau sont égaux au facteur $Z_i/2$ près. Ceci est tout à fait normal car les deux notions physiques qui ont permis d'introduire ces deux longueurs (fortes énergies équipotentielles pour r_0 , fortes déviations pour \bar{p}_0) sont qualitativement identiques.

Nous pouvons maintenant introduire une quatrième longueur fondamentale dans un plasma : le libre parcours moyen ℓ_{eip} séparant deux collisions proches. On vérifie facilement que dans les plasmas cinétiques classiques on a :

$$r_0, \bar{p}_0 \ll d_e \ll \lambda_s \ll \ell_{eip} \quad (1.103)$$

Cela étant, l'analyse détaillée des collisions (cf. paragraphe 3.5) montrera que ce sont les interactions lointaines entre particules qui dominent la dynamique du milieu. Cela tient, comme pour le calcul d'énergie d'interaction de la section 1.4, au fait que le potentiel de Coulomb qui décrit les inter-

actions binaires entre particules ne décroît que lentement avec la distance. La trajectoire d'un électron dans le plasma a donc l'allure représentée grossièrement sur la figure 1.13.

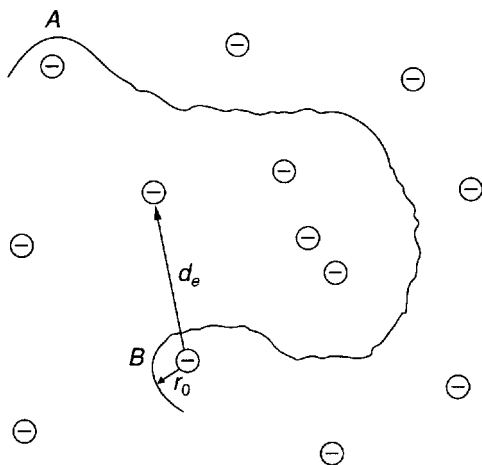


Figure 1.13 : Schéma d'une trajectoire électronique dans un plasma complètement ionisé.

P, Q collisions proches binaires.

L interactions lointaines.

Les collisions proches (A, B) sont des phénomènes binaires relativement rares qui se produisent lorsque l'électron s'approche accidentellement d'une autre particule à une distance $r_0 \ll d_e$; elles jouent un rôle moins important que la somme des interactions lointaines et multiples dont l'action sur la trajectoire est représentée par des petites déviations aléatoires. En faisant la statistique de ces petites déviations, on peut définir un temps de relaxation moyen τ_{ei} pour l'échange de quantité de mouvement entre les électrons thermiques et les ions. La quantité $\nu_{ei} = 1/\tau_{ei}$ est la fréquence de collision pour l'échange de quantité de mouvement. On peut essayer de calculer ν_{ei} en décomposant le phénomène en une suite de collisions binaires lointaines aléatoires ; le calcul se ramène à une intégrale sur le paramètre d'impact p de ces collisions ; mais on trouve alors que cette intégrale diverge si on laisse tendre le paramètre d'impact maximum vers l'infini. Cette difficulté disparaît si l'on effectue une coupure sur p à une valeur :

$$p_{\max} = \lambda_D \quad (1.104)$$

Ce procédé se justifie intuitivement en remarquant que λ_D est la longueur d'écran au-delà de laquelle les corrélations atténuent exponentiellement le potentiel de Coulomb. On obtient ainsi pour ν_{ei} (dans un plasma une fois ionisé) les expressions :

$$\nu_{ei} = \nu_c \ln \Lambda \approx 4.8 \frac{n_e}{T^{3/2}} \ln \Lambda \quad (\text{CGS}) \quad (1.105)$$

avec

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{2\lambda_D}{r_0} \right) \quad (1.106)$$

Dans ces formules, ν_c représente la fréquence de collision que l'on aurait avec les seules collisions proches ; le facteur $\ln \Lambda$ est appelé logarithme coulombien. Il précise l'importance des collisions lointaines et est en général beaucoup plus grand que l'unité.

Un plasma possède donc deux fréquences caractéristiques fondamentales :

- la fréquence d'oscillation de plasma ω_p ,
- la fréquence de collision ν_{ei} .

En comparant ces deux fréquences pour la famille la plus importante des plasmas cinétiques classiques, on obtient :

$$\omega_p \approx (n\lambda_D^3)\nu_{ei} \gg \nu_{ei} \quad (1.107)$$

Cette inégalité permet de négliger les collisions dans la description des oscillations de plasma. Le rapport ω_p/ν_{ei} est le facteur de qualité (surtension des radioélectriciens) de ces oscillations. De façon plus générale, un plasma possède deux comportements assez différents selon les échelles de temps considérées :

Aux échelles de temps de l'ordre de ω_p^{-1} (perturbations de fréquences caractéristiques voisines de ω_p), la dynamique du plasma est dominée par les *phénomènes collectifs* de charge d'espace. L'équation cinétique qui décrit l'évolution de la fonction de distribution f_e des électrons est alors l'équation de Vlasov électrostatique :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{w}_e \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} + \frac{q_e \vec{E}}{m_e} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{w}_e} = 0 \quad (1.108)$$

que nous écrivons ici sans explication, mais qui sera établie dans la section 8.4 et longuement discutée au chapitre 10. Cette équation est formellement analogue à une équation de Boltzmann sans second membre (cf. section 8.4) qui permettrait d'étudier les plasmas sans interactions. Cependant le champ \vec{E} qui y figure n'est pas un champ d'origine extérieure,

mais le champ self-consistant produit par les déséquilibres macroscopiques de charge électrique dans le plasma. L'étude mathématique de l'équation de Vlasov montre que certaines ondes susceptibles de se propager dans le plasma subissent un amortissement spécial non collisionnel connu sous le nom d'amortissement de Landau. L'origine physique de cet amortissement est dans un échange d'énergie cumulatif entre l'onde et les électrons du plasma qui se meuvent en synchronisme avec elle. L'équation de Vlasov permet également d'étudier de nombreux processus d'instabilités, d'interactions non linéaires entre ondes ; ces divers mécanismes jouent un rôle très important dans les plasmas "turbulents".

Aux échelles de temps de l'ordre de ν_{ei}^{-1} (perturbations de fréquences caractéristiques voisines de ν_{ei} ou inférieures), la dynamique du plasma est dominée par les phénomènes de collisions. L'équation qui décrit l'évolution du plasma est alors plus difficile à établir. Elle a été obtenue sous diverses formes, connues sous le nom d'équations de Landau, Fokker-Planck, Rosenbluth, Balescu-Lenard-Guernsey (cf. chapitre 13). Ces diverses équations montrent que, après un intervalle de temps assez long, un plasma abandonné à lui-même revient vers l'équilibre thermodynamique. Elles permettent, d'autre part, de calculer les coefficients de transport des plasmas en basse fréquence (coefficient de diffusion, de viscosité, de conductivité électrique et thermique). En particulier, la conductivité électrique σ en courant continu est donnée par la formule de Spitzer :

$$\sigma_{SH} \approx 1.5 \cdot 10^{-2} \frac{T^{3/2}}{\ln \Lambda} \quad (\text{SI}) \quad (1.109)$$

On voit que σ devient très grande à haute température : la conductivité des plasmas peut alors atteindre et dépasser celle du cuivre.

1.7 Ondes dans les plasmas

1.7.1 Ondes planes dans un plasma

Les ondes qui se propagent dans les plasmas peuvent être de plusieurs types : des ondes transversales analogues aux ondes électromagnétiques usuelles (que nous avons déjà rencontrées dans la section 1.3), des ondes longitudinales analogues aux ondes acoustiques, mais aussi des ondes hybrides. La classification de ces ondes est plus complexe dans les plasmas que dans les autres milieux matériels pour les raisons suivantes :

- un plasma contient deux espèces de particules (électrons et ions) de masses très différentes ; selon le type d'onde et le domaine de fréquence considérés, ce peut être l'une, l'autre ou les deux espèces de particules qui participent à l'onde ;

• en général, les plasmas sont associés à des champs magnétiques et la présence de ceux-ci leur donne un caractère anisotrope qui leur confère des propriétés de biréfringence plus ou moins analogues à celles des cristaux uniaxes.

Bien entendu, les formes des ondes peuvent être très variées (planes, cylindriques, sphériques, etc.), mais on se limitera ici aux ondes planes, c'est-à-dire à celles qui se traduisent par des oscillations de toutes les grandeurs physiques de la forme :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{A} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]\} \quad (1.110)$$

La fréquence angulaire ω et le vecteur d'onde \vec{k} ne sont pas des variables indépendantes ; ω et \vec{k} sont reliées par la relation :

$$D(\omega, \vec{k}) = 0 \quad (1.111)$$

appelée équation de dispersion. Si dans celle-ci on se fixe une valeur réelle de \vec{k} , on obtient plusieurs solutions (réelles ou complexes) pour ω ; à chacune de ces solutions correspond un mode de propagation, périodique dans tout l'espace. Dans un plasma isotrope, la direction de \vec{k} ne joue aucun rôle et l'équation de dispersion ne fait apparaître que son module k .

1.7.2 Plasma sans champ magnétique. Fréquence de coupure

Si le champ magnétique est nul, les propriétés de propagation sont les mêmes dans toutes les directions. L'équation de dispersion ne dépend que du module de \vec{k} et non de son orientation. On trouve d'autre part que D se factorise et peut s'écrire :

$$D_T(\omega, k) \cdot D_L(k, \omega) = 0 \quad (1.112)$$

Au facteur D_T sont associées des ondes transversales et à D_L des ondes longitudinales. Les propriétés de ces ondes se représentent commodément sur des diagrammes de dispersion où l'on porte en abscisse ω_p^2/ω^2 et en ordonnée l'indice de propagation :

$$n^2 = \frac{c^2}{v_\varphi^2} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \quad (1.113)$$

La figure 1.14 représente le diagramme de dispersion des ondes transversales et longitudinales. Sur ces diagrammes, les hautes fréquences sont à gauche et les basses à droite.

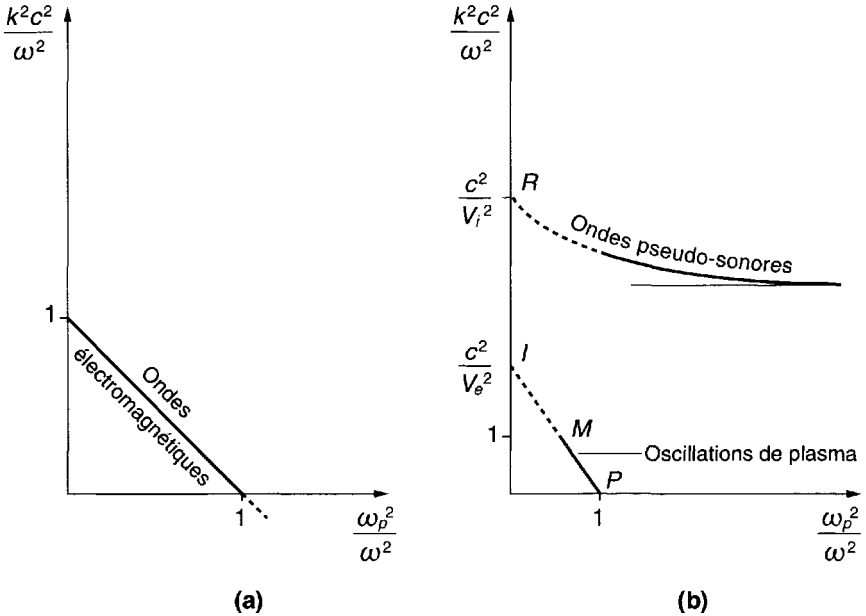


Figure 1.14 : Diagrammes de dispersion pour $B_0 = 0$.

$x = \omega_p^2 / \omega^2$ (HF à gauche).

$y = k^2 c^2 / \omega^2 = c^2 / v_\phi^2$ (v_ϕ vitesse de phase, ondes rapides en bas).

(a) Ondes transversales : V limite du vide, C coupure.

(b) Ondes longitudinales : E oscillations de plasma, A onde acoustique.

Les *ondes transversales* [Fig. 1.14(a)] sont à polarisation rectiligne : toutes les directions de polarisation perpendiculaires à \vec{k} sont autorisées et correspondent à un même mode de propagation. Ce mode se confond avec les *ondes électromagnétiques* usuelles à ceci près que, dans les plasmas, la vitesse de phase v_ϕ de ces ondes est supérieure à c ; v_ϕ tend vers l'infini lorsqu'on se rapproche du point P, c'est-à-dire de la fréquence ω_p ; au-delà de ce point, k devient imaginaire. Les ondes électromagnétiques qui peuvent se propager dans le plasma sont donc limitées à la bande $\omega > \omega_p$. Pour les fréquences $\omega < \omega_p$, on ne peut avoir que des ondes évanescentes rapidement atténuées. On dit que ω_p est une *fréquence de coupure* pour les ondes électromagnétiques. Si une onde de fréquence inférieure à la fréquence de coupure arrive sur la frontière d'un plasma en venant de l'extérieur, elle se réfléchit sur cette frontière. Ce phénomène se manifeste dans la propagation des ondes radio autour de la Terre : l'ionosphère y joue, pour les fréquences inférieures à quelques MHz, le rôle de *réflecteur*.

Les *ondes longitudinales* [Fig. 1.14(b)] correspondent à deux modes, les oscillations de plasma et les ondes pseudosonores.

Les oscillations de plasma se situent dans la gamme de fréquence qui est légèrement supérieure à ω_p [segment *MP* sur la figure 1.14(b)]. Dans ce mode, les ions sont pratiquement immobiles et les électrons seuls participent à l'onde. La vitesse de phase peut être supérieure ou inférieure à c , mais en tout cas supérieure à la vitesse d'agitation thermique v_{te} des électrons ; lorsque v_φ se rapproche de v_{te} (arc *LM*), les ondes sont fortement atténuées par l'amortissement de Landau.

Les *ondes pseudosonores* se situent dans la gamme des basses fréquences. Dans ce mode, les électrons et les ions oscillent solidairement. Pour que ce mode puisse se propager sans amortissement de Landau excessif, il faut que la température électronique T_e soit nettement supérieure à T_i . Dans le domaine des fréquences assez basses, la vitesse de phase de ces ondes devient indépendante de la fréquence (asymptote *S*) et prend la valeur :

$$V_s \approx \left(\frac{Z_i \kappa T_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{T_i}{Z_i T_e} \right) \quad (1.114)$$

appelée vitesse du son ($Z_i e$ étant la charge des ions).

1.7.3 Propagation parallèle à un champ magnétique

Lorsque le plasma est placé dans un champ magnétique, les phénomènes de propagation dépendent de la direction du vecteur \vec{k} . Nous commençons par la propagation parallèle ($\vec{k} \parallel \vec{B}_0$). Dans ce cas les ondes longitudinales ne sont que très peu affectées par la présence de \vec{B}_0 . En revanche, les ondes transversales sont profondément modifiées et le plasma devient biréfringent. Les deux modes de propagation permis sont à polarisations circulaires ; l'un, *mode gauche*, a son champ électrique tournant dans le sens de la rotation gyromagnétique des électrons ; l'autre, *mode droit*, tourne dans le même sens que les ions. Le diagramme de dispersion a alors l'allure représentée sur la figure 1.15.

On y voit apparaître :

- deux coupures (points Q et R) ;
- deux *résonances cyclotron*, lorsque la fréquence de l'onde est égale à la fréquence gyromagnétique d'une des espèces de particules (Ω_e pour le mode gauche, Ω_i pour le mode droit) ;
- la limite basse fréquence des *ondes d'Alfvén* ; on montre en magnétohydrodynamique que ces ondes peuvent être assimilées à des vibrations des tubes de force considérés comme des cordes tendues par

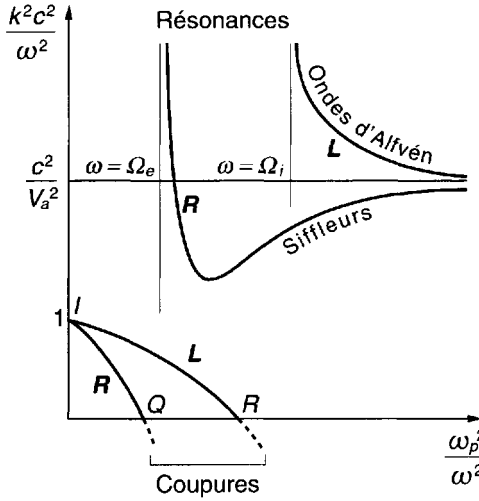


Figure 1.15 : Propagation parallèle à un champ magnétique : ondes transversales.

L mode gauche (left), R mode droit (right).

V_a vitesse d'Alfvén.

$\Omega_e \Omega_i$ résonances cyclotron électronique et ionique.

la tension magnétique ; la vitesse de phase correspondante (vitesse d'Alfvén) est :

$$v_\varphi = c \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\Omega_e \Omega_i} \right)^{-1/2} \approx V_a = \frac{B_0 / \mu_0^{1/2}}{(m_i n_{0i} + m_e n_{0e})^{1/2}} \quad (1.115)$$

- le domaine dit des *siffleurs*, ainsi dénommé parce que la propagation de ce mode dans la magnétosphère terrestre permet d'expliquer certains parasites radioélectriques sifflants observés au sol.

1.7.4 Propagation oblique et transversale

Lorsque \vec{k} fait un certain angle avec \vec{B}_0 , la théorie hydrodynamique des ondes [353] prévoit quatre modes en général hybrides qu'on peut considérer comme résultant d'un couplage des ondes électromagnétiques et des ondes électroacoustiques produit par la composante de \vec{B}_0 perpendiculaire à \vec{k} . Leur diagramme de dispersion est représenté sur la figure 1.16(a). Mais il

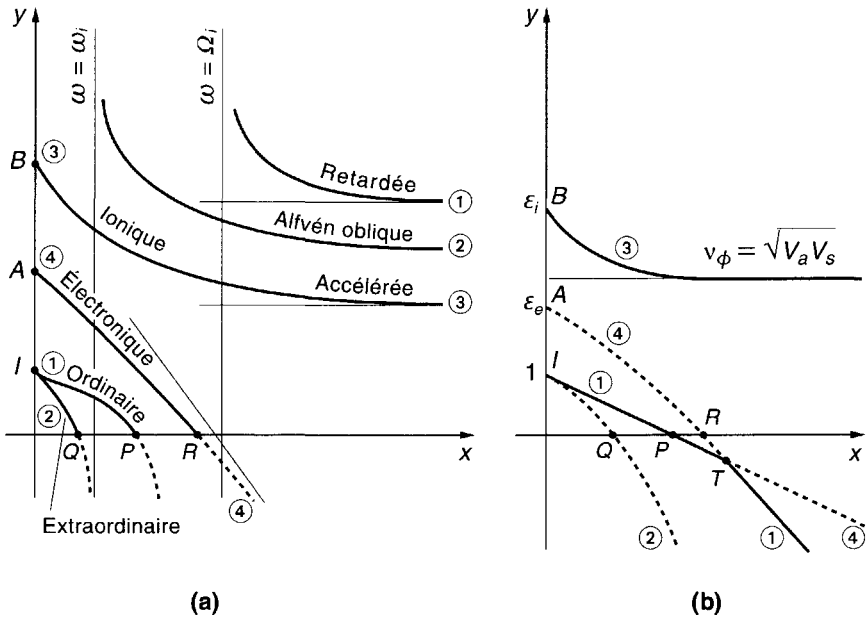


Figure 1.16 : Les quatre modes de propagation dans le cas général (cf. [353]).

(a) Cas général.

(b) Propagation transverse (cas singulier).

faut noter que la partie supérieure du diagramme n'a aucun sens physique, car dans ce domaine la théorie hydrodynamique n'est pas valable⁷. Lorsque \vec{k} est perpendiculaire à \vec{B}_0 , on a le diagramme de dispersion de la figure 1.16(b), où l'on voit deux modes :

- Le mode dit *ordinaire* (dénomination ambiguë mais consacrée) dont la polarisation est rectiligne et parallèle à \vec{B}_0 . Il se propage comme si \vec{B}_0 était nul (arc IP rectiligne).

7. Une meilleure description des ondes dans les plasmas peut se faire par la théorie cinétique, c'est-à-dire en pratique, à partir de l'équation de Vlasov. Elle fait apparaître l'amortissement de Landau déjà signalé, mais aussi de nouveaux modes, par exemple les modes dits de Bernstein au voisinage des harmoniques des fréquences cyclotron [185] [357].

- Le mode *hybride* (arcs IQ , AR , 3) polarisé elliptiquement dans un plan perpendiculaire à \vec{B}_0 . On peut montrer [353] que dans l'approximation des plasmas froids, ce mode présente deux résonances :
 - la résonance *hybride haute* de fréquence :

$$\omega_{HH} \approx (\omega_p^2 + \Omega_e^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.116)$$

- la résonance *hybride basse* de fréquence :

$$\omega_{LH} \approx \left(\frac{\omega_{pi}^2 + \Omega_i^2}{1 + \omega_{pi}^2 / \Omega_e \Omega_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.117)$$

Dans ces formules, des termes d'ordre m_e/m_i ont été négligés. Dans les plasmas “denses” (cf. définition au paragraphe suivant) on a :

$$\omega_{LH} \approx (\Omega_e \Omega_i)^{1/2} \quad (1.118)$$

1.7.5 Classification des plasmas par rapport aux ondes

En comparant les valeurs des différentes fréquences caractéristiques des phénomènes de propagation des ondes, on peut à nouveau classer les plasmas complètement ionisés en plusieurs familles. Le paramètre permettant cette classification des plasmas est (cf. [353, page 65] ou [354, page 55]) le rapport :

$$A = \frac{\omega_p^2}{\Omega_e \Omega_i} \quad (1.119)$$

ou :

$$A = \frac{n_e m_i + Z_i^2 n_i m_e}{Z_i \epsilon_0 B^2} \approx \frac{1.9 \times 10^{-10}}{Z_i} \frac{m_i}{m_p} \frac{n_e}{B^2} \quad (\text{eVcT}) \quad (1.120)$$

m_p étant la masse du proton et $Z_i e$ la charge des ions du plasma. Le paramètre A est une mesure de la densité du plasma comparée à l'intensité du champ magnétique, et plus précisément de l'importance des perturbations apportées par le plasma à la propagation des ondes électromagnétiques transversales ainsi que des couplages de celles-ci avec les oscillations de plasma. Lorsque $A \ll 1$, celles-ci sont faibles et l'indice de réfraction des ondes électromagnétiques est toujours très voisin de 1, sauf au voisinage immédiat des deux résonances cyclotron et évidemment en très basse fréquence, où l'on peut malgré tout atteindre la coupure. De façon générale on peut, suivant les valeurs croissantes de A , et en posant $m = m_i/Z_i m_e$, classer les plasmas en quatre familles :

plasmas très raréfiés :	$A < 1/m$	$\omega_p < \Omega_i$
plasmas raréfiés :	$1/m < A < 1$	$\Omega_i < \omega_p < (\Omega_e \Omega_i)^{1/2}$
plasmas peu denses :	$1 < A < m$	$(\Omega_e \Omega_i)^{1/2} < \omega_p < \Omega_e$
plasmas denses :	$A > m$	$\omega_p > \Omega_e$

En comparant les deux vitesses d'ondes non dispersives V_a (vitesse d'Alfvén) et V_s (vitesse du son), on peut séparer la dernière en deux sous-familles :

plasmas denses confinés :	$V_s < V_a$	$\omega_p > \Omega_e$
plasmas denses non confinés :	$V_s > V_a$	$\omega_p > \Omega_e$

Cette discussion est résumée sur la figure 1.17 où l'on a supposé $m = 1836$ (plasma d'hydrogène).

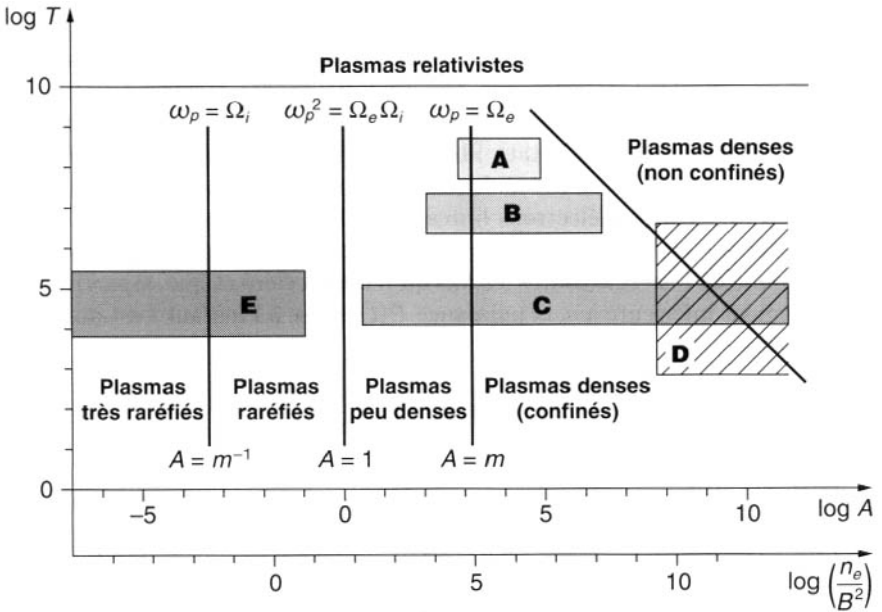


Figure 1.17 : Familles de plasmas vis-à-vis de la propagation des ondes.

$$n_e, B, T \text{ en eVcT.}$$

$$m = m_i/Zm_e, A = \omega_p^2/\Omega_e\Omega_i).$$

A futurs réacteurs thermonucléaires.

B machines à plasma actuelles (recherches pour la fusion).

C décharges dans les gaz.

D plasmas astrophysiques et géophysiques.

E appareils à vide dans un fort champ magnétique (cyclotrons, jauges à vide, etc.).

1.8 Plasmas et rayonnement

1.8.1 Émission de rayonnement par les plasmas

Les plasmas émettent, comme tous les corps chauds, du rayonnement. Cette émission peut se situer dans n'importe quelle gamme du spectre des ondes électromagnétiques, depuis les ondes radioélectriques jusqu'aux rayons X. La répartition spectrale de ce rayonnement dépend de la densité, du degré d'ionisation et de la température du gaz : lorsque la densité est assez élevée, l'émission devient globalement celle d'un corps noir et il n'est pas nécessaire d'en analyser les mécanismes dans le détail. Mais, en général, les plasmas sont plus ou moins transparents (optiquement minces) au rayonnement qu'ils émettent et l'émission possède des propriétés très différentes de celles d'un corps noir : dans les gaz faiblement ionisés, on observe des spectres de raies dus aux transitions des électrons liés aux atomes ; dans les plasmas complètement ionisés, le rayonnement est dû aux transitions entre deux états libres (transitions *free-free*) et sa croissance avec la température est moins rapide que celle du corps noir.

Le rayonnement des électrons libres d'un plasma peut s'analyser à partir de la théorie classique de l'électromagnétisme. On y montre qu'un électron rayonne de l'énergie toutes les fois qu'il est accéléré et que, si sa vitesse est nettement inférieure à c , la puissance $P(t)$ émise à l'instant t est donnée par la formule de Larmor :

$$P(t) = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 \quad (1.121)$$

où a est l'accélération de l'électron.

Dans les plasmas, les accélérations subies par les électrons peuvent être de deux natures, magnétique ou collisionnelle.

L'*accélération magnétique* est liée à la présence d'un champ d'induction magnétique \vec{B} et est produite par la force de Lorentz associée $e\vec{w} \times \vec{B}$. Le rayonnement correspondant est le *rayonnement cyclotron* (ou gyromagnétique). Si la vitesse des électrons du plasma est nettement inférieure à c , c'est-à-dire, en pratique, si $kT_e/m_e c^2 \ll 1$ (plasmas non relativistes), ce rayonnement se déduit de la formule de Larmor. Il se produit à la fréquence gyromagnétique Ω_e et, en l'absence d'autoabsorption (plasma assez mince), la puissance P_c rayonnée par unité de volume du plasma est :

$$P_c \approx 5.34 \times 10^{-24} n_e T_e B^2 \quad (\text{SI}) \quad (1.122)$$

Dans les plasmas relativistes qui existent dans certaines régions de l'Univers, les propriétés de ce rayonnement changent notablement : le principal effet est une émission sur des harmoniques parfois d'ordre très élevé de

la fréquence Ω_e ; c'est ce qu'on appelle alors le *rayonnement synchrotron*, par référence aux accélérateurs d'électrons qui permettent de l'observer en laboratoire.

L'*accélération collisionnelle* se produit lorsqu'un électron effectue une collision avec une autre particule du plasma. Le rayonnement correspondant est le *Bremsstrahlung* (rayonnement de freinage) : son spectre est toujours continu. Dans les gaz faiblement ionisés, c'est un petit effet dû aux collisions élastiques électron-neutre. Dans les plasmas complètement ionisés, il est produit par des interactions électron-ion ; c'est alors très souvent le mécanisme dominant de rayonnement et il conduit, pour un plasma optiquement mince, à la puissance d'émission suivante par unité de volume :

$$P_b \approx 1.44 \times 10^{-40} n_e n_i Z_i^2 T^{1/2} \quad (\text{SI}) \quad (1.123)$$

On voit que la puissance émise par *Bremsstrahlung* est proportionnelle au carré de la charge $Z_i e$ des ions et peut donc devenir particulièrement importante dans les plasmas d'éléments lourds multiplement ionisés.

1.8.2 Interactions entre photons et matière

Dans les plasmas assez denses, les mécanismes d'émission spontanée sont compliqués par les phénomènes de diffusion, d'absorption et d'émission stimulée. Il est alors souvent utile de considérer le rayonnement comme un gaz de photons constituant une nouvelle espèce de particules en interaction avec les particules matérielles (électrons, ions, atomes).

Les principales interactions à considérer sont celles des photons avec les électrons, à savoir : la diffusion Compton (phénomène de collision élastique entre un photon et un électron) et l'absorption par *Bremsstrahlung* "inverse". C'est une collision inélastique entre un photon et un électron dans le champ d'un ion ; dans cette interaction, le photon disparaît et son énergie est transférée essentiellement à l'électron bien que la présence de l'ion soit nécessaire pour satisfaire les théorèmes de conservation de la mécanique.

Dans les plasmas proches de l'équilibre thermodynamique, les fonctions de distribution f_e des vitesses électroniques et f_ν des quantités de mouvement photoniques sont approximativement connues (distributions de Maxwell et de Planck) ; on peut alors définir, pour les interactions entre photon et électron et en s'inspirant du modèle de Lorentz (cf. paragraphe 1.9) – le photon joue ici le rôle de la particule légère –, les trois longueurs d'interaction suivantes entre photons et électrons :

$$\ell_c = 1.5 \times 10^{24}/n_e \quad (\text{CGS}) \quad (1.124)$$

$$\ell'_c = (m_e c^2 / \kappa T)^{1/2} \ell_c \quad (\text{CGS}) \quad (1.125)$$

$$\ell_b = 10^{23} T^{7/2} / Z_i n_e^2 \quad (\text{CGS}) \quad (1.126)$$

Les deux premières sont deux longueurs moyennes d'interaction Compton, ℓ_c relative aux échanges de quantité de mouvement, et $\ell'_c \gg \ell_c$ aux échanges d'énergie ; ℓ_b est la longueur moyenne d'interaction par *Bremsstrahlung* inverse. En comparant les valeurs de ces longueurs, on peut compléter la classification des plasmas dans le diagramme (n_e, T_e) . On obtient ainsi la figure 1.18, tracée pour l'hydrogène, où l'on voit apparaître dans la famille des plasmas cinétiques assez denses les zones B, BC et C.

Dans la zone B, relative aux plasmas matériels à interaction par *Bremsstrahlung* (assez forte densité, pas trop haute température), le libre parcours moyen des photons est la longueur ℓ_b d'interaction par *Bremsstrahlung*. On montre d'ailleurs que l'énergie interne du plasma est essentiellement l'énergie cinétique des particules matérielles.

Dans la zone CB (plasmas radiatifs à électrons couplés aux ions), le libre parcours moyen des photons est maintenant la longueur ℓ_c d'interaction Compton. L'énergie interne du milieu est essentiellement radiative. Cependant, la densité d'énergie radiative n'étant pas très élevée (gamme moyenne de températures), les électrons sont plus fortement liés aux ions qu'au rayonnement.

Dans la zone C (plasmas radiatifs à électrons couplés au rayonnement), le libre parcours moyen des photons est toujours déterminé par l'effet Compton, mais la densité d'énergie radiative, qui croît comme T^4 , est maintenant si élevée que les électrons sont plus fortement couplés au rayonnement qu'aux ions.

On peut d'ailleurs vérifier que, dans tous les cas, les longueurs d'interaction $\ell_{ee} \simeq \ell_{ei}$ des électrons entre eux ou avec les ions sont plus courtes que les longueurs d'interaction des photons avec la matière. Si donc les dimensions caractéristiques d'un plasma sont supérieures à ℓ_{ee} , mais inférieures à la plus petite des longueurs ℓ_b et ℓ'_c , il y a équilibre thermique local de la matière, mais aucun équilibre entre matière et rayonnement. La classification établie selon les zones B, CB, C n'a donc de sens que si les dimensions du plasma sont supérieures à la longueur d'interaction des photons. Les trajets $M'N'P'$ et MNP étant les lieux où cette longueur ℓ_φ sur la figure 1.23 est égale à 1 mm ou à 10 m, on peut dire que MNP marque la limite des plasmas que l'on peut observer en équilibre thermodynamique à l'échelle terrestre.

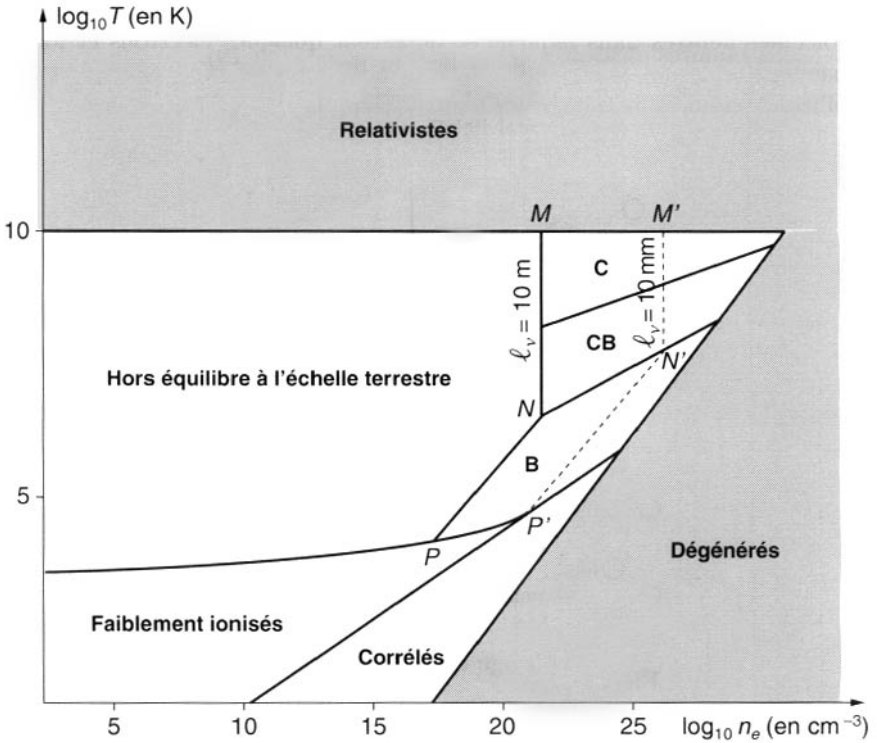


Figure 1.18 : Classification des plasmas du point de vue des interactions matière-rayonnement.

Diagramme (n_e, T_e) tracé pour l'hydrogène.

B plasmas matériels à interactions par *Bremsstrahlung*.

CB plasmas à électrons couplés aux ions par effet Compton.

C plasmas radiatifs à électrons couplés aux photons.

1.9 Gaz faiblement ionisés

Lorsque le degré d'ionisation d'un gaz ionisé est assez bas, les électrons et les ions interagissent seulement avec les molécules neutres. On dira qu'on est en présence d'un gaz faiblement ionisé ; le critère qui définit cette famille est donc :

$$\nu_{ee} \ll \nu_{eo} \quad (1.127)$$

où ν_{ee} et ν_{eo} sont les fréquences de collisions électron-électron et électron-

neutre. L'image qu'on peut se faire d'un tel gaz est celle d'une "mer" de molécules neutres dans laquelle se déplacent quelques électrons et ions ; chacun de ceux-ci évolue indépendamment de ses pairs en effectuant des collisions binaires aléatoires sur les neutres (Fig. 1.19).

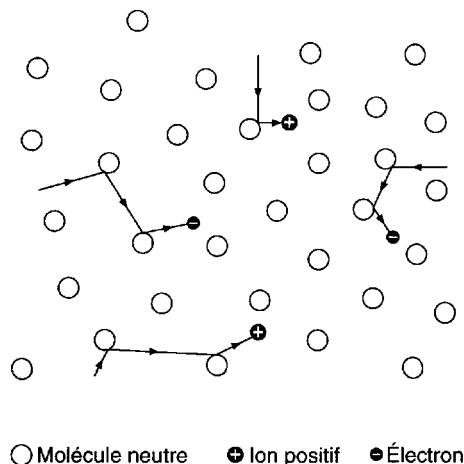


Figure 1.19 : Image d'un gaz faiblement ionisé.

La dynamique de la "mer" de molécules n'est pas influencée par le mouvement des particules chargées : les conditions aux limites permettent de déterminer son état et plus précisément la fonction de distribution $f_0(\vec{w}_0)$ des vitesses \vec{w}_0 des molécules. Dans le cas simple où le gaz est en équilibre avec un thermostat, f_0 est une fonction maxwellienne avec une température T_0 égale à celle du thermostat.

La dynamique des particules chargées s'étudie au moyen de deux équations de Boltzmann indépendantes déterminant les fonctions de distribution $f_e(\vec{w}_e)$ des électrons et $f_i(\vec{w}_i)$ des ions ; $f_0(\vec{w}_0)$ y joue le rôle d'un paramètre. L'étude du mouvement des électrons est plus facile car on peut y considérer que les molécules sont des centres de forces fixes de masse infinie : elles agissent comme des diffuseurs aléatoires qui s'opposent à tout mouvement ordonné des électrons ; d'autre part, l'échange d'énergie entre les électrons et les molécules lors des collisions élastiques est très faible par suite de la très petite valeur du rapport m_e/m_0 des masses des deux espèces de particules. La théorie cinétique que l'on bâtit sur ces idées est connue sous le nom de modèle de Lorentz (cf. section 12.2). Elle conduit à définir deux temps de relaxation entre électrons et molécules, soit respectivement le temps de relaxation des anisotropies (temps de déflexion)

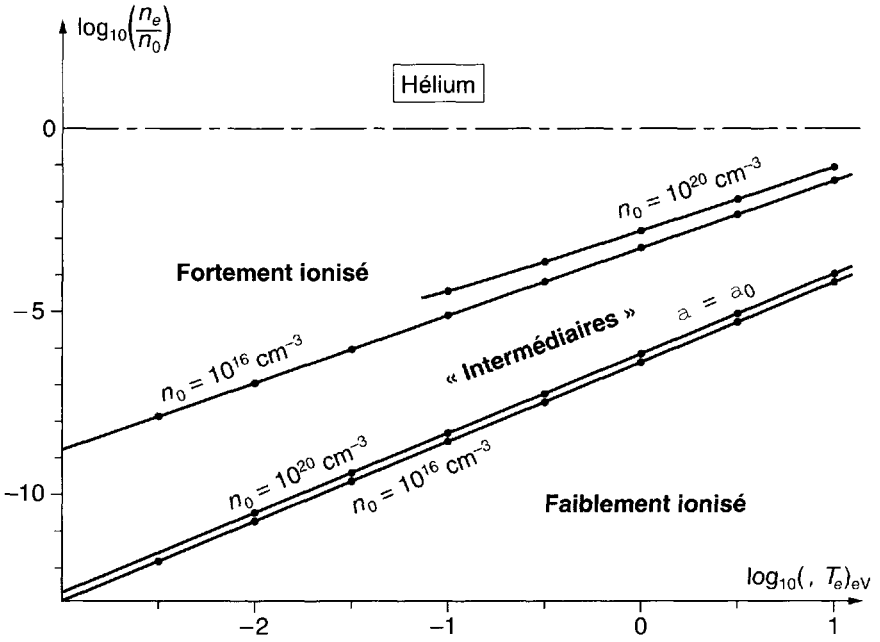


Figure 1.20 : Les trois catégories de gaz ionisés (cas de l'hélium).

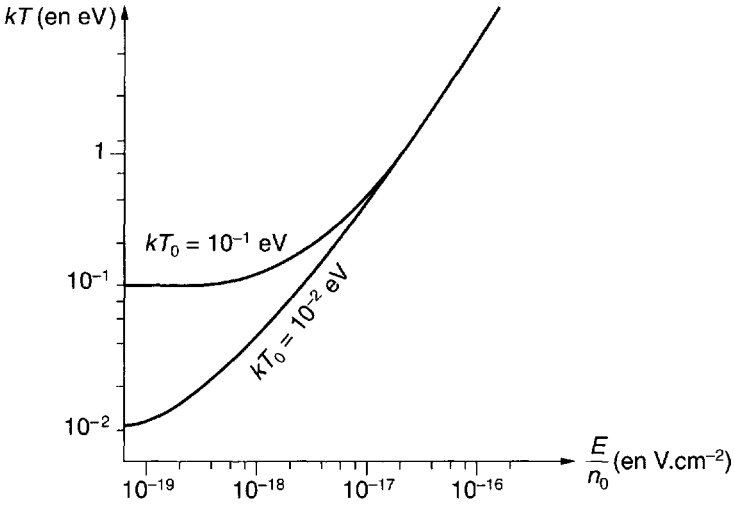


Figure 1.21 : Plasmas intermédiaires : relation entre T_e et E/n_0 dans l'hélium.

et le temps de relaxation de l'énergie :

$$\tau_S(e, 0) = \frac{1}{\nu_{e0}} = \frac{1}{n_0 \langle \sigma_{e0} w_e \rangle} \quad (1.128)$$

$$\tau_T(e, 0) = \frac{m_0}{m_e} \tau_S(e, 0) \gg \tau_S(e, 0) \quad (1.129)$$

où σ_{e0} est la section efficace de transfert de quantité de mouvement par collision électron-molécule. La comparaison de ces deux temps de relaxation avec le temps τ_{ee} de collision électron-électron permet de distinguer deux familles dans l'ensemble des gaz faiblement ionisés, celle des gaz très faiblement ionisés, qui correspond aux relations :

$$\tau_S(e, 0) \ll \tau_T(e, 0) \ll \tau_{ee} \quad (1.130)$$

et celle des plasmas intermédiaires, définie par :

$$\tau_S(e, 0) \ll \tau_{ee} \ll \tau_T(e, 0) \quad (1.131)$$

Dans la première, les collisions $e-e$ ne jouent aucun rôle ; dans la deuxième, elles sont suffisantes pour que les électrons constituent un sous-système thermodynamique avec une distribution maxwellienne et une température T_e , le bilan des échanges d'énergie (faibles) avec les molécules neutres déterminant la valeur de T_e . La figure 1.20, qui est une amélioration de la figure 1.1, montre, dans le cas de l'hélium, le domaine d'existence de ces familles de plasmas.

Si l'on crée un champ électrique \vec{E} dans un gaz faiblement ionisé, il en résulte un courant électrique ; les collisions $e-o$ limitent la valeur de ce courant et transforment l'énergie fournie par le champ \vec{E} en énergie désordonnée des électrons : c'est l'effet Joule. Après un intervalle de temps de l'ordre de $\tau_T(e, 0)$, les électrons du gaz tendent vers un état stationnaire où l'échauffement par effet Joule est compensé par un refroidissement dû aux collisions sur les neutres. On montre (cf. section 12.9) que, dans cet équilibre, T_e est fonction de T_0 et du rapport E/n_0 . La figure 1.21 montre, dans le cas d'un plasma intermédiaire d'hélium, la variation de T_e en fonction de E/n_0 pour deux valeurs de T_0 ; on y voit que, si E/n_0 est assez fort, l'équilibre du gaz s'établit à des valeurs de $T_e \gg T_0$.

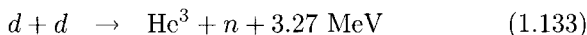
1.10 Fusion thermonucléaire contrôlée

1.10.1 Réaction de fusion des noyaux légers

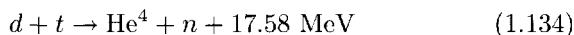
Dans un plasma de température très élevée ($> 10^6$ K), les atomes sont ionisés de multiples fois. À la limite, on tend vers un milieu composé d'élec-

trons libres et de noyaux débarrassés de tout leur cortège électronique. Dans ces conditions, les noyaux interagissent, d'une part, grâce à la force répulsive coulombienne, mais d'autre part, grâce aux forces à courte portée dites nucléaires. Si donc deux noyaux s'approchent assez près l'un de l'autre, ils peuvent produire une réaction nucléaire. Pour cela, il faut que leur vitesse relative initiale soit assez grande pour permettre de surmonter la "barrière" de potentiel coulombienne. On vérifie, de ce fait, que les diverses réactions entre deux noyaux ont des sections efficaces qui deviennent très faibles aux basses énergies. En pratique, on trouve que les réactions nucléaires ne se produisent de façon notable dans les plasmas que si leur température est supérieure à 1 keV (c'est-à-dire environ 10^7 K ; dans la gamme considérée, on a l'habitude de mesurer les températures par la valeur de kT mesurée en eV). Si la température reste dans la gamme 1 keV-1 MeV, les seules réactions susceptibles de se produire sont les réactions exothermiques qui conduisent à des noyaux plus stables que les noyaux initiaux. Les plus importantes sont les réactions de "fusion" des noyaux légers qui conduisent finalement au noyau très stable He^4 , soit :

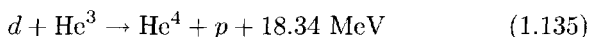
- Réactions (d,d)



- Réaction (d,t)



- Réaction (d, He^3)



La figure 1.22(a) montre comment varient en fonction de l'énergie (dans le système du centre de masse) les sections efficaces des réactions (d,d) et (d,t). En partant de ces courbes, on peut calculer les puissances nucléaires P_N produites par centimètre cube dans les plasmas de deutérium, pur ou mélangé à du tritium. Dans le deutérium pur, on trouve :

$$P_N = \frac{1}{2} n_d^2 \langle \sigma w \rangle W_{dd} \quad (1.136)$$

où n_d est la densité numérique du deutérium, $W_{dd} = 4.04 \text{ MeV}$ et $\langle \sigma w \rangle$ varie avec la température comme indiqué sur la figure 1.22(b). Pour T voisin de 40 keV et un plasma de densité $2.6 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ (densité normale d'un gaz parfait), P_N serait de l'ordre de 10^9 W/cm^{-3} .

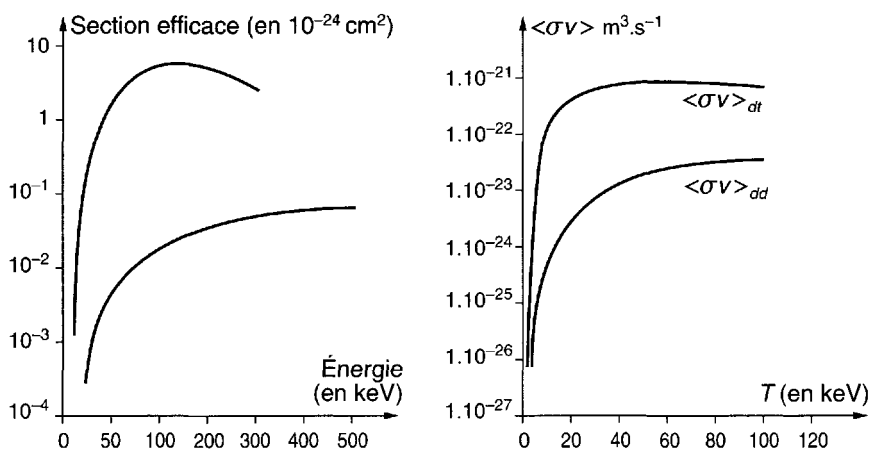


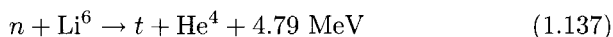
Figure 1.22 : Réactions de fusion.

(a) Sections efficaces.

(b) Taux de réactions réduits.

1.10.2 Réacteurs nucléaires à fusion contrôlée

Les réactions de fusion des noyaux légers dans un plasma très chaud peuvent donc être une source d'énergie très importante. Cette source est effectivement utilisée dans les bombes H. Il serait évidemment très intéressant de pouvoir l'employer à la production d'énergie électrique dans des réacteurs fonctionnant de façon "contrôlée", c'est-à-dire non explosive. On disposerait alors de ressources en énergie quasiment illimitées à l'échelle humaine, puisque la matière première serait le deutérium contenu dans l'eau des océans, à raison de 1.6 g/l. La réalisation d'un réacteur à fusion contrôlée est, en fait, un problème très difficile et non encore résolu. Cependant, les recherches entreprises dans les grands pays depuis les années 50 permettent de définir les conditions essentielles à remplir. Le combustible pourra être du deutérium pur ou un mélange deutérium-tritium. Le deutérium pur serait plus intéressant parce que naturellement abondant, mais il conduit, comme nous le verrons, à des conditions de fonctionnement plus difficiles à réaliser que celles du mélange D-T. On peut dès lors envisager de régénérer le tritium dans un bouclier extérieur contenant du Li^6 selon la réaction :



Si l'on veut amorcer dans le plasma une réaction en chaîne, il faut à première vue se placer dans des conditions où la puissance nucléaire P_N est supérieure à la puissance P_B rayonnée par *Bremsstrahlung*, ce qui conduit à une condition $T > T_c$ sur la température (T_c est la température critique de Post), soit :

$$T_c = 35 \text{ keV pour (d,d)}$$

$$T_c = 4 \text{ keV pour (d,t)}$$

En fait, le problème doit être posé en considérant le *bilan d'énergie* d'un réacteur dans lequel le plasma de densité n et de température T séjourne pendant un temps τ ; et l'on obtient alors un critère établi par Lawson qui définit, en fonction de T , la valeur du produit $n\tau$ à réaliser. La figure 1.23 montre les résultats d'un tel calcul ; η est un rendement pratique de transformation de l'énergie. Si l'on prend pour ce paramètre la valeur $1/3$ plutôt optimiste, on obtient comme conditions minimales de fonctionnement d'un réacteur :

$$\begin{aligned} n\tau &\approx 10^{15} \quad (\text{CGS}) & T &\approx 100 \text{ keV pour (d,d)} \\ n\tau &\approx 5 \times 10^{13} \quad (\text{CGS}) & T &\approx 30 \text{ keV pour (d,t)} \end{aligned}$$

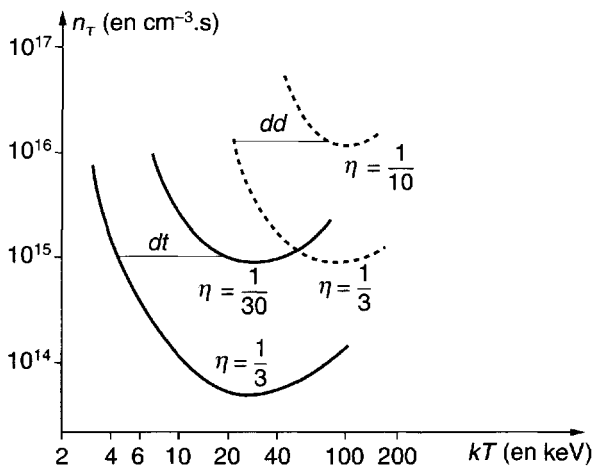


Figure 1.23 : Critère de Lawson pour un bilan d'énergie positif.

Pour réaliser ces conditions, on a donc à résoudre deux problèmes plus ou moins liés : chauffage d'une certaine quantité de matière à des

températures très élevées, “confinement” destiné à maintenir dans un certain volume le plasma ainsi formé avec une densité n et une durée de vie τ aussi élevées que possible.

Le *chauffage* peut s'effectuer par effet Joule (passage d'un courant très intense), irradiation laser (focalisation d'un laser de très grande puissance sur un grain de matière solide) ou par des méthodes propres aux plasmas (compression magnétique, résonances d'ondes par exemple).

1.10.3 Confinement magnétique d'un plasma

On peut chercher à réaliser le produit $n\tau$ nécessaire avec des valeurs de n relativement faibles et des valeurs du temps de confinement τ aussi grandes que possible (par exemple, $n \approx 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, $\tau \approx 1 \text{ s}$).

Compte tenu de la température extrêmement élevée du plasma, celui-ci doit donc être isolé de toute paroi matérielle. La seule solution qui semble possible est alors le confinement magnétique qui utilise des champs magnétiques de structure appropriée. L'idée de départ est que, dans un champ magnétique \vec{B} suffisamment intense, les particules se déplacent en spirales autour des lignes de forces de \vec{B} et ne peuvent donc pas diffuser dans les directions perpendiculaires à \vec{B} . Le champ magnétique semble donc fournir un parfait moyen de confinement transversal : une analyse détaillée montre cependant que le confinement transverse est limité par un effet de diamagnétisme du plasma (cf. section 9.5). L'ensemble des mouvements giratoires des particules produit (Fig. 1.24), à la périphérie d'un volume de plasma confiné magnétiquement, un courant macroscopique. L'importance de ce diamagnétisme est mesurée par le rapport :

$$\beta = \frac{2n\kappa T}{B^2/2\mu_0} \quad (1.138)$$

qu'on peut considérer (cf. paragraphe 9.5) comme le rapport entre la pression matérielle $2n\kappa T$ du plasma et la pression magnétique $B^2/2\mu_0$. Lorsque ce rapport β tend vers l'unité, le plasma ne peut plus être confiné.

Il est évident, d'autre part, qu'un champ \vec{B} uniforme n'assure aucun confinement longitudinal. Pour tourner cette difficulté, on peut utiliser l'effet de miroir magnétique (cf. section 2.7) produit par des tubes de forces convergents (champ croissant vers les extrémités du dispositif) ou simplement refermer le système sur lui-même dans une configuration à topologie torique.

Cependant, de nombreuses études expérimentales ou théoriques ont montré que l'équilibre d'un plasma confiné magnétiquement est

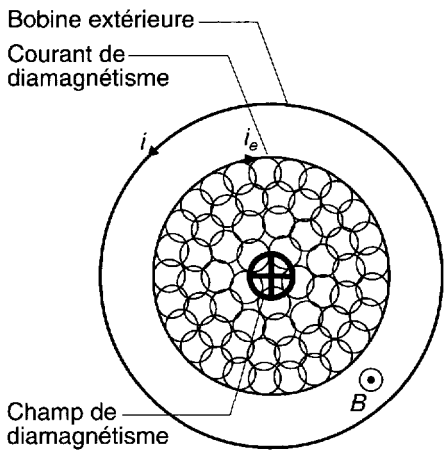


Figure 1.24 : Diamagnétisme d'un plasma confiné.

Tokamak Pays Labo	Paramètres							Chauffage (Current Drive)
	R (m)	$a; b$ (m)	$B_T \text{ max}$ (T)	$I_p \text{ max}$ (MA)	$n_e \text{ max}$ $10^{20}; \text{m}^3$	$T_e; T_i$ (keV)	τ_E (sec)	
JT-60 Japon JAERI	3	0.95	4.8	3.2	1.2	6/11	0.5	NBI ICH (LHCD)
JET CEE JET(U.K.)	2.96	1.25; 2.1	3.5	5 – 7	2.0	15; 23	1.5	ICH NBI (LHCD)
TFTR USA Princeton	2.48	0.85	5.2	2.5	4.0	8.5; 32	0.5	NBI ICH
Tore-Supra France Cadarache	2.36	0.8	4.5	1.7	1.0	1 – 5	0.4	NBI ICH (LHCD)

Tableau 1.2 : Les plus grands ($R > 2\text{m}$) tokamaks (1990/1991).

Paramètres du plasma et chauffages auxiliaires
NBI chauffage par injection de neutres
ICH Chauffage par résonance cyclotron ionique
(LHCD) Current drive à la résonance hybride basse

sabilité scientifique de la production d'énergie par fusion contrôlée. Dans un tokamak, le plasma est confiné par un fort champ magnétique toroïdal (B_T) à symétrie axiale, et un courant (I_p) circulant dans le plasma, qui produit un champ magnétique poloïdal ($B_p < B_T$). Le courant dans le plasma peut être produit par un effet de transformateur impulsionnel à une spire au secondaire (le plasma). Mais on peut aussi l'engendrer (*current drive*) avec des ondes unidirectionnelles interagissant avec les particules du plasma. Dans ce deuxième cas on devrait pouvoir créer un courant I_p continu et faire fonctionner le tokamak en régime continu. Le courant I_p chauffe aussi le plasma par effet Joule. Cependant, aux températures thermonucléaires, la résistivité (1.109) du plasma devient faible et on doit avoir recours à d'autres moyens de chauffage : injection de particules d'énergie élevée (NBI : neutral beam injection), ou d'ondes électromagnétiques de grande puissance (RF-heating). Le tableau 1.2 montre les paramètres des quatre plus grands (en termes de grand rayon R du tore) tokamaks en opération à l'heure actuelle [332bis].

Au cours de ces études longues et difficiles, les valeurs de n , nT et du produit triple nT réalisées n'ont cessé de progresser ; en 1992 on n'était plus très loin du but scientifique à atteindre (cf. Tableau 1.2 et Fig. 1.25) bien que d'énormes problèmes technologiques restent encore à résoudre pour réaliser un générateur d'électricité économiquement viable. Nous n'étudierons pas en détail dans ce livre ce chantier passionnant de la fusion nucléaire contrôlée. Nous renvoyons les lecteurs intéressés aux références [328] à [331b].

1.10.4 Confinement inertiel d'un plasma

Une seconde voie vers la fusion thermonucléaire contrôlée vise à produire une mini-explosion thermonucléaire, à partir d'une petite masse de mélange solide deutérium-tritium hyperdense (de 100 à 1000 fois la densité de la glace), comprimée et chauffée par des faisceaux laser ou particulaires très puissants. Ces faisceaux produisent une implosion dont la durée très courte ($\sim 10^{-9}$ s) est déterminée par l'hydrodynamique et par l'inertie du milieu, d'où le nom de confinement inertiel donné à cette filière. Le schéma de principe du cœur d'un réacteur à confinement inertiel est représenté sur la figure 1.26(a).

On y voit des faisceaux convergents qui viennent frapper une cible sphérique sur une coquille extérieure en matériau lourd. Celle-ci est portée superficiellement à une température très élevée et s'évapore à grande vitesse dans le vide extérieur. Ce processus d'ablation produit par effet de réaction une forte poussée sur l'intérieur de la cible et déclenche une onde de choc convergente. En pratique les structures de cibles peuvent

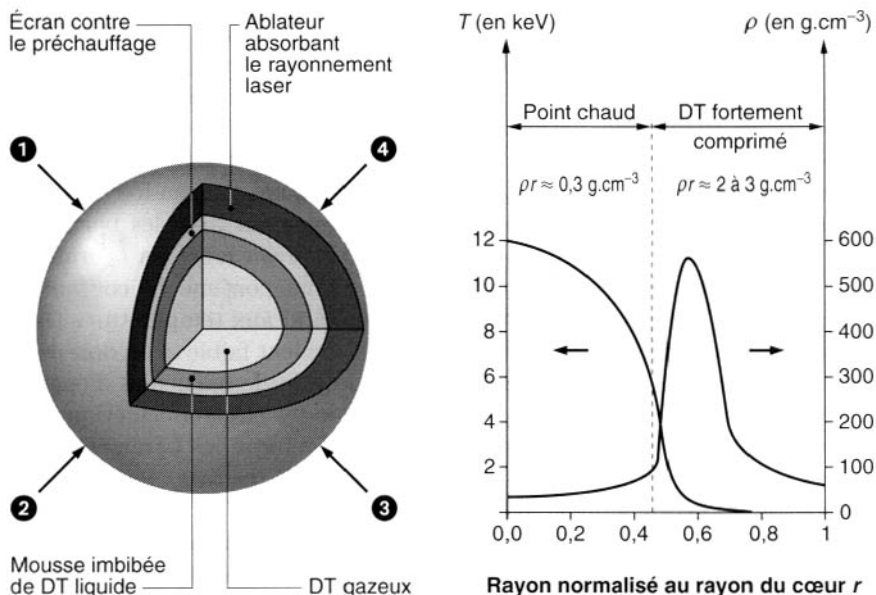


Figure 1.26 : Principe du confinement inertiel (d'après [338]).

(a) Structure de la capsule implorée ; la cible est constituée de plusieurs enveloppes concentriques : l'ablateur, l'écran, la mousse imbibée d'un mélange D – T liquide et le D – T gazeux central. 1, 2, 3, 4, ... faisceaux lasers en "attaque directe".

(b) Profils de densité ρ et de température T du cœur en fin d'implosion. L'ignition se produit dans le point chaud central et la combustion se propage à la masse principale du combustible D – T.

être plus complexes et la puissance des faisceaux est une impulsion avec un profil spécial [335] permettant de produire une suite d'ondes de chocs arrivant au même instant au centre de la cible. On comprime ainsi de façon optimale le milieu en évitant un préchauffage qui diminuerait la compression. Ce n'est qu'en fin de compression, lorsque toutes les ondes ont convergé au point central, que la matière très dense qui s'y trouve alors est chauffée énergiquement, ce qui crée le point chaud où la combustion thermonucléaire démarre (ignition) puis se propage à la masse du combustible. Les répartitions de densité et de température à cet instant critique de l'ignition sont représentés sur la figure 1.26(b).

Les faisceaux utilisés comme "driver" doivent déposer leur énergie de façon efficace dans une couche suffisamment mince de la coquille extérieure.

Lieu	Laboratoire	Nom	Type	impuls. longues		impuls. courtes		nb. de faisc.
				kJ	ns	TW	ps	
ALLEMAGNE								
Garching	Max Planck	AsterixIV*	iode	2	0.3			1
CANADA								
Ottawa	Nat.Res.C.	Coco II	CO ₂	0.2	1			2
CHINE								
Shangai	Institut opt. Université	Shengang	Nd Nd	0.2 1.6	1 1	0.6 2	100 100	6 2
FRANCE								
Limeil	C.én.atom.	P102 Octal Phebus	Nd Nd Nd	0.1 2 20	1 1 1	0.25 200 100	100	1 8 2
Palaiseau	Polytech.	Luli	Nd	1	2	200		6
ITALIE								
Frascati	C.n.en.nucl.		Nd	0.4	2			2
JAPON								
Osaka	Laser Eng.	GekkoXII LekkoVIII	Nd CO ₂	30 10	1 10	50	100	12 8
POLOGNE								
Varsovie	Plasma Phys.		Nd	0.1	1.5			4
RUSSIE								
Moscou	Lebedev	Kalmar Sokol	Nd Nd	0.7 0.3	3.5 0.8			9 24
	Arzamas	IskraV	iode	30	0.25			
U.S.A.								
Ann Arbor	K.M.S.	ChromaII	Nd	0.8	1	2	80	2
Livermore	Nat.Lab.	Janus Nova	Nd Nd	0.2 100	1 1			2 10
Rochester	Laser Energ.	G.D.L. Omega	Nd Nd	0.1 50	1 1	0.5 12	50 50	1 24
Los Alamos	Nat.Lab.	Aurora*	KrF	10	5			96
Washington	Naval Res.	Nike	KrF	3	5			2
U.K.								
Aldermaston	A.W.R.E.	Helen	Nd	1	1	2	100	2
Rutherford	Appleton	Vulcan Sprite	Nd KrF	1.8 0.06	1 2	2 0.7	120 3.5	12 1

Tableau 1.3 : Lasers utilisés en fusion par confinement inertiel.

(*) Appareils en cours de réalisation en 1993. Nd verre au néodyme, KrF fluorure de krypton. Les impulsions longues sont caractérisées par leur énergie en kilojoules et leur durée en nanosecondes ; les courtes par leur puissance en térawatts et leur durée en picosecondes.

Cela exclut les électrons et les ions légers qui pénètrent trop profondément dans la matière. On peut donc utiliser des photons produits par un laser ou des ions lourds. Les photons sont plus faciles à focaliser et l'on sait maintenant faire des lasers de très grandes puissances ; ils ont malheureusement des rendements énergétiques faibles, ce qui obère gravement le bilan d'énergie global du processus. Il est trop tôt pour savoir si l'on pourra compenser le mauvais rendement des lasers par un gain d'énergie suffisamment élevé dans la combustion thermonucléaire. Les faisceaux d'ions lourds peuvent de leur côté être produits avec un bon rendement énergétique, mais il est très difficile, à cause des effets de charge d'espace, de produire et de focaliser des faisceaux très intenses. Dans ces conditions, en attendant mieux, toutes les expériences actuelles de confinement inertiel sont faites avec des faisceaux laser à verre au néodyme. La longueur d'onde des photons qu'ils produisent est $1.06\text{ }\mu\text{m}$, mais on utilise souvent les harmoniques 2 à 4 de plus courte longueur d'onde qui se couplent mieux à la matière.

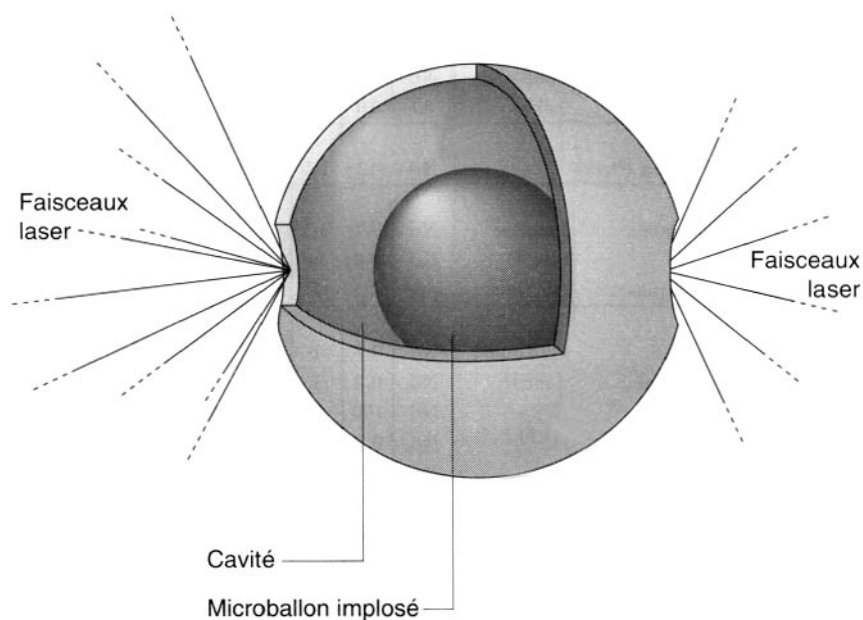


Figure 1.27 : Attaque indirecte par faisceaux laser (d'après [338]).

Le microballon contenant du D - T est irradié et imploré par les rayons X résultant de l'interaction des faisceaux laser avec les parois de la cavité.

La principale difficulté est, comme dans le confinement magnétique, de lutter contre les instabilités des plasmas. La plus active ici est l'instabilité

dite de Rayleigh-Taylor⁸ due à la poussée de la coquille lourde sur les couches internes plus légères. Comme on n'est que très peu maître de son taux de croissance, la seule solution consiste à diminuer les perturbations susceptibles d'être amplifiées, c'est-à-dire à partir d'une cible et de faisceaux n'ayant que très peu d'imperfections par rapport à la symétrie sphérique idéale. Cela est très difficile avec la disposition dite d'attaque directe représentée sur la figure 1.26(a). C'est pourquoi on étudie maintenant la méthode dite d'attaque indirecte représentée schématiquement sur la figure 1.27. Les faisceaux primaires viennent frapper et chauffer énergiquement les parois d'une enceinte entourant la cible. Le plasma très chaud qui se produit sur celle-ci émet des rayons X qui viennent irradier la cible. On a donc effectué un changement de fréquence et créé en quelque sorte un corps noir à rayons X. On y perd une certaine quantité d'énergie, mais l'attaque de la cible est beaucoup plus symétrique et le gain nucléaire de celle-ci est plus élevé que dans l'attaque directe ; dans l'état actuel des recherches les deux méthodes donnent à peu près les mêmes gains globaux [336].

L'état actuel des recherches sur la fusion par confinement inertiel a été présenté dans les références [336], [337], [338], [339]. Le tableau 1.2 et la figure 1.28 donnent quelques éléments sur les plus grosses installations actuelles et sur les résultats obtenus à ce jour.

Il faut enfin noter que les lasers à impulsions très courtes (\sim picoseconde) ouvrent un nouveau domaine passionnant de physique fondamentale : celui de la physique des interactions rayonnement-matière aux très hauts flux (cf. section 14.10).

1.11 Décharges électriques dans les gaz

Si le champ électrique appliqué à un gaz est suffisamment intense, celui-ci devient plus ou moins conducteur et les phénomènes complexes qui se produisent alors portent le nom de décharge dans les gaz : ils sont dus à l'apparition d'électrons et d'ions libres [342], [343].

1.11.1 Décharges en courant continu à basse pression

Un tube à décharge classique est constitué d'un tube de verre de quelques centimètres de diamètre, muni à ses deux extrémités de deux électrodes planes (distantes de d) et rempli d'un gaz sous une pression de l'ordre de

8. Dans sa version initiale c'est l'instabilité hydrodynamique de l'interface de deux liquides non miscibles, qui se produit si dans un récipient l'on essaie d'avoir le liquide le plus lourd au-dessus du liquide le plus léger.

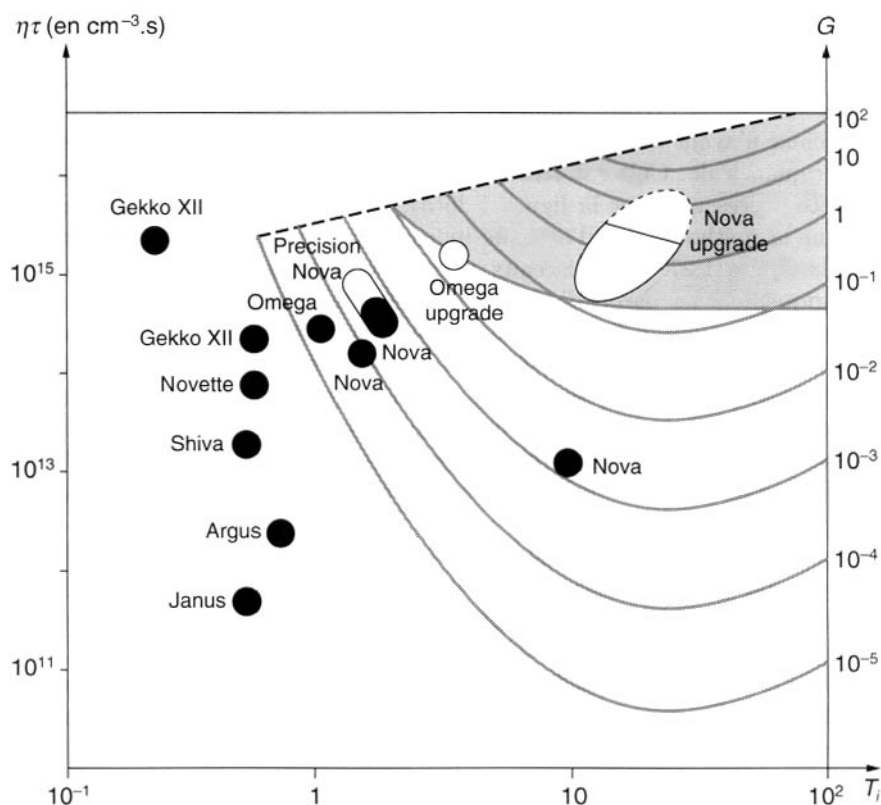


Figure 1.28 : Résultats des meilleures expériences de confinement inertiel [339].

T_i température ionique au point chaud (keV).

$n\tau$ produit de Lawson au point chaud (cm^{-3}s).

$G = E_{\text{fusion}}/E_{\text{driver}}$ gain de la cible (les courbes $G = \text{Cte}$ ont été tracées).

1 torr. Au moyen du circuit représenté sur la figure 1.29, on peut appliquer entre les deux électrodes une différence de potentiel continue V . Si V est assez élevée, on observe un courant i dans le tube qui devient d'ailleurs plus ou moins lumineux. En agissant sur la f.e.m. V_0 du générateur et sur la résistance de charge R , on peut faire varier i , depuis des valeurs très faibles de l'ordre de 10^{-18}A , jusqu'à des valeurs de quelques dizaines d'ampères. À chacune des valeurs de i correspond une valeur de V ; la courbe obtenue en portant i en abscisse et V en ordonnée est appelée la caractéristique (i, V)

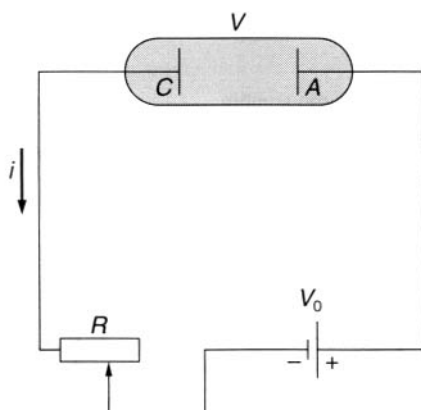


Figure 1.29 : Circuit d'alimentation d'un tube à décharge en courant continu.

du tube ; la figure 1.30 représente une telle caractéristique (en coordonnées logarithmiques pour i) ; elle fait apparaître divers régimes de décharge que nous allons décrire succinctement.

a) Décharges non autonomes

Aux courants très faibles, la décharge ne se produit que s'il existe une source extérieure produisant des charges électriques dans le gaz. Si la cathode est dans l'obscurité, l'agent d'ionisation extérieur est constitué par les rayons cosmiques (Fig. 1.30, branche AB). Si la cathode est éclairée par de la lumière contenant des rayons ultraviolets, les courants obtenus sont plus intenses (Fig. 1.30, branche $A'B$) et croissent avec l'éclairement de la cathode. Ils sont dus à l'émission photoélectrique de la cathode. Dans les deux cas, si l'on supprime l'action de l'agent extérieur (blindage du tube, arrêt de l'éclairement), on constate que le courant disparaît ; la décharge ne s'entretient pas par elle-même : on dit qu'elle est non autonome.

b) Décharge sombre de Townsend

Quand on s'approche du point B , de petites variations de V correspondent à des accroissements très importants de i ; dans cette région on montre que le courant est de la forme :

$$i = i_o \left(\frac{\exp \alpha d}{1 - \gamma(\exp \alpha d - 1)} \right) \quad (1.139)$$

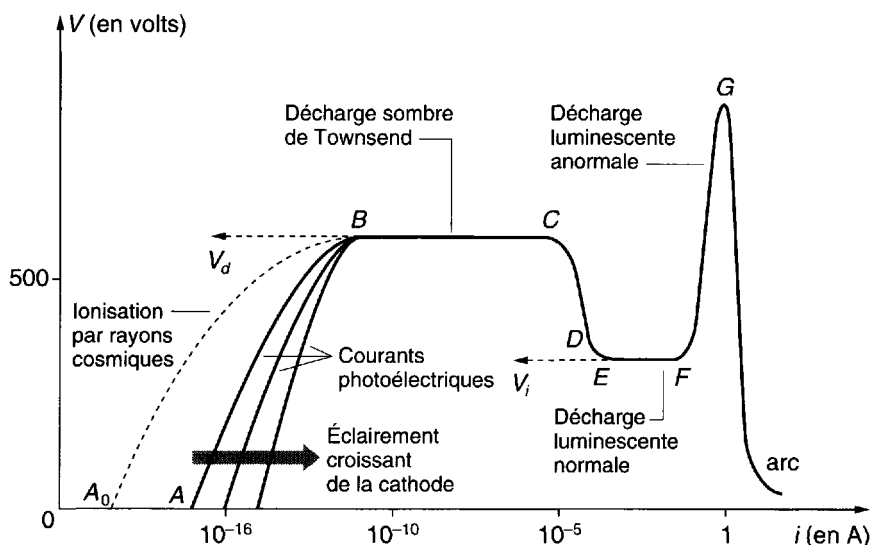


Figure 1.30 : Régimes de décharge en courant continu.

Néon, électrodes en Cu de 10 cm^2 , $p = 1 \text{ torr}$, $d = 50 \text{ cm}$.

Dans cette formule, i_0 représente le courant dû aux sources extérieures, le facteur α décrit un effet de multiplication des électrons dans le gaz par les collisions ionisantes électron-molécule, le facteur γ décrit divers effets secondaires de production de nouveaux électrons (par exemple émission d'électrons secondaires due au bombardement de la cathode par les ions produits dans le gaz).

Les coefficients α et γ (*coefficients de Townsend*) décrivent un cycle de deux réactions en chaîne. Lorsque le rendement de ce cycle est égal à l'unité, le dénominateur de la formule (1.139) s'annule (condition de claquage), la décharge devient autonome et le courant n'est plus limité que par le circuit extérieur. La valeur V_d correspondante du potentiel est le "potentiel disruptif". Tant que l'on n'atteint pas le point C (Fig. 1.30), les densités électroniques restent toutefois relativement faibles ; il en résulte que les phénomènes de charge d'espace sont négligeables et que la luminosité du gaz reste faible (décharge sombre de Townsend).

Pour un gaz et une cathode donnés, le potentiel disruptif V_d est une fonction du produit pd (loi de Paschen) où p est la pression et d la distance interélectrode. Pour une certaine valeur optimale $(pd)_m$ de ce produit, le potentiel disruptif passe par un minimum V_m (minimum de Paschen). On

Gaz	Cathode \rightarrow	Cu	Hg	Fe	Pt
He	V_m	220		150	
	$(pd)_m$	4		2.5	
	V_n	180	42	150	170
	$(pd)_n$			1.3	
	J_n/p^2			2.2	5
Ne	V_m	190		240	
	$(pd)_m$	3		3	
	V_n	220		150	150
	$(pd)_n$			0.72	
	J_n/p^2			6	18
Hg	V_m		300	520	
	$(pd)_m$		0.7	2	
	V_n	450	340	300	340
	$(pd)_n$	0.6		0.34	
	J_n/p^2	15		8	
H ²	V_m	270			
	$(pd)_m$	1.2			
	V_n	210	340	250	280
	$(pd)_n$	0.8	0.9	0.9	1
	J_n/p^2	64		72	90

Tableau 1.4 : Valeurs expérimentales des paramètres principaux de quelques tubes à décharge : V_M volt, $(pd)_m$ torr.cm, V_n volt, $(pd)_n$ torr.cm, J_N/p^2 $\mu\text{A}.\text{cm}^{-2}.\text{torr}^{-2}$.

peut expliquer qualitativement l'existence de ce minimum en disant qu'aux faibles valeurs de pd , il n'y a pas assez de molécules dans le tube pour que l'ionisation soit importante et qu'aux fortes valeurs de pd , la présence d'un trop grand nombre de molécules empêche les électrons d'atteindre des énergies suffisantes pour produire l'ionisation. Les valeurs de $(pd)_m$ et V_m dépendent du gaz et de la nature de la cathode employée. Le tableau 1.4 fournit quelques résultats typiques.

c) Décharges luminescentes

Si l'on augmente encore le courant on constate que le tube devient assez lumineux et que le potentiel V décroît. La luminosité n'est pas homogène : le tube présente une suite caractéristique de régions lumineuses et sombres. Cela tient au fait que les effets de charge d'espace sont maintenant importants : le champ électrique entre les électrodes n'est plus uniforme ; il est concentré au voisinage de la cathode ; ce réarrangement du champ le rend plus efficace pour l'ionisation, d'où la diminution de V .

Après les régions de transition CDE , on atteint le palier EF qui correspond à la décharge luminescente dite normale. Les décharges luminescentes trouvent de nombreuses applications, notamment dans l'éclairagisme (tubes au néon, tubes fluorescents). Leurs propriétés sont assez bien connues ; elles sont résumées sur la figure 1.31 qui montre la répartition, le long du tube, de la brillance, du potentiel V , des densités électroniques et ioniques n_e et n_i et des densités de courant correspondantes J_e et J_i . La chute de potentiel et l'entretien de la décharge se produisent principalement dans la région cathodique qui est caractérisée par les paramètres V_n (chute de potentiel cathodique normale) et d_n (longueur de l'espace cathodique normal). On montre que tout au long du palier EF (cf. Fig. 1.30) de la décharge normale les grandeurs V_n et d_n restent constantes, mais que la décharge n'occupe qu'une partie de la surface de la cathode avec une densité de courant J_n constante sur la partie utile de la cathode. Les grandeurs V_n , $(pd)_n$ et J_n/p^2 sont caractéristiques du couple gaz-métal de cathode que l'on utilise. Le tableau 1.4 fournit quelques résultats typiques. V_n est légèrement inférieur au minimum de Paschen, de l'ordre de $0.7 V_m$.

d) Régime d'arc

Si l'on augmente suffisamment i dans une décharge luminescente normale, toute la surface de la cathode est utilisée et on pénètre avec l'arc FG (cf. Fig. 1.30) dans le régime de décharge luminescente anormale caractérisé par une augmentation rapide de V .

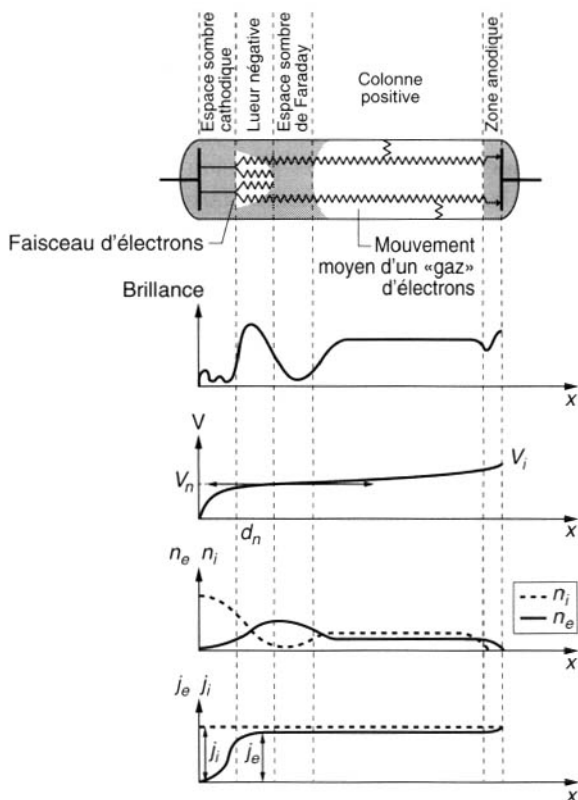


Figure 1.31 : Régions et mécanismes dominants dans une décharge lumineuse.

Si l'on augmente encore le courant, V recommence à décroître et, après une région de transition, on atteint le régime d'arc. Ce régime peut prendre des formes diverses, mais il est toujours caractérisé par l'apparition d'effets thermiques importants : le gaz est fortement chauffé, les électrodes également, la cathode peut émettre des électrons par effet thermo-ionique. La tension V devient très basse (quelques dizaines de volts) et le courant n'est en général limité que par la résistance de charge. Un tube fonctionnant en régime d'arc devra être en général robuste et sérieusement refroidi ; l'apparition accidentelle d'un régime d'arc dans un tube non spécialement étudié pour celui-ci conduit en général à la destruction du tube.

e) Décharges en courant continu à haute pression

Lorsque dans un tube à décharge le produit pd est supérieur à 500 torr.cm, les propriétés de la décharge sont profondément modifiées. Les modifications portent essentiellement sur le régime de Townsend et sur la décharge luminescente, tandis que les arcs à haute pression ne diffèrent pas essentiellement des arcs à basse pression. Enfin, dans de nombreux cas, on voit apparaître les décharges filamenteires appelées étincelles : il s'agit de régimes essentiellement transitoires qui conduisent à l'amorçage d'un arc si le générateur est assez puissant. Les décharges à haute pression ont été analysées beaucoup plus récemment que les décharges à basse pression car certains des processus fondamentaux qui s'y produisent se font à une échelle spatiale ou temporelle difficile à observer (gaines cathodiques ayant des épaisseurs de l'ordre du micron, constantes de temps de l'ordre de la nanoseconde). On se borne ici à décrire l'un des mécanismes de développement d'une étincelle à haute pression ($p \sim 1$ atm) entre deux électrodes planes. Les phénomènes sont représentés schématiquement sur la figure 1.32. Tout d'abord un petit nuage sphérique d'électrons se mul-

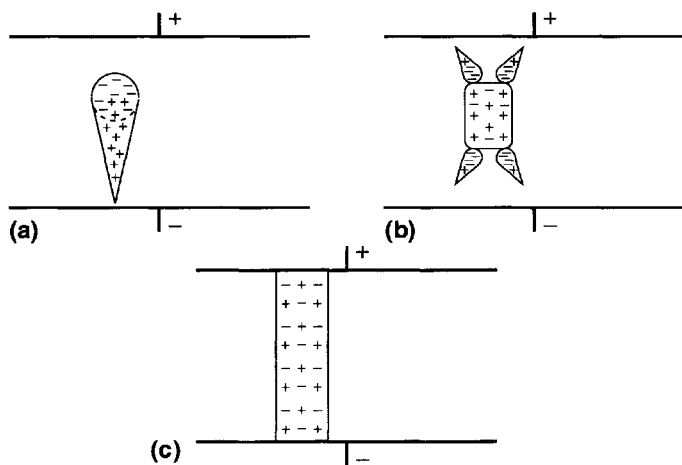


Figure 1.32 : Développement d'une étincelle à haute pression.

- (a) Avalanche primaire.
- (b) Avalanches secondaires.
- (c) Streamers.

tiplie exponentiellement par collisions ionisantes : c'est l'avalanche primaire [Fig. 1.32(a)]. Les ions positifs ainsi produits peuvent être considérés

comme immobiles et créent une charge d'espace positive. Lorsque celle-ci a atteint une certaine valeur critique, apparaissent des avalanches secondaires [Fig. 1.32(b)] qui sont initiées par un électron produit par photoionisation du gaz et qui se dirigent vers la tête de l'avalanche primaire. Du fait de la jonction des avalanches primaire et secondaire, il se forme deux dards de plasma (dards ou streamers) qui se propagent l'un vers la cathode et l'autre vers l'anode. Lorsqu'ils ont atteint les électrodes, ces dernières sont reliées par un filament de plasma [Fig. 1.32(c)] qui forme un arc si le générateur est assez puissant.

f) Décharges en haute fréquence et claquages laser

Au moyen de l'un des dispositifs représentés sur la figure 1.33, on peut appliquer un champ électrique HF à un gaz et produire dans celui-ci une décharge sans qu'aucune électrode ne soit en contact avec lui. Nous ver-

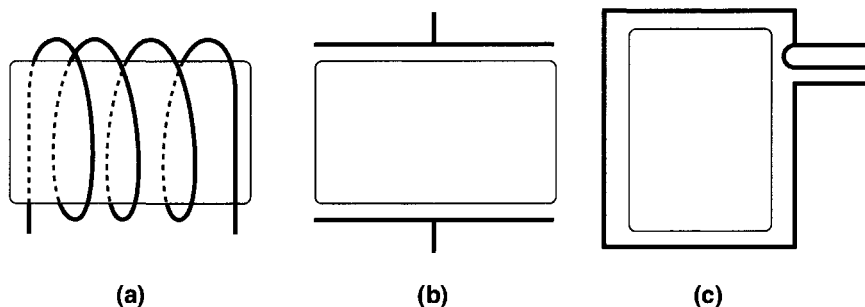


Figure 1.33 : Dispositifs de production des décharges en hautes fréquences.

- (a) Couplage inductif.
- (b) Couplage capacitif.
- (c) Cavité hyperfréquence.

rons au chapitre 5 qu'on peut analyser les propriétés de ces décharges HF, sur un diagramme de coordonnées $p\lambda$ et $p\Lambda$ (λ longueur d'onde du champ HF, Λ longueur "de diffusion" qui est de l'ordre de la plus petite dimension du récipient). En portant sur un troisième axe le "potentiel disruptif" $(E\Lambda)_d$ on obtient une surface qui représente la généralisation de la loi de Paschen. L'étude de cette surface montre que l'on peut faire apparaître plusieurs régimes de décharge dans le plan $p\lambda$, $p\Lambda$ (Fig. 1.34). Au centre du diagramme apparaît le régime contrôlé par diffusion que nous

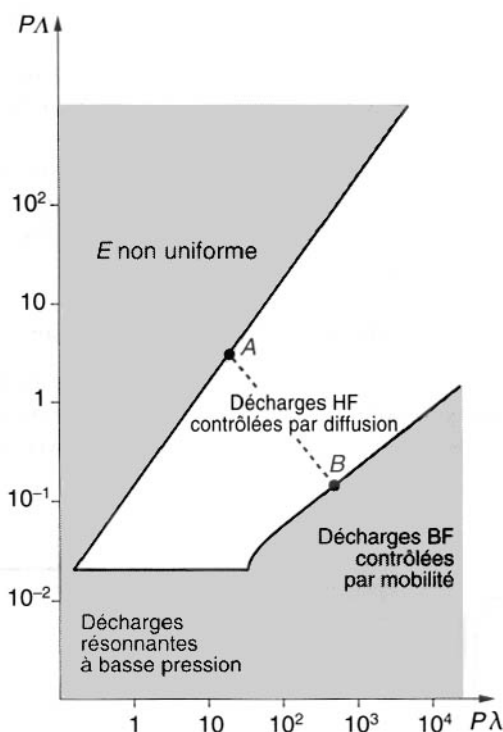


Figure 1.34 : Décharges en courant alternatif dans H_2 .

décrivons au chapitre 5 et qui est fondé sur les mécanismes suivants : le champ HF chauffe les quelques électrons primaires contenus dans le gaz ; les électrons se multiplient par collisions ionisantes sur les molécules ; les particules chargées se perdent uniquement par diffusion et recombinaison sur les parois.

Ce régime se distingue des régimes BF et continus (contrôlés par mobilité) dans lesquels le champ électrique draine les particules vers les électrodes. De fait, les décharges HF sont plus efficaces que les décharges BF ou continues car $E\lambda$ y est plus faible. On peut enfin noter que, sur la figure 1.34, le segment AB correspond à une vallée de potentiel disruptif en ce sens que $(E\lambda)_d$ y est minimal.

Lorsqu'on focalise dans une enceinte contenant du gaz sous pression le faisceau d'un laser pulsé, on observe, si le flux lumineux au foyer est assez grand (de l'ordre de 10^9 W/cm^2), la formation d'une boule de plasma

dans cette région focale. De telles *décharges par laser* s'apparentent aux décharges HF dont elles sont en quelque sorte l'extrapolation vers les fréquences optiques. Elles en diffèrent par les points suivants : les pressions optimales sont très élevées (10^2 à 10^3 atm) ; les premiers électrons sont produits par l'onde lumineuse elle-même par effet multiphotonique selon la réaction :



Le volume focal est chauffé, en fin de décharge, à des températures très élevées (10^4 à 10^5 K). En utilisant des cibles plus complexes qu'un gaz (microsphères solides, microbulles à parois solides, coquilles multiples...), on rentre dans le domaine de la fusion inertielle par laser évoqué au paragraphe 1.10.

1.12 Problèmes

P1-1 *Distribution maxwellienne des vitesses

Ce problème est une révision des bases de la théorie cinétique des gaz (cf. par exemple [278, chapitres 11-14], [285, sections 7.9-7.13 et chapitre 12] et chapitre 8 du présent livre).

On décrit la distribution des vitesses dans un gaz au moyen de la fonction $f(\vec{w})$ qui est une densité de probabilité. On en déduit la moyenne d'une fonction quelconque de la vitesse $A(\vec{w})$, soit :

$$\langle A(\vec{w}) \rangle = \frac{\int A(\vec{w}) f(\vec{w}) d^3 w}{\int f(\vec{w}) d^3 w} = \frac{1}{n} \int A(\vec{w}) f(\vec{w}) d^3 w$$

a) La fonction de distribution maxwellienne à une dimension des vitesses (cf. problème P1-2) est :

$$f_m(w_x) = \frac{n}{v_t \sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{w_x^2}{v_t^2} \right)$$

où n est la densité des particules et $v_t^2 = 2(\kappa T/m) = 2v_T^2$. Calculer les grandeurs suivantes :

- (i) la vitesse moyenne $\langle w_x \rangle$,
- (ii) la vitesse quadratique moyenne $\langle w_x^2 \rangle$,
- (iii) l'énergie cinétique moyenne $\langle \frac{1}{2} m w_x^2 \rangle$,
- (iv) la moyenne du flux de quantité de mouvement aléatoire $\langle m[w_x - \langle w_x \rangle] w_x \rangle$, c'est-à-dire la pression.

Tracer avec soin la courbe de $f_m(w_x)$ en fonction de w_x et indiquer les positions de v_T et v_t .

b) La fonction de distribution des vitesses maxwellienne à trois dimensions est :

$$f_m(\vec{w}) = \frac{n}{(v_t \sqrt{\pi})^3} \exp \left(-\frac{w^2}{v_t^2} \right)$$

où $w^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2$. Calculer les grandeurs suivantes :

- (i) la moyenne de chaque composante, par exemple $\langle w_x \rangle$,
 - (ii) la moyenne du module de la vitesse $\langle w \rangle$,
 - (iii) la vitesse quadratique moyenne $\sqrt{\langle w^2 \rangle}$,
 - (iv) l'énergie cinétique moyenne dans une direction quelconque $\langle \frac{1}{2} m w_x^2 \rangle$.
- c) La vitesse d'une particule étant $w = (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)^{1/2}$, il est commode d'introduire une fonction de distribution des modules des vitesses $g(w)$ telle que $g(w) dw$ soit la densité des particules de vitesses comprises entre w et $w + dw$. En partant de la distribution maxwellienne donnée dans la partie (b) ci-dessus :
- (i) Calculer la distribution maxwellienne des modules des vitesses $g_m(w)$.
 - (ii) Tracer la courbe de g_m en fonction de w ; quelle est la vitesse la plus probable ?
 - (iii) Calculer combien de particules ont une vitesse trois fois plus grande que la vitesse la plus probable.
- d) Pour interpréter les expériences utilisant un analyseur des énergies des particules on peut considérer la fonction de distribution des énergies $F(\epsilon)$, $\epsilon = (mw^2/2)$, telle que $F(\epsilon)d\epsilon$ soit la densité des particules d'énergies comprises entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$. En partant des distributions maxwelliennes des parties (b) et/ou (c) ci-dessus :
- (i) Établir une expression de la distribution maxwellienne des énergies $F_m(\epsilon)$.
 - (ii) Tracer soigneusement la courbe de $\frac{F_m(\epsilon)}{n}$ en fonction de ϵ .
 - (iii) Dessiner la courbe de $\log_e(F_m/\epsilon^{1/2})$ en fonction de ϵ et expliquer comment on peut déduire la température d'un plasma d'une mesure relative du nombre de particules de haute énergie.

Quelques relations mathématiques utiles :

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha^{-(n+1)/2}$$

où la fonction *Gamma* est définie par :

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx$$

valable pour $n > -1$. Noter que l'on a :

$$\Gamma(m) = (m-1)\Gamma(m-1) .$$

et pour p entier positif :

$$\Gamma(p) = (p-1)! = \frac{p!}{p}$$

Quelques valeurs spéciales :

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Pour plus de détails consulter [268].

P1-2 *Distribution gaussienne et théorème de la limite centrale

La forme gaussienne de la distribution des vitesses (appelée aussi fonction de distribution maxwellienne des vitesses) se produit de façon tout à fait générale, si l'on admet que la distribution évolue par un grand nombre de petits pas aléatoires dans l'espace des vitesses, la probabilité de chaque pas de vitesse étant supposée indépendante de celles des autres pas ; ce résultat est indépendant de la loi de probabilité d'un pas de vitesse donné ! Il est connu sous le nom de *théorème de la limite centrale* ; il aide à comprendre pourquoi la distribution gaussienne joue un rôle si important dans la description des phénomènes physiques.

La démonstration par le calcul des probabilités du théorème de la limite centrale est longue et difficile (cf. par exemple [279] et [285]). On peut cependant en comprendre la validité en étudiant quelques exemples. On peut ensuite le considérer comme une propriété des convolutions d'un grand nombre de fonctions positives et il apparaît aussi de manière non probabiliste dans certaines occasions (par exemple en génie électrique pour déterminer la sortie d'un ensemble de systèmes linéaires en cascade).

Supposons que les variables aléatoires x_i , avec $i = 1, 2, 3, \dots$, soient distribuées uniformément sur l'intervalle $(0, L)$ de sorte que $P(x_i) = \frac{1}{L} S$ ($0 < x_i < L$) où S est une notation abrégée pour une fonction de pas unitaire dans l'intervalle $(0, L)$. La probabilité P n'est pas supposée proche d'une distribution gaussienne.

- a) Montrer que la densité de probabilité $P(x)$ pour la variable $x = x_1 + x_2$ est représentée par un triangle, et que la moyenne $\bar{x} = \int dx x P(x)$, et la variance, $\sigma^2 = \int dx (x - \bar{x})^2 P(x)$, sont $\bar{x} = L$ et $\sigma^2 = L^2/6$. Comparer (en traçant les courbes) cette distribution à la gaussienne correspondante :

$$P_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[(x - \bar{x})^2/2\sigma^2]$$

- b) Considérer maintenant $x = x_1 + x_2 + x_3$ et calculer la densité de probabilité, la moyenne, la variance et comparer à nouveau avec la distribution gaussienne correspondante.

P1-3 *Démonstration simple de l'équation de Saha

Dans un système en équilibre thermodynamique, la mécanique statistique prévoit que la probabilité de réalisation d'un état quantique j donné est $P_j = N e^{-E_j/T}$ où N est un facteur de normalisation obtenu en faisant la somme sur tous les états et E_j est l'énergie de l'état j . La probabilité pour qu'une particule soit dans un état lié d'énergie $E_j = -U_j$ est donc :

$$P_{\text{bound}} = N e^{U_j/\kappa T}$$

tandis que la probabilité de l'ensemble des états libres est :

$$P_{\text{free}} = N \sum_{\text{free}} e^{-E_j/\kappa T} \rightarrow N \int dw^3 \rho(w) e^{-mw^2/2\kappa T}$$

où $\rho(w)$ est la *densité des états* obtenue en passant à la limite d'un spectre continu.

- a) Compter effectivement les états pour obtenir $\rho(w)$ et calculer P_{free} .
- b) Le rapport, n_i/n_N , des densités des atomes ionisés et neutres donné par l'équation de Saha peut s'obtenir en calculant le rapport $P_{\text{free}}/P_{\text{bound}}$ pour les électrons. Expliquer pourquoi.

c) Terminer les calculs pour obtenir l'équation de Saha :

$$\frac{n_i}{n_N} \simeq 2.4 \times 10^{15} \frac{T^{3/2}}{n_e} e^{-E_i/\kappa T} \quad (\text{CGS})$$

P1-4 *Gaines de plasma et sondes de Langmuir

Les plasmas expérimentaux sont souvent limités par des parois métalliques (consulter [305, pp. 290-297] ou pour une discussion plus complète [363], [364], [365] et [368]). Le but de ce problème est d'analyser une telle situation et d'examiner la théorie de base qui s'applique à une sonde de Langmuir (essentiellement une sonde métallique à potentiel variable), qui peut être utilisée pour déterminer dans un plasma la température et la densité électronique, le potentiel du plasma et la masse des ions.

a) Considérer un plasma électron-ion ($Z_i = 1$) d'extension semi-infinie et limité par une surface métallique plane (Fig. 1.35).

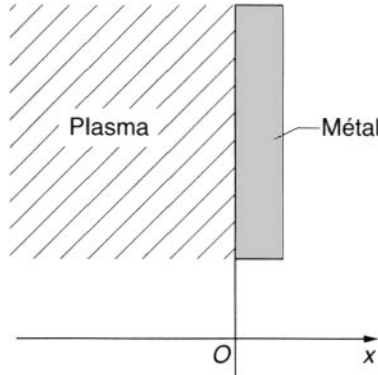


Figure 1.35 : Plasma au contact d'une paroi métallique.

- (i) Montrer que le nombre total de particules s ($s = e$ pour les électrons, $s = i$ pour les ions) qui s'approche de la surface métallique par unité de surface et de temps est donné par :

$$\Gamma_s = \int \int \int w_x f_s(\vec{w}) d\vec{w}$$

pour $w_x > 0$, qui est le flux de particules sur le métal. En supposant que $f_e(\vec{w})$ et $f_i(\vec{w})$ sont maxwelliennes, calculer Γ_e et Γ_i .

- (ii) D'après les résultats de la partie (i) on voit qu'en général $\Gamma_e \gg \Gamma_i$ et que par conséquent la surface métallique va commencer à accumuler une charge négative. À cause des effets d'écran, le potentiel pris par la paroi va être en fait confiné à une couche mince appelée une gaine, dont l'épaisseur est de quelques longueurs de Debye. Évidemment, la quasi-neutralité n'est plus respectée dans cette région qui est peuplée majoritairement d'ions. Après un certain intervalle de temps, les électrons de plus faible énergie

seront repoussés jusqu'à ce que s'établisse un équilibre dans lequel on ait $\Gamma_e(x=0) = \Gamma_i(x=0)$. Calculer le potentiel pris par la paroi dans ce régime quasi stationnaire.

- (iii) Calculer la densité électronique, $n_e(x)$, en fonction de la position dans la gaine jusqu'à la limite où la recombinaison des ions est équilibrée par l'ionisation au centre du plasma.

- b) Une sonde est une plaque métallique (ou un cylindre ou une sphère) plongée dans le plasma reliée par un fil conducteur isolé à l'espace extérieur au plasma. Ce fil permet de porter la plaque à un potentiel variable et de mesurer le courant collecté par celle-ci [Fig. 1.36(a)]. La caractéristique courant-tension d'une sonde

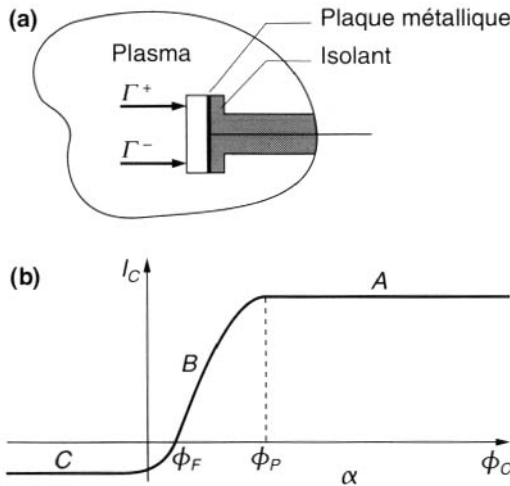


Figure 1.36 : Sonde de Langmuir.

(a) Schéma de principe.

(b) Caractéristique courant-tension.

idéale est représentée sur la figure 1.36(b). Sur l'arc *A* de la courbe, la sonde est positive par rapport au plasma, et les électrons qui pénètrent dans la gaine du fait de leur agitation thermique sont accélérés jusqu'à la plaque. Le courant ainsi collecté est appelé courant de saturation électronique. Sur l'arc *B* de la courbe, la sonde est négative par rapport au plasma, qui est au potentiel ϕ_p . Les électrons les plus énergétiques, dans la queue de la fonction de distribution $f_e(\vec{w})$, sont cependant encore collectés par la plaque. Au potentiel flottant ϕ_F , une partie des électrons est repoussée de façon que l'on ait $\Gamma_e = \Gamma_i$ et aucun courant n'est collecté par la sonde. Sur l'arc *C* la tension est suffisamment négative pour repousser la plupart des électrons et on obtient le courant de saturation ionique.

- (i) Pour $\phi_c < \phi_p$, les ions sont accélérés vers la sonde (chute libre) et les électrons repoussés [Fig. 1.37(a)]. On néglige les collisions des ions et suppose que les électrons sont maxwelliens. Comme la densité électronique

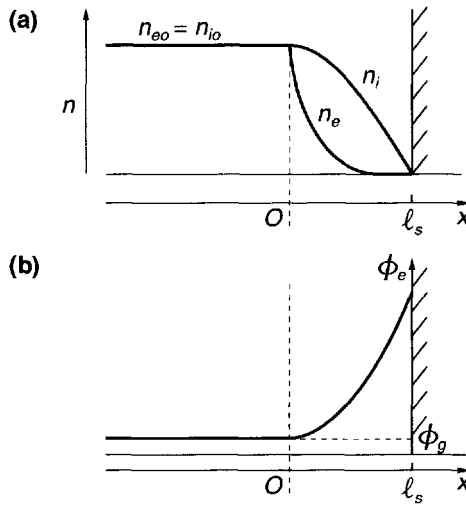


Figure 1.37 : Gaine ionique et zone de transition.

(a) Gaine.

(b) Pénétration du champ dans le plasma.

décroît exponentiellement, leur charge d'espace peut être négligée et l'on peut déterminer le courant ionique à partir de la loi de Child-Langmuir (la situation est analogue à celle d'une diode plane à courant limité par la charge d'espace). Établir la loi de Child-Langmuir ionique (cf. [219, p. 294]) et en déduire la densité de courant ionique :

$$J_i = \frac{4\epsilon_0}{9} \left(\frac{2e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{\phi_s^{3/2}}{\ell_s^2}$$

où $\phi_s = \phi_c - \phi_p$ est la variation de potentiel à travers la gaine. Utiliser les résultats de la partie (a) pour trouver le rapport ℓ_s^2/λ_D^2 où $\lambda_D^2 = \epsilon_0 \kappa T_e / e^2 n_0$ est le carré de la longueur de Debye.

- (ii) Calculer la densité de courant électronique pour l'arc B ($\phi_c \leq \phi_p$) et en déduire le courant de saturation électronique.
- (iii) Quelle est la densité nette du courant J_{net} de sonde sur l'arc B ?
- (iv) Montrer que le courant ionique est négligeable sur l'arc B et tracer la courbe de $\log_e(J_{\text{net}})$ en fonction de ϕ_c sur l'arc B . Comment peut-on déterminer la température électronique par une mesure de cette partie de la courbe de I_c en fonction de ϕ_c ?
- (v) Comment peut-on déterminer n_{e0} et le potentiel ϕ_p du plasma ?
- (vi) Sur l'arc C le potentiel de gaine est assez négatif pour empêcher une grande fraction des électrons de pénétrer la gaine. On doit admettre que, par suite de l'énergie thermique des particules, un potentiel résiduel ϕ_R sort de la limite de la gaine, pénètre dans le plasma et ne s'annule qu'à l'infini. Sur ces

bases, montrer que la densité du courant de saturation ionique est donnée de façon approchée par :

$$J_{i \text{ sat}} = e n_{e0} \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_i}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$$

[On voit, à partir de la figure 1.37(b), qu'il y a dans le plasma près de la gaine un petit champ E et qu'on ne peut plus supposer une neutralité exacte de charge ($n_i = n_e$). En imposant une condition moins stricte pour $x = 0$, $(d/dx)(n_i - n_e) = 0$, on peut déterminer ϕ_R qui, à son tour, détermine la vitesse des ions à leur entrée dans la gaine.]

Comment peut-on déterminer la masse des ions à partir d'une mesure complète de la courbe de I_c en fonction de ϕ_c ?

- (vii) Peut-on déterminer la température ionique par une mesure avec la sonde de Langmuir ?

P1-5 Énergie potentielle d'un plasma

- a) La densité double e - i dans un plasma en équilibre thermodynamique à faibles corrélations (cf. chapitre 8) étant : $\langle f_{12} \rangle \equiv n_{12} = n_1 n_2 \exp(-q_1 \phi_2 / \kappa T) \approx n_1 n_2 (1 - q_1 \phi_2 / \kappa T)$ où ϕ_2 est le potentiel écranté de la charge 2 montrer que l'on a :

$$\begin{aligned} n_{12}^{ee} &= n_{e0}^2 \left(1 - \frac{r_o}{r} e^{-r/\lambda_s} \right) \\ n_{12}^{ii} &= n_{i0}^2 \left(1 - Z_i^2 \frac{r_o}{r} e^{-r/\lambda_s} \right) \\ n_{12}^{ei} &= n_{e0} n_{i0} \left(1 + Z_i \frac{r_o}{r} e^{-r/\lambda_s} \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} n_{e0} &= Z_i n_{i0} \\ r_o &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o \kappa T} \\ \lambda_s^2 &= \frac{\epsilon_o \kappa T}{e^2 (1 + Z_i) n_{e0}} \end{aligned}$$

et :

$$r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

- b) Montrer que l'énergie potentielle du plasma est :

$$\begin{aligned} U &= U_{ee} + U_{ii} + U_{ei} \\ &= V U_{int} \end{aligned}$$

où V est le volume du plasma et U_{int} la densité moyenne d'énergie d'interaction entre les particules (1.72). Noter que l'on a :

$$\begin{aligned} U_{ee} &= \frac{1}{2} \int n_{12}^{ee} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r} dr_1 dr_2 \\ U_{ii} &= \frac{1}{2} \int n_{12}^{ii} \frac{Z_i^2 e^2}{4\pi\epsilon_o r} dr_1 dr_2 \\ U_{ei} &= - \int n_{12}^{ei} \frac{Z_i e^2}{4\pi\epsilon_o r} dr_1 dr_2 \end{aligned}$$

Expliquer pourquoi il y a un facteur $1/2$ dans U_{ee} et U_{ii} , mais non dans U_{ei} .

(Note : Pour effectuer les intégrations dans les trois expressions ci-dessus on peut faire le changement de variables passant de \vec{r}_1, \vec{r}_2 à $\vec{r}_1, \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.)

P1-6 Grandeurs caractéristiques dans un plasma

Pour un plasma typique de fusion par confinement magnétique on a ($n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $T = 15 \text{ keV}$), un plasma typique de fusion par confinement inertiel ($n_e = 10^{28} \text{ m}^{-3}$, $T = 15 \text{ keV}$), et un plasma dans le milieu interstellaire ($n_e = 10^6 \text{ m}^{-3}$, $T = 0.25 \text{ eV}$). Calculer dans ces trois cas les grandeurs suivantes :

- a) la longueur de Landau
- b) la distance interparticulaire (approchée)
- c) la longueur de Debye
- d) le nombre de particules dans la sphère de Debye

Noter et expliquer comment les plasmas cinétiques classiques peuvent avoir d'aussi grandes différences dans les ordres de grandeur de leurs longueurs caractéristiques a), b) et c) ci-dessus.

Chapitre 2

Trajectoires dans un champ magnétique

2.1 Introduction

Un plasma de faible densité peut souvent être considéré comme un gaz non collisionnel de particules chargées. Presque toujours il faut considérer que ce plasma est plongé dans un champ magnétique \vec{B} , statique ou lentement variable. Ce champ est produit par des sources extérieures au plasma ou engendré par les courants électriques associés aux mouvements d'ensemble des particules du plasma. Les systèmes de confinement magnétique avec de forts champs imposés, les magnétosphères planétaires, les plasmas des couches externes des étoiles avec de grands champs magnétiques autogénérés sont des exemples de cette situation.

De façon plus générale un plasma non collisionnel peut également être soumis localement à un champ électrique macroscopique \vec{E} dont l'origine peut être aussi extérieure ou intérieure. Pour analyser le comportement d'un tel gaz il est nécessaire de décrire le mouvement des particules chargées dans le champ (\vec{E}, \vec{B}) , c'est-à-dire de trouver toutes les trajectoires possibles qui correspondent aux solutions de l'équation du mouvement d'une particule¹ :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.1)$$

1. Dans ce chapitre nous n'utilisons pas les vitesses hydrodynamiques (cf. formule 9.2). Nous utiliserons donc la notation \vec{v} (au lieu de \vec{w}) pour désigner la vitesse d'une particule individuelle.

L'infinité de solutions de cette équation permet de représenter l'agitation thermique désordonnée des particules du plasma. En faisant des moyennes statistiques sur l'ensemble des trajectoires, on peut ensuite obtenir le comportement macroscopique du plasma. C'est l'objet de la théorie cinétique des "magnétoplasmas".

Nous commencerons (section 2.2) par étudier le cas très simple où $\vec{E} = 0$ et où \vec{B} est uniforme et statique. Les trajectoires sont alors des hélices et l'analyse de ce cas trivial nous permettra de préciser nos notations mais aussi d'introduire une grandeur très importante associée au mouvement hélicoïdal : le *moment magnétique orbital* d'une particule. Le signe de cette quantité nous montrera que le plasma est un milieu diamagnétique qui a tendance à rejeter les flux magnétiques.

Dans la section 2.3 nous étudierons le cas presque aussi simple où un champ électrique \vec{E} uniforme agit sur le plasma en plus du champ magnétique \vec{B} uniforme et statique. Nous montrerons qu'un champ \vec{E} statique et perpendiculaire à \vec{B} n'accélère pas en général les particules mais fait dériver l'ensemble du plasma (électrons et ions) avec une vitesse

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

Nous montrerons que d'autres forces telle que celle de gravité produisent une dérive analogue.

Dans la section 2.4 nous étendrons l'analyse précédente au cas d'un champ électrique oscillant, avec comme principal résultat le calcul du tenseur de conductivité d'un plasma dans l'approximation dite des plasmas froids. Au passage nous examinerons le cas singulier des résonances cyclotron ($\omega = \Omega$).

Ayant ainsi traité les cas simples où le champ magnétique \vec{B} est statique et uniforme et où l'équation (2.1) s'intègre facilement, nous poserons dans la section 2.5 les bases d'une théorie approchée des trajectoires dans les champs presque uniformes et presque statiques. On peut alors considérer qu'à un instant donné la trajectoire de chaque particule est une hélice ; cependant à cause des variations du champ magnétique cette hélice se déforme lentement.

Les sections 2.6 à 2.9 sont consacrées au développement de cette théorie dite des orbites adiabatiques. Le cas le plus simple (section 2.6) est celui où \vec{B} est uniforme mais varie lentement avec le temps. Si par exemple \vec{B} croît, on montre que le plasma se contracte en accompagnant le mouvement des tubes de force magnétiques, et que d'autre part la déformation des hélices

se fait en conservant de façon approchée le moment magnétique orbital μ qui est ainsi ce qu'on appelle un invariant adiabatique. L'équivalence par changement de repère entre les variations temporelles et spatiales de B permet de passer du phénomène précédent, qu'on appelle une compression magnétique, au mouvement d'un plasma dans un champ \vec{B} statique mais non uniforme. L'invariance de μ permet alors de montrer que les particules sont repoussées par les régions de fort champ magnétique (effet de miroir magnétique).

La déformation adiabatique des orbites hélicoïdales s'accompagne de lentes dérives perpendiculaires à \vec{B} : dérive électrique comme dans un champ \vec{B} uniforme, mais aussi dérives de "courbure" et de "gradient" introduites par la non-uniformité du champ magnétique (section 2.8).

Nous terminerons enfin le chapitre par une analyse des invariants adiabatiques (section 2.9) et des constantes exactes du mouvement (section 2.10) qui résultent des symétries éventuelles du champ magnétique.

2.2 Champ magnétique uniforme constant

2.2.1 Trajectoires hélicoïdales

Le mouvement d'une particule chargée libre dans un champ magnétique constant (c'est-à-dire ne variant pas dans le temps) est déterminé par la force de Lorentz qui est perpendiculaire à la fois à la vitesse \vec{v} de la particule et au champ magnétique \vec{B} . Si on suppose le mouvement non relativiste, l'équation du mouvement est :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.2)$$

où m est la masse de la particule et q sa charge. En multipliant scalairement les deux membres de cette équation par \vec{v} on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = 0 \quad (2.3)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{mv^2}{2} \equiv \mathcal{E} = \text{Cte} \quad (2.4)$$

Ainsi, l'énergie cinétique \mathcal{E} d'une particule chargée se déplaçant dans un champ magnétique statique est constante et cela quelle que soit la dépendance spatiale $\vec{B}(\vec{r})$ de ce champ. Cela tient au fait que la force

de Lorentz $q(\vec{v} \times \vec{B})$ est perpendiculaire à \vec{v} et donc ne travaille pas en agissant sur la particule.

Supposons maintenant que le champ magnétique soit non seulement statique mais aussi uniforme (indépendant de \vec{r}). L'équation (2.2) peut alors s'écrire aussi :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (2.5)$$

où l'on a introduit le vecteur constant :

$$\vec{\Omega} = -\frac{q}{m} \vec{B} \quad (2.6)$$

L'équation (2.5) est l'équation classique d'un vecteur \vec{v} animé d'une rotation autour d'un axe. Le vecteur $\vec{\Omega}$ est donc le *vecteur rotation gyromagnétique* ; son axe définit l'axe de rotation, son signe le sens de la rotation (positif pour les électrons et négatif pour les ions) et son module :

$$\Omega = \left| \frac{q}{m} B \right| \quad (2.7)$$

est la fréquence de rotation appelée ici *fréquence cyclotron* ². Pour pouvoir écrire des équations valables aussi bien pour les électrons que pour les ions nous introduisons aussi la *valeur algébrique* de la fréquence cyclotron, soit :

$$\bar{\Omega} = -\frac{q}{m} B \quad (2.8)$$

où B est supposé positif.

Nous pouvons maintenant montrer que la trajectoire la plus générale d'une particule est une hélice obtenue par superposition de la rotation autour de $\vec{\Omega}$ et d'une translation à la vitesse \vec{v}_{\parallel} dans la direction de $\vec{\Omega}$.

Pour cela prenons pour axe Oz un axe parallèle à \vec{B} et orienté dans le même sens. L'équation du mouvement (2.5) devient

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \bar{\Omega} \vec{e}_z \times \vec{v} \quad (2.9)$$

soit par projection sur les axes :

$$\begin{aligned} dv_x/dt &= -\bar{\Omega} v_y \\ dv_y/dt &= \bar{\Omega} v_x \\ dv_z/dt &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

2. Par une tradition bien établie, on emploie ici le mot "fréquence" là où il faudrait dire "vitesse angulaire" ou "pulsation" (cf. section 2.2 les valeurs numériques de Ω et de $\nu = \Omega/2\pi$).

Le mouvement dans la direction z est donc :

$$\begin{aligned} v_z &= v_{\parallel} = \text{Cte} \\ z &= z_0 + v_{\parallel} t \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dans les directions x et y , les équations peuvent se combiner en écrivant :

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = i\bar{\Omega}(v_x + iv_y) \quad (2.12)$$

dont la solution générale est :

$$v_x + iv_y = Ce^{i\bar{\Omega}t} \quad (2.13)$$

où $C = v_{\perp} e^{i\varphi}$ est une constante complexe arbitraire. On a donc :

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} \cos(\bar{\Omega}t + \varphi) \\ v_y &= v_{\perp} \sin(\bar{\Omega}t + \varphi) \end{aligned} \quad (2.14)$$

et :

$$v_x^2 + v_y^2 = v_{\perp}^2 = \text{Cte} \quad (2.15)$$

de sorte que l'énergie perpendiculaire reste constante comme l'exige l'équation (2.4). La position de la particule dans l'espace est obtenue par intégration, soit :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_0^t v_x(t') dt' = x_0 - \frac{v_{\perp}}{\bar{\Omega}} \sin \varphi + \frac{v_{\perp}}{\bar{\Omega}} \sin(\bar{\Omega}t + \varphi) \\ y &= y_0 + \int_0^t v_y(t') dt' = y_0 + \frac{v_{\perp}}{\bar{\Omega}} \cos \varphi - \frac{v_{\perp}}{\bar{\Omega}} \cos(\bar{\Omega}t + \varphi) \end{aligned} \quad (2.16)$$

On peut récrire ces résultats sous une forme qui sera plus pratique dans les développements ultérieurs, soit :

$$\begin{aligned} x &= X - \bar{\rho} \cos(\bar{\Omega}t + \alpha) \\ y &= Y + \bar{\rho} \sin(\bar{\Omega}t + \alpha) \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \bar{\rho} \cos \alpha \\ y &= y_0 + \bar{\rho} \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\bar{\rho} = v_{\perp} / \bar{\Omega} \quad (2.19)$$

$$\alpha = \varphi - \pi/2 \quad (2.20)$$

La signification physique de ces formules est claire : les constantes X et Y sont les coordonnées dans le plan (x, y) du centre de rotation, appelé

ici *centre guide*. Le module de $\bar{\rho}$ est le *rayon de giration* de la particule (appelé aussi rayon cyclotron ou *rayon de Larmor*).

Le mouvement de translation le long du champ magnétique (dans la direction z) peut être considéré comme le mouvement du centre guide ; l'orbite est alors décrite par l'équation vectorielle :

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho} \quad (2.21)$$

où \vec{r} , \vec{R} et $\vec{\rho}$ sont les positions instantanées de la particule, du centre guide et du rayon d'orbite, les valeurs instantanées de \vec{R} et $\vec{\rho}$ étant :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (X, Y, z_0 + v_{\parallel} t) \\ \vec{\rho} &= (\bar{\rho} \cos(\bar{\Omega} t + \alpha), \bar{\rho} \sin(\bar{\Omega} t + \alpha)) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ces formules sont résumées sur la figure 2.1 qui représente la projection de la trajectoire sur un plan perpendiculaire à \vec{B} .

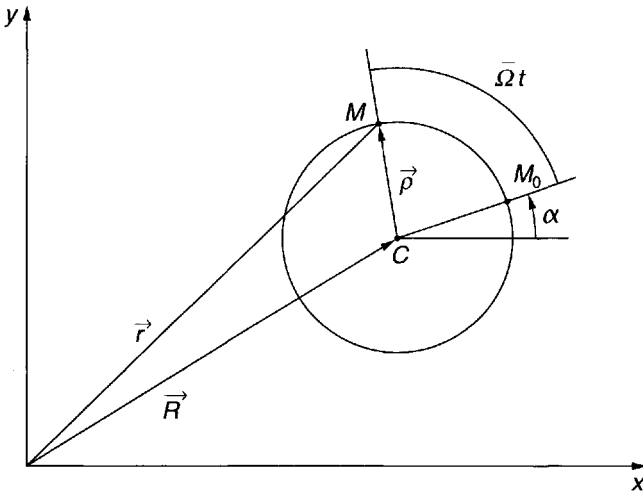


Figure 2.1 : Projection du mouvement sur un plan perpendiculaire à \vec{B} .

C centre guide, M position de la particule à l'instant t .

M_0 position de la particule à $t = 0$.

En général la particule a une vitesse initiale parallèle à \vec{B} non nulle et la trajectoire dans l'espace est une hélice, comme celle représentée sur la figure 2.2. Notons enfin que la vitesse instantanée de la particule, en un

point quelconque de la trajectoire, peut s'écrire :

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{\Omega} \times \vec{\rho} \quad (2.23)$$

L'angle d'inclinaison θ de l'hélice est donné par :

$$\tan \theta = \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \quad (2.24)$$

avec

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho} \quad (2.25)$$

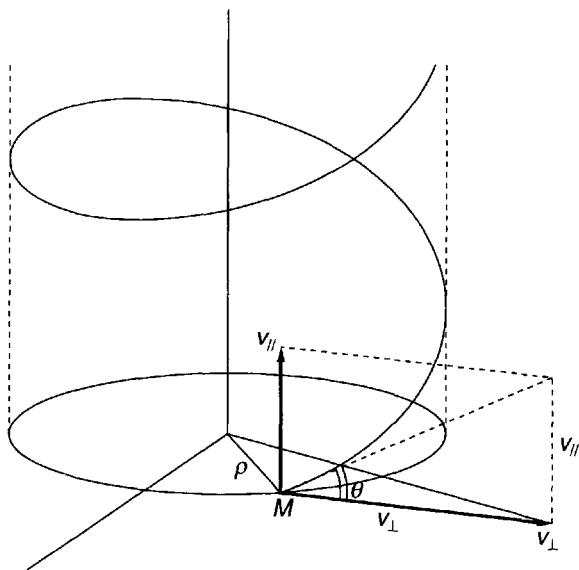


Figure 2.2 : Trajectoire hélicoïdale.
 ρ rayon de Larmor, θ angle d'inclinaison.

2.2.2 Moment magnétique orbital Diamagnétisme du plasma

L'orbite circulaire représentée sur la figure 2.1 peut être assimilée à une petite spire de courant : elle produit un petit champ magnétique dipolaire.

Le *moment magnétique* de cette spire équivalente, appelé *moment magnétique orbital*, est :

$$\mu = \text{surface} \times \text{courant} = \pi \rho^2 I \quad (2.26)$$

soit en module :

$$\mu = \frac{\pi v_{\perp}^2}{\Omega^2} \frac{q\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2} \frac{qv_{\perp}^2}{\Omega} = \frac{1}{2} mv_{\perp}^2 / B \quad (2.27)$$

ou en valeur vectorielle :

$$\vec{\mu} = -\frac{\epsilon_{\perp}}{B} \vec{e}_z \quad (2.28)$$

où l'on a introduit l'énergie cinétique transversale (énergie du mouvement de rotation) :

$$\epsilon_{\perp} = \frac{1}{2} mv_{\perp}^2 \quad (2.29)$$

On voit sur ces formules, et on peut vérifier qualitativement à partir des règles usuelles de l'électromagnétisme, que le moment magnétique orbital est de sens inverse au champ \vec{B} , responsable de la rotation orbitale. Nous verrons plus loin que le moment magnétique orbital μ est une quantité très importante : en effet lorsque \vec{B} n'est plus uniforme et statique, mais varie lentement dans l'espace et dans le temps, μ reste constant en première approximation et cette invariance dite adiabatique de μ devient très utile dans l'analyse des trajectoires des particules.

Calculons maintenant dans un plasma l'intensité d'aimantation macroscopique \vec{M} résultant de l'ensemble des moments magnétiques orbitaux des particules individuelles. En désignant par n_e, n_i les densités, par T_e, T_i les températures électroniques et ioniques on obtient :

$$\vec{M} = -M \vec{e}_z = -\frac{M}{B} \vec{B} \quad (2.30)$$

avec :

$$M = \sum_{e,i} \frac{1}{2} mv_{\perp}^2 / B \quad (2.31)$$

et l'on a pour chaque espèce de particule :

$$\left\langle \frac{1}{2} mv_{\perp}^2 \right\rangle = \kappa T \quad (2.32)$$

D'où le résultat final :

$$M = \frac{n_e \kappa T_e + n_i \kappa T_i}{B} \quad (2.33)$$

ce qu'on écrit souvent en supposant $T_e = T_i$ et en posant $n = n_e + n_i$:

$$\vec{M} = -\frac{n\kappa T}{B^2}\vec{B} \quad (2.34)$$

Comme dans tout milieu magnétique, il existe un courant de magnétisation

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} \quad (2.35)$$

Ce courant est nul au sein d'un plasma uniforme ; il existe par contre dans les régions présentant des gradients, par exemple aux bords d'un plasma limité. La loi d'Ampère s'écrit alors :

$$\frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \nabla \times \vec{M} \quad (2.36)$$

c'est-à-dire que le champ magnétique \vec{B} dans le plasma est obtenu à partir du champ $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ qui existerait en l'absence de plasma par la relation :

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} \quad (2.37)$$

Cette formule peut s'écrire autrement, en introduisant le paramètre

$$\beta = \frac{n\kappa T}{B^2/2\mu_0} \quad (2.38)$$

Nous avons vu au chapitre 1 que β joue un rôle essentiel pour décrire les équilibres d'un plasma borné entouré et confiné par un champ magnétique. D'après la formule de définition ci-dessus on voit que β est le rapport de deux pressions : la pression $n\kappa T$ de la matière (pression cinétique) et la pression magnétique $B^2/2\mu_0$ (cf. [292] pour une analyse en termes de pression et de traction des effets mécaniques d'un champ magnétique). Ceci étant, en rapprochant les formules (2.37), (2.34) et (2.38) on peut écrire la relation entre \vec{B} et $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ sous la forme :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} / (1 + \beta/2) \quad (2.39)$$

Les formules (2.30) et (2.36) montrent que \vec{M} est de signe opposé à \vec{B} et que, de ce fait, B est plus petit que $\mu_0 H$: on en conclut que le plasma est un milieu diamagnétique. La formule (2.39) précise que l'importance du diamagnétisme du plasma est déterminée par la valeur du rapport β ; lorsque $\beta \ll 1$ (pression matérielle \ll pression magnétique) le diamagnétisme est négligeable, le champ $\mu_0 \vec{H}$ n'est pratiquement pas modifié par la présence du plasma. Le diamagnétisme devient au contraire très important lorsque β atteint des valeurs de l'ordre de l'unité.

2.2.3 Valeurs numériques

Dans les plasmas ionosphériques et magnétosphériques, il est pratique d'exprimer le champ magnétique en Gauss ($1 \text{ Gauss} = 10^{-4} T$) ; en désignant par B_G la valeur de B mesurée dans cette unité ($10^{-4} T$) on trouve alors,

– pour les électrons :

$$\begin{aligned}\Omega_e &= 1.76 \times 10^7 B_G \quad (\text{rad/s}) \\ f_{ce} &\equiv \frac{\Omega_e}{2\pi} = 2.8 \times 10^6 B_G \quad (\text{Hz})\end{aligned}\tag{2.40}$$

– pour les ions :

$$\begin{aligned}\Omega_i &= 9.58 \times 10^3 Z \left(\frac{m_p}{m_i} \right) B_G \quad (\text{rad/s}) \\ f_{ci} &\equiv \frac{\Omega_i}{2\pi} = 1.52 \times 10^3 Z \left(\frac{m_p}{m_i} \right) B_G \quad (\text{Hz})\end{aligned}\tag{2.41}$$

où m_p est la masse du proton et m_i celle de l'ion considéré. Lorsque les fonctions de distribution des particules sont maxwelliennes (avec des températures T_e et T_i), il est intéressant de considérer des particules moyennes ayant la vitesse la plus probable :

$$v_t^2 = 2\kappa T/m \tag{2.42}$$

et d'évaluer les rayons d'orbite correspondants $\bar{\rho} = v_t/\Omega$; on obtient ainsi :

$$\bar{\rho}_e = v_{te}/\Omega_e = 2.75 (T_{ev})^{1/2}/B_G \quad (\text{cm}) \tag{2.43}$$

$$\bar{\rho}_i = v_{ti}/\Omega_i = 1,18 \times 10^2 (m_i/m_p)^{1/2} (T_{ev})^{1/2}/Z B_G \quad (\text{cm}) \tag{2.44}$$

Ces ordres de grandeur sont typiques des plasmas ionosphériques ou magnétosphériques.

Dans les plasmas étudiés dans les recherches sur la fusion contrôlée, il est plus pratique d'exprimer B en unités de 5 Teslas et T en keV. Soit B_5 et T_{keV} les valeurs numériques ainsi obtenues ; les formules précédentes deviennent alors :

$$f_{ce} = 140 B_5 \quad (\text{GHz}) \tag{2.45}$$

$$\bar{\rho}_e = 1.75 \times 10^3 (T_{\text{keV}})^{1/2}/B_5 \quad (\text{cm}) \tag{2.46}$$

$$f_{ci} = 76 Z(m_p/m_i) B_5 \quad (\text{MHz}) \tag{2.47}$$

$$\bar{\rho}_i = 0.075 (m_i/m_p)^{1/2} (T_{\text{keV}})^{1/2}/Z B_5 \quad (\text{cm}) \tag{2.48}$$

En comparant ces expressions aux fréquences de plasma et à la longueur de Debye, on obtient enfin les relations suivantes :

$$\overline{\rho}_e/\lambda_D = 2^{1/2}(\omega_{pe}/\Omega_e) \quad (2.49)$$

$$\omega_{pe}/\Omega_{pe} = 0.64 n_{14}^{1/2}/B_5 \quad (2.50)$$

$$\omega_{pi}/\Omega_{pi} = 28 Z(m_i/m_p)^{1/2} n_{14}^{1/2}/B_5 \quad (2.51)$$

où n_{14} est la valeur de n_e (mesurée en unités de 10^{14} cm^{-3}).

2.3 Champs magnétique et électrique uniformes et constants

2.3.1 Dérive électrique

Supposons maintenant que le plasma soit soumis à un champ électrique uniforme et statique, superposé au champ magnétique constant considéré précédemment ; l'équation du mouvement d'une particule peut s'écrire :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} - q(\vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{E} \quad (2.52)$$

En généralisant à cette équation vectorielle un théorème bien connu pour les équations différentielles à coefficients constants, on peut vérifier que la solution la plus générale s'obtient en ajoutant, à la solution générale \vec{v}_0 de l'équation sans second membre, une solution particulière \vec{v}_1 de l'équation avec le second membre $q\vec{E}$, soit :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \quad (2.53)$$

La solution générale \vec{v}_0 (trajectoires en l'absence de \vec{E}) est celle que nous avons étudiée au paragraphe précédent, soit :

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{\parallel} + \vec{\Omega} \times \vec{\rho} \quad (2.54)$$

qui représente un mouvement hélicoïdal autour d'un axe parallèle à \vec{B} . La valeur de \vec{v}_{\parallel} , la position de l'axe de rotation et la valeur de ρ sont des constantes d'intégration. Si l'on considère l'ensemble du plasma, ces constantes varieront d'une particule à une autre si bien que \vec{v}_0 permet de représenter l'agitation désordonnée des particules du plasma ; malgré l'aspect apparemment orienté des trajectoires, il peut très bien se faire

que localement la fonction de distribution de ces vitesses \vec{v}_0 soit isotrope et ne représente par conséquent aucun mouvement d'ensemble. Dans ces conditions, le terme \vec{v}_1 qui est le même pour toutes les particules représente le mouvement d'ensemble des particules.

Pour trouver \vec{v}_1 , nous devons distinguer, dans le champ \vec{E} , la composante \vec{E}_{\parallel} qui est parallèle à \vec{B} et la composante \vec{E}_{\perp} qui est perpendiculaire à \vec{B} . En projetant tout d'abord l'équation (2.52) sur la direction de \vec{B} nous trouvons la solution :

$$\vec{v}_{1\parallel} = \frac{q}{m} \vec{E}_{\parallel} t \quad (2.55)$$

Sous l'action de \vec{E}_{\parallel} les particules ont un mouvement uniformément accéléré parallèle à \vec{B} , les ions dans le sens de \vec{E}_{\parallel} et les électrons dans le sens opposé. Les vitesses \vec{v}_{\parallel} tendant rapidement vers l'infini, ce régime ne peut se produire que de façon transitoire. En général le plasma, qui a ainsi une "conductivité" infinie parallèle à \vec{B} , "s'arrange" pour que \vec{E}_{\parallel} soit nul (de la même manière qu'en électrostatique le champ électrique s'annule à l'intérieur d'un conducteur parfait).

En projetant maintenant l'équation (2.52) sur un plan perpendiculaire à \vec{B} , nous pouvons trouver le mouvement imposé par \vec{E}_{\perp} . On trouve maintenant une solution indépendante du temps définie par :

$$\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (2.56)$$

soit en résolvant par rapport à \vec{v} :

$$\vec{v}_{1\perp} = \vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.57)$$

Cette vitesse d'ensemble est ce qu'on appelle la *vitesse de dérive électrique* ; son module est :

$$|\vec{v}_E| = \frac{E_{\perp}}{B} \quad (2.58)$$

On voit qu'un champ électrique perpendiculaire à \vec{B} n'accélère pas les particules mais crée une dérive uniforme du centre guide dans la direction de $\vec{E} \times \vec{B}$. Les trajectoires dans le plan perpendiculaire à \vec{B} sont donc le résultat de la superposition du mouvement de rotation de vitesse $\vec{\Omega} \times \vec{\rho}$ et du mouvement de translation de vitesse \vec{v}_E . L'allure des trajectoires dépend des ordres de grandeur relatifs de v_E et de $\Omega\rho$ (Fig. 2.3).

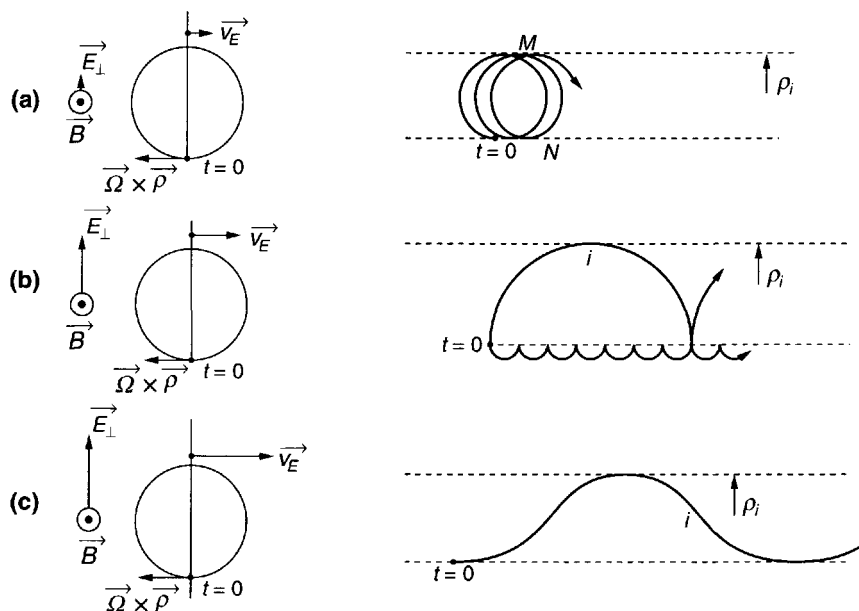


Figure 2.3 : Trajectoires dans des champs \vec{E} et \vec{B} uniformes constants. Projections sur le plan perpendiculaire à \vec{B} , \vec{v}_E dérive électrique.

(a) Champs électriques faibles ($v_E \ll \Omega\rho$) : trajectoire quasi circulaire avec faible dérive (cas des ions).

(b) Champ électrique critique ($v_E = \Omega\rho$) : vitesse initiale nulle, trajectoires cycloïdales (cas des électrons et des ions).

(c) Champs électriques “forts” ($v_E > \Omega\rho$) : trajectoires ondulées (cas des ions).

Lorsque le champ électrique est faible on a $v_E \ll \Omega\rho$; les trajectoires ont l'allure représentée sur la figure 2.3(a) ; elles sont quasi circulaires, avec une faible dérive \vec{v}_E . On peut comprendre l'origine de la dérive en remarquant que sur l'orbite quasi circulaire, dans les parties où \vec{E} a accéléré la particule (parties supérieures sur la figure autour des points tels que M) la courbure magnétique de la trajectoire est plus faible ; au contraire dans les parties où \vec{E} a freiné la particule (autour des points tels que N) la courbure est plus forte. C'est la succession de ces demi-orbites à courbure alternativement faible et forte qui engendre la dérive \vec{v}_E .

Lorsque les particules ont une vitesse initiale nulle on a comme trajectoires les cycloïdes à point de rebroussement de la figure 2.3(b). Les ions

partent tout d'abord dans la direction du champ électrique \vec{E}_\perp , puis sous l'effet du champ magnétique, leurs trajectoires se courbent et décrivent une série d'arceaux. Les électrons partent tout d'abord en sens inverse, mais la courbure magnétique se produit également en sens inverse. C'est pourquoi leur mouvement de dérive s'effectue dans le même sens que celui des ions. Comme $m_e \ll m_i$, les arceaux effectués par les électrons sont beaucoup plus petits, mais ils en effectuent un bien plus grand nombre par seconde, de telle sorte que les deux vitesses de dérive sont finalement égales.

Lorsque le champ électrique \vec{E}_\perp est relativement fort on a $v_E > \Omega\rho$; il en résulte que la vitesse dans le sens de \vec{v}_E varie entre $v_E - \Omega\rho$ et $v_E + \Omega\rho$ sans jamais changer de signe. On a les trajectoires ondulées de la figure 2.3(c).

Il est remarquable que la dérive électrique soit indépendante de la charge et de la masse de la particule. On peut relier ce caractère universel de \vec{v}_E à un simple problème de changement de repère : supposons pour simplifier que l'on ait $v_E \ll c$. Pour un observateur se déplaçant à la vitesse \vec{v}_E il apparaît un champ électrique d'induction :

$$\vec{E}_I = \vec{v}_E \times \vec{B} \quad (2.59)$$

Dans ce repère le champ électrique résultant est donc :

$$\vec{E}' = \vec{E}_\perp + \vec{v}_E \times \vec{B} \quad (2.60)$$

et d'après (2.55) \vec{v}_E est précisément la vitesse du repère dans lequel le champ électrique \vec{E}' s'annule. Dans ce repère la trajectoire se réduit à la trajectoire hélicoïdale produite par \vec{B} .

Le changement de repère simplifié que nous venons de faire n'est évidemment valable que si $E_\perp/B \ll c$. Dans le cas où ce rapport devient de l'ordre de c , il faut utiliser les formules relativistes de la transformation de Lorentz. Ce calcul fait l'objet du problème P2-1. Il montre que la vitesse de dérive y garde la valeur donnée par la relation (2.57) mais que la fréquence cyclotron est donnée par :

$$\begin{aligned} \Omega' &= \Omega \sqrt{1 - \beta_E^2} \\ \beta_E &= v_E/c \end{aligned} \quad (2.61)$$

Dans ces conditions, on peut se demander ce qui se produit quand on applique à des particules chargées un champ électrique, suffisamment fort pour que la vitesse calculée par la formule (2.58) se trouve être supérieure à la vitesse de la lumière. Le raisonnement fait ci-dessus n'a en effet plus

de sens puisqu'on ne peut pas considérer de repère physique ayant une telle vitesse de translation par rapport au laboratoire. La réponse est que *la trajectoire n'est plus périodique* ; le mouvement de la particule est alors continuellement accéléré ; on a, par exemple si la vitesse initiale est nulle, une trajectoire ayant l'allure parabolique représentée sur la figure 2.4.

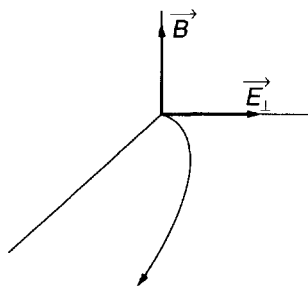


Figure 2.4 : Trajectoire "parabolique".

Vitesse initiale nulle, $E_{\perp}/B > c$.

2.3.2 Dérives produites par un champ de gravité

Supposons que le plasma soit soumis à un champ de gravité uniforme, toujours superposé au champ magnétique uniforme et statique. La force de gravité :

$$\vec{F} = m \vec{g} \quad (2.62)$$

qui s'exerce sur chaque particule joue un rôle tout à fait analogue à la force électrique étudiée au paragraphe précédent : les trajectoires résultent à nouveau de la superposition d'un mouvement hélicoïdal, du mouvement accéléré produit éventuellement par \vec{F}_{\parallel} et d'une vitesse de dérive \vec{v}_G définie par l'équation :

$$q(\vec{v}_G \times \vec{B}) + m \vec{g} = 0 \quad (2.63)$$

soit :

$$\vec{v}_G = \frac{m}{q} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.64)$$

Cela revient à dire que la force $m \vec{g}$ est équivalente à un champ électrique $\frac{m}{q} \vec{g}$. Mais on voit que ce champ et la dérive gravitationnelle \vec{v}_G qui en

résulte dépendent du rapport q/m et sont donc très différents (et de signe contraire) pour les électrons et pour les ions. Il en résulte que ces dérives gravitationnelles produisent un courant électrique dans le plasma, soit :

$$\vec{J} = n_e q_e \vec{v}_{Ge} + n_i q_i \vec{v}_{Gi} \quad (2.65)$$

ou compte tenu de (2.64) :

$$\vec{J} = (n_e m_e + n_i m_i) \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} \approx n_i m_i \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.66)$$

On voit que le *courant électrique* est véhiculé par les *particules les plus lourdes* que sont les ions.

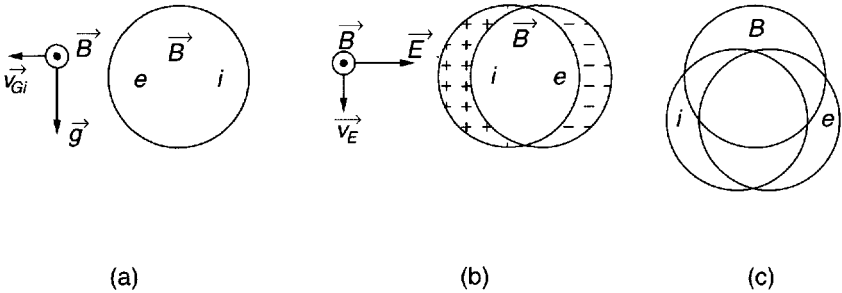


Figure 2.5 : Destruction du confinement magnétique par dérive gravitationnelle suivie d'une dérive électrique.

- (a) Électrons et ions confinés dans B .
- (b) Dérive gravitationnelle des ions produisant un champ électrique de polarisation.
- (c) Séparation de B et du plasma par la dérive électrique.

Pour terminer ce paragraphe nous pouvons montrer que la combinaison des dérives gravitationnelle et électrique peut faire cesser le confinement d'un plasma par un champ magnétique. La situation est représentée schématiquement sur la figure 2.5 : en (a) on voit le plasma confiné et on suppose qu'on lui applique un champ de gravitation ; en (b) on voit la dérive gravitationnelle des ions ; celle des électrons étant négligeable il en résulte un champ électrique de polarisation ; enfin en (c) l'ensemble du plasma dérive sous l'action du champ de polarisation.

En pratique les champs de gravitation naturels jouent un rôle négligeable à l'échelle d'un plasma de laboratoire. Nous verrons cependant dans la section 2.8 que la courbure des tubes de forces introduit une gravitation apparente très importante et il en résulte que l'effet de déconfinement que nous venons de décrire succinctement existe. Pour maintenir le confinement magnétique, il faut éliminer ou agir contre la séparation de charge (cf. [328] [329]).

2.4 Champs magnétique uniforme constant et électrique oscillant

2.4.1 Approximation du champ électrique uniforme

Supposons maintenant que le plasma soit soumis à un champ électrique \vec{E}_1 uniforme et alternatif, superposé comme précédemment au champ magnétique statique et uniforme \vec{B} . Il est facile de voir que cet ensemble de deux champs n'est pas une solution des équations de Maxwell : celles-ci imposent l'existence d'un champ \vec{B}_1 oscillant associé à \vec{E}_1 . Les champs \vec{E}_1 et \vec{B}_1 sont donc ceux d'une onde pouvant se propager dans le plasma, avec une fréquence ω et un vecteur d'onde \vec{k} . Nous allons voir cependant que le problème posé garde un sens moyennant certaines approximations.

Tout d'abord il est intéressant de se poser la question suivante au sujet des trajectoires déduites de l'équation (2.1) : est-ce \vec{E} ou \vec{B} qui produit la force la plus grande ? Jusqu'à maintenant la réponse n'était pas définie parce que nous n'avons considéré que des champs \vec{E} et \vec{B} statiques dont les ordres de grandeur sont *a priori* quelconques. En revanche dans une onde on peut vérifier (cf. [352]) que l'on a en ordre de grandeur :

$$|E_1| \sim v_\varphi |B_1| \quad (2.67)$$

où $v_\varphi = \omega/k$ est la vitesse de phase de l'onde considérée. On en déduit que dans l'équation (2.1) le rapport force magnétique/force électrique est de l'ordre de :

$$vB_1/E_1 \sim v/v_\varphi \quad (2.68)$$

Si l'on considère les ondes les plus usuelles, c'est-à-dire les ondes électromagnétiques transverses de haute fréquence, on a :

$$v_\varphi \sim c \quad (2.69)$$

et si l'on suppose par ailleurs le plasma non relativiste on a pour les particules du plasma :

$$v \ll c \quad (2.70)$$

D'où en rapprochant ces résultats :

$$vB_1 \ll E_1 \quad (2.71)$$

On peut donc en général négliger vB_1 et considérer que le plasma est soumis au champ \vec{E}_1 de l'onde (cette analyse tomberait en défaut pour les ondes "lentes" ayant une vitesse v_φ comparable à la vitesse d'agitation thermique des électrons).

À quelle condition peut-on considérer \vec{E}_1 comme uniforme ? Il faut que k soit suffisamment petit pour que le champ varie peu sur la distance parcourue par une particule (du fait de son agitation thermique) pendant une période de l'onde, soit :

$$k \frac{v_t}{\omega} \ll 1 \quad (2.72)$$

ou encore :

$$v_\varphi \gg v_t \quad (2.73)$$

Cette *approximation* dite *des plasmas froids* (ou *des ondes rapides*) est pratiquement la même que celle définie par les deux inégalités (2.69) et (2.70).

2.4.2 Conductivité électrique. Résonance cyclotron

Dans les conditions que nous venons d'analyser, on peut considérer que le plasma est soumis aux deux champs uniformes \vec{B} (statique) et \vec{E}_1 (oscillant). Le principe de superposition énoncé précédemment s'applique encore ; les trajectoires s'obtiennent par la superposition de deux mouvements :

- le mouvement hélicoïdal produit par \vec{B} seul (agitation thermique),
- un mouvement oscillant à la fréquence ω produit par \vec{E}_1 (mouvement d'ensemble).

La présence de \vec{B}_0 complique cependant le mouvement oscillant. Celui-ci peut se mettre, pour chaque espèce de particule, sous la forme :

$$\vec{v}_1 = \bar{\mu} \cdot \vec{E}_1 \quad (2.74)$$

où μ , la “mobilité électrique”, est un tenseur du deuxième ordre complexe et fonction de ω et Ω . Le calcul de $\bar{\mu}$ est développé dans l’appendice A2-1. Ces mouvements oscillants engendrent un courant électrique, soit :

$$\vec{J}_1 = n_e q_e \vec{v}_{1e} + n_i q_i \vec{v}_{1i} \quad (2.75)$$

ce qu’on écrit finalement :

$$J_1 = \bar{\sigma} \cdot \vec{E}_1 \quad (2.76)$$

où $\bar{\sigma}$, le tenseur de conductivité³, est donné par :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_e + \bar{\sigma}_i = n_e q_e \bar{\mu}_e + n_i q_i \bar{\mu}_i \quad (2.78)$$

Les expressions de $\bar{\sigma}_e$ et $\bar{\sigma}_i$ sont données dans l’appendice A2-1 et les propriétés de $\bar{\sigma}$ y sont discutées.

Les calculs développés dans l’appendice A2-1 montrent cependant qu’il faut traiter à part le cas où ω est égale à l’une des deux fréquences cyclotron Ω . Dans ce cas il n’y a plus de solution stationnaire oscillante de l’équation (2.1). Le mouvement d’ensemble produit par \vec{E}_1 correspond à une spirale divergente : c’est ce qu’on appelle la *résonance cyclotron*. Selon la phase relative initiale de l’hélice et de la spirale, la trajectoire résultante peut être soit spiralée depuis l’instant initial, soit d’abord convergente pour devenir finalement divergente lorsque la spirale l’emporte sur l’hélice. L’analyse détaillée de ce phénomène de résonance cyclotron est développée dans l’appendice A2-2. On y verra que l’analyse se fait plus facilement en termes de champs électriques tournants que de champs oscillants.

2.5 Champ magnétique lentement variable. Orbites adiabatiques

2.5.1 Approximation adiabatique

Quand le plasma est placé dans un champ magnétique variable dans l’espace ou dans le temps il est en général impossible de calculer exactement

3. Dans tout ce livre la notation $\bar{\bar{A}}$ désigne un tenseur du deuxième ordre, et la notation $\bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}}$ le produit scalaire (ou contracté) de $\bar{\bar{A}}$ par $\bar{\bar{B}}$, qui est le vecteur \vec{C} de composantes :

$$C_i = \sum_j A_{ij} B_j \quad (2.77)$$

les trajectoires des particules, et il faut alors les étudier sur ordinateur par des méthodes numériques. Il y a cependant un cas très important où l'on peut étudier de façon approchée les propriétés générales du mouvement des particules, c'est celui des champs presque uniformes et presque statiques. Dans de tels champs, la trajectoire d'une particule est localement une hélice, mais cette hélice se transforme progressivement au cours de la trajectoire. Précisons les conditions de cette approximation dite adiabatique.

a) Adiabaticité spatiale

Nous supposons que la *variation de B dans l'espace* est suffisamment lente, et B suffisamment fort, pour que sa variation relative, sur une distance égale à un rayon de giration ρ des particules, soit faible. On peut donc écrire, en introduisant une dimension caractéristique L du champ magnétique (distance sur laquelle on a $\delta B \sim B$) :

$$\rho \ll L \quad (2.79)$$

Le rayon d'orbite étant donné par la relation :

$$\frac{qB}{m} \rho = v_{\perp} \sim v \quad (2.80)$$

on peut écrire (2.79) en désignant par u l'énergie cinétique de la particule :

$$BL \gg 2^{1/2} m^{1/2} u^{1/2} / q \quad (2.81)$$

On voit qu'à énergie égale, cette condition est plus sévère pour les ions que pour les électrons ; on a :

$$\begin{array}{ll} B_{\text{gauss}} L_{\text{cm}} & \gg 3\sqrt{u_{\text{eV}}} \quad \text{pour les électrons} \\ B_{\text{gauss}} L_{\text{cm}} & \gg 150\sqrt{u_{\text{eV}}} \quad \text{pour les protons} \end{array} \quad (2.82)$$

On peut appliquer ces critères aux particules ayant la vitesse la plus probable dans un plasma en équilibre thermodynamique et à la température T (on pose $u = kT$), il vient :

$$\begin{array}{ll} B_{\text{gauss}} L_{\text{cm}} & \gg 0,03\sqrt{T} \quad \text{pour les électrons} \\ B_{\text{gauss}} L_{\text{cm}} & \gg 1,5\sqrt{T} \quad \text{pour les protons} \end{array} \quad (2.83)$$

b) Adiabaticité temporelle

Nous supposons que la *variation de B dans le temps* est suffisamment lente, et B suffisamment fort, pour que sa variation relative, sur un intervalle de

temps égal à une période gyromagnétique $1/\nu_b$ des particules, soit faible. Pour expliciter ce critère, nous introduirons maintenant une fréquence ν caractéristique du champ magnétique ($1/\nu$ est l'intervalle de temps au bout duquel on a $\delta B \sim B$) ; d'où la condition :

$$\nu \ll f_c \quad (2.84)$$

soit :

$$\nu \ll 2,8 \times 10^{10} B_{\text{teslas}} \quad (\text{électrons}) \quad (2.85)$$

$$\nu \ll 1,5 \times 10^7 \frac{Z}{A} B_{\text{teslas}} \quad (\text{ions de charge } Ze, \text{ de masse atomique } A) \quad (2.86)$$

2.5.2 Orbites adiabatiques

Lorsque le champ magnétique \vec{B} est variable dans le temps ou dans l'espace, la règle de superposition (2.53) que nous avons dans un champ uniforme ne s'applique plus. Cependant si les variations de B sont suffisamment lentes pour que les deux conditions d'adiabaticité (2.79) et (2.84) soient satisfaites, on peut considérer qu'à un instant donné la trajectoire est en première approximation une hélice et donc poser :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \quad (2.87)$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{\Omega} \times \vec{\rho} \quad (2.88)$$

$$|\vec{v}_1| \ll |\vec{v}_0| \quad (2.89)$$

On retrouve donc de façon instantanée la règle de superposition (2.52) avec ici :

$$\begin{array}{ll} \vec{v}_0 & \text{mouvement quasi hélicoïdal} \\ \vec{v}_1 & \text{dérive} \end{array}$$

La dérive \vec{v}_1 est par nature perpendiculaire à \vec{B} (toute composante parallèle à \vec{B} peut être incluse dans \vec{v}_{\parallel}). Elle est la somme de plusieurs composantes (électrique, gravitationnelle, de courbure, de gradient) que nous analyserons ci-dessous.

Le mouvement quasi hélicoïdal se déforme lentement au cours de la trajectoire, du fait des variations de \vec{B} . La théorie adiabatique des orbites (règles de déformation de \vec{v}_0 , analyse des dérives) a été développée par de nombreux auteurs (cf. [2], [3] [308, chapitre 1]). En revenant au mouvement quasi hélicoïdal on peut considérer la période cyclotron :

$$t_B = 2\pi/\Omega \quad (2.90)$$

non plus comme une constante, mais comme une quantité lentement variable : une pseudo-période. Nous verrons dans la section 2.9 que la trajectoire peut comporter plusieurs pseudo-périodes. Les théories mentionnées ci-dessus montrent qu'à chaque pseudo-période on peut associer une quantité qui reste constante en première approximation lorsque la pseudo-période varie lentement. Une telle constante approchée du mouvement est ce qu'on appelle un *invariant adiabatique*. Un invariant adiabatique se présente sous la forme d'une intégrale étendue à la durée de la pseudo-période associée. Nous verrons par exemple que l'invariant adiabatique associé à t_B est le moment magnétique orbital μ que nous avons introduit dans la section 2.2.

Nous ne développerons pas dans le détail la théorie (relativement compliquée) des orbites adiabatiques. Nous adopterons plutôt un exposé heuristique dans lequel nous établirons sur des cas assez simples les principales propriétés des orbites. Il est intéressant d'autre part de remarquer que pour une particule en mouvement les variations de \vec{B} avec \vec{r} ou t sont largement indiscernables : la particule "ne sait pas" si le changement de \vec{B} qu'elle voit est dû à une variation de \vec{B} avec t ou au fait qu'elle se déplace dans un champ qui varie avec \vec{r} . Dans ces conditions il pourra être commode pour établir les lois d'invariance de choisir celui des deux types de variation qui est le plus facile à analyser, comme nous allons le faire dans la section 2.6.

2.6 Compression magnétique. Gel de B Invariance de μ

2.6.1 Mouvement des tubes de force

Considérons un solénoïde cylindrique d'axe Oz dans lequel on fait passer un courant $I(t)$ variable, produisant donc un champ magnétique uniforme et variable $\vec{B}(t)$. À chaque instant, les lignes de force de \vec{B} sont des droites parallèles à l'axe Oz du solénoïde. Peut-on identifier chacune d'entre elles et suivre son déplacement lorsque \vec{B} varie ? La réponse à cette question n'est pas évidente. Nous allons montrer sur l'exemple choisi ici qu'on peut le faire en associant à chaque tube de force un flux magnétique constant.

Supposons par exemple que $\vec{B}(t)$ soit croissant et considérons à l'instant $t = 0$ l'ensemble des lignes de force situées à la distance r_0 de l'axe [Fig. 2.6(a)] ; elles constituent un tube de force de section droite πr_0^2 ; si B_0 est la valeur de B à cet instant initial, le flux magnétique

“canalisé” par ce tube de force est :

$$\Phi_0 = \pi r_0^2 B_0 \quad (2.91)$$

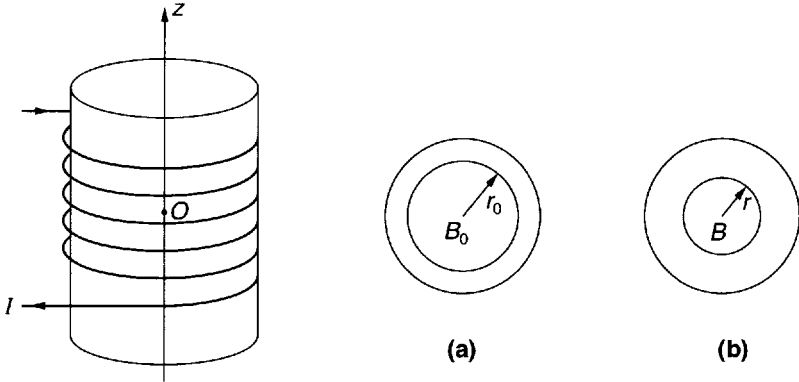


Figure 2.6 : Champ magnétique variable : évolution des tubes de force.

(a) Instant $t = 0$; $\Phi_0 = \pi r_0^2 B_0$.

(b) Instant t : $\pi r^2 B = \pi r_0^2 B_0$.

À un instant ultérieur t le champ est devenu B et le même flux Φ_0 est maintenant encerclé par le cercle de rayon r tel que :

$$\pi r_0^2 B_0 = \pi r^2 B \quad (2.92)$$

Nous conviendrons qu’un certain tube de force canalise toujours le même flux magnétique et que, par conséquent, les lignes de force situées sur le cercle de rayon r_0 se sont déplacées radialement jusqu’au cercle de rayon r .

2.6.2 Gel du plasma dans les tubes de force

Nous allons maintenant montrer que l’existence d’une dérive électrique impose au plasma de suivre les lignes de force de \vec{B} dans leur déplacement. Le champ électrique qui intervient ici est le champ d’induction associé à la variation de \vec{B} , qui obéit à l’équation de Maxwell-Faraday :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (2.93)$$

Nous supposons que les conditions aux limites extérieures sont telles que le phénomène garde une symétrie cylindrique, de sorte que \vec{E} est nul sur l'axe et se réduit ailleurs à une composante azimutale :

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (2.94)$$

Supposons vérifiée la condition d'adiabaticité temporelle ; nous discuterons sa réalisation plus loin [cf. formule (2.107)]. Chaque particule suit alors [cf. Fig. (2.1)] une hélice enroulée sur un tube de force de rayon ρ . Le centre guide C de cette particule se trouve quant à lui sur le cercle de rayon R . le champ \vec{E} produit une dérive électrique de C :

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} = -\frac{1}{2B^2} \left[\vec{B} \times \left(\vec{R} \times \frac{d\vec{B}}{dt} \right) \right] \quad (2.95)$$

d'où :

$$\vec{v}_E = -\frac{1}{2B} \frac{dB}{dt} \vec{R} \quad (2.96)$$

Il est facile de vérifier que cette vitesse de dérive du plasma est égale à la vitesse de déplacement des lignes de force qu'on obtient en écrivant la loi de conservation du flux :

$$\frac{d}{dt}(R^2 B) = 2BR \frac{dR}{dt} + R^2 \frac{dB}{dt} = 0 \quad (2.97)$$

La vitesse radiale des lignes de force dR/dt qu'on tire de cette équation se confond effectivement avec la vitesse \vec{v}_E calculée ci-dessus.

Cela illustre une propriété du plasma idéal qui a une validité beaucoup plus générale que ne peut le montrer cet exemple simple. Le plasma et le champ magnétique ont tendance à évoluer ensemble. Ce *gel* des lignes de force dans le plasma est un concept très utile pour développer l'intuition sur les problèmes allant du "dynamo solaire" et de la dynamique des taches solaires à l'effet du vent solaire sur le champ magnétique terrestre ou encore au choix de géométries magnétiques adaptées au confinement des plasmas thermonucléaires. Encore qu'il s'agisse là d'une sorte d'idéalisation extrême et que, dans les plasmas réels, de nombreux processus de dissipation entraînent une violation de cette loi des lignes magnétiques gelées, elle est d'une très grande utilité pour avoir fourni une première image du comportement des plasmas dans les champs magnétiques.

2.6.3 Invariance de μ . Compression magnétique

a) Équation du mouvement transverse

Pour examiner maintenant plus en détail la transformation lente du mouvement hélicoïdal d'une particule, nous partons de l'équation du mouvement (2.1) qu'on peut écrire compte tenu des expressions (2.6) du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ et (2.94) du champ \vec{E} d'induction sous la forme :

$$\vec{\ddot{r}} = \vec{\Omega} \times \vec{\dot{r}} + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (2.98)$$

Le champ magnétique \vec{B} n'agit pas sur le mouvement longitudinal des particules : dans la direction Oz les particules ont un mouvement uniforme quelconque. Pour analyser le mouvement transversal, nous pouvons remplacer l'équation vectorielle ci-dessus par une équation algébrique en nombres complexes, en associant au vecteur position :

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \quad (2.99)$$

son affixe, le nombre complexe :

$$z = x + iy \quad (2.100)$$

L'équation (2.98) est remplacée par l'équation équivalente :

$$\ddot{z} = i(\bar{\Omega}\dot{z} + \dot{\bar{\Omega}}z/2) \quad (2.101)$$

En effectuant maintenant le changement de variable :

$$\begin{aligned} z &= re^{i\varphi} \\ \dot{\varphi} &= \omega \end{aligned} \quad (2.102)$$

r et φ étant réels par hypothèse, puis en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient, après quelques lignes de calcul, les deux équations réelles donnant r et ω :

$$\omega^2 r - \omega \bar{\Omega} - \ddot{r} = 0 \quad (2.103)$$

$$\frac{d}{dt} [r^2 (\omega - \bar{\Omega}/2)] = 0 \quad (2.104)$$

dont la solution est :

$$\omega = \frac{\bar{\Omega}}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + 4\ddot{r}/r\bar{\Omega}^2} \right] \quad (2.105)$$

$$r^2 \bar{\Omega} \sqrt{1 + 4\ddot{r}/r\bar{\Omega}^2} = \text{Cte} \quad (2.106)$$

Cette résolution est purement apparente en général car le terme en \ddot{r} qui figure dans ces relations reste inconnu. Nous pouvons toutefois faire l'hypothèse que B varie suffisamment lentement pour que l'on ait :

$$\ddot{r}/r\Omega^2 \ll 1 \quad (2.107)$$

On peut montrer (cf. problème P2-2) que cette condition est équivalente à la condition d'adiabaticité temporelle (2.84).

b) Mouvement des particules ; invariants adiabatiques Compression magnétique

Si la condition d'adiabaticité temporelle (2.107) est satisfaite, le système (2.105), (2.106) conduit aux deux valeurs de ω :

$$\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{\Omega} \quad (2.108)$$

Les solutions correspondantes pour z sont :

$$z_1 = Re^{i\beta} \quad (2.109)$$

$$R^2\Omega = \text{Cte} \quad (2.110)$$

$$z_2 = \rho e^{i(\bar{\Omega}t + \alpha)} \quad (2.111)$$

$$\rho^2\Omega = \text{Cte} \quad (2.112)$$

La solution la plus générale est :

$$z = z_1 + z_2 \quad (2.113)$$

où ρ, R, α et β sont des constantes d'intégration. En revenant aux images des nombres complexes on voit que la trajectoire la plus générale peut se mettre sous la forme :

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho} \quad (2.114)$$

où \vec{R} et $\vec{\rho}$ sont les images des nombres complexes z_1 et z_2 . Le mouvement le plus général de la particule est donc la superposition de deux mouvements (cf. Fig. 2.1) :

– Le mouvement quasi hélicoïdal représenté par $\vec{\rho}$; la rotation gyromagnétique se fait à la vitesse instantanée $\bar{\Omega}$ autour du centre guide C dont la position est représentée par \vec{R} .

– Une dérive radiale lente du centre guide représentée par les variations de \vec{R} . Les quantités $\rho^2\Omega$ et $R^2\Omega$ qui restent constantes sont deux invariants adiabatiques. Tous les deux sont proportionnels à un flux magnétique.

$R^2\Omega$ est proportionnel au flux magnétique canalisé par le tube de force de rayon R sur lequel est situé le centre guide. Son invariance exprime à nouveau la règle du gel du plasma dans les tubes de force. Supposons par exemple que B aille en augmentant : le tube de force de rayon R se contracte au cours du temps et le plasma accompagne cette contraction. C'est ce qu'on peut appeler une compression magnétique (adiabatique) du plasma. Nous verrons dans la section 2.9 que $R^2\Omega$ peut être considéré comme le troisième invariant adiabatique.

$\rho^2\Omega$ est proportionnel au flux magnétique canalisé par le "petit" tube de force sur lequel est tracée l'orbite quasi hélicoïdale. À un facteur numérique près c'est le moment magnétique orbital :

$$\mu = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2/B \quad (2.115)$$

Le moment magnétique orbital est donc l'invariant adiabatique associé à la pseudo-période t_B .

L'invariance de μ pendant une compression magnétique montre que celle-ci s'accompagne d'une augmentation (proportionnelle à B) de l'énergie transverse des particules : dans une compression magnétique le plasma est à la fois comprimé et chauffé. On peut préciser l'échauffement en introduisant la température transversale T_{\perp} par la relation :

$$\frac{1}{2} \langle mv_{\perp}^2 \rangle = \kappa T_{\perp} \quad (2.116)$$

et l'on voit d'après l'invariance de μ que T_{\perp} croît comme B . L'échauffement est d'ailleurs anisotrope parce que dans la compression magnétique les vitesses parallèles à B ne sont pas modifiées, de sorte que la température parallèle définie par :

$$\frac{1}{2} \langle mv_{\parallel}^2 \rangle = \kappa T_{\parallel}/2 \quad (2.117)$$

reste constante. La compression magnétique du plasma s'effectuant sans échange de chaleur avec le monde extérieur, on peut penser qu'elle suit une loi de compression adiabatique au sens thermodynamique du terme. De fait les différentes grandeurs du plasma varient selon les lois suivantes :

$$n \sim R^{-2} \sim B \quad (2.118)$$

$$\kappa T_{\perp} \sim B \quad (2.119)$$

$$p_{\perp} = n\kappa T_{\perp} \sim B^2 \quad (2.120)$$

$$p_{\perp}/n^2 = \text{Cte} \quad (2.121)$$

où n et T désignent la densité et la température des électrons ou des ions. La dernière formule est une loi classique de compression adiabatique avec $\gamma = 2$. On vérifie facilement que cette valeur de γ est liée au nombre N de degrés de libertés (ici $N = 2$) par la loi classique $\gamma = (2 + N)/N$.

2.7 Champ magnétique statique non uniforme

2.7.1 Orbites adiabatiques tracées sur les tubes de force

Supposons maintenant que le plasma évolue dans un champ magnétique statique mais non uniforme. Il peut y avoir une certaine convergence et une certaine courbure des lignes de force (Fig. 2.7). Si l'on suppose réalisée la condition d'adiabaticité spatiale, la trajectoire est localement une hélice ; mais comme nous l'avons remarqué ci-dessus il n'y a pas de différence essentielle entre ce cas et celui étudié au paragraphe précédent : lorsque le centre guide se déplace de C en C' (Fig. 2.7), la particule ne "sait" pas si les variations de \vec{B} qu'elle voit sont dues à une variation temporelle de \vec{B} comme sur la figure 2.1 ou à une variation spatiale de \vec{B} comme c'est le cas sur la figure 2.7.

Nous pouvons donc appliquer à ce dernier cas les résultats obtenus précédemment : le plasma étant gelé dans le champ \vec{B} , *chaque centre guide C se déplace en suivant la ligne de force* sur laquelle il se trouvait à l'origine. La déformation adiabatique du mouvement quasi hélicoïdal obéit également à la même règle que précédemment : le moment magnétique orbital est invariant et il en résulte que le flux encerclé par l'orbite est constant : *chacune des hélices est tracée sur un "petit" tube de force*. L'analyse précise du mouvement quasi hélicoïdal se fait en introduisant l'abscisse curviligne s du centre guide ; l'invariance de μ s'écrit :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 / B \right) = 0 \quad (2.122)$$

ce qui donne :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = \mu \frac{\partial B}{\partial s} \quad (2.123)$$

D'autre part, dans un champ magnétique statique, l'énergie totale se conserve, ce qu'on peut écrire :

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{2} m (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) \right] = 0 \quad (2.124)$$

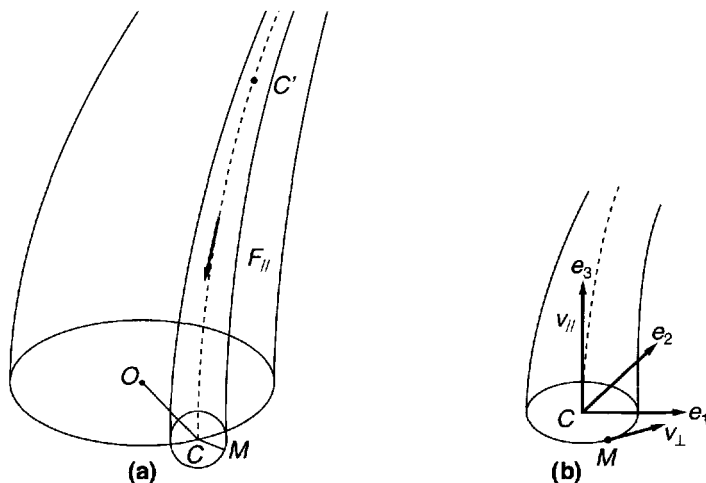


Figure 2.7 : Orbits adiabatiques dans un champ magnétique non uniforme.

(a) Guidage du plasma par le champ.

(b) Mouvement quasi hélicoïdal.

où l'on a négligé la petite contribution due aux dérives (les conditions d'adiabaticité conduisent en effet à $v_D \ll v_{||}$, v_{\perp}). En rapprochant les deux dernières formules on obtient la loi de variation de l'énergie longitudinale :

$$d\left(\frac{1}{2}mv_{||}^2\right) = -\mu\frac{\partial B}{\partial s}ds \quad (2.125)$$

Cette formule montre que la variation de B le long d'une ligne de force engendre une force longitudinale agissant sur la particule :

$$F_{||} = -\mu\frac{\partial B}{\partial s} \quad (2.126)$$

dont le travail produit la variation d'énergie exprimée par la formule (2.125).

Ainsi un gradient de champ magnétique dans la direction de ce champ crée sur les particules une force dans la direction opposée à celle du gradient ; une particule chargée est repoussée de la zone de champ fort par une force indépendante de sa charge. On peut noter d'ailleurs au passage que la formule (2.126) est l'expression classique de la force produite sur un élément de matière diamagnétique par un gradient de \vec{B} statique.

La manière dont la force F_{\parallel} est engendrée par la convergence des lignes de force est représentée sur la figure 2.8 où l'on a supposé pour simplifier que le champ est de révolution autour de l'axe de la trajectoire. La composante B_r du champ et la vitesse v_{φ} de rotation produisent la force de freinage F_{\parallel} ; le calcul de cette force à partir du schéma de la figure 2.8 fait l'objet du problème P2-3. Il redonne la formule (2.126).

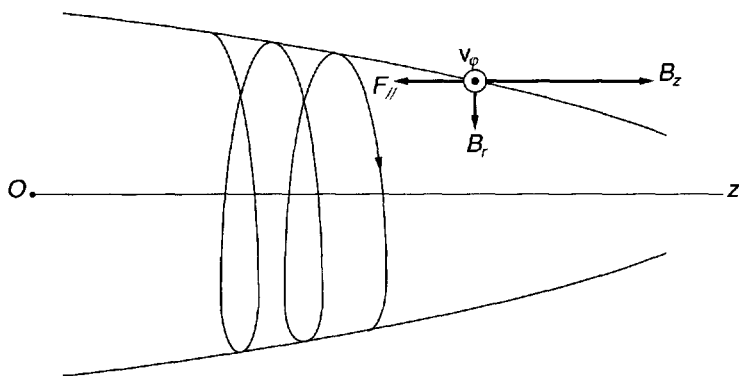


Figure 2.8 : Force de freinage diamagnétique (cas d'un électron).

2.7.2 Miroirs magnétiques

Les formules (2.123) et (2.125) montrent que lorsqu'une particule pénètre dans une région de champ magnétique croissant, son énergie longitudinale diminue et se transforme en énergie transversale.

Si la variation de B est assez importante, le transfert d'énergie peut être complet : il existe une abscisse où v_{\parallel} s'annule ; la particule est réfléchiée à cet endroit et repart vers les régions de plus faible champ magnétique ; c'est pourquoi on dit qu'une région de B croissant constitue un *miroir magnétique*.

On appelle *rapport de miroir* la quantité :

$$R = B_m/B_0 \quad (2.127)$$

où B_0 est le champ magnétique dans une section initiale S_0 où passent toutes les particules, et B_m le champ magnétique maximum au niveau du "col" S_m [Fig. 2.9(a)]. Soit \vec{v}_0 la vitesse initiale d'une certaine particule dans la section S_0 et θ_0 l'angle de cette vitesse avec B_0 , soit \vec{v} et θ les valeurs correspondantes dans une section S quelconque ; d'après les

relations de conservation de l'énergie et du moment magnétique, on a :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2.128)$$

$$\frac{1}{2} \frac{mv^2 \sin^2 \theta}{B} = \frac{1}{2} \frac{mv_0^2 \sin^2 \theta_0}{B_0} \quad (2.129)$$

d'où :

$$\frac{\sin^2 \theta}{B} = \frac{\sin^2 \theta_0}{B_0} = \text{Cte} \quad (2.130)$$

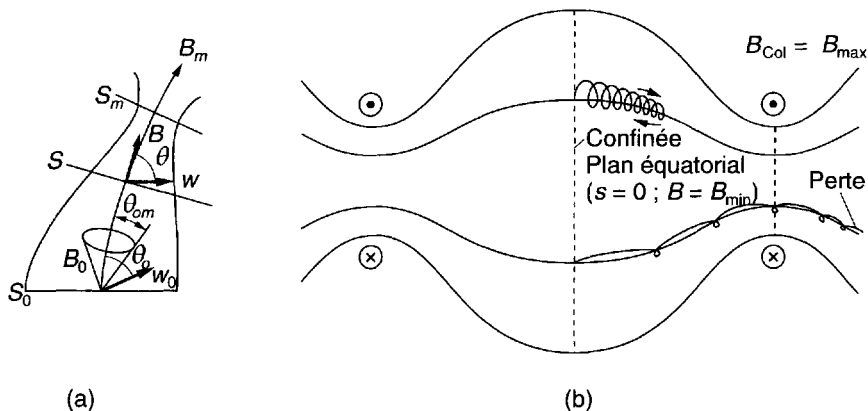


Figure 2.9 : Miroirs magnétiques.

(a) Cône de perte.

(b) Miroirs magnétiques produits par deux bobines coaxiales.

La condition pour que la particule se réfléchisse au niveau du col s'obtient en écrivant que θ y est égal à $\pi/2$; on définit ainsi une valeur critique θ_{0m} de θ_0 telle que :

$$\sin \theta_{0m} = (B_0/B_m)^{1/2} = 1/\sqrt{R} \quad (2.131)$$

Les particules dont la vitesse initiale v_0 est comprise à l'intérieur du cône $\theta < \theta_{0m}$ traversent le miroir ; ce cône est appelé *cône de perte*. Au contraire, les particules dont la vitesse initiale est en dehors du cône de perte se réfléchissent toutes avant le col, dans une section d'autant plus rapprochée de S_0 que la vitesse initiale \vec{v}_0 est plus écartée de \vec{B}_0 .

On peut réaliser très simplement un ensemble de deux miroirs magnétiques, avec deux bobines de Helmholtz de même axe, parcourues par deux courants de même sens et de même valeur, et suffisamment éloignées l'une de l'autre pour qu'il y ait un minimum de B dans le plan médian [Fig. 2.9(b)]. Cette configuration a été un des premiers schémas utilisés pour confiner un plasma chaud pour la fusion thermonucléaire contrôlée. Bien que cette méthode ait échoué de façon dramatique, une variante de cette méthode est encore étudiée activement [328, p. 174]. Il existe également des miroirs magnétiques dans la nature. La magnétosphère terrestre en fournit un exemple assez proche de nous (Fig. 2.10 et [5]). Enfin l'existence de miroirs magnétiques est liée au mécanisme d'accélération proposé par Fermi (cf. [4]) pour rendre compte des rayons cosmiques de très haute énergie observés dans l'espace intersidéral.

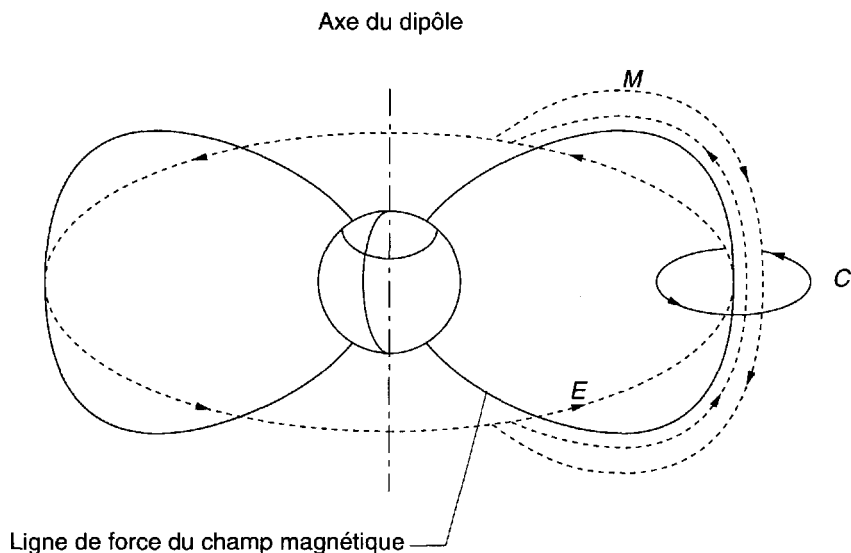


Figure 2.10 : Miroirs magnétiques dans la magnétosphère terrestre.

- C Mouvement cyclotronique rapide.
- M Mouvement de rebond d'un hémisphère à l'autre (miroirs magnétiques).
- E Dérive circulaire autour de l'axe du dipôle magnétique terrestre (dérive de courbure du champ magnétique, cf. paragraphe 2.8).

2.8 Dérives

2.8.1 Dérives électriques et dérivés gravitationnelles

Nous pouvons maintenant étudier les dérivés \vec{v}_1 prévues dans la formule (2.87). Rappelons que, pour que la théorie des orbites adiabatiques s'applique, ces dérivés doivent être faibles, les vitesses correspondantes étant plus faibles que celles du mouvement quasi hélicoïdal, soit en pratique :

$$|\vec{v}_1| \ll |\vec{v}_\perp| \quad (2.132)$$

Les deux plus simples sont les dérivés électriques et gravitationnelles qui s'expriment par les mêmes formules que dans un champ \vec{B} statique et uniforme, soit :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.133)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_G = \frac{m}{q} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.134)$$

En combinant leur action avec la rotation représentée par \vec{v}_0 on a des trajectoires quasi circulaires dans le plan perpendiculaire à \vec{B} [cf. Fig. 2.3(a)] et l'origine de la dérive est qualitativement la même : succession de "demi-cercles" à courbure alternativement faible et forte.

2.8.2 Dérive de courbure magnétique

Lorsque la trajectoire quasi hélicoïdale est guidée par une ligne de force courbée (cf. Fig. 2.7) il apparaît une nouvelle dérive \vec{v}_{CB} appelée dérive de courbure (notation CB pour courbure de B). Cette dérive est produite par la force centrifuge inertielle qui s'exerce apparemment sur la particule qui suit une ligne de force courbe. La force centrifuge est :

$$\vec{F}_e = - \left(\frac{mv_\parallel^2}{R_c} \right) \vec{e}_1 \quad (2.135)$$

où R_c est le rayon de courbure de la ligne de force et \vec{e}_1 le vecteur unitaire porté par la normale principale à la ligne de force dirigée vers l'intérieur de la courbure [cf. Fig. 2.7(b)]. En utilisant les formules de l'appendice A2-3, on voit facilement que :

$$\frac{1}{R_c} = \vec{e}_1 \cdot \frac{\vec{B} \cdot \nabla \vec{B}}{B^2} \quad (2.136)$$

et par conséquent :

$$\vec{F}_c = -mv_{\parallel}^2 \frac{\vec{B} \cdot \nabla \vec{B}}{B^2} \quad (2.137)$$

de sorte que la force centrifuge est équivalente à un vecteur d'accélération gravitationnelle :

$$\vec{g} = -v_{\parallel}^2 \frac{\vec{B} \cdot \nabla \vec{B}}{B^2} \quad (2.138)$$

et produit donc d'après (2.134) une dérive :

$$\vec{v}_{CB} = \frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{\vec{B} \times \vec{B} \cdot \nabla \vec{B}}{B^4} \quad (2.139)$$

On voit que cette dérive est de sens contraire pour les électrons et les ions et beaucoup plus importante pour les ions.

2.8.3 Dérive de gradient de B

Associé à la courbure des lignes de forces, il y a toujours des variations de \vec{B} dans les directions perpendiculaires à \vec{B} . Il est facile de voir qualitativement qu'un gradient transverse de $|\vec{B}|$ introduit une dérive perpendiculaire à la fois à \vec{B} et à $\nabla|\vec{B}|$. Le mécanisme de création de cette dérive, représenté sur la figure 2.11, est analogue à celui qui crée la dérive électrique : la trajectoire dans le plan perpendiculaire à \vec{B} est une succession de demi-orbites à forte courbure (lorsque la particule passe du côté des fortes valeurs de B) et à faible courbure (lorsqu'elle passe du côté des faibles valeurs de B).

Une autre manière de présenter ce mécanisme est de remarquer que la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ a, du fait de $\nabla|\vec{B}|$, une valeur moyenne non nulle le long d'une orbite circulaire : F est visiblement plus grande aux points tels que N (du côté des fortes valeurs de B). De façon mathématique plus précise, rappelons que dans une trajectoire adiabatique, la position $\vec{r}(t)$ et la vitesse $\vec{v}(t)$ de la particule peuvent s'écrire :

$$\vec{r}(t) = \vec{\rho}(t) + \vec{R}(t) \quad (2.140)$$

$$\vec{v}(t) = (\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) + \vec{v}_1 \quad (2.141)$$

où les premiers termes représentent le mouvement rapide de rotation cyclotron et les termes $\vec{R}(t)$, $\vec{v}_1(t)$ les dérives lentes du centre guide. La

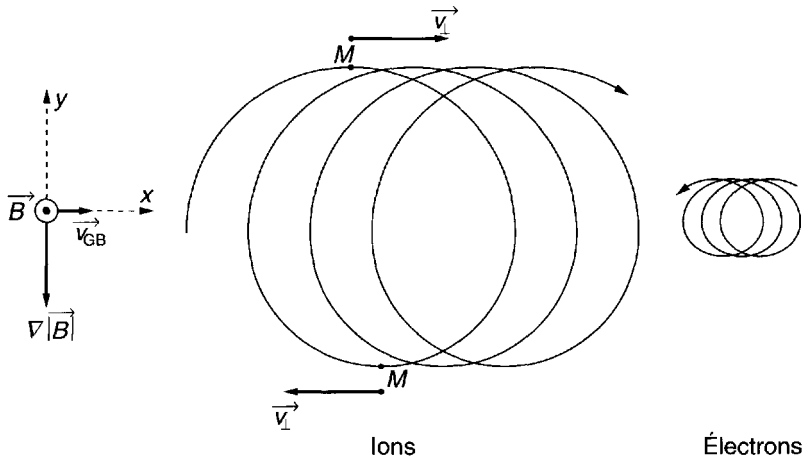


Figure 2.11 : Dérive $\overrightarrow{v_{GB}}$ produite par le gradient transverse de \overrightarrow{B} .

force magnétique qui agit sur la particule est à chaque instant :

$$\overrightarrow{F} = q \left[\overrightarrow{v}(t) \times \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}(t)) \right] \quad (2.142)$$

Si le champ \overrightarrow{B} était uniforme, les trajectoires projetées sur le plan perpendiculaire à \overrightarrow{B} seraient exactement circulaires et la moyenne de \overrightarrow{F} sur une période de rotation serait nulle. Supposons maintenant qu'il existe un faible gradient transverse de \overrightarrow{B} . La valeur moyenne de \overrightarrow{F} n'est plus nulle et pour la calculer en première approximation, nous pouvons négliger dans \overrightarrow{v} les dérives et effectuer sur \overrightarrow{B} un développement limité, donc écrire :

$$\overrightarrow{F} = q \left\{ \overrightarrow{v}(t) \times \left[\overrightarrow{B}(c) + \overrightarrow{\rho}(t) \cdot \nabla \overrightarrow{B}(c) \right] \right\} \quad (2.143)$$

avec :

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v}_{||} + \overrightarrow{\Omega}(c) \times \overrightarrow{\rho}(t) \quad (2.144)$$

$\overrightarrow{v}_{||}$, $\overrightarrow{\Omega}(c)$ et $\overrightarrow{B}(c)$ sont considérés comme des constantes (ainsi que $|\overrightarrow{\rho}|$). La valeur moyenne le long d'une orbite circulaire du premier terme de (2.143) est nulle. Il en est de même de la composante introduite par $\overrightarrow{v}_{||}$ dans le deuxième terme, de sorte que l'on peut écrire :

$$\left\langle \frac{\overrightarrow{F}}{q} \right\rangle = \left\langle (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{\rho}) \times \overrightarrow{\rho} \cdot \nabla \overrightarrow{B} \right\rangle \quad (2.145)$$

En remarquant que $\vec{\Omega}$ n'a qu'une composante $\Omega_z = \bar{\Omega}$, tandis que $\vec{\rho}$ est dans le plan xOy et en notant que l'on a $\langle \rho_x \rho_y \rangle = 0$, $\langle \rho_x^2 \rangle = \langle \rho_y^2 \rangle = \rho^2/2$, on obtient après quelques lignes de calcul (cf. problème P2-4) :

$$\langle \vec{F} \rangle = -\mu \nabla B_z = -\frac{\mu}{2B} \nabla B^2 \quad (2.146)$$

La composante parallèle à Oz est la force de freinage que nous avons décrite dans la section 2.7. La composante perpendiculaire à \vec{B} produit comme toute force transverse une dérive ; c'est la dérive de gradient de B , visible sur la figure 2.11, soit :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{GB} = \frac{mv_{\parallel}^2}{4q} \frac{\vec{B} \times \nabla B^2}{B^4} \quad (2.147)$$

On peut chercher à comparer les directions des deux dérives magnétiques. Le résultat dépend des propriétés de $\nabla \times \vec{B}$, c'est-à-dire, essentiellement, de la densité du plasma.

— *Si le plasma est très peu dense*, les courants électriques qu'il transporte ne modifient pas le champ magnétique ; on peut considérer que \vec{B} est déterminé uniquement par des bobines extérieures et l'on a $\nabla \times \vec{B} = 0$; alors les formules de l'appendice A2-3 montrent que :

$$\nabla B^2 = 2(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (2.148)$$

On en déduit que les deux dérives ont même direction et même sens, et la dérive résultante s'écrit :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{GB} = -\frac{1}{\Omega R_c} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2) \vec{e}_2 \quad (2.149)$$

Cette dérive résultante se produit donc dans la direction \vec{e}_2 de la binormale à la ligne de force.

— *Si le plasma est assez dense*, les courants qu'il transporte peuvent jouer un rôle (effet de diamagnétisme) ; on a alors en régime statique :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.150)$$

On obtient alors après quelques lignes de calcul (cf. problème P2-5) :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{GB} = -\frac{1}{\Omega R_c} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2) \vec{e}_2 + \frac{\mu_0 v_{\perp}^2}{2\Omega} \frac{\vec{J}_{\perp}}{B} \quad (2.151)$$

où \vec{J}_\perp est la composante du courant perpendiculaire à \vec{B} ; de ce fait, alors que la dérive de courbure reste parallèle à la binormale, la dérive de gradient et, par conséquent, la dérive totale peuvent *a priori* avoir une direction quelconque dans le plan perpendiculaire à \vec{B} .

2.9 Invariants adiabatiques

2.9.1 Pseudo-périodes et invariants adiabatiques

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer quelques règles générales concernant les mouvements adiabatiques de particules chargées confinées entre deux miroirs magnétiques ; on produit ces particules au laboratoire dans les "machines à miroir" (recherches ayant pour but la fusion nucléaire contrôlée [328, p.174]), mais il en existe également à l'état naturel dans la magnétosphère terrestre ; ce sont les particules "piégées" dans le champ magnétique terrestre (ceintures de van Allen) [5].

De manière générale, on peut représenter le mouvement d'une particule confinée entre deux miroirs magnétiques au moyen du schéma de la figure 2.12 ; la trajectoire est une hélice tracée sur une surface tubulaire $N_1 A_1 M_1 A_2 N_2 A_3 M_3 \dots$; à cause des dérives mentionnées au paragraphe précédent, les éléments de cette surface ne sont pas exactement des tubes de force ; ils font un petit angle avec les lignes de force, $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots$. Les points $M_1, M_2, \dots, N_1, N_2, \dots$ sont les points de réflexion respectifs sur les "miroirs" M et N ; les points A_1, A_2, A_3, \dots sont les points où la trajectoire traverse une certaine section centrale S_0 ; du fait des dérives ils décrivent une courbe Σ dans S_0 ; nous nous limiterons au cas où Σ est une courbe fermée⁴.

La trajectoire présente alors une triple périodicité approchée caractérisée par trois pseudo-périodes :

- t_B durée d'une révolution gyromagnétique ;
- t_M durée d'un aller et retour MNM entre les deux miroirs ;
- t_Σ durée d'une révolution le long de Σ .

On a évidemment :

$$t_B \ll t_M \ll t_\Sigma \quad (2.152)$$

Dans ces conditions, il est raisonnable de considérer séparément chacun de ces trois mouvements quasi périodiques, en considérant trois échelles de

4. Dans certains cas, cela est une conséquence presque évidente des propriétés de symétrie du système (cf. section 2.10) ; en revanche, il n'y a à vrai dire aucune raison fondamentale pour que Σ soit une courbe fermée dans une géométrie de champ magnétique absolument quelconque.

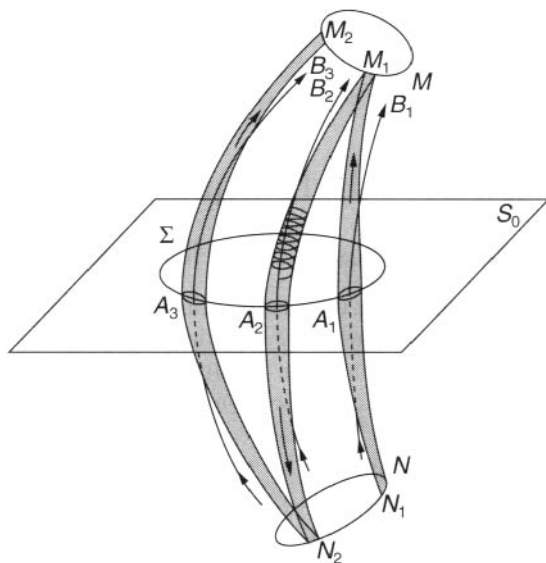


Figure 2.12 : Mouvement à trois pseudo-périodes d'une particule entre deux miroirs magnétiques.

temps : par exemple, à l'échelle de t_B on décrit le mouvement quasi héliçoïdal ; mais ce mouvement se déforme lentement (à l'échelle de t_M) lorsque la particule se déplace le long d'une ligne de force ; il est évident en effet que t_B diminue quand la particule s'approche de l'un des miroirs.

La théorie générale des déformations lentes (adiabatiques) d'un mouvement périodique par variation lente des paramètres qui le définissent peut se faire en utilisant les méthodes de la mécanique analytique (cf. [280], p. 216). Elle montre que la variation lente de la pseudo-période s'effectue en conservant de façon approchée⁵ une certaine grandeur associée au mouvement périodique. Une telle constante approchée est ce qu'on appelle un *invariant adiabatique*. Il se présente mathématiquement comme une intégrale étendue à une période de mouvement. Plus précisément si q est la coordonnée canonique généralisée qui décrit le mouvement cyclique et p

5. On montre [2b], de façon plus précise, que si le petit paramètre d'adiabaticité est d'ordre δ , la variation de l'invariant adiabatique est d'ordre $e^{-1/\delta}$.

le moment canonique conjugué, l'invariant adiabatique associé est :

$$I = \oint p dq \quad (2.153)$$

où le petit cercle sur le signe d'intégration veut dire que l'intégrale est étendue à une période de variation de q . Dans le cas présent nous pouvons donc définir trois invariants :

1^{er} invariant - Moment magnétique orbital - Le premier invariant est associé à la période t_B , pour laquelle on a :

$$q \equiv \varphi \quad (2.154)$$

$$p \equiv m\rho v_{\perp} \quad (2.155)$$

$$I = I_1 = 2\pi m\rho v_{\perp} \quad (2.156)$$

En tenant compte de la relation :

$$v_{\perp} = \Omega\rho \quad (2.157)$$

qui relie les variables au champ B , on voit que l'on peut écrire I_1 sous l'une des deux formes équivalentes :

$$I_1 = \text{Cte} \times \frac{v_{\perp}^2}{B} = \text{Cte} \times \pi\rho^2 B \quad (2.158)$$

qui recourent les deux expressions du moment magnétique orbital que nous avons trouvées dans la section 2.6.

2^{ème} invariant - Invariant d'action longitudinale - Le deuxième invariant est associé à la période t_M d'oscillation entre les deux miroirs pour laquelle on peut poser :

$$q \equiv s \quad (\text{abscisse curviligne le long de la ligne de force}) \quad (2.159)$$

$$p \equiv mv_{\parallel} \quad (2.160)$$

$$I_2 = \int_t^{t+t_M} mv_{\parallel} ds \quad (2.161)$$

On peut démontrer directement la conservation de I_2 à partir d'un calcul fait sur l'équation (2.126)(cf. problème P2-8).

3^{ème} invariant - Invariant de flux global - Le troisième invariant est associé à la période t_{Σ} . Il se présente de façon tout à fait analogue au premier à ceci près que la variable angulaire φ est maintenant celle du vecteur \vec{R} de position du centre guide et on obtient par un calcul analogue à celui fait pour μ :

$$I_3 = \text{Cte} \times \pi R^2 B \quad (2.162)$$

résultat que nous avons établi directement dans la section 2.6 à partir de l'analyse d'une compression magnétique.

2.10 Constantes exactes du mouvement

2.10.1 Équations de Lagrange

Les invariants adiabatiques sont des grandeurs très utiles car ils permettent souvent de trouver des propriétés des trajectoires et de la dynamique du plasma sans avoir à procéder à l'intégration souvent très difficile des équations du mouvement des particules. Dans ce même but, il est intéressant de rechercher s'il existe d'autres constantes du mouvement, celles-ci exactes et trouvant leur origine dans les propriétés de symétrie (cylindrique, torique ...) du champ magnétique dans lequel évolue le plasma.

La recherche des constantes du mouvement se fait de façon simple en utilisant les méthodes générales de la mécanique analytique. De façon générale on utilise dans cette théorie une formulation des équations de mouvement basée sur les *coordonnées généralisées*. Ce sont les s quantités indépendantes $q_1, q_2, \dots, q_s \equiv q$ qui déterminent complètement l'état d'un système à s degrés de liberté. Par exemple, une particule isolée est décrite par $s = 3$ coordonnées et N particules le sont par $s = 3N$ coordonnées. Les quantités $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s \equiv \dot{q}$, où le point représente la différentiation par rapport au temps, sont les *vitesse généralisées*. Avec de telles coordonnées, les équations de mouvement d'un système mécanique à s degrés de liberté sont les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (2.163)$$

qui sont appelées les *équations différentielles de mouvement d'Euler-Lagrange*. Les quantités

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i \quad (2.164)$$

sont les *moments généralisés* ; ils ne sont pas toujours exactement le produit de la masse par la vitesse. On voit que si le Lagrangien L est indépendant de l'une des coordonnées généralisées, par exemple q_j , alors le moment généralisé correspondant p_j est une constante du mouvement.

Considérons une particule chargée (de masse m et de charge q) se déplaçant dans un champ magnétique statique $\vec{B}(r)$. Dans ce cas, le Lagrangien (non relativiste) est donné par

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + q \vec{v} \cdot \vec{A} \quad (2.165)$$

où $\vec{A}(r)$ est le potentiel vecteur tel que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.166)$$

2.10.2 Champ statique à symétrie de révolution

a) Champ magnétique et potentiel vecteur

Nous allons maintenant étudier à titre d'exemple les trajectoires dans un champ magnétique statique, ayant une symétrie axiale autour d'un axe Oz . Bien que l'analyse soit possible pour tout système ayant cette symétrie, nous penserons plus particulièrement à une configuration à miroirs présentant un plan équatorial S_0 et deux cols C et C' (Fig. 2.13).

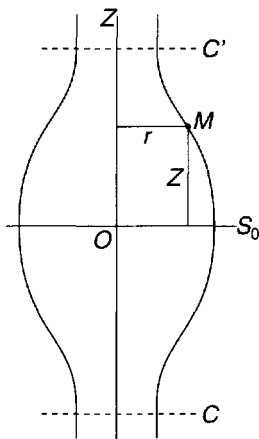


Figure 2.13 : Miroirs magnétiques à symétrie de révolution.

Nous utiliserons des coordonnées cylindriques r, φ, z . Il est facile de voir que le potentiel vecteur magnétique \vec{A} n'a qu'une composante A_φ ; il suffit pour s'en convaincre de remarquer qu'une configuration de champ magnétique de révolution autour de Oz peut être produite par des bobines constituées de spires circulaires d'axe Oz et de se rappeler la relation donnant le potentiel vecteur du champ d'un système de courants :

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d_3 \vec{r}' \quad (2.167)$$

Les composantes du champ magnétique sont déduites de A_φ par les formules :

$$B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \quad (2.168)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \quad (2.169)$$

La signification physique de A_φ se déduit d'ailleurs facilement du théorème sur le rotationnel appliqué à un cercle passant par le point $M(r, z)$; la circulation de A le long de ce cercle est égale au flux $\Phi(r, z)$ de $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$ à travers la surface du cercle :

$$2\pi r A_\varphi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi(r, z) \quad (2.170)$$

Le produit rA_φ est donc égal au flux de \vec{B} à travers ce cercle divisé par 2π ; les tubes de force sont définis par la condition que Φ soit une constante ; leur équation générale est donc :

$$rA_\varphi = \text{Cste} \quad (2.171)$$

b) Équations du mouvement ; conservation du moment p_φ

Dans ce problème à symétrie cylindrique, le Lagrangien (2.165) s'écrit donc :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + qv\dot{\varphi}A_\varphi \quad (2.172)$$

Les moments de Lagrange sont par définition :

$$p_r = \partial L / \partial \dot{r} = m\dot{r} \quad (2.173)$$

$$p_\varphi = \partial L / \partial \dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi} + qvA_\varphi \quad (2.174)$$

$$p_z = \partial L / \partial \dot{z} = m\dot{z} \quad (2.175)$$

Les dérivées de L par rapport à r , φ et z s'écrivent donc :

$$\partial L / \partial r = r\dot{\varphi}(m\dot{\varphi} + qB_z) \quad (2.176)$$

$$\partial L / \partial \varphi = 0 \quad (2.177)$$

$$\partial L / \partial z = qv\dot{\varphi} \partial A / \partial z \quad (2.178)$$

Les équations du mouvement ($\dot{p}_r = \partial L / \partial r$, etc.) s'écrivent donc finalement :

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}(\dot{\varphi} - \Omega_z) \quad (2.179)$$

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} + qvA_\varphi = \text{Cte} \quad (2.180)$$

$$z = -\frac{q}{m}v_\varphi B_r \quad (2.181)$$

avec :

$$\Omega_z = -\frac{q}{m}B_z \quad (2.182)$$

L'équation (2.180) montre qu'il y a conservation du moment canonique p_φ , c'est-à-dire de la somme du moment cinétique de la particule par rapport à l'axe Oz et de la quantité $(q/2\pi)\Phi(r, z)$; pour avoir une image simple de la signification de p_φ , il est intéressant d'étudier les orbites situées dans le plan équatorial. Cette analyse est développée dans l'appendice A2-4. Elle permet de classer les orbites en orbites liées et non liées [cf. Fig. 2.18(a) et 2.18(b)] et de montrer notamment que si une orbite est non liée à l'instant $t = -\infty$ elle l'est aussi à $t = +\infty$ et réciproquement. Cette remarque pose des problèmes intéressants tant pour les plasmas naturels de la magnétosphère que pour les plasmas de recherches pour la fusion nucléaire : l'injection de particules à partir de l'extérieur et leur piégeage dans ces configurations magnétiques ne sont possibles que si les particules subissent à leur passage dans le champ \vec{B} une action spéciale autre que celle de \vec{B} (collision élastique, collision inélastique avec changement de q/m , freinage électrostatique, ...).

2.11 Appendices

A2-1 Conductivité d'un plasma froid sans collisions

a) Calcul de $\bar{\sigma}$

Nous avons vu dans la section 2.4 que l'on peut dans le cadre d'une approximation dite des plasmas froids analyser la réponse d'un plasma, placé dans un champ magnétique uniforme et statique \vec{B} , à l'action d'un champ électrique oscillant \vec{E}_1 et définir une propriété locale $\bar{\sigma}$ que nous avons appelée la conductivité électrique du plasma. Dans le présent appendice nous calculons $\bar{\sigma}$ et analysons ses propriétés.

Pour chaque espèce de particule contenue dans le plasma, nous cherchons donc le mouvement d'ensemble \vec{v}_1 produit par un champ électrique oscillant \vec{E}_1 , sous la forme d'une solution sinusoïdale de l'équation (2.1) qui s'écrit en notations complexes :

$$-i\omega\vec{v}_1 = \frac{q}{m}(\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}) \quad (2.183)$$

où nous avons supposé que la variation temporelle de toutes les grandeurs était représentée par un facteur $e^{-i\omega t}$ (cf. note en bas de page de la section 2.1). Nous pouvons d'autre part poser pour alléger l'écriture :

$$\vec{\gamma}_1 = \frac{q}{m}\vec{E}_1 \quad (2.184)$$

$$\vec{\Omega} = -\frac{q}{m}\vec{B} \quad (2.185)$$

L'équation (2.183) s'écrit alors

$$(-i\omega - \vec{\Omega} \times) \vec{v}_1 = \vec{\gamma}_1 \quad (2.186)$$

Pour expliciter le calcul, prenons le champ \vec{B} pour axe Oz ; on a alors :

$$\vec{\Omega} = \bar{\Omega}\vec{e}_z \quad (2.187)$$

et l'équation (2.186) s'écrit en notations tensorielles :

$$\begin{vmatrix} -i\omega & \bar{\Omega} & 0 \\ -\bar{\Omega} & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega \end{vmatrix} \cdot \vec{v}_1 = \vec{\gamma}_1 \quad (2.188)$$

d'où par application de la règle d'inversion d'une matrice :

$$\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \frac{i\omega}{\omega^2 - \bar{\Omega}^2} & \frac{-\bar{\Omega}}{\omega^2 - \bar{\Omega}^2} & 0 \\ \frac{\bar{\Omega}}{\omega^2 - \bar{\Omega}^2} & \frac{i\omega}{\omega^2 - \bar{\Omega}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-i\omega} \end{vmatrix} \cdot \vec{\gamma}_1 \quad (2.189)$$

On en déduit immédiatement compte tenu de (2.184) l'expression du tenseur de mobilité électrique $\bar{\mu}$ de chaque espèce de particules défini par :

$$\vec{v}_1 = \bar{\mu} \cdot \vec{E}_1 \quad (2.190)$$

Finalement, on obtient le tenseur de conductivité électrique correspondant en posant :

$$\vec{J}_1 = nq\vec{v}_1 = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}_1 \quad (2.191)$$

et le résultat final est :

$$\vec{\sigma} = \sigma_0 \begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \bar{\Omega}^2} & \frac{i\omega\bar{\Omega}}{\omega^2 - \bar{\Omega}^2} & 0 \\ -\frac{i\omega\bar{\Omega}}{\omega^2 - \bar{\Omega}^2} & \frac{\omega^2}{\omega^2 - \bar{\Omega}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.192)$$

avec :

$$\sigma_0 = \frac{nq^2}{m(-i\omega)} \quad (2.193)$$

Dans un plasma composé d'électrons et d'une seule espèce d'ions, la conductivité totale est la somme des conductivités électroniques et ioniques, soit :

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_e + \vec{\sigma}_i \quad (2.194)$$

b) Propriétés du tenseur de conductivité électrique

On peut tout d'abord vérifier que le plasma est en l'absence de collisions un milieu purement réactif, c'est-à-dire que la puissance moyenne transmise par \vec{E}_1 au plasma est nulle. En effet on montre facilement (cf. problème P2-6) que la puissance moyenne transmise par le champ électrique à une unité de volume du plasma est :

$$\left(\frac{dU}{dt} \right)_{\text{moy}} = \left[\frac{1}{2} \Re(\vec{\sigma}) \cdot \vec{E}_1 \right] \cdot \vec{E}_1 \quad (2.195)$$

Dans le cas présent cette puissance moyenne est nulle : en effet, les termes diagonaux, purement imaginaires, ne donnent aucune contribution et d'autre part les effets dus aux termes réels non diagonaux s'annulent parce que le tenseur $\vec{\sigma}_e$ est antisymétrique. Examinons maintenant comment varient les propriétés de conductivité électrique du plasma en fonction de l'intensité du champ magnétique (plus précisément c'est le rapport entre ω et Ω qui détermine ces propriétés) :

- En l'absence de champ magnétique, le tenseur (2.192) se réduit à ses composantes diagonales ; on a :

$$\sigma = \sigma_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.196)$$

La conductivité est alors scalaire, le milieu est isotrope ; la conductivité est limitée par l'inertie des particules et purement imaginaire.

- Si le champ magnétique est assez faible, ou la fréquence assez élevée pour que l'on ait $\Omega \ll \omega$, il apparaît, par rapport à la formule (2.196), de petites modifications.

Seule la conductivité dans la direction de \vec{B} est inchangée ; les deux premiers termes diagonaux diffèrent du troisième par un terme du deuxième ordre en Ω/ω ; cette variation de la conductivité dans les directions perpendiculaires à \vec{B} porte le nom de *magnétorésistance* ; enfin il apparaît des termes non diagonaux qui donnent une composante de courant perpendiculaire à la fois à \vec{E} et à \vec{B} ; ces termes constituent ce que l'on appelle l'*effet Hall* ; c'est un effet du premier ordre en Ω/ω .

- Si le champ magnétique est assez fort, ou la fréquence assez basse pour que l'on ait $\omega \ll \Omega$, la conductivité dans la direction de l'axe Oz est encore inchangée. En revanche tous les autres termes tendent vers zéro, les termes diagonaux comme $\sigma_0(\omega^2/\Omega^2)$ et les termes d'effet Hall comme $\sigma_0(\omega/\Omega)$ en valeur absolue.

Il est intéressant d'utiliser ces remarques en étudiant les propriétés d'un plasma neutre dans lequel il y a autant d'ions que d'électrons et de comparer l'action des ions et des électrons sur la conductivité : de manière générale, la conductivité totale s'exprime par la somme (2.194). On remarque d'autre part que pour chaque espèce de particules σ_0 et Ω sont proportionnels à q/m .

Il en résulte que la conductivité σ_0 dans la direction de \vec{B} (ou dans n'importe quelle direction si $\vec{B} = 0$) est due essentiellement aux électrons. Dans un fort champ magnétique, le résidu de conductivité $\sigma_0(\omega^2/\Omega^2)$ dans les directions perpendiculaires à B est essentiellement dû aux ions, cependant que les effets Hall $\sigma_0(\omega/\Omega)$ des ions et des électrons tendent à se compenser exactement. Cette dernière propriété est d'ailleurs la même que celle que nous avons mentionnée à propos de la vitesse de dérive : quand $\omega \ll \Omega$ les propriétés tendent vers celles que l'on a dans le champ continu ; les termes d'effet Hall qui représentent des déplacements perpendiculaires à la fois à \vec{E} et à \vec{B} sont produits par la vitesse de dérive. Cette vitesse est la même pour les électrons et pour les ions, mais les composantes de courant électronique et ionique correspondantes sont opposées puisque l'on a $n_e q_e = -n_i q_i$.

On doit signaler en terminant que les formules ci-dessus ne constituent qu'une première approximation dans le calcul de la conductivité électronique d'un plasma. De manière plus générale, le tenseur de conductivité peut faire intervenir la fréquence de collision ν_1 des électrons avec les autres particules. Des formules tenant compte de cet effet seront données au chapitre 12. Quand les collisions ne sont pas négligeables, les termes diagonaux du tenseur de conductivité ne sont plus purement imaginaires comme dans la formule (2.192). La puissance moyenne transmise au gaz n'est plus nulle : c'est l'effet Joule.

D'autre part, comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, un champ électrique uniforme dépendant du temps dépend toujours en pratique également de l'espace ; la solution des équations de Maxwell pour le champ électromagnétique conduit en fait à considérer des ondes monochromatiques qui, dans un milieu homogène indéfini, peuvent être planes et varient comme $e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$. En toute rigueur la conductivité d'un plasma est alors une fonction de ω et de k ; la dépendance de σ avec k conduit à dire qu'un plasma est un milieu spatialement dispersif. Des formules précisant cette dépendance sont données dans les ouvrages consacrés aux ondes dans les plasmas (cf. par exemple [352]). On y voit que les termes de dispersion spatiale font intervenir l'agitation thermique des particules par des termes de la forme $k v_{te}$ où v_{te} est une vitesse moyenne d'agitation thermique des électrons. La formule (2.192) peut être considérée comme une approximation valable quand $k v_{te} \ll \omega$.

A2-2 Résonance cyclotron

Le calcul de la conductivité électrique développé ci-dessus tombe en défaut lorsque la fréquence ω du champ électrique coïncide avec la fréquence gyromagnétique Ω de l'une des espèces de particules. Il se produit alors un phénomène de résonance dite cyclotron, que nous analysons dans le présent appendice.

a) Expression du tenseur de conductivité en coordonnées tournantes

De manière générale, il peut être commode de remplacer les coordonnées E_x , E_y , E_z représentant l'amplitude complexe du vecteur champ électrique \vec{E} par des coordonnées dites tournantes E_+ , E_- , E_z définies par les formules :

$$E_+ = E_x + iE_y \quad (2.197)$$

$$E_- = E_x - iE_y \quad (2.198)$$

$$E_z = E_z \quad (2.199)$$

Un champ électrique tournant dans le sens direct du plan xOy est tel que sa composante E_x est en avance de $\pi/2$ sur sa composante E_y ; autrement dit, sa composante E_- est nulle ; avec les nouvelles coordonnées il se réduit à une composante E_+ . On voit de même que la composante E_- , si elle existe seule, représente un champ tournant en sens inverse dans le plan xOy .

Le tenseur de conductivité prend une forme relativement simple, si on exprime \vec{E} et \vec{J} au moyen de ces coordonnées $+$, $-$, z ; on obtient facilement :

$$\vec{\sigma} = \sigma_0 \begin{vmatrix} \frac{\omega}{\omega - \Omega} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega}{\omega + \Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.200)$$

b) Résonance cyclotron électronique

Supposons par exemple que l'on ait $\omega = \overline{\Omega}_e$ ($\overline{\Omega}_e$ est positif). Dans le tenseur de conductivité de la formule (2.192), les termes relatifs aux courants perpendiculaires à \vec{B} tendent vers l'infini pour $\omega = \Omega$; en fait le calcul doit être refait dans ce cas singulier ; il est développé dans le problème P2-7. Les résultats obtenus s'énoncent de façon plus simple si l'on considère le champ électrique oscillant \vec{E} comme la résultante de trois champs :

- un champ longitudinal $\vec{E}_{||}$ oscillant,
- un champ transverse \vec{E}_+ tournant dans le sens positif, c'est-à-dire le sens défini par le vecteur rotation $\vec{\Omega}_e$,
- un champ \vec{E}_- tournant en sens contraire.

Les composantes $E_{||}$ et E_- ne produisent aucun effet de résonance ; elles produisent simplement une oscillation des électrons parallèles à Oz et une rotation dans le sens négatif ; on peut d'ailleurs remarquer que les courants qui en résultent se calculent immédiatement à partir de la formule (2.200) qui donne :

$$j_- = \sigma_{--} E_- \quad (2.201)$$

$$j_z = \sigma_{zz} E_z \quad (2.202)$$

Par contre σ_{++} tend vers l'infini quand $\omega \rightarrow \Omega_e$; la composante E_+ est celle qui produit le phénomène de résonance ; cela se conçoit très bien puisqu'elle accompagne la rotation gyromagnétique des électrons en tournant dans le même sens et à la même

vitesse que ceux-ci ; de ce fait la phase relative de E_+ et de la vitesse des électrons reste constante et l'interaction est cumulative.

Le calcul fait dans le problème P2-7 montre que l'on peut prendre comme solution \vec{v}_1

$$\vec{v}_1 = \frac{q_e}{m_e} \vec{E}_+ t \quad (2.203)$$

La trajectoire la plus générale en présence du champ tournant E_+ a donc un vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_0 = \frac{q_e}{m_e} \vec{E}_+ t + \vec{\Omega}_e \times \vec{\rho} + \vec{v}_{\parallel} \quad (2.204)$$

Le premier terme représente un mouvement spiralé de vitesse angulaire $\omega = \Omega_e$, le deuxième terme une rotation à la même vitesse angulaire, le troisième une translation parallèle à \vec{B} . La vitesse initiale détermine $\vec{\rho}$ et \vec{v}_{\parallel} ; si elle est nulle le mouvement se réduit à la composante spiralée ; la vitesse et le rayon vecteur varient alors proportionnellement au temps selon les lois :

$$v = \frac{q_e}{m_e} E_+ t \quad (2.205)$$

$$\rho = \frac{q_e}{m_e \Omega_e} E_+ t = \frac{E_+}{B} t \quad (2.206)$$

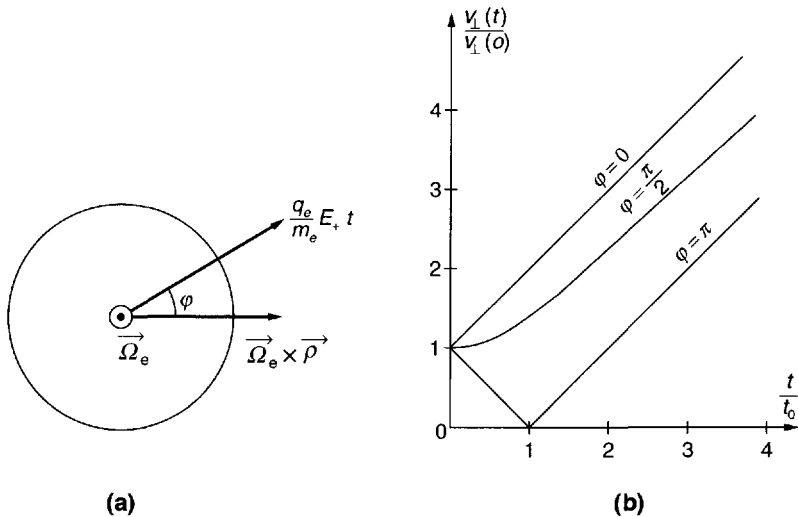


Figure 2.14 : Résonance cyclotron.

(a) Composition des vitesses.

(b) Influence de l'angle de la vitesse initiale avec le champ électrique.

Si la vitesse initiale possède une composante transverse, la composition du mouvement en spirale et de la rotation $\vec{\Omega}_e \times \vec{\rho}$ se fait de façon différente selon la phase initiale φ de $\vec{\Omega}_e \times \vec{\rho}$ et de $q_e/m_e E_+$. À l'instant t ces deux vecteurs ayant tourné tous deux

de $\Omega_e t$ font toujours entre eux le même angle φ [Fig. 2.14(a)] de sorte que la vitesse transversale a alors pour module :

$$v_{\perp}(t) = v_{\perp}(0) \left[1 + \frac{2t}{t_0} \cos \varphi + \frac{t^2}{t_0^2} \right]^{1/2} \quad (2.207)$$

avec :

$$t_0 = \frac{m_e v_{\perp}(0)}{q_e E_{+}} \quad (2.208)$$

Les variations du rapport $v_{\perp}(t)/v_{\perp}(0)$ en fonction de t/t_0 sont représentées sur la figure 2.14(b) pour diverses valeurs de φ . On voit que lorsque φ est compris entre 0 et $\pi/2$ la vitesse transverse de l'électron augmente régulièrement tandis que lorsque $\pi/2 < \varphi < \pi$ cette vitesse décroît d'abord et passe par un minimum. Mais dans tous les cas, la vitesse produite par E_{+} l'emporte au bout d'un certain temps sur la vitesse initiale et v_{\perp} se met alors à croître proportionnellement au temps.

Bien entendu, dans des conditions expérimentales pratiques cette accélération ne se poursuit pas indéfiniment ; l'électron accéléré entrera en collision soit avec une paroi, soit avec une autre particule. L'effet des parois sera prédominant si, a étant une dimension caractéristique du récipient dans le plan perpendiculaire à \vec{B} et ν_1 la fréquence moyenne de collisions, on a :

$$a \ll \frac{q_e}{m_e \omega} \frac{E_{+}}{\nu_1} \quad (2.209)$$

Si l'inégalité ci-dessus est renversée ce seront les collisions entre particules qui limiteront l'accélération. D'autre part la résonance cyclotron disparaîtra presque complètement quand on aura :

$$\Omega_e \sim \nu_1 \quad (2.210)$$

Pour une valeur donnée de ν_1 (c'est-à-dire en pratique de la pression) on pourra définir au moyen de la formule (2.209) l'ordre de grandeur des champs magnétiques dans lequel il faut se placer pour pouvoir produire la résonance cyclotron⁶. En tout état de cause la résonance cyclotron est un moyen efficace de chauffer les électrons d'un plasma (cf. section 2.7 et [328, p. 344]).

On peut envisager le phénomène de la résonance cyclotron non seulement pour les électrons, comme nous l'avons fait dans ce paragraphe, mais également pour les ions ; cependant la relation (2.209) est beaucoup plus sévère pour les ions ; la discussion montre qu'il faut opérer à des pressions bien plus basses ou dans des champs magnétiques bien plus forts pour pouvoir produire la résonance cyclotron sur les ions. On a cependant pu l'observer et l'utiliser pour chauffer les ions d'un plasma [328, p. 330]. Elle est aussi la base d'un procédé de spectrométrie de masse [6] ou de séparation des isotopes [7].

A2-3 Propriétés du gradient d'un champ de vecteurs

Par définition le gradient d'un champ de vecteurs est le tenseur $\nabla \vec{B}$. Choisissons (Fig. 2.15) localement comme axes la tangente Oz à la ligne de force, la normale principale Ox et la binormale Oy relatives à cette même courbe.

6. En pratique un autre phénomène peut aussi limiter l'importance de la résonance cyclotron ; c'est l'inhomogénéité spatiale (ou les fluctuations temporelles) de \vec{B} . Dans certaines conditions cela peut conduire à des phénomènes de battement à la fréquence $\omega - \Omega_e$.

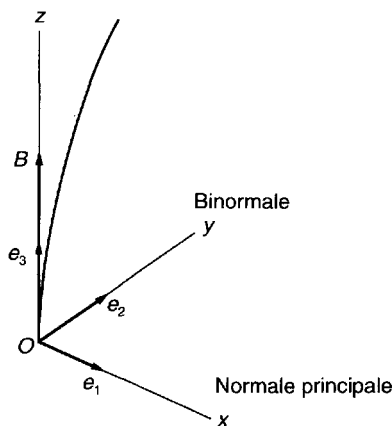


Figure 2.15 : Trièdre de Frenet associé à une ligne de force.

Avec ces axes on a :

$$\partial B_y / \partial z = 0 \quad (2.211)$$

$$\partial B_x / \partial z = B/R \quad (2.212)$$

où R est le rayon de courbure de la ligne de force passant par O ; on peut donc écrire le tenseur $\nabla \vec{B}$ sous la forme :

$$\nabla \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{dB_x}{dx} & \frac{dB_y}{dx} & \frac{dB_z}{dx} \\ \frac{dB_x}{dy} & \frac{dB_y}{dy} & \frac{dB_z}{dy} \\ \frac{B}{R} & 0 & \frac{dB_z}{dz} \end{pmatrix} \quad (2.213)$$

Sur ce tableau on vérifie facilement les règles suivantes :

$\nabla \cdot \vec{B}$ est la somme des trois termes diagonaux,

$\nabla B^2 / 2B$ est le vecteur représenté par la troisième colonne,

$\vec{B} \cdot \nabla \vec{B} / B$ est le vecteur représenté par la troisième ligne.

Si $\nabla \times \vec{B} = 0$, le tableau ci-dessus est symétrique et on a :

$$\frac{\nabla B^2}{2B} = \frac{1}{B} \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} = \frac{B}{R} \vec{e}_1 + \frac{dB}{dz} \vec{e}_3 \quad (2.214)$$

A2-4 Champ statique de révolution avec deux miroirs

Dans ce paragraphe nous analysons en détail les propriétés des orbites dans un champ magnétique à symétrie cylindrique avec deux miroirs magnétiques. Grâce à la symétrie du système les équations de Lagrange font apparaître une nouvelle constante du mouvement. Cette discussion qui peut paraître académique a en fait un grand intérêt pratique, car elle montre qu'on ne peut pas, à partir d'une source extérieure, injecter des particules chargées dans cette configuration, et les y piéger.

a) Conservation de p_φ ; trajectoires dans le plan équatorial

L'équation (2.173) nous a montré que dans un champ magnétique statique et de révolution autour de Oz , il y a conservation de la quantité p_φ , c'est-à-dire de la somme du moment cinétique de la particule par rapport à l'axe Oz et de la quantité $(q/2\pi)\Phi(r, z)$; pour avoir une image simple de la signification de p_φ il est intéressant d'étudier les orbites situées dans le plan équatorial. À cet effet, nous supposons par exemple que, dans ce plan, B_z est toujours positif, décroît avec r , et est pratiquement nul à une certaine distance R de l'axe ; pour fixer les idées, nous étudierons le cas des ions positifs ($q > 0$) ; les variations de B_z et de $qrA_\varphi = q\Phi/2\pi$ en fonction de r , dans le plan équatorial, ont donc l'allure représentée sur la figure 2.16.

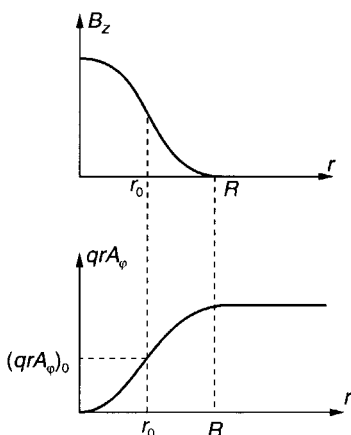


Figure 2.16 : Champ et flux magnétique en fonction de r et z dans un système de révolution.

Les orbites dans le plan équatorial peuvent être par exemple produites par un canon situé dans ce plan, à une distance r_0 de l'axe, émettant un faisceau de particules ayant une vitesse initiale $w_0 = (r\dot{\varphi})_0$ dirigée perpendiculairement à Oz . *A priori*, on peut prévoir selon le sens et la valeur de cette vitesse initiale les différentes familles d'orbites représentées sur la figure 2.17. Ces orbites ont été tracées en faisant varier w_0 et par suite p_φ de $+\infty$ à $-\infty$.

Si on effectue sur chacune de ces orbites une symétrie par rapport à la droite OM_0 , on obtient une courbe qui peut être considérée comme la trajectoire de la même particule, depuis l'instant $t = -\infty$ jusqu'à l'instant $t = 0$ où elle passe par M_0 (en effet les équations (2.179) et (2.180) sont inchangées, si on y change t en $-t$, φ en $-\varphi$, sans changer r). Ce raisonnement montre que si une orbite est non liée à $t = -\infty$, elle l'est aussi à $t = +\infty$ et réciproquement.

Par exemple, si un canon émettant les particules est placé au point C extérieur au champ magnétique [Fig. 2.18(a)], les particules finiront toujours par ressortir du champ magnétique au bout d'un certain temps.

La figure 2.18(b) représente au contraire une orbite liée ; il est facile de vérifier, en faisant le même raisonnement que dans la section 2.8, que cette orbite a un mouvement de précession autour de O dans le sens indiqué ; si l'axe O est extérieur à l'orbite

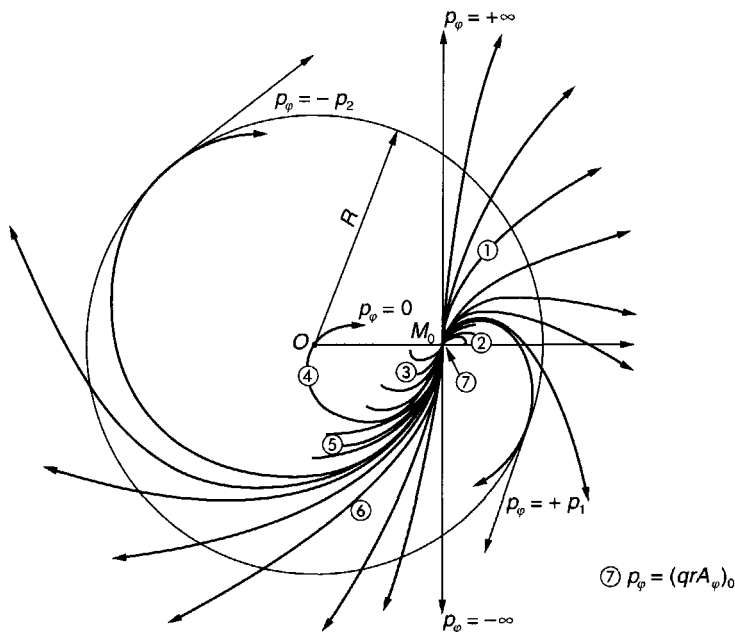


Figure 2.17 : Trajectoires dans le plan équatorial.

1. $+\infty > p_\varphi > +p_1$, orbites non liées.
2. $+p_1 > p_\varphi > (qrA_\varphi)_0$, orbites liées situées dans le domaine $r \geq r_0$.
3. $(qrA_\varphi)_0 > p_\varphi > 0$, orbites liées situées dans le domaine $r \leq r_0$.
4. $p_\varphi = 0$, orbite liée passant par l'axe.
5. $0 > p_\varphi > -p_2$, orbites liées avec l'axe à l'intérieur de l'orbite.
6. $-p_2 > p_\varphi > -\infty$, orbites non liées.

(familles 2 et 3 de la figure 2.17) on peut mener par O des tangentes OT_1, OT_2, OT_3, OT_4 , etc. ; aux points T_1, T_2, T_3, T_4 , etc., on a $\varphi' = 0$, donc

$$p_\varphi = qrA_\varphi = \frac{q}{2\pi} \Phi \quad (2.215)$$

Donc les points $T_1, T_2, T_3, T_4, \dots$ sont sur un même cercle et la valeur de p_φ relative à l'orbite considérée est égale à $q/2\pi$ fois le flux traversant ce cercle.

Une règle analogue s'applique aux points T et T' de la figure 2.18.

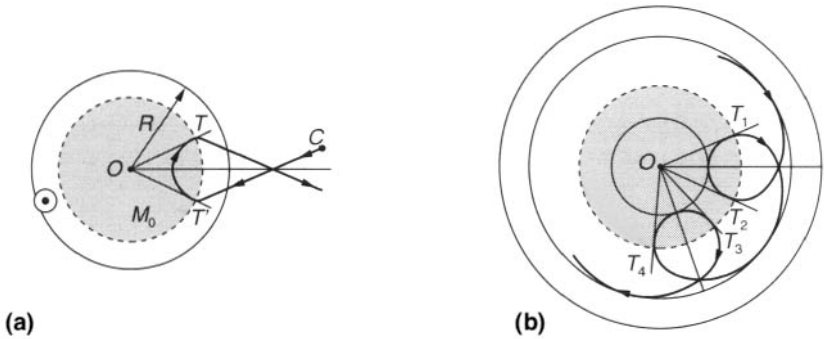


Figure 2.18 : Orbites équatoriales.

(a) Orbites non liées.

(b) Orbites liées.

b) Ecriture de l'hamiltonien. Classification des orbites non équatoriales

α) Potentiel fictif L'hamiltonien H relatif au mouvement d'une particule s'obtient en posant :

$$2mH = m^2 v^2 + 2mqV = p_r^2 + (p_\varphi/r - qA_\varphi)^2 + p_z^2 + 2mqV \quad (2.216)$$

C'est une deuxième constante du mouvement. Il est commode d'écrire sa conservation en introduisant le potentiel fictif $U(r, z)$ défini par :

$$2mU = 2mqV + \frac{1}{r^2}(p_\varphi - qrA_\varphi)^2 \quad (2.217)$$

U est donc la somme de l'énergie potentielle électrostatique et de "l'énergie cinétique azimutale" (en désignant ainsi la fraction de l'énergie cinétique due à la composante de cette vitesse $v_\varphi = \dot{r}_\varphi$).

L'équation (2.216) s'écrit alors :

$$p_z^2 + p_r^2 + 2mU(r, z) = 2mH = \text{Cte} \quad (2.218)$$

Pour une orbite donnée p_φ est une constante et U est effectivement une fonction donnée de r et de z . Par conséquent (2.218) est formellement identique à l'équation de conservation de l'énergie, relative à un mobile fictif se déplaçant dans un plan de coordonnées r et z ; si ce mobile part d'un état initial correspondant à une valeur donnée de H il ne peut se mouvoir que dans les domaines tels que :

$$U(r, z) \leq H \quad (2.219)$$

Cette condition qui ne donne aucune information sur la variable φ va définir des volumes de révolution autour de Oz à l'intérieur desquels la particule réelle qui possède également le moment p_φ peut se mouvoir ; les régions permises et les régions interdites dépendent de H et du potentiel fictif $U(r, z)$, lequel dépend de la configuration des champs et de la valeur de p_φ définie par les conditions initiales.

Il sera commode de supposer encore, comme sur la figure 2.17, que les particules sont émises par un canon placé au point M_0 ; mais nous supposerons maintenant, pour être plus général, que ce canon communique aussi aux particules une composante de mouvement parallèle à z ; l'orbite correspondante n'est donc pas située dans le plan équatorial.

Ceci étant, nous allons maintenant étudier comment le diagramme des régions permises et interdites se déforme quand p_φ varie ; pour cela, nous supposerons que *le champ électrique est nul* ($V = 0$) et que le champ magnétique a, dans un plan de cote z quelconque, la structure représentée sur la figure 2.16, cependant que ses lignes de force ont l'allure générale représentée sur la figure 2.13.

β) Orbites avec $p_\varphi < 0$; orbites liées de façon provisoire ou définitive

Si $p_\varphi < 0$ la courbe de variation de $p_\varphi - q r A_\varphi$ en fonction de r a l'allure représentée sur les figures 2.19(a) et 2.19(b). La figure 2.19(a) est relative au plan équatorial et 2.19(b) à un plan plus rapproché des cols ; les ordonnées des deux courbes sont les mêmes, mais les abscisses sont contractées dans la figure 2.21(a), à cause du resserrement des tubes de force. Les distributions correspondantes du potentiel U sont représentées sur les figures 2.21(c) et 2.19(d) ; la contraction des abscisses qui se produit quand on passe de 2.19(d) (équateur) à 2.19(c) (près des cols) s'accompagne d'une dilatation des ordonnées due au facteur $1/r^2$ de la formule (2.217).

Il est facile de se convaincre que la courbe de potentiel U présente, comme indiqué sur les figures, un creux à condition toutefois que p_φ soit suffisamment petit.

La figure 2.19(e) enfin représente les lignes de niveau de la fonction U dans un plan rz ; on a tracé notamment les deux lignes de niveau

$$U = H_1 \quad (2.220)$$

$$U = H_2 > H_1 \quad (2.221)$$

La région hachurée est celle où on a $U \geq H_2$; l'arc ACB délimite une région où l'on a $U \leq H_1$; entre les arcs BC et DE on a $U > H_1$; à droite de l'arc DE on a à nouveau $U < H_1$. Ce diagramme montre que pour la valeur considérée de p_φ on peut classer les orbites selon les règles suivantes :

- Les particules d'énergie $H < H_1$ donnent lieu à des orbites liées enfermées dans le creux de potentiel délimité par l'arc ACB (et son symétrique par rapport à Oz) et à des orbites non liées restant à droite de l'arc DE .

- Les particules d'énergie H_2 ne donnent pas lieu à des orbites vraiment liées ; toutefois elles peuvent donner lieu à des orbites "liées de façon provisoire" ; il suffit pour cela de les "injecter" près du plan équatorial selon le schéma indiqué sur la figure 2.20. La particule viendra se "réfléchir" près du "mur" hachuré au voisinage de Oz puis pourra osciller entre ce mur et la languette hachurée. Elle sera finalement réfléchie au fond de la vallée, séparant les deux régions interdites et pourra ressortir de la région par où elle est entrée.

Il existe une énergie critique H_c (fonction de p_φ) séparant les deux espèces de lignes de niveaux ; au-dessus de cette énergie, il n'y a plus de possibilité d'orbites complètement liées.

Il faut bien remarquer que l'équation (2.218) et les diagrammes tels que celui de la figure 2.19(e) ne donnent aucun renseignement sur la variable φ ; les zones permises et interdites sont en réalité des volumes de révolution autour de Oz ; pour étudier les mouvements azimutaux à l'intérieur des volumes permis, il faut revenir à l'équation (2.180) ; c'est ainsi que dans le cas étudié dans ce paragraphe, p_φ étant négatif, φ' reste toujours négatif, les orbites encerclent l'axe Oz , le mouvement représenté sur la figure 2.20 a l'allure représentée sur la droite de cette même figure.

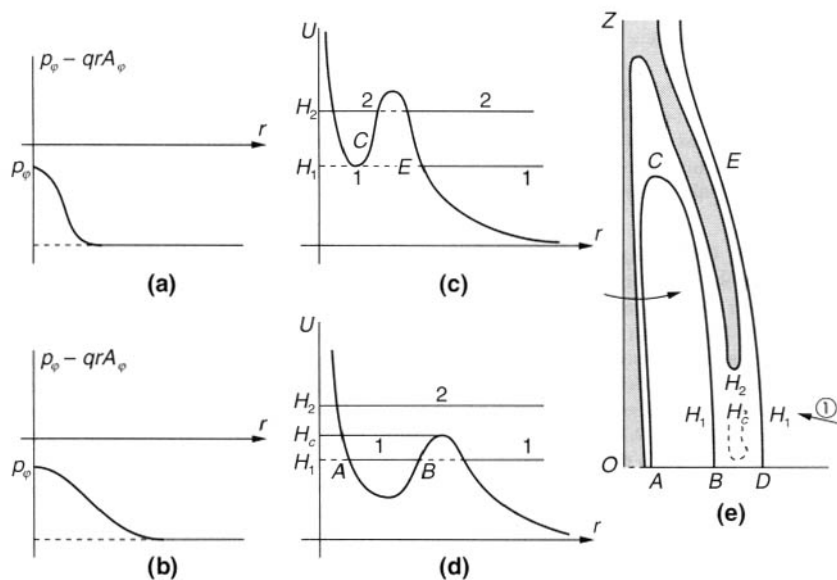


Figure 2.19 : Diagramme d'énergie pour les orbites à p_φ négatif.

Variations en fonction de r de $p_\varphi - qrA_\varphi$ et du potentiel fictif U .

(a) (c) Plan plus près des cols.

(b) (d) Plan équatorial.

(e) Lignes de niveau du potentiel fictif.

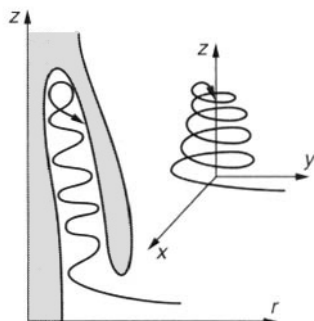


Figure 2.20 : Orbite liée pour un certain temps.

γ) **Orbites** $0 < p_\varphi < (qrA_\varphi)_{\max}$ Si $0 < p_\varphi < (qrA_\varphi)_{\max}$, les mêmes méthodes conduisent aux diagrammes de la figure 2.21.

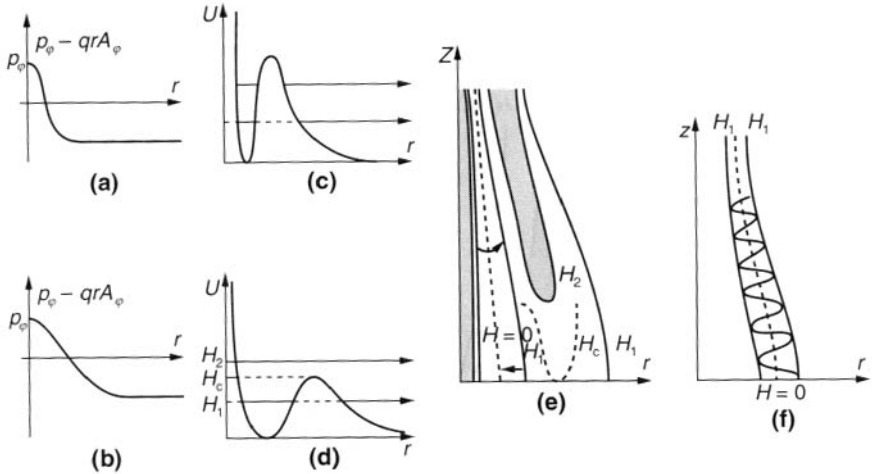


Figure 2.21 : Diagramme d'énergie pour les orbites, avec $0 < p_\varphi < (qrA_\varphi)_{\max}$.

- (a) (b) (c) (d) (e) Mêmes notations que sur la figure 2.19.
 (f) Orbite de faible énergie pour $0 < p_\varphi < (qrA_\varphi)_{\max}$.

Les résultats diffèrent légèrement de ceux obtenus ci-dessus :

- Pour des particules d'énergie supérieure à une certaine énergie H_c ($H = H_2$ par exemple), il ne peut exister que des orbites non liées, ou liées de façon provisoire, analogues à celle de la figure 2.20.

- Pour des particules d'énergie inférieure à H_c , il y a confinement transversal mais non longitudinal ; il apparaît comme précédemment une vallée, mais son "fond" reste à une altitude $U = 0$, quel que soit z : quand on se rapproche des cols magnétiques, le fond de la vallée ne s'élève pas, bien que les bords se relèvent ; il n'y a donc pas de confinement rigoureux dans le sens axial. On se rend compte toutefois que la particule a une forte tendance à être réfléchi par cet effet de relèvement des bords ; nous avons vu dans la section 2.7 que c'est en fait ce qui se produit dans les limites de l'approximation adiabatique : pour les orbites de faible dimension transversales correspondant à une valeur faible de H , le moment magnétique orbital reste constant, ce qui d'après (2.115) introduit l'effet de freinage décrit précédemment [cf. Fig. 2.7(b)]. De toute façon, la théorie présente nous montre que le fond de la vallée suit rigoureusement la ligne de force définie par $qrA_\varphi = p_\varphi$; on en conclut que les orbites (r, z) de faible énergie H_1 sont constituées par des oscillations autour d'une ligne de force ; en fait, en se reportant à l'équation (2.180) on trouve que φ change périodiquement de signe toutes les fois que l'orbite (r, z) traverse cette ligne de force [Fig. 2.21(f)] ; le mouvement à trois dimensions est donc une hélice. Pendant un temps assez court, cette hélice accompagne une ligne de force ; mais la seule contrainte qui lui est imposée est de rester enfermée entre les deux

surfaces $U = H_1$; l'hélice peut donc dériver en restant liée au tube de force $U = 0$; c'est effectivement ce qui se produit sous l'effet des dérives magnétiques décrites dans la section 2.8.

δ) Orbites $p_\varphi > (qrA_\varphi)_{\max}$ Quand $p_\varphi > (qrA_\varphi)_{\max}$ le diagramme des surfaces de niveau a l'allure représentée sur la figure 2.22. Il n'y a aucune orbite liée, même de façon provisoire.

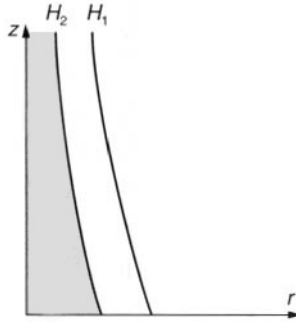


Figure 2.22 : Diagramme d'énergie pour les orbites, avec $p_\varphi > (qrA_\varphi)_{\max}$.

2.12 Problèmes

P2-1 Calcul relativiste de la dérive électrique

Lorsque le champ E est assez fort pour que la vitesse de dérive devienne comparable à c , le changement de repère galiléen utilisé dans la section 2.3 pour obtenir cette vitesse n'est plus valable. Dans le cas où le rapport E_\perp/B devient de l'ordre de c , il faut utiliser les formules relativistes de la transformation de Lorentz.

Effectuer cette transformation et montrer que la vitesse de dérive garde la valeur donnée par la relation (2.57) mais que la fréquence cyclotron est donnée par :

$$\begin{aligned}\Omega' &= \Omega \sqrt{1 - \beta_E^2} \\ \beta_E &= v_E/c\end{aligned}\quad (2.222)$$

P2-2 Adiabaticité temporelle dans une compression magnétique

En partant de la loi $r^2\omega_b = \text{Cte}$, exprimer le rapport $\ddot{r}/r\omega^2$ en fonction de ω_b et de ses deux premières dérivées.

En développant ω_b en série de Taylor, montrer que si ses deux premières dérivées sont assez faibles on a :

$$\left(\frac{\Delta\omega_b}{\omega_b}\right) \ll 1 \quad (2.223)$$

En conclure que la formule (2.107) est équivalente à la règle générale d'adiabaticité temporelle définie dans la section 2.5.

P2-3 Calcul de la force de freinage dans un miroir magnétique

La manière dont une force F_{\parallel} est engendrée par une convergence des lignes de force a été représentée sur la figure 2.8 où l'on a supposé pour simplifier que le champ était de révolution autour de l'axe de la trajectoire. La composante B_r du champ et la vitesse v_{φ} de rotation produisent la force de freinage F_{\parallel} . En reliant B_r à B_z au moyen des équations générales de l'électromagnétisme, établir la formule :

$$F_{\parallel} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \quad (2.224)$$

P2-4 Calcul de la force (moyenne) de gradient

On part de la formule (2.145). La valeur instantanée de la force étant :

$$\frac{\vec{F}}{q} = (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}) \times \vec{\rho} \cdot \nabla \vec{B} \quad (2.225)$$

écrire ses trois composantes. En calculer les moyennes en tenant compte des conditions $\langle \rho_x \rho_y \rangle = 0$, $\langle \rho_x^2 \rangle = \langle \rho_y^2 \rangle = \rho^2/2$ et $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Montrer que le résultat est bien :

$$\langle \vec{F} \rangle = -\mu \nabla B_z = -\frac{\mu}{2B} \nabla B^2 \quad (2.226)$$

P2-5 Dérive magnétique avec diamagnétisme

On part de l'expression

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{GB} = \frac{mv_{\parallel}^2}{4q} \frac{\vec{B} \times \nabla B^2}{B^4} \quad (2.227)$$

de la dérive de gradient (cf. section 2.8). En utilisant les formules de l'appendice A2-3, séparer ∇B^2 en un terme en $\vec{B} \cdot \nabla \vec{B}$ et un terme contenant les composantes de $\nabla \times B$. En utilisant la formule de Maxwell-Ampère, établir le résultat final :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{GB} = -\frac{1}{\Omega R_c} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2) \vec{e}_2 + \frac{\mu_0 v_{\perp}^2}{2\Omega} \frac{\vec{J}_{\perp}}{B} \quad (2.228)$$

où \vec{J}_{\perp} est la composante du courant perpendiculaire à \vec{B} .

P2-6 Puissance transmise par un champ alternatif à un plasma

On part de la définition du tenseur de conductivité d'un plasma :

$$J_1 = \bar{\sigma} \cdot \vec{E}_1 \quad (2.229)$$

Montrer que la puissance moyenne transmise par un champ électrique alternatif E_1 à une unité de volume du plasma est :

$$\left(\frac{dU}{dt} \right)_{\text{moy}} = \left[\frac{1}{2} \Re(\bar{\sigma}) \cdot \vec{E}_1 \right] \cdot \vec{E}_1 \quad (2.230)$$

P2-7 Résonance cyclotron électronique

Montrer directement que dans un champ électrique \vec{E}_+ tournant dans le sens positif à la vitesse angulaire $\omega = \Omega_e$, l'équation fondamentale de la dynamique admet la solution particulière :

$$\vec{v}_1 = \frac{q_e}{m_e} \vec{E}_+ t \quad (2.231)$$

P2-8 Deuxième invariant adiabatique

On considère une particule chargée qui oscille entre deux miroirs magnétiques selon le schéma de la figure 2.12.

- a) En partant de la formule (2.153), de la constance du moment magnétique et de l'énergie totale, montrer que la période d'oscillation entre les deux miroirs peut s'écrire :

$$t_M = \oint \frac{ds}{[2/m(\varepsilon - V)]^{1/2}} \quad (2.232)$$

où s est l'abscisse curviligne le long de la trajectoire du centre guide, ε l'énergie de la particule et $V(s) = \mu B$ un pseudo-potentiel.

- b) Montrer que le deuxième invariant peut s'écrire :

$$I_2 = 2 \int_{s_1}^{s_2} [2/m(\varepsilon - V)]^{1/2} ds / 2\pi \quad (2.233)$$

- c) Montrer que l'on a de façon approchée :

$$\pi \frac{dI_2}{dt} = \oint -\frac{\partial V}{\partial s} = 0 \quad (2.234)$$

Chapitre 3

Collisions élastiques

3.1 Introduction

La théorie cinétique des gaz, dans son modèle le plus simple, assimile un gaz à un ensemble dilué de petites boules de billard. Ces boules (les molécules) se meuvent en général en ligne droite ; cependant lorsque deux d'entre elles se rencontrent, il y a une collision, qui produit une déviation instantanée de chacune d'entre elles. Dans la théorie actuelle des gaz et des plasmas, on généralise ce modèle en considérant que toutes les particules du gaz interagissent entre elles par des forces dépendant de leurs positions (et éventuellement de leurs vitesses) ; on admet que le gaz est assez dilué pour que les interactions de chaque particule avec les autres soient en général faibles, de sorte que les trajectoires sont à peu près rectilignes comme dans le modèle des boules de billard. On dit qu'il y a collision lorsque deux ou plusieurs particules se rapprochent accidentellement à des distances assez faibles pour que les énergies d'interaction deviennent comparables aux énergies cinétiques ; les particules ainsi entrées en collision auront des trajectoires courbes, aussi longtemps qu'elles resteront à courte distance les unes des autres. Après la collision, elles reprendront des trajectoires quasi rectilignes. Compte tenu de la nature complexe des particules qu'on rencontre dans un gaz (atomes, molécules, éventuellement ionisés) on est amené à distinguer deux types de collisions :

- Les collisions élastiques (binaires, ternaires, ...) dans lesquelles les deux, trois, ... particules en jeu ne changent pas d'état interne. Dans les collisions élastiques, il y a seulement déviation des particules, avec échange de quantité de mouvement et d'énergie cinétique.

• Les collisions inélastiques qui sont au contraire celles dans lesquelles il y a changement d'état interne d'au moins une des particules (excitation, désexcitation) et même éventuellement création ou destruction de particules (ionisation, dissociation, recombinaison, ...). Dans les collisions inélastiques (qui s'apparentent aux réactions chimiques), il y a non seulement échange de quantité de mouvement et d'énergie cinétique, mais aussi transformation d'énergie cinétique en énergie chimique et vice versa.

Dans le présent chapitre nous étudions en détail les propriétés des collisions élastiques binaires qui jouent un rôle essentiel dans les phénomènes de transport dans les gaz ionisés (conductivité électrique, diffusion). L'étude des collisions inélastiques et du rôle qu'elles jouent dans la dynamique des gaz ionisés sera développée dans les chapitres 4 et 8.

Nous commençons ici par rappeler dans la section 3.2 la théorie classique de la collision entre deux masses ponctuelles interagissant par des forces centrales. Le résultat essentiel est la formule qui permet de calculer l'angle de déviation. On introduit ensuite dans la section 3.3 la notion de section efficace différentielle angulaire et l'on montre comment en mécanique classique cette grandeur se déduit du calcul de l'angle de déviation. Ces calculs sont repris du point de vue de la mécanique quantique dans la section 3.4.

Dans la section 3.5 on définit les sections efficaces intégrées (σ_0 totale ou σ_1 de transfert de quantité de mouvement). On examine de près le cas des interactions coulombiennes qui conduisent à une valeur infinie de σ_1 physiquement inacceptable. Cette difficulté se lève en effectuant dans les intégrales la coupure dite de Debye. Nous concluons enfin cette section en passant en revue quelques résultats expérimentaux relatifs aux gaz les plus courants.

3.2 Théorie classique des collisions binaires élastiques

3.2.1 Mouvement du centre de gravité et mouvement relatif

Considérons deux particules 1 et 2, en train d'effectuer une collision élastique et rappelons brièvement la théorie classique de ce phénomène. On assimile les deux particules à deux masses ponctuelles m_1 et m_2 , et on désigne par $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$ leurs positions en fonction du temps. À chaque instant, la particule 2 exerce sur la particule 1 une force \vec{X}_{12} , et la parti-

cule 1 exerce sur la particule 2 une force :

$$\vec{X}_{21} = -\vec{X}_{12} \quad (3.1)$$

Ces deux forces égales et opposées d'après la loi générale de l'action et de la réaction peuvent être colinéaires [Fig. 3.1(a)] ; on dit alors que ce sont des forces centrales. Elles peuvent aussi former un couple [Fig. 3.1(b)].

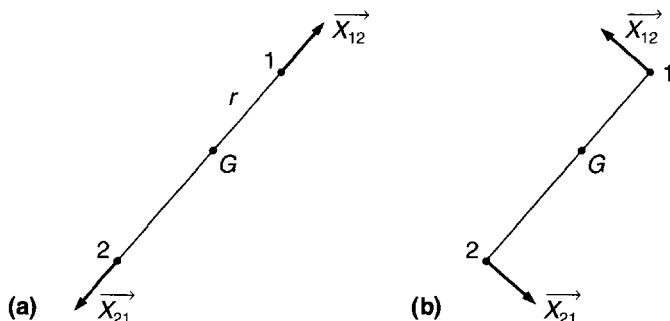


Figure 3.1 : Forces d'interactions entre deux particules.

(a) Forces centrales.

(b) Forces formant un couple.

Le premier cas est le plus courant, il correspond notamment au cas où la force d'interaction dérive d'un potentiel $\varphi(r)$ où r est la distance entre les deux particules ; on a alors :

$$\vec{X}_{12} = -\vec{X}_{21} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.2)$$

avec :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (3.3)$$

C'est en particulier le cas pour les forces d'interaction électrostatiques, ainsi que pour les forces d'interactions électron-neutre et neutre-neutre à condition que les neutres aient une symétrie sphérique et que les énergies ne soient pas trop élevées¹.

Le deuxième cas se produit pour les forces d'interactions magnétiques entre deux particules chargées ; mais on peut vérifier que ces forces sont d'ordre w^2/c^2 par rapport aux forces électrostatiques² ; on peut donc les négliger dans les plasmas non relativistes.

1. La condition précise est que la vitesse relative des deux particules soit nettement inférieure à la vitesse des électrons dans le cortège électronique du neutre.

2. Nous revenons maintenant à la notation w utilisée dans tout ce livre pour désigner la vitesse d'une particule individuelle.

Le système des deux particules en collision étant considéré comme isolé (pas d'interaction avec les autres particules), son centre de gravité G est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse \vec{w}_G . Dans ces conditions il est commode de repérer les positions des deux particules 1 et 2 par rapport à celle de G en posant :

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (3.4)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (3.5)$$

où \vec{r}_G est la position du centre de gravité et $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ le vecteur position relative de la particule 1 par rapport à la particule 2. Ces formules montrent que le mouvement de chaque particule est la superposition du mouvement du centre de gravité et d'une fraction du mouvement relatif représenté par le vecteur \vec{r} .

En combinant les équations de la dynamique des deux particules, on obtient l'équation du mouvement relatif :

$$\vec{X}_{12} = \mu \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (3.6)$$

avec :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.7)$$

μ est la masse réduite du système des deux particules. C'est une quantité qui est égale à $m/2$ quand les deux particules ont même masse m et qui est égale à la plus petite des deux masses m_1 si $m_2 \gg m_1$.

On voit sur la formule (3.6) que le mouvement relatif est identique au mouvement d'un mobile fictif de masse μ qui évoluerait autour d'un point fixe avec un vecteur position $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ sous l'action de la force d'interaction \vec{X}_{12} .

La décomposition du mouvement des particules en mouvement du centre de gravité et en mouvement relatif prend une forme simple en termes d'énergie cinétique : on vérifie en effet facilement que l'on a :

$$u_K = u_G + u_R \quad (3.8)$$

où $u_K = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2$ est l'énergie cinétique totale du système des deux particules,

$$u_G = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) w_G^2 \quad (3.9)$$

l'énergie du mouvement du centre de gravité (supposé transporter la masse totale),

$$u_R = \frac{1}{2} \mu g^2 \quad (3.10)$$

l'énergie du mouvement relatif, μ étant la masse réduite et

$$g = |\vec{w}_1 - \vec{w}_2| \quad (3.11)$$

le module de la vitesse relative $\vec{w}_1 - \vec{w}_2$.

3.2.2 Propriétés du mouvement relatif

a) Mouvement relatif plan

Lorsque les forces d'interactions sont des forces centrales le mouvement relatif est plan. Pour le voir il suffit de multiplier vectoriellement l'équation (3.6) par $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$; on obtient après intégration :

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times (\vec{w}_1 - \vec{w}_2) = \vec{K} \quad (3.12)$$

où \vec{K} est un vecteur constant et \vec{w}_1, \vec{w}_2 les vitesses des deux particules ; par conséquent, à tout instant les molécules 1 et 2 sont dans un plan perpendiculaire à un vecteur fixe \vec{K} . Leur centre de gravité G , qui se trouve sur la droite qui les relie, est également dans ce plan. Celui-ci est animé d'un mouvement rectiligne et le plan perpendiculaire au vecteur \vec{K} se déplace dans la direction du vecteur \vec{w}_G conformément au schéma de la figure 3.2.

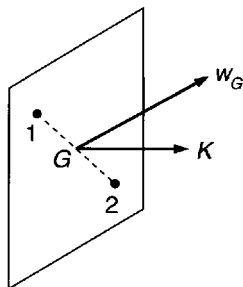


Figure 3.2 : Plan des trajectoires dans le système du centre de gravité.

b) Paramètre d'impact et angle de déviation

Ce schéma est très important car il va permettre de simplifier grandement la représentation de la collision ; les deux trajectoires des particules sont en effet deux courbes en général gauches qui, dans l'espace à trois dimensions, sont difficiles à représenter. Mais d'après ce que nous venons de dire, il sera intéressant de se représenter la collision en se déplaçant avec le centre de gravité, puisque, pour un tel observateur, elle se passe dans un plan fixe, le plan perpendiculaire au vecteur \vec{K} . Représentons donc sur la figure 3.3(a) les trajectoires dans ce plan. Les deux trajectoires y sont deux courbes homothétiques par rapport au point O . En effet, celui-ci étant le centre de gravité, on a :

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_G = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (3.13)$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_G = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (3.14)$$

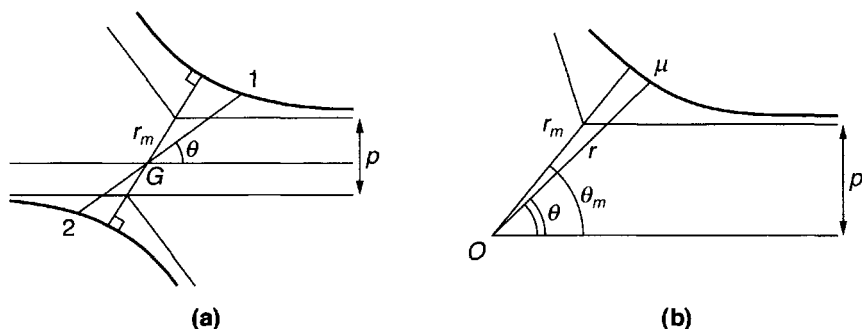


Figure 3.3 : Trajectoires dans le système du centre de gravité.

- (a) Trajectoires des deux particules.
- (b) Trajectoire du mobile fictif représentant le mouvement relatif.
 p paramètre d'impact, O centre de gravité.

Longtemps avant le choc, les trajectoires étaient quasi rectilignes, suivant deux droites parallèles distantes l'une de l'autre de p ; s'il n'y avait pas de force d'interaction, la distance de plus courte approche des deux particules aurait été précisément p . p est ce qu'on appelle le *paramètre d'impact* de la collision. L'axe Ox a été choisi sur notre figure parallèlement à la direction des deux vitesses initiales.

Désignons par r et θ les coordonnées polaires du vecteur \vec{r} . On peut facilement, à partir de (3.13) et (3.14), exprimer en fonction de r et θ

l'énergie cinétique totale du mouvement relatif, soit :

$$u_R = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (3.15)$$

u_R est une constante (car $u_R = u - u_G$ avec u et u_G tous deux constants). Dans le cas des forces centrales le moment cinétique total Γ est également une constante du mouvement. Son expression en fonction de r et θ s'obtient facilement et l'on trouve :

$$\Gamma = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (3.16)$$

On voit que les formules (3.15) et (3.16) sont exactement les mêmes que celles qu'on aurait obtenues pour étudier le mouvement d'un mobile fictif de masse μ se déplaçant autour d'un centre de force fixe O , comme représenté sur la figure 3.3(b).

Évaluons maintenant les valeurs de u_R et Γ longtemps avant le choc ; dans la formule (3.15) on peut négliger le deuxième terme et écrire u sous la forme :

$$u_R = \frac{1}{2}\mu g^2 \quad (3.17)$$

en appelant g la vitesse relative initiale des deux particules, aussi bien dans le système de coordonnées du centre de masse que dans celui du laboratoire ; g est le module initial du vecteur $\vec{w}_1 - \vec{w}_2$:

$$g = |\vec{w}_1 - \vec{w}_2|_{\text{initial}} \quad (3.18)$$

D'autre part, longtemps avant le choc, on a

$$\Gamma = \mu p g \quad (3.19)$$

Pour étudier le mouvement du mobile fictif, il suffit maintenant d'écrire les deux équations de conservation du moment cinétique par rapport au point G et de conservation de l'énergie, soit :

$$\mu p g = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{2}\mu g^2 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \varphi(r) \quad (3.21)$$

On a alors deux équations pour déterminer les deux variables r et θ . En éliminant θ , on obtient :

$$\frac{1}{2}\mu g^2 = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu g^2 \frac{p^2}{r^2} + \varphi(r) \quad (3.22)$$

qui donne les variations de r en fonction du temps.

Les équations (3.20) et (3.21) permettent de trouver par élimination du temps l'équation de la trajectoire. En général, cette trajectoire comporte un sommet ou point de plus courte approche des deux particules ; ce sommet existe toujours quand le potentiel d'interaction entre les particules est répulsif ; dans le cas d'un potentiel attractif, il existe aussi si ce potentiel est à variation relativement lente (exemple : potentiel de Coulomb).

Soit donc r_m la distance de plus courte approche, qui est marquée sur les figures 3.3(a) et 3.3(b), θ_m la valeur correspondante de l'azimut ; l'angle de déviation χ est lié à θ_m par la relation :

$$\chi = \pi - 2\theta_m \quad (3.23)$$

Cet angle est la principale quantité qui intervient dans les calculs statistiques que l'on fait sur les collisions. Calculons donc cette valeur fondamentale en fonction des paramètres p et g ; l'équation (3.22) peut s'écrire aussi :

$$\dot{r}^2 = g^2 \left(1 - \frac{p^2}{r^2} - \frac{\varphi(r)}{\frac{1}{2}\mu g^2} \right) \quad (3.24)$$

Nous choisissons pour \dot{r} la détermination négative qui décrit le début du choc :

$$\dot{r} = -g \left(1 - \frac{p^2}{r^2} - \frac{\varphi(r)}{\frac{1}{2}\mu g^2} \right)^{1/2} \quad (3.25)$$

ou d'après (3.20) :

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{p} \left(1 - \frac{p^2}{r^2} - \frac{\varphi(r)}{\frac{1}{2}\mu g^2} \right)^{1/2} \quad (3.26)$$

qui est l'équation polaire de la trajectoire (sous la forme différentielle).

On voit que la dérivée du rayon vecteur par rapport au temps ou à l'angle θ s'annule si la quantité entre parenthèses s'annule dans la formule (3.26). La distance de plus courte approche r_m est donc, si elle existe, la plus grande solution de l'équation en r :

$$1 - \frac{p^2}{r^2} - \frac{\varphi(r)}{\frac{1}{2}\mu g^2} = 0 \quad (3.27)$$

Supposons qu'elle existe ; on a :

$$\theta_m = \int_{r_m}^{\infty} \frac{p \, dr / r^2}{\left(1 - \frac{\varphi(r)}{\frac{1}{2}\mu g^2} - \frac{p^2}{r^2} \right)^{1/2}} \quad (3.28)$$

d'où finalement :

$$\chi(p, g) = \pi - 2p \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr/r^2}{\left(1 - \frac{\varphi(r)}{\frac{1}{2}\mu g^2} - \frac{p^2}{r^2}\right)^{1/2}} \quad (3.29)$$

3.2.3 Potentiels d'interaction dans un gaz ionisé

Nous avons laissé à dessin dans tous les paragraphes précédents le potentiel sous l'expression générale $\varphi(r)$. La question se pose de savoir quelles sont en fait les formes du potentiel que l'on peut envisager pour les collisions entre les différentes particules que l'on a à considérer.

a) Interaction entre un électron et un ion (ou entre deux ions ou deux électrons)

Le potentiel d'interaction à grande distance entre deux particules de charge Z_1e et Z_2e prend la forme bien connue de Coulomb :

$$\varphi = Z_1 Z_2 e^2 / 4\pi\epsilon_0 r \quad (3.30)$$

À courte distance un électron et un ion ou deux ions pourront exercer des forces de nature quantique qui seront généralement répulsives, et qui se produisent par exemple quand les deux nuages électroniques entourant les deux ions viennent à se recouvrir ; ces potentiels sont à variation beaucoup plus rapide en fonction de r que le potentiel de Coulomb.

b) Interaction entre un électron et un neutre

Quand un électron se trouve à une grande distance d'un neutre, le potentiel d'interaction est dû essentiellement au mécanisme dit du *dipôle induit* ; l'électron crée à la distance r un champ :

$$E = e/4\pi\epsilon_0 r^2 \quad (3.31)$$

Ce champ polarise le neutre en produisant un moment dipolaire :

$$\mathcal{M} = \alpha E = \alpha e/r^2 \quad (3.32)$$

où α est la polarisabilité du neutre. Ce dipôle, à son tour, crée autour de lui un potentiel donné par la formule :

$$V = \frac{\mathcal{M} \cos \theta}{r^2} \quad (3.33)$$

L'électron se trouve sur l'axe de ce dipôle, de sorte que l'on a finalement, pour le potentiel d'interaction, la relation :

$$\varphi(r) = eV = -\frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_o r^4} \quad (3.34)$$

On peut vérifier facilement que la force d'interaction est une force d'attraction, ce qui justifie le signe moins dans la formule ci-dessus.

À courte distance, un électron et un neutre interagissent au moyen de forces de nature quantique, sur lesquelles il est difficile de donner des informations générales, si ce n'est que leur variation est très rapide en fonction de la distance, et qu'elles seront généralement répulsives.

c) Interaction entre deux neutres

Dans ce cas il existe aussi une force d'interaction à grande distance, qui est attractive et connue sous le nom de force de van der Waals. Le potentiel d'interaction correspondant est de la forme :

$$\varphi(r) = -A/r^6 \quad (3.35)$$

On l'interprète comme une interaction entre le dipôle instantané du premier neutre et le dipôle induit par celui-ci dans le deuxième.

À courte distance deux neutres exercent l'un sur l'autre des forces de nature quantique, à variation très rapide et généralement répulsives.

3.2.4 Exemples de calcul de la déviation

a) Potentiel de Coulomb

Dans le cas de l'interaction coulombienne entre deux particules de charges respectives Z_1e et Z_2e , la quantité entre parenthèses dans (3.29) s'écrit :

$$1 - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\epsilon_o \mu g^2 r} - \frac{p^2}{r^2} = 0 \quad (3.36)$$

qu'on peut transformer en introduisant la quantité :

$$p_o = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_o \mu g^2} \quad (3.37)$$

qu'on appelle le *paramètre d'impact critique* ; p_o est la distance à laquelle il faudrait placer les deux particules considérées pour que l'énergie potentielle soit égale à deux fois l'énergie cinétique initiale.

Nous verrons plus loin une signification physique plus simple ; p_o est la valeur du paramètre d'impact donnant lieu à une déviation de 90° . Il est fonction de la vitesse relative g .

On calcule la déviation en effectuant les transformations suivantes :

$$a = p/r \quad (3.38)$$

$$\theta_m = \int_0^{a_m} \frac{da}{(1 - 2p_o a/p - a^2)^{1/2}} \quad (3.39)$$

ce qui peut encore s'écrire, puisque a_m est une racine du dénominateur :

$$\theta_m = \int_0^{a_m} \frac{da}{[(1 - a/a_m)(1 + aa_m)]^{1/2}} \quad (3.40)$$

Cette intégrale peut se mettre sous une forme classique en écrivant :

$$\left(1 - \frac{a}{a_m}\right)(1 + aa_m) = A[1 - U^2] \quad (3.41)$$

avec :

$$A = \frac{1}{4} \left(a_m + \frac{1}{a_m}\right)^2 \quad ; \quad U = \left[a - \frac{1}{2} \left(a_m - \frac{1}{a_m}\right)\right] / \sqrt{A} \quad (3.42)$$

d'où :

$$\theta_m = \int_{U_1}^{U_2} \frac{1}{\sqrt{1 - U^2}} dU = [\arcsin U]_{U_1}^{U_2} \quad (3.43)$$

$$U_1 = -1 \quad U_2 = \frac{1 - a_m^2}{1 + a_m^2} \quad (3.44)$$

Posons $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = a_m$. On a alors :

$$\theta_m = -\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1 - a_m^2}{1 + a_m^2}\right) = -\pi + \alpha \quad (3.45)$$

$$\tan \theta_m = \tan \alpha = \frac{2a_m}{1 - a_m^2} \quad (3.46)$$

mais a_m étant une racine du dénominateur dans (3.39) on a :

$$1 - a_m^2 = 2p_o a_m/p \quad (3.47)$$

On obtient donc finalement la déviation dans un choc coulombien par les formules :

$$\tan \theta_m = \frac{p}{p_o} \quad (3.48)$$

$$\chi = \pi - 2\theta_m \quad (3.49)$$

On voit comme nous l'avons annoncé plus haut que pour $p = p_o$ on a $\theta_m = \pi/4$, d'où $\chi = \pi/2$.

On pourrait enfin montrer en partant de (3.26) que la trajectoire du mobile fictif ainsi que les deux trajectoires réelles dans le système du centre de gravité sont des branches d'hyperboles, résultat connu depuis longtemps en astronomie.

b) Molécules du type boule de billard

Un cas limite très différent de l'interaction de Coulomb est celui où l'on considère deux particules analogues à des boules de billard qui, à grande distance, n'exercent aucune force l'une sur l'autre, mais qui sont deux sphères rigoureusement impénétrables. Ce potentiel est à variation infiniment rapide. La figure 3.4 représente la collision entre deux particules de ce genre. On y a marqué la sphère de rayon D égal à la somme des rayons des particules (sphère de protection). Quand il y a collision le centre d'une particule se trouve justement sur la sphère de protection d'une autre particule. On a sur cette figure la relation :

$$\chi = \pi - 2\theta \quad (3.50)$$

et d'autre part le paramètre d'impact est lié à D par la formule :

$$p = D \sin \theta \quad (3.51)$$

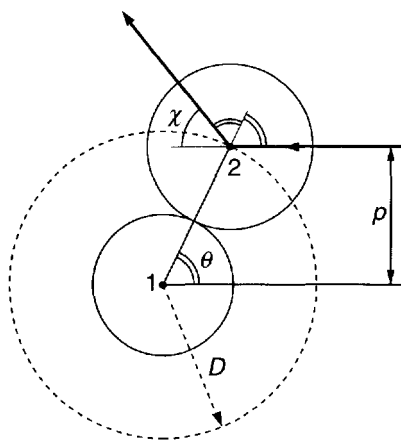


Figure 3.4 : Collision entre deux “boules de billard”.

D diamètre de la sphère de protection (somme des deux rayons).

c) Potentiels attractifs

Dans le cas des potentiels d'interaction attractifs, on peut se demander s'il existe toujours un sommet sur les deux trajectoires. On appellera ainsi le point où \dot{r} s'annule, c'est-à-dire où la vitesse est perpendiculaire au rayon

vecteur joignant les deux particules. Si un tel sommet existe, il est facile de voir qu'après le passage au sommet, les deux particules s'éloignent l'une de l'autre, en décrivant une branche de trajectoire symétrique de celle décrite avant le sommet.

Physiquement il est évident que ce sommet existe toujours pour des potentiels répulsifs. Mathématiquement on pourrait envisager, pour des potentiels attractifs à variation rapide, que les deux particules ne cessent jamais de s'approcher l'une de l'autre, et viennent passer par un même point. La discussion de la formule (3.25) montre qu'il en serait ainsi pour des potentiels attractifs en $1/r^4$ par exemple. Néanmoins, ces cas n'ont aucun intérêt physique, car les potentiels d'interaction, dans la mesure où ils ont un sens physique, finissent toujours par devenir répulsifs à courte distance.

3.3 Section efficace différentielle angulaire

Nous allons maintenant introduire, pour décrire les collisions, la notion statistique de section efficace de collision³. Cette grandeur sera utile pour décrire par les méthodes de la théorie cinétique le rôle des collisions dans le comportement global d'un gaz. Nous verrons d'autre part dans la section 3.4 qu'elle s'introduit naturellement dans la théorie quantique des collisions et qu'elle permet donc de faire le lien entre la théorie classique et la théorie quantique.

3.3.1 Définition de la section efficace différentielle

a) Diffusion par un centre de potentiel fixe

Considérons un *faisceau parallèle de particules monocinétiques* ; appelons Φ_1 le flux que transporte ce faisceau, c'est-à-dire le nombre de particules qui traverse une unité de surface de section droite en une seconde. Supposons que ce faisceau vienne rencontrer une particule cible qui agit comme un *centre de diffusion fixe* (autrement dit on étudie les phénomènes dans le système du centre de masse). Les particules incidentes seront diffusées dans diverses directions : le phénomène est représenté sur la figure 3.5.

Si le flux incident est homogène, c'est-à-dire si les particules incidentes ont des paramètres d'impact répartis de façon uniforme autour de la particule cible, la distribution angulaire des particules diffusées est une caractéristique de la loi de force entre les particules incidentes et la particule

3. C'est un sujet classique de physique générale et beaucoup de lecteurs pourront sauter tout ce paragraphe 3.3. Nous avons cru cependant utile de l'exposer dans l'optique de son application aux plasmas.

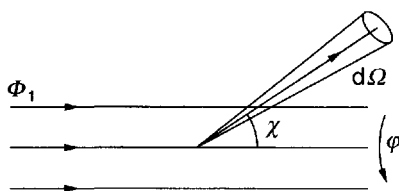


Figure 3.5 : Diffusion d'un faisceau parallèle par un centre fixe.

cible. On précise cette distribution au moyen de la notion de section efficace différentielle : soit dN_1/dt le nombre de particules diffusées par unité de temps à l'intérieur d'un petit angle solide $d\Omega$ autour d'une direction donnée. Cette direction sera repérée par rapport à celle du faisceau incident au moyen de deux angles polaires :

χ (colatitude, qui n'est autre que la déviation)

φ (azimut)

dN_1/dt est évidemment proportionnel à Φ_1 et à $d\Omega$; nous poserons par définition :

$$dN_1/dt = \Phi_1 \sigma(\chi, \varphi) d\Omega \quad (3.52)$$

La quantité σ a les dimensions d'une surface ; on l'appelle la *section efficace différentielle de collision élastique*.

Pour poursuivre les hypothèses faites dans la section 3.2, en décrivant les collisions au moyen d'un potentiel d'interaction central, on admet que cette section efficace ne dépend pas de l'azimut φ mais seulement de l'angle χ c'est-à-dire de l'angle de déviation mesuré dans le système du centre de masse.

On peut donc écrire la formule de définition de la section efficace différentielle sous la forme :

$$dN_1/dt = \Phi_1 \sigma(\chi) 2\pi \sin \chi d\chi \quad (3.53)$$

en considérant maintenant le nombre de particules dont la déviation est comprise entre χ et $\chi + d\chi$.

b) Diffusions cohérente et incohérente

L'expérience que nous venons de considérer est un peu idéale. Généralement, le faisceau de particules incident ira bombarder une cible qui, même si elle est de petites dimensions, contient un nombre N_2 élevé de particules. La question se pose de savoir comment le flux diffusé dans une direction donnée varie avec le nombre N_2 .

On peut distinguer deux cas limites extrêmes :

– la diffusion dite incohérente si l'on a :

$$dN_1/dt = \Phi_1 N_2 \sigma(\chi, \varphi) d\Omega \quad (3.54)$$

– la diffusion dite cohérente si l'on a :

$$dN_1/dt = \Phi_1 N_2^2 \sigma_c(\chi, \varphi) d\Omega \quad (3.55)$$

On verra plus loin que le phénomène de diffusion peut être considéré du point de vue de la mécanique quantique comme un phénomène de diffraction. Les notions de diffusions cohérente et incohérente se rattachent à des notions bien connues en optique physique.

Si les phases des ondes diffractées par deux obstacles dans une certaine direction sont concordantes, l'amplitude de l'onde diffusée est la somme des amplitudes élémentaires, et l'intensité de l'onde diffusée le carré de cette somme. Si l'on a N_2 molécules, il en résulte que lorsque les phases sont concordantes on a la relation (3.55)⁴.

Dans la physique des gaz ionisés, les conditions de cohérence ne sont jamais satisfaites, et c'est pourquoi nous considérerons que les phases des ondes élémentaires sont réparties de façon aléatoire. On est alors conduit à la relation de diffusion incohérente (3.54).

c) Section efficace et probabilité de diffusion : diffusion simple et diffusion multiple

Nous allons maintenant appliquer les définitions précédentes en supposant que la diffusion est incohérente et que la cible est une plaquette mince placée transversalement au faisceau, d'épaisseur dx , de surface dS [Fig 3.6(a)].

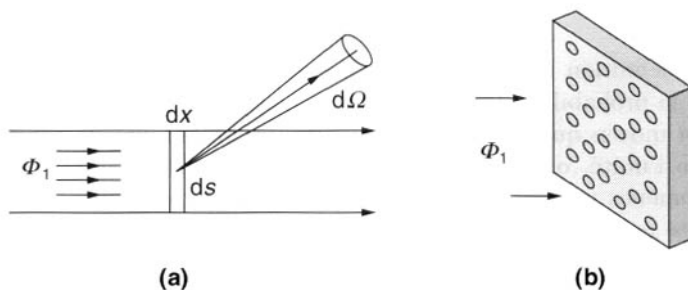


Figure 3.6 : Section efficace et probabilité de diffusion.

(a) Diffusion simple dans une lame mince.

(b) Représentation géométrique de la diffusion simple.

4. En général, $\sigma_c(\chi, \varphi)$ est une fonction qui contient à la fois la section efficace élémentaire de la formule (3.52) et les dimensions de l'édifice diffusant.

On peut écrire le nombre de particules diffusées pendant un intervalle de temps dt dans l'angle solide $d\Omega$ sous la forme :

$$dN_1 = \Phi_1 (n_2 dS dx) d\sigma dt \quad (3.56)$$

où n_2 est la densité des particules dans la cible, et où l'on a désigné par :

$$d\sigma = \sigma d\Omega \quad (3.57)$$

l'élément de section efficace.

Il est intéressant de comparer le nombre dN_1 au nombre dN_{10} de particules du faisceau incident tombant pendant le même intervalle de temps dt sur la cible. Formons donc le rapport :

$$\frac{dN_1}{dN_{10}} = \frac{\Phi_1 n_2 dS dx d\sigma dt}{\Phi_1 dS dt} = n_2 d\sigma dx \quad (3.58)$$

qui exprime une *probabilité de diffusion*. À la limite on pourrait l'appliquer en supposant que dN_{10} est égal à 1 et il donne alors directement la probabilité pour qu'une particule soit diffusée dans l'angle solide $d\Omega$.

Sous cette forme, la notion de section efficace s'applique à un grand nombre d'autres phénomènes, et non plus seulement à la diffusion élastique. On définira donc de manière générale la section efficace σ relative à la production d'une réaction quelconque (la diffusion élastique étant considérée comme la plus simple des réactions) au moyen de la relation de probabilité :

$$dN_1/dN_{10} = n_2 \sigma dx \quad (3.59)$$

Cette définition n'est en fait applicable à une cible réelle d'épaisseur dx que si la probabilité ainsi calculée est beaucoup plus petite que l'unité. Si par un moyen quelconque on calculait une probabilité de réaction de l'ordre de l'unité, ou même supérieure à l'unité, cela voudrait dire que les phénomènes ne sont pas simples, et que la particule incidente a une probabilité notable d'effectuer plusieurs réactions à l'intérieur de la cible.

Il est instructif de visualiser ce processus au moyen de la figure 3.6(b), où l'on a représenté naïvement au moyen d'un petit cercle de surface σ chacune des particules contenues dans la cible. La formule (3.59) peut alors s'écrire aussi :

$$\frac{dN_1}{dN_{10}} = \frac{(n_2 dx dS) \sigma}{dS} = \frac{N_2 \sigma}{dS} \quad (3.60)$$

Dans cette formule, le numérateur représente la somme des surfaces apparentes σ et le dénominateur la surface totale de la cible.

Si la somme des surfaces apparentes est nettement inférieure à la surface totale de la cible, il n'y a pas recoupement entre les divers cercles marqués sur la figure ; cela veut dire qu'une particule traversant la cible effectuera tout au plus une seule réaction. Revenant au cas de la diffusion, on dit alors que c'est un phénomène de *diffusion simple*. Il est à noter qu'en général, si l'épaisseur dx est donnée, la diffusion devient toujours multiple pour des diffusions aux très petits angles. En effet la section efficace différentielle tend en général vers l'infini, quand l'angle de diffusion tend vers zéro ; la somme $N_2\sigma$ dépassera alors facilement la surface apparente dS .

3.3.2 Section efficace et paramètre d'impact

a) Relation générale

Nous allons maintenant montrer que la section efficace différentielle se déduit de l'expression de χ en fonction du paramètre d'impact p , expression (3.29) obtenue dans la section 3.2.

Considérons pour cela toutes les particules du faisceau incident qui subissent une collision de paramètre d'impact compris entre p et $p + dp$. Le nombre de collisions de ce type par seconde est évidemment $\Phi_1 2\pi p dp$. Ces particules sont diffusées dans un angle solide compris entre les cônes d'angle χ et $\chi + d\chi$; si bien que, en introduisant ce nombre de collisions dans la formule (3.53) de définition de la section efficace, on obtient :

$$p dp = \sigma(\chi) \sin \chi d\chi \quad (3.61)$$

qui s'écrit aussi :

$$\sigma(\chi) = \frac{p}{\sin \chi} \frac{dp}{d\chi} \quad (3.62)$$

Dans cette formule $dp/d\chi$ est la dérivée partielle (à vitesse g constante) du paramètre d'impact par rapport à l'angle de déviation. Si donc, à partir du potentiel, on a calculé l'angle de déviation en fonction de p et de g [formule (3.29)], la formule (3.62) permet de calculer la section efficace différentielle en fonction de l'angle χ . À titre d'exemple nous allons traiter deux cas particuliers importants.

b) Diffusion avec une force d'interaction de Coulomb

Le potentiel d'interaction entre deux particules chargées de charges $Z_1 e$ et $Z_2 e$ est donné par la formule :

$$\varphi(r) = Z_1 Z_2 e^2 / 4\pi\epsilon_0 r \quad (3.63)$$

Dans ces conditions, les trajectoires de chaque particule dans le système du centre de masse, ainsi que celle du mobile fictif de masse égale à la masse réduite, sont des hyperboles.

Le calcul de l'angle de déviation se fait à partir des formules (3.37), (3.48) et (3.49). Récrivons tout d'abord (3.48) compte tenu de (3.49) sous la forme :

$$\operatorname{tg} \frac{\chi}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_o \mu g^2 p} \quad (3.64)$$

qui exprime l'angle de déviation en fonction de g et de p . En différenciant cette relation, on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d\chi}{\cos^2 \chi/2} = - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_o \mu g^2} \frac{dp}{p^2} \quad (3.65)$$

d'où (au signe près) :

$$p dp = \frac{4\pi\epsilon_o \mu g^2}{Z_1 Z_2 e^2} \frac{1}{\cos^2 \chi/2} p^3 \frac{d\chi}{2} \quad (3.66)$$

D'autre part, on a, d'après (3.64) :

$$p = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_o \mu g^2} \cot \frac{\chi}{2} \quad (3.67)$$

d'où d'après (3.62) :

$$2\sigma(\chi) \cos \frac{\chi}{2} \sin \frac{\chi}{2} d\chi = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_o \mu g^2} \right)^2 \frac{\cos \chi/2}{\sin^3 \chi/2} \frac{d\chi}{2} \quad (3.68)$$

et finalement :

$$\sigma(\chi) = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_o \mu g^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \chi/2} \quad (3.69)$$

C'est la formule de *section efficace de Rutherford*. La diffusion n'est pas isotrope : la section efficace a un maximum très prononcé pour $\chi = 0$. On obtiendrait des résultats du même genre, mais analytiquement différents, pour tout potentiel à variation assez lente, du même genre que le potentiel coulombien.

c) Molécules du genre boule de billard

Un cas limite très différent de l'interaction de Coulomb est celui des boules de billard [cf. section 3.2.4 b)] qui, à grande distance, n'exercent aucune force l'une sur l'autre, mais qui sont deux sphères rigoureusement impénétrables. Ce potentiel est à variation infiniment rapide.

Par différentiation de la formule (3.51), on obtient maintenant :

$$dp = D \cos \theta d\theta \quad (3.70)$$

d'où, au signe près :

$$p dp = D^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (3.71)$$

$$p dp = (D^2/4) \sin \chi d\chi \quad (3.72)$$

soit finalement d'après (3.62) :

$$\sigma(\chi) = D^2/4 \quad (3.73)$$

La section efficace différentielle ne dépend donc pas de l'angle χ , la diffusion est complètement isotrope dans le système du centre de masse.

3.4 Sections efficaces en mécanique quantique

3.4.1 Diffusion de l'onde de de Broglie par un centre fixe

Du point de vue de la mécanique quantique, la notion de trajectoire perd tout son sens ; en effet parler d'une trajectoire parfaitement définie veut dire qu'à chaque instant on suppose connue la position de la particule et sa vitesse. Or, le principe d'incertitude de Heisenberg dit précisément que cette détermination simultanée est impossible.

Reprenons par exemple l'expérience de diffusion représentée sur la figure 3.5. On y a supposé que les particules forment un faisceau parallèle, dont nous prenons la vitesse comme axe des z , et que cette vitesse w est égale à g . On doit donc considérer que toutes ces particules satisfont, de manière exacte, aux trois relations :

$$w_x = 0 \quad w_y = 0 \quad w_z = g \quad (3.74)$$

Dans ces conditions, puisque w_x et w_y sont parfaitement déterminés, on doit en conclure que les positions x et y dans un plan perpendiculaire au faisceau sont parfaitement indéterminées ; il en est de même pour la position le long de l'axe Oz . On doit considérer alors le faisceau de particules comme une *onde plane* ne dépendant pas de x et y . Le phénomène de diffusion se représente comme la diffraction de cette onde plane par l'obstacle que constitue la particule cible.

L'onde incidente est représentée par la formule :

$$\Psi_1 = \exp(ikz) \exp(-iEt/\hbar) \quad (3.75)$$

k étant le nombre de propagation, donné par la formule⁵ :

$$k = \mu g/\hbar = 2\pi/\lambda \quad (3.76)$$

5. Nous avons introduit les notations μ et g du mouvement relatif, parce que l'on montre facilement (cf. par exemple [284, p. 307]) que le théorème du mouvement relatif est valable en mécanique quantique, et que par conséquent le cas général de la collision entre deux particules 1 et 2 peut en introduisant le mobile fictif de masse μ se ramener au cas décrit ici de la diffusion par un centre fixe.

E est l'énergie cinétique de la particule et λ la longueur de de Broglie. Cette onde est une onde progressive. Le carré de son module, qui représente l'intensité du faisceau incident, a été pris arbitrairement égal à 1.

L'onde diffractée est une onde sphérique qui se propage dans toutes les directions à partir de la particule cible. Elle est représentée par la formule :

$$\Psi_2 = \frac{f(\chi)}{r} \exp(ikr) \exp(-iEt/\hbar) \quad (3.77)$$

où l'on voit encore apparaître deux exponentielles qui représentent une propagation radiale de l'onde, mais où de plus on a supposé, comme dans toute onde sphérique, que l'amplitude de l'onde est proportionnelle à $1/r$, ce qui est nécessaire pour obtenir un flux fini à une distance infinie ; enfin la fonction $f(\chi)$ est un facteur qui représente la répartition angulaire de cette amplitude.

La fonction d'onde totale doit se réduire à $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ quand r tend vers l'infini et être partout solution d'une équation de Schrödinger. Cette équation doit être résolue dans la région où le potentiel $\varphi(r)$ est important, c'est-à-dire dans la région occupée par l'obstacle diffractant. Le résultat de ce calcul est de déterminer Ψ_2 en fonction de Ψ_1 . $|\Psi_2|^2$ représente la probabilité de trouver une particule diffusée. Le flux de particules traversant une surface dS éloignée de l'obstacle est donc le produit de cette densité par la vitesse des particules⁶ et par dS , c'est-à-dire :

$$|\Psi_2|^2 g dS = |\Psi_2|^2 g r^2 d\Omega \quad (3.78)$$

de sorte que la section efficace différentielle se déduit de Ψ_2 au moyen de la formule :

$$\sigma(g, \chi) = g r^2 |\Psi_2|^2 \quad (3.79)$$

ou :

$$\sigma(g, \chi) = g |f(\chi)|^2 \quad (3.80)$$

Le calcul effectif de la fonction f et, par suite, de la section efficace différentielle, qui comporte comme nous l'avons dit la résolution d'une équation de Schrödinger, peut être compliqué.

3.4.2 Ondes partielles ; déphasages

On est amené pour résoudre l'équation de Schrödinger à utiliser la méthode dite des déphasages [284]. Cette méthode consiste essentiellement à décomposer l'onde plane incidente Ψ_1 en une série d'ondes partielles sphériques, et à étudier ce qu'il advient de chacune de ces ondes partielles : le centre de potentiel diffracteur constitue pour chacune d'entre elles un foyer ; en général en passant par ce foyer, l'onde partielle subit un déphasage supplémentaire δ_ℓ ; on est ainsi amené à écrire la section efficace différentielle sous la forme :

$$\sigma(g, \chi) = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \exp(i\delta_\ell) \sin \delta_\ell P_\ell(\cos \chi) \right|^2 \quad (3.81)$$

Dans cette formule, les coefficients δ_ℓ sont des constantes ou plutôt des fonctions de g , qui caractérisent les anisotropies de la section efficace différentielle ; si tous les déphasages δ_ℓ étaient nuls, l'onde diffractée serait nulle, les ondes partielles reconstituant simplement après passage par le foyer l'onde incidente Ψ_1 .

6. En toute rigueur ce flux se calcule par la formule quantique $\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi_2 \text{ grad } \Psi_2^* - \Psi_2^* \text{ grad } \Psi_2)$ (cf. [284, p. 314]). On vérifie cependant facilement que si r est bien supérieur à la longueur de de Broglie on retrouve la formule (3.79).

En fait, on montre (cf. [284], p. 345) que si le potentiel d'interaction est négligeable au-delà d'une certaine distance a , la somme figurant dans (3.81) est pratiquement limitée aux valeurs de ℓ s'étendant de $\ell = 0$ à une valeur maximum de ℓ voisine de ka . Il est intéressant de rattacher ce résultat à une description classique, en remarquant qu'une particule de vitesse g et de masse μ , passant à la distance r d'un centre de potentiel, possède un moment cinétique μgr auquel on peut faire correspondre un nombre quantique azimutal $\ell = \mu gr / \hbar = kr$. Les particules passant à des distances $r > a$ correspondent à des valeurs de $\ell > ka$; elles ne sont pas déviées.

Il résulte de cette discussion que pour des particules de très basse énergie, on pourra souvent admettre que seul $\delta_0 \neq 0$; on a alors :

$$\sigma = \frac{1}{4k^2} |\exp(2i\delta_0) - 1|^2 \quad (3.82)$$

La section efficace différentielle ne dépend pas alors de l'angle χ ; la distribution angulaire est isotrope ; ceci correspond du point de vue de l'optique à la diffraction d'une onde par un obstacle de dimensions très petites devant la longueur d'onde ; il y a alors une tendance à une diffraction quasi isotrope. Cette approximation n'est jamais valable pour les collisions entre particules chargées, à cause du rayon d'action infini de la force de Coulomb.

3.4.3 Remarques

a) Définition quantique de la section efficace différentielle

La définition quantique des sections efficaces est plus proche de la réalité expérimentale que sa définition à partir des angles de déviation. En effet, dans une expérience de diffusion telle que celle représentée sur la figure 3.5, il est impossible de mesurer la valeur du paramètre d'impact p dans une collision individuelle ; c'est pourquoi même du point de vue expérimental on doit introduire la notion de section efficace qui représente une moyenne effectuée sur ce paramètre d'impact. Pour calculer cette moyenne, on a admis implicitement que les particules incidentes étaient réparties au hasard dans la section droite du faisceau incident ; cette hypothèse est en revanche explicitée dans le calcul quantique qui nous conduit à considérer les particules incidentes comme formant une onde plane.

b) Cas coulombien

L'étude quantique de la diffusion dans le cas du potentiel de Coulomb n'est pas très simple, parce que la méthode des déphasages n'est pas bien applicable (cf. [284], p. 361) ; en revanche, elle montre que la formule de Rutherford est valable en mécanique quantique à condition que la vitesse des particules soit faible devant la vitesse de la lumière.

Toutefois, le cas de la diffusion entre deux particules identiques (deux électrons, deux protons, etc.) se présente différemment comme nous allons le voir.

3.4.4 Cas des particules identiques

D'un point de vue logique, il est impossible de distinguer après la collision entre deux particules identiques la particule "incidente" et diffusée dans la direction χ de la particule "cible" qui recule dans la direction $\chi - \pi$. Comme on est incapable de distinguer les deux espèces de particules, on voit que la section efficace devra être la somme de deux termes, un terme $f(\chi)$ représentant la première catégorie des particules et un terme $f(\pi - \chi)$ représentant la deuxième.

Du point de vue quantique, il s'ajoute un deuxième phénomène. Dans le cas de particules identiques, il apparaît des forces dites forces d'échange (liées au principe d'exclusion de Pauli), qui dépendent du spin des particules en jeu ; en tenant compte de ces considérations, on montre que la formule de Rutherford pour deux protons ou deux électrons non relativistes doit s'écrire sous la forme :

$$\sigma(\chi) = \left(\frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 \mu g^2} \right)^2 \left[\frac{1}{\sin^4 \chi/2} + \frac{1}{\cos^4 \chi/2} - \frac{1}{\sin^2 \chi/2 \cos^2 \chi/2} \cos \left(\frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar g} \ln \tan^2 \chi/2 \right) \right] \quad (3.83)$$

Il est facile de voir, en revenant aux variables du système de laboratoire, que cette expression est bien de la forme :

$$\sigma(\chi) = f(\chi) + f(\pi - \chi) + f_{\text{échange}} \quad (3.84)$$

En fait, on verra plus loin que l'on utilise généralement, même dans le cas de deux particules identiques, la formule de Rutherford habituelle (3.69). Cela tient au fait que dans un plasma, les collisions qui jouent un rôle prépondérant du point de vue statistique sont les collisions à faible déviation, pour lesquelles l'angle χ est très petit. Pour de telles collisions, la formule (3.84) montre que les termes correctifs introduits par l'indiscernabilité des particules et les forces d'échange sont en général négligeables devant le terme fondamental en $1/\sin^4 \chi/2$.

3.5 Sections efficaces intégrées

3.5.1 Définitions

Dans les calculs statistiques où l'on désire évaluer l'importance des collisions élastiques sur un phénomène macroscopique, on est amené à calculer des intégrales portant sur les sections efficaces différentielles, et on définit couramment les deux grandeurs suivantes.

a) Section efficace totale de collision élastique

Elle est définie au moyen de la formule :

$$\sigma_o = \int \sigma(\chi) d\Omega \quad (3.85)$$

En principe σ_o permet en utilisant la formule (3.59) de calculer la probabilité qu'une particule soit diffusée dans une direction quelconque. Mais en fait dans un grand nombre de cas σ_o n'a pas de sens car l'intégrale ci-dessus est infinie. À titre d'exemple on peut tout d'abord étudier les deux cas limites pour lesquels nous avons déjà calculé la section efficace différentielle :

– *Potentiel de Coulomb*. Il est facile de voir que, dans ce cas, σ_0 est infini, à cause des chocs avec faible déviation. En effet on a :

$$\sigma_o = \int_0^\pi \frac{A}{\sin^4 \chi/2} 2\pi \sin \chi d\chi \quad (3.86)$$

qui est évidemment infini à cause de la borne inférieure.

– *Sphères impénétrables*. On a alors :

$$\sigma_o = \int \frac{D^2}{4} d\Omega = \pi D^2 \quad (3.87)$$

qui est à vrai dire un résultat évident.

Il est facile de voir que dans la description classique des collisions, σ_0 est infinie dans tous les cas sauf celui des boules de billard ; on a en effet d'après (3.61) :

$$\sigma_o = \int_0^\pi \sigma(\chi) 2\pi \sin \chi d\chi = \int_0^\infty 2\pi p dp \quad (3.88)$$

Cette intégrale représente donc tout le plan perpendiculaire au faisceau incident ; elle diverge à cause des grandes valeurs de p qui correspondent à des déviations χ , qui quoique très petites sont comptées dans la diffusion. Le cas des boules de billard est singulier en ce sens que lorsque $p > D$, χ est rigoureusement nul et l'on peut affirmer alors qu'il n'y a pas diffusion ; de sorte que l'on peut alors intégrer seulement de 0 à D et obtenir la formule (3.87).

Du point de vue quantique la situation est un peu différente : quand on intègre (3.81) les doubles produits s'éliminent par suite de l'orthogonalité des polynômes de Legendre entre eux et il vient (cf. appendice A3-2) :

$$\sigma_o = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell \quad (3.89)$$

Cette série peut être convergente ou divergente.

Enfin, il faut remarquer que σ_0 n'a pas une signification expérimentale bien claire ; l'étude des diffusions aux petits angles étant difficile, on conçoit que le résultat direct des expériences est en réalité l'intégrale :

$$\sigma'_o(\chi_m) = \int_{\chi=\chi_m}^{\chi=\pi} \sigma(\chi) d\Omega \quad (3.90)$$

χ_m étant une déviation minimum définie par les conditions de l'expérience.

b) Section efficace de transfert de quantité de mouvement

Si on considère une particule incidente de vitesse g , de masse μ , qui entre en collision avec un centre de potentiel de masse infinie et subit une déviation χ , la variation de sa quantité de mouvement projetée sur sa direction initiale est :

$$-\mu g(1 - \cos \chi) \quad (3.91)$$

Si maintenant on considère un faisceau transportant le flux Φ_1 , la quantité de mouvement transmise par les collisions au centre diffuseur par unité de temps est :

$$dq/dt = \Phi_1 \int \mu g(1 - \cos \chi) \sigma(\chi) d\Omega \quad (3.92)$$

ce qu'on peut écrire :

$$dq/dt = Q_1 \sigma_1 \quad (3.93)$$

où $Q_1 = \Phi_1 \mu g$ est le flux de quantité de mouvement transporté par le faisceau incident et :

$$\sigma_1 = \int \sigma(\chi)(1 - \cos \chi) d\Omega \quad (3.94)$$

σ_1 est appelée la *section efficace pour le transfert de quantité de mouvement*. À cause du facteur $(1 - \cos \chi)$ il peut se produire que σ_1 soit finie tandis que σ_0 est infinie. En tous cas si σ_1 est infinie elle sera d'ordre inférieur à σ_0 . Toutefois σ_1 ne doit pas être infinie car elle a un sens physique bien clair défini par la formule (3.93). Quand l'intégrale (3.94) est infinie, cela veut dire que la description physique des phénomènes par des collisions binaires n'est pas satisfaisante. C'est ce qui se passe pour le cas du potentiel de Coulomb que nous allons discuter au paragraphe suivant.

Du point de vue quantique on peut comme pour σ_0 relier σ_1 aux déphasages et l'on obtient (cf. appendice A3-2) :

$$\sigma_1 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1) \sin^2(\delta_\ell - \delta_{\ell+1}) \quad (3.95)$$

3.5.2 Divergence coulombienne de σ_1 . Coupure de Debye

Pour calculer σ_1 dans le cas coulombien, on récrit tout d'abord la formule de Rutherford sous la forme :

$$\sigma(\chi) = \left(\frac{p_0}{2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \chi/2} \quad (3.96)$$

où p_0 est le paramètre d'impact critique défini par (3.37). D'après la formule générale de définition de σ_1 on a alors :

$$\sigma_1 = \left(\frac{p_o}{2}\right)^2 \int_0^\pi (1 - \cos \chi) \frac{1}{\sin^4 \chi/2} 2\pi \sin \chi d\chi \quad (3.97)$$

soit :

$$\sigma_1 = 4\pi p_o^2 [\ln(\sin \chi/2)]_0^\pi \quad (3.98)$$

On voit comme nous l'avons annoncé que σ_1 est infinie, à cause de la borne inférieure $\chi = 0$. La divergence est due aux collisions à faible déviation, c'est-à-dire aux collisions "lointaines" de grand paramètre d'impact. D'après (3.48) et (3.49) la relation de correspondance entre l'angle de déviation χ et le paramètre d'impact p s'écrit :

$$\sin \frac{\chi}{2} = \cos \theta_m = (1 + \tan^2 \theta_m)^{-1/2} = \left(1 + \frac{p^2}{p_o^2}\right)^{-1/2} \quad (3.99)$$

Pour les collisions lointaines on a :

$$\sin \frac{\chi}{2} \simeq \frac{p_o}{p} \ll 1 \quad (3.100)$$

Dans ces conditions, il est d'usage pour supprimer la divergence de σ_1 d'effectuer sur le paramètre d'impact la coupure supérieure dite de Debye définie par :

$$p = p_{\max} = \lambda_D \quad (3.101)$$

à laquelle correspond pour l'angle de déviation la coupure inférieure :

$$\chi = \chi_{\min} \quad (3.102)$$

avec

$$\sin \left(\frac{\chi_{\min}}{2}\right) = \frac{p_o}{\lambda_D} \quad (3.103)$$

On peut justifier cette procédure en analysant la validité du modèle des collisions binaires. On se place pour ce faire dans le cas des plasmas cinétiques classiques, car c'est la seule famille où la méthode de la coupure de Debye est valable. On a vu au chapitre 1 qu'il y a alors entre les longueurs fondamentales les inégalités fortes :

$$r_o \ll d_e \ll \lambda_D \quad (3.104)$$

On peut donc classer les collisions en quatre catégories selon l'ordre de grandeur du paramètre d'impact :

- (1) $d_e < p < \lambda_D$ collisions proches, binaires, coulombiennes sans écran,
- (2) $r_o < p < d_e$ collisions lointaines, binaires, coulombiennes sans écran,
- (3) $d_e < p < \lambda_D$ collisions lointaines, multiples, coulombiennes sans écran,
- (4) $\lambda_D < p$ collisions lointaines, multiples, coulombiennes écrantées.

Le modèle des collisions binaires s'applique sans problème aux catégories (1) et (2). Dans la catégorie (3), il est *a priori* discutable, car p étant supérieur à d_e plusieurs collisions de ce type se produisent simultanément. Cependant, comme il s'agit de petites déviations ($p \gg r_o$), on a montré [306] que l'effet statistique de cet ensemble aléatoire de petites déviations simultanées était le même que celui d'une suite aléatoire de collisions binaires. Dans la catégorie (4) enfin on peut penser que le potentiel de Coulomb est à remplacer par le potentiel de Debye et que de ce fait l'effet de ces collisions est tout à fait négligeable. En conclusion il paraît raisonnable d'étendre l'intégrale (3.97) aux catégories (1), (2) et (3) et d'y effectuer une coupure à $p_{\max} = \lambda_D$ (c'est-à-dire une coupure inférieure, à $\chi = \chi_{\min}$). Avant de discuter les résultats ainsi obtenus nous ferons encore deux remarques sur la méthode :

- Il pourrait paraître préférable de ne pas faire une coupure brutale à $p = \lambda_D$, mais de remplacer dès le départ, dans le calcul de $\sigma(\chi)$, le potentiel de Coulomb par le potentiel de Debye en $(1/r) \exp(-r/\lambda_D)$. Cela donnerait une coupure progressive entre les catégories de collisions (3) et (4) ci-dessus. Ce calcul a été fait [8], mais il ne présente pas beaucoup d'intérêt compte tenu du caractère en tout état de cause approché de la méthode suivie.

- Il pourrait paraître préférable d'utiliser la longueur d'écran λ_s exacte, plutôt que la longueur de Debye électronique λ_D . La différence entre ces deux grandeurs est que λ_s tient compte des corrélations ion-ion alors que λ_D n'en tient pas compte. On peut cependant montrer (cf. [297], p. 209) par un raisonnement semi-quantitatif que les collisions $e-i$ sont un phénomène trop rapide pour que les corrélations $i-i$ aient le temps d'y jouer un rôle. En tout état de cause la distinction entre λ_s et λ_D ne s'introduit que dans un terme logarithmique. Là aussi le raffinement de précision serait illusoire.

On peut maintenant terminer le calcul de σ_1 et discuter le résultat. La formule (3.98) donne compte tenu de (3.100) et (3.101) :

$$\sigma_1 = 4\pi p_o^2 \ln(\lambda_D/p_o) \quad (3.105)$$

avec rappelons-le :

$$p_o = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi \epsilon_o \mu g^2} \quad (3.106)$$

Il est intéressant de discuter cette formule en y distinguant l'effet des collisions proches de celui des collisions lointaines. Les collisions proches auraient donné une contribution

$$\sigma_{1p} = 4\pi p_o^2 \left[\ln \sin \left(\frac{\chi}{2} \right) \right]_{\pi/2}^{\pi} = 4\pi p_o^2 \ln \sqrt{2} = 4\pi p_o^2 \times 0.35 \quad (3.107)$$

La formule (3.105) peut donc se récrire sous la forme :

$$\sigma_1 = \sigma_{1p} \times \left[\ln(\lambda_D/p_o) / \ln \sqrt{2} \right] = \sigma_{1p} \times [2.9 \ln(\lambda_D/p_o)] \quad (3.108)$$

Le facteur $2.9 \ln(\lambda_D/p_o)$ qui est en général de 10 à 30 dans les plasmas cinétiques classiques les plus usuels mesure donc l'importance relative des collisions lointaines par rapport aux collisions proches.

La formule (3.105) montre d'autre part que σ_1 dépend à travers p_o de la vitesse relative g de deux manières différentes : le facteur p_o^2 introduit une dépendance en g^{-4} qui est l'effet dominant ; il s'y superpose une variation lente du terme logarithmique qui contient aussi p_o . Il est commode, pour simplifier les calculs de collision, de remplacer le terme logarithmique par une valeur moyenne en posant :

$$\sigma_1 = 4\pi p_o^2 \ln \Lambda \quad (3.109)$$

avec :

$$\Lambda = \frac{\lambda_D}{\bar{p}_o} \quad (3.110)$$

$$\bar{p}_o = \frac{Z_i e^2}{8\pi \epsilon_o \kappa T} = \frac{Z_i}{2} r_o \quad (3.111)$$

où \bar{p}_o est donc une valeur moyenne de p_o prise pour les collisions $e-i$ avec $\mu g^2 = 2\kappa T$.

La quantité $\ln \Lambda$ est ce que l'on appelle le logarithme coulombien. Il est lié au paramètre de plasma par les formules suivantes :

$$\Lambda = \frac{6}{Z_i} N_D = \frac{6(1 + Z_i)^{3/2}}{Z_i} N_s \quad (3.112)$$

$$N_D = \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_D^3 \quad ; \quad N_s = \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_s^3 \quad (3.113)$$

On peut enfin définir une valeur moyenne de σ_1 pour un plasma donné, en remplaçant dans (3.109) p_o par sa valeur moyenne \bar{p}_o , soit :

$$\bar{\sigma}_1 = \pi r_o^2 Z_i^2 \ln \Lambda \quad (3.114)$$

Compte tenu de l'importance pratique de ces diverses formules, il est utile d'en donner les expressions numériques suivantes, obtenues en remplaçant les constantes physiques par leurs valeurs :

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{8.26 \cdot 10^3}{Z} \left[\frac{T^3}{n_e} \right]^{1/2} \quad (\text{CGS}) \\ &= \frac{1.03 \times 10^{10}}{Z} \left[\frac{(\kappa T)^3}{n_e} \right]^{1/2} \quad (\text{eVcT})\end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned}\ln \Lambda &= 9.02 - 2.30 \log Z + 3.45 \log T - 1.15 \log n_e \quad (\text{CGS}) \\ &= 23.06 - 2.30 \log Z + 3.45 \log(\kappa T) - 1.15 \log n_e \quad (\text{eVcT})\end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1 &= 8.77 \cdot 10^{-6} \left(\frac{Z}{T} \right)^2 \ln \Lambda \quad (\text{eVcT}) \\ &= 6.51 \cdot 10^{-14} \frac{Z}{\kappa T} \ln \Lambda \quad (\text{eVcT})\end{aligned} \quad (3.117)$$

Il faut enfin noter, suite à une remarque de Marshak [9], qu'à haute température la longueur d'onde de de Broglie de l'électron moyen :

$$\lambda_{Be} = \frac{\hbar}{(2\kappa m_e)^{1/2} T^{1/2}} = \frac{2.10 \cdot 10^{-6}}{T^{1/2}} \quad (\text{CGS}) \quad (3.118)$$

peut devenir plus grande que :

$$\bar{p}_o = \frac{Z_i}{2} r_o = 8.35 \times 10^{-4} \frac{Z_i}{T} \quad (\text{CGS}) \quad (3.119)$$

puisque λ_{Be} varie comme $T^{-1/2}$ et \bar{p}_o comme T^{-1} . Marshak a introduit alors une température critique :

$$T_M = 4.2 \times 10^5 \text{ (K)} \quad (3.120)$$

et pour les températures supérieures à T_M , il a montré qu'il faut effectuer sur Λ une correction quantique, en remplaçant la valeur classique Λ de la formule (3.115) par l'expression :

$$\Lambda' = \left(\frac{T_M}{T} \right)^{1/2} \Lambda = 5.35 \times 10^6 \left(\frac{T^2}{n_e} \right)^{1/2} \quad (\text{CGS}) \quad (3.121)$$

d'où

$$\ln \Lambda' = 15.49 + 2.30 \log T_K - 1.15 \log n_e \quad (\text{CGS}) \quad (3.122)$$

$$\ln \Lambda' = 29.53 + 2.30 \log T_{eV} - 1.15 \log n_e \quad (\text{eVcT}) \quad (3.123)$$

Pour $T = 10^9$ K, la valeur de $\ln \Lambda$ donnée par cette nouvelle formule est inférieure d'environ 4 unités à celle donnée par la formule classique (3.116). Le tableau 3.1 indique les valeurs numériques fournies pour $\ln \Lambda$ par la formule (3.115) pour $T < T_M$ et pour $\ln \Lambda'$ par la formule (3.122) pour $T > T_M$. La région laissée en blanc dans ce tableau est celle des plasmas à fortes corrélations (cf. Fig. 1.11) dans laquelle les calculs du présent paragraphe n'ont aucun sens.

$n_e(\text{cm}^3)$	1	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}
T_K	$\ln \Lambda$									
10^2	15.9	12.5	9.0	5.6	2.1	—	—	—	—	—
10^3	19.4	15.9	12.5	9.0	5.6	2.1	—	—	—	—
10^4	22.8	19.4	15.9	12.5	9.0	5.6	2.1	—	—	—
10^5	26.3	22.8	19.4	15.9	12.5	9.0	5.6	2.1	—	—
10^6	29.3	25.8	22.4	18.9	15.5	12.0	8.6	5.1	1.7	—
10^7	31.6	28.1	24.7	21.2	17.8	14.3	10.9	7.4	4.0	—
10^8	33.9	30.4	27.0	23.5	20.1	16.6	13.2	9.7	6.3	2.8

Tableau 3.1 : Valeurs de $\ln \Lambda$ (pour $T < 4.10^5$) et de $\ln \Lambda'$ (pour $T > 4.10^5$)(dans le cas $Z = 1$).

3.5.3 Résultats expérimentaux

a) Méthodes

Dans les gaz partiellement ionisés les phénomènes de collision (électron-neutre, ion-neutre, neutre-neutre) sont assez complexes. Même si on se limite aux collisions élastiques, il n'y a pas en général de formule théorique simple (comme celle de Rutherford pour le cas coulombien) permettant de calculer les diverses sections efficaces dans le domaine des basses énergies (0 à 10 eV) qui est celui des énergies des particules effectivement les plus nombreuses dans ces gaz. Dans ces conditions, il a été nécessaire d'effectuer un très grand nombre de travaux expérimentaux et théoriques pour créer progressivement un ensemble de données sur les sections efficaces de collisions. Les méthodes expérimentales les plus utilisées ont été les suivantes :

- *Faisceau-gaz*. Dans cette technique, qui est la plus ancienne (Ramsauer entre 1925 et 1930), on bombarde une cible gazeuse avec un faisceau de particules monocinétiques et l'on observe la diffusion des particules du faisceau. La méthode peut fournir la section efficace différentielle $\sigma(\chi)$ et on en déduit les sections efficaces totales σ_0 et σ_1 . Nous avons vu que pour σ_0 il peut y avoir des difficultés de principe, mais en fait la théorie quantique permet de montrer (cf. section 12.3) que σ_0 et σ_1 tendent vers la même limite lorsque l'énergie tend vers zéro, de sorte qu'on peut souvent les confondre dans le domaine des très basses énergies.

- *Faisceaux croisés.* Cette technique est analogue à la précédente à ceci près que la cible gazeuse est remplacée par un deuxième faisceau monocinétique, ce qui rend les mesures en fonction de l'énergie plus précises. Ceci étant, la production de faisceaux monocinétiques de très basse énergie (< 1 eV) et la détection des particules également de très basse énergie sont expérimentalement difficiles, de sorte que ces deux premières méthodes donnent des résultats très imprécis dans cette gamme d'énergie qui est précisément celle des énergies d'agitation thermique dans les gaz.
- *Faisceaux mélangés.* Dans cette méthode on injecte dans la chambre de collision deux faisceaux parallèles monocinétiques de particules 1 et 2, de vitesses \vec{w}_1 et \vec{w}_2 . Les énergies correspondantes u_1 et u_2 sont dans une gamme moyenne (~ 1 keV) de sorte que la production des faisceaux et la détection des particules diffusées soient faciles, mais on s'arrange pour que les vitesses \vec{w}_1 et \vec{w}_2 soient légèrement différentes. Dans le système du centre de masse on profite alors d'un effet de contraction des énergies, l'énergie relative étant proportionnelle au carré de $(\vec{w}_1 - \vec{w}_2)$ (cf. problème P3-3). On a par exemple, pour des particules de même masse, $u_1 = 1$ keV et $u_2 = 990$ eV, $u_R \approx 1.25 \times 10^{-2}$ eV.
- *Mesure de coefficients de transport et déconvolution.* Cette méthode enfin est basée sur la théorie cinétique des gaz. On verra (cf. chapitre 12) que cette théorie permet d'exprimer les coefficients de transport dans les gaz partiellement ionisés (mobilité électronique, coefficient de diffusion des électrons) à partir des sections efficaces de collisions et des conditions définissant l'état du gaz (fonctions de distribution, températures). Si on dispose d'un ensemble de mesures suffisamment étoffé, on peut essayer à partir de ces résultats de remonter aux valeurs des sections efficaces. Cette méthode est délicate, mais elle a fourni entre les mains d'équipes particulièrement compétentes des résultats très bons pour les sections efficaces σ_1 électron-neutre aux très basses énergies (cf. [10], [11], [12]).

b) Collisions électron-neutre

La figure 3.7 représente les variations de σ_1 pour les collisions des électrons sur divers atomes ou molécules neutres. En abscisse on a porté $\sqrt{u_e}$ où u_e est l'énergie de l'électron en eV ; il est à noter que u_e se confond pratiquement avec l'énergie du mouvement relatif, car la condition $m_e \ll m_o$ entraîne $\mu \approx m_e$ et $g \approx w_e$. En ordonnée on a porté σ_1 . On constate que les valeurs typiques de σ_1 sont de l'ordre de 10 à 50 \AA^2 (correspondant aux dimensions des nuages électroniques des atomes qui sont de quelques \AA).

Sur ces diverses figures on peut faire les remarques suivantes :

- Lorsque l'énergie tend vers zéro, σ_1 tend vers une limite finie (qui est d'ailleurs aussi, comme nous l'avons vu, celle de σ_0). Les valeurs de cette limite sont rassemblées dans le tableau 3.2 pour les atomes les plus courants à l'état gazeux. Les valeurs marquées entre parenthèses sont soit des estimations théoriques, soit des extrapolations un peu douteuses. On voit que σ_1 est relativement faible pour les gaz rares dont la couche électronique externe est complète et au contraire assez forte pour les alcalins qui possèdent un seul électron de valence dans leur couche externe. Dans une même

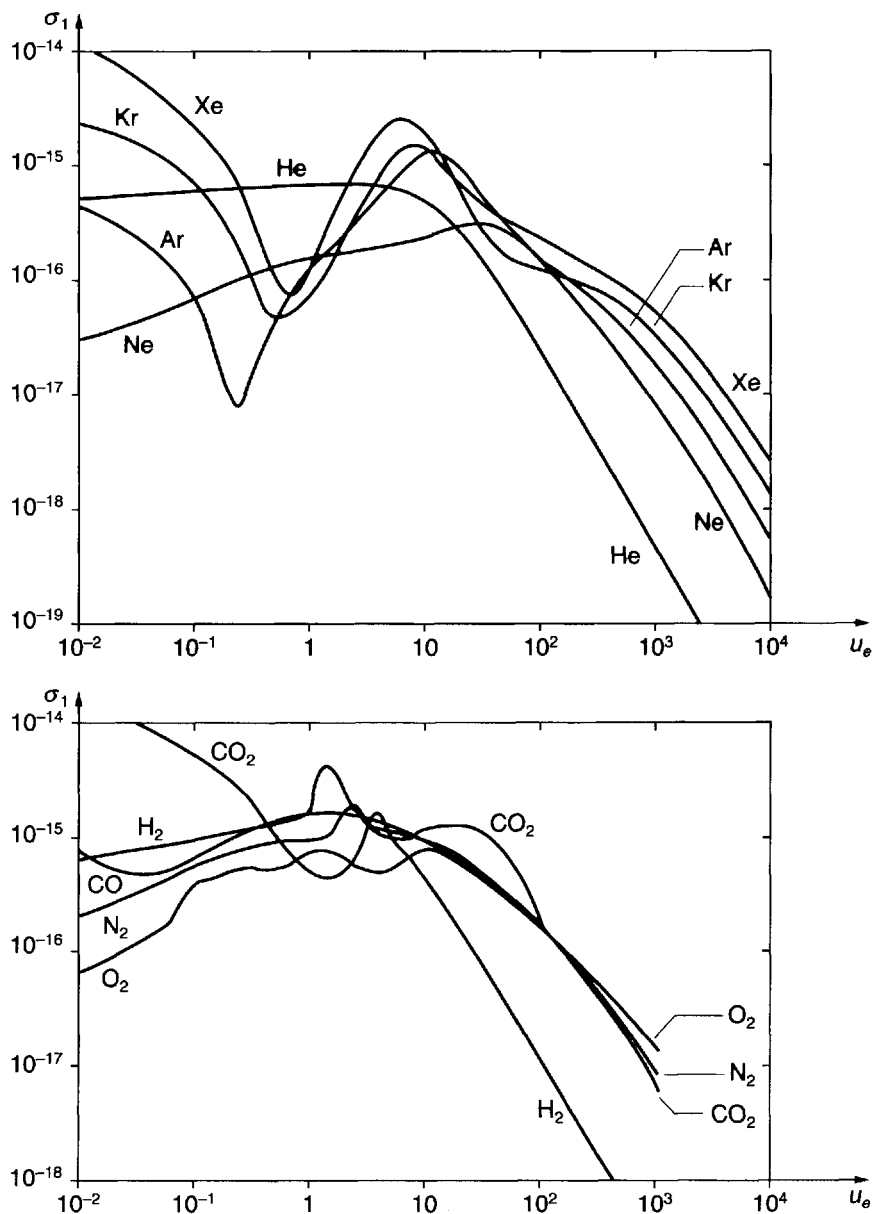


Figure 3.7 : Variation de σ_1 avec l'énergie pour diverses collisions électron-neutre.

σ_1 est en cm^2 et u_e en eV.

famille σ_1 croît avec la masse atomique ; le cas du néon est singulier ; il sera discuté ci-dessous (effet Ramsauer).

Atome	He	Ne	Ar	Kr	Xe	Li	Na	Cs	Hg	N	O
$\sigma_1(\text{\AA}^2)$	5.1	0.14	8.0	31	170	140	115	2000	25	(1)	(1)

Tableau 3.2 : Valeurs limites de σ_1 pour les collisions électron-atome lorsque $u_e \rightarrow 0$.

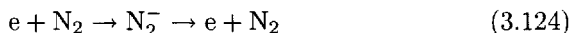
• L'extrapolation à l'énergie zéro est délicate pour les collisions électron-molécule. En principe σ_1 tend toujours vers une limite finie lorsque $u_e \rightarrow 0$; mais en pratique cette limite n'est atteinte que pour des énergies extrêmement basses ($< 10^{-3}$ eV). En effet dès que u_e est comparable aux énergies de rotation des molécules (qui sauf pour H_2 sont de l'ordre de 10^{-3} eV ou plus petites), les valeurs expérimentales de σ_1 incluent une contribution importante due à l'excitation des rotations. Dans ces conditions nous avons rassemblé dans le tableau 3.3 non pas la limite de σ_1 lorsque $u_e \rightarrow 0$ mais la valeur prise pour $u_e = 3.10^{-2}$ eV. L'extrême diversité des valeurs s'explique par des effets très variés. Certains augmentent σ_1 : contribution des rotations (H_2O , H_3N), résonance due à la présence d'un ion négatif transitoire (voir sur la figure 3.7 la courbe de σ_1 pour N_2 , c'est aussi le cas pour H_2) ; d'autres diminuent σ_1 : caractère compact de la molécule dû à une forte liaison chimique (N_2 , O_2 , CO), résonance du type Ramsauer qui sera discutée ci-dessous pour les gaz rares (H_4C).

Molécule	H_2	N_2	O_2	CO	NO	H_2O	CO_2	N_2O	H_3N	H_4C
$\sigma_1(\text{\AA}^2)$	8.5	3.4	3.0	5.8	4	1000	100	26	600	12

Tableau 3.3 : Valeur de σ_1 pour les collisions électron-molécule avec $u_e = 3.10^{-2}$ eV.

• Lorsque l'énergie tend vers l'infini, σ_1 tend vers zéro. Dans le domaine des fortes énergies, il y a d'ailleurs une méthode théorique sûre (approximation de Born) pour calculer σ_1 et qui prévoit une loi de décroissance de σ_1 en $(w_e)^{-2} = (u_e)^{-1}$.

• Certaines courbes de σ_1 présentent des résonances positives. C'est le cas de N_2 et dans une mesure moins nette de H_2 . Ces résonances sont dues à la production intermédiaire d'un ion négatif instable ; la collision élastique se produit alors en deux temps suivant le schéma :



La résonance est d'autant plus étroite que le temps d'autodétachement de l'ion négatif est plus long (cf. [296, p. 235]). Si elle est assez étroite elle possède une structure fine liée aux niveaux de vibration de l'ion instable (cf. [296, p. 287]).

• Dans le cas des gaz rares lourds (Ar, Kr, Xe) et du méthane, on observe une résonance négative, c'est-à-dire une zone d'énergie où σ_1 devient très faible. Il s'agit d'une antirésonance entre l'onde de de Broglie de l'électron incident (cf. [296, p. 233]) et le nuage électronique de l'atome, conduisant à une quasi-transparence de l'atome pour l'onde électronique incidente ; c'est ce qu'on appelle l'effet Ramsauer. Les paramètres (connus de façon très approchée) de cet effet sont indiqués dans le tableau 3.4 [13, 296].

Gaz	Ar	Kr	Xe	H ₄ C
u_{em}	0.32	0.6	0.7	2
σ_{1m}	0.15	0.49	1.28	1

Tableau 3.4 : Paramètres de l'effet Ramsauer.

u_{em} (eV) énergie du minimum ; σ_{1m} (Å²) valeur de σ_1 au minimum.

On voit que l'énergie du minimum de Ramsauer se déplace vers les basses énergies lorsque l'on passe de Xe à Ar. Nous n'avons pas mentionné le néon dans ce tableau car il ne présente pas de minimum de Ramsauer. Cependant la valeur très faible de σ_1 dans Ne lorsque $u_e \rightarrow 0$ ($\sim 0,14$ Å²) peut s'expliquer en admettant que le néon présente un minimum de Ramsauer au voisinage de l'énergie zéro [13]. Ce résultat a d'ailleurs une grande importance pratique : il en résulte que le néon est le gaz qui a la plus faible valeur moyenne de σ_1 dans toute la gamme de zéro à quelques eV. Cela en fait un gaz très efficace pour l'allumage et le fonctionnement des tubes à décharges.

3.6 Appendices

A3-1 Système du laboratoire et système du centre de gravité

a) Angles de déviation et de recul

Nous avons montré dans la section 3.2 qu'il était commode de représenter une collision en se plaçant dans le système du centre de gravité des deux particules.

Du point de vue expérimental, on considère souvent une expérience dans laquelle un faisceau de particules 1, animé d'une grande vitesse, vient bombarder une cible immobile contenant des particules 2 pratiquement immobiles. Considérons donc un système de coordonnées correspondant à cette expérience, dans lequel la particule incidente 1 a une vitesse \vec{w}_{10} , cependant que l'autre particule (particule cible) est immobile avant le choc. Ce système de coordonnées est désigné sous le nom de *système du laboratoire*.

Dans la suite de ce paragraphe, nous affectons d'un indice zéro les grandeurs relatives à une collision mesurée dans le système du laboratoire, et nous supprimons au contraire cet indice pour désigner les grandeurs analogues mesurées dans le système du centre de gravité. Pour représenter la collision, on utilise des dessins schématiques sur lesquels on ne fait pas figurer le paramètre d'impact p : on dessine les figures comme si p était nul, ou, ce qui revient au même, comme si l'échelle de la figure était très grande vis-à-vis de la grandeur de ce paramètre. Avec ces conventions, les figures 3.8(a) et 3.8(b) représentent une même collision, respectivement dans le système du centre de masse et dans le système du laboratoire.

Désignons par \vec{w}_1 et \vec{w}_2 les vitesses des deux particules avant le choc dans le système du centre de masse et par \vec{w}_{g0} la vitesse du centre de gravité dans le système du laboratoire. En rapprochant les figures 3.8(a) et 3.8(b) on vérifie facilement que l'on a :

$$\vec{w}_{g0} = -\vec{w}_2 \quad (3.125)$$

On vérifie d'ailleurs facilement que \vec{w}_{g0} est inférieure à la vitesse de la particule incidente dans le système du laboratoire ; plus précisément on a :

$$w_{g0} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} w_{10} \quad (3.126)$$

w_{g0} tend vers zéro quand m_2 tend vers l'infini et vers w_{10} quand m_2 tend vers zéro.

La déviation calculée précédemment est l'angle χ représenté sur la figure 3.8(a). Dans le système du laboratoire, on peut distinguer deux angles caractéristiques, la déviation χ_0 et l'angle de recul Ψ_0 . Pour trouver les relations reliant ces deux angles à χ , il suffit de rapprocher les deux figures 3.8(a) et 3.8(b) en remarquant que le mouvement représenté sur la deuxième se déduit du mouvement représenté sur la première en y ajoutant une translation uniforme égale à \vec{w}_{g0} .

Sur la figure 3.8(c), on a représenté les relations cinématiques qui en résultent. A est le point où s'est produite la collision. À partir de ce point, la particule 1 s'est déplacée avec une vitesse \vec{w}'_{10} qui est la résultante de la vitesse \vec{w}_1 qu'elle aurait dans le système du centre de masse et de la vitesse d'entraînement \vec{w}_{g0} . Au bout d'une seconde elle a atteint le point B. De même, la particule 2 atteint au bout d'une seconde le point C, son vecteur vitesse \vec{w}'_{20} étant la résultante des vitesses \vec{w}_2 et \vec{w}_{g0} .

D'après la relation (3.125), le triangle AEC est isocèle et les égalités angulaires évidentes marquées sur la figure conduisent à la relation :

$$\Psi_0 = \frac{1}{2}(\pi - \chi) \quad (3.127)$$

Cette relation permet de distinguer deux cas limites extrêmes :

- si $\chi = 0$, on dit que le choc est rasant, l'angle de recul est alors égal à $\pi/2$;
- si $\chi = 180^\circ$, on dit que le choc est direct, ou de front, l'angle de recul est nul.

D'autre part, pour calculer χ_0 , on considère le triangle ABD ; on a :

$$\tan \chi_0 = \frac{DB}{DA} = \frac{D'B'}{AD' + D'D} \quad (3.128)$$

$$= \frac{w_1 \sin \chi}{w_1 \cos \chi + w_{g0}} \quad (3.129)$$

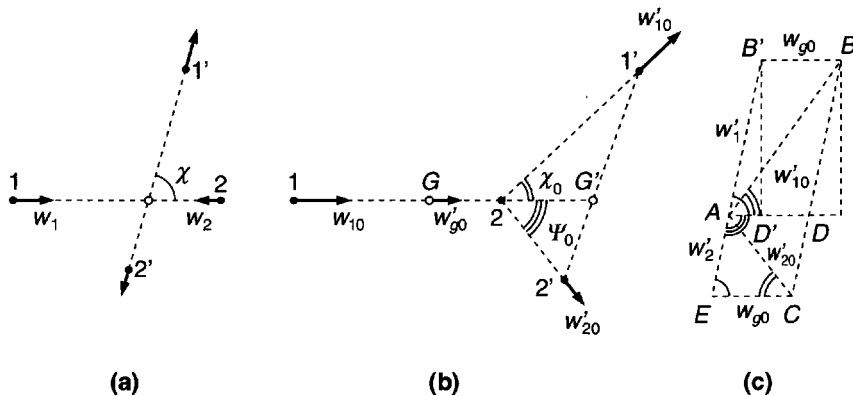


Figure 3.8 : Schéma d'une collision.

(a) Système du centre de gravité.

(b) Système du laboratoire.

(c) Relations entre le système du centre de gravité et le système du laboratoire.

On met cette formule sous une forme plus pratique en introduisant le rapport :

$$w_2 / w_1 = m_1 / m_2 = s \quad (3.130)$$

d'où la relation reliant χ et χ_0 :

$$\tan \chi_0 = \frac{\sin \chi}{s + \cos \chi} \quad (3.131)$$

Il est intéressant de considérer un certain nombre de cas limites :

$$m_1 \ll m_2 \quad \chi_0 = \chi \quad (3.132)$$

$$m_1 = m_2 \quad \chi_0 = \chi / 2 \quad (3.133)$$

$$\Psi_0 = \pi/2 - \chi_0 \quad (3.134)$$

$$m_1 \gg m_2 \quad \chi_0 \sim (\sin \chi) / s \quad (3.135)$$

Le premier résultat est évident. Quand la masse m_2 est très grande, les deux systèmes du centre de masse et du laboratoire se confondent.

Le deuxième résultat est intéressant : dans une collision entre deux particules de masse égale, les deux particules s'en vont après la collision dans deux directions perpendiculaires. C'est un résultat bien connu des joueurs de billard.

b) Énergie de recul de la particule cible

Pour calculer l'énergie de recul de la particule cible, il suffit d'écrire dans le triangle AEC la relation trigonométrique :

$$w_{20}^2 = w_2^2 + w_{g0}^2 - 2w_2w_{g0} \cos \chi = 2w_{g0}^2(1 - \cos \chi) \quad (3.136)$$

d'où la valeur de l'énergie de recul :

$$u'_{20} = \frac{1}{2} m_2 w'_{20} = m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} w_{10}^2 (1 - \cos \chi) \quad (3.137)$$

qu'on peut exprimer en fonction de l'énergie cinétique de la particule incidente :

$$\begin{aligned} u'_{20} &= u_{10} \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \chi) \\ &= u_{10} \frac{2s}{(1+s)^2} (1 - \cos \chi) \end{aligned} \quad (3.138)$$

ou encore en fonction de l'angle de recul :

$$u'_{20} = u_{10} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \Psi_0 \quad (3.139)$$

On voit que si les masses sont données, l'énergie de recul est maximum pour les chocs directs et nulle pour les chocs rasants.

Il est intéressant d'autre part de calculer la valeur maximum du transfert d'énergie, c'est-à-dire le rapport u_{20}/u_{10} dans un choc direct :

$$\left(\frac{u_{20}}{u_{10}} \right)_{\max} = \frac{4s}{(1+s)^2} \quad (3.140)$$

Les variations de ce rapport en fonction de s sont représentées sur la figure 3.9. On voit que celui-ci est maximum et égal à 1 pour $s = 1$; le transfert d'énergie est donc total dans un choc direct entre deux particules de même masse. Au contraire, si les deux particules sont de masse différente, le transfert d'énergie n'est pas total, la portion de l'énergie transférée étant d'autant plus petite que le rapport des deux masses est plus éloigné de l'unité.

c) Sections efficaces différentielles

La quantité $\sigma(\chi)$ calculée dans les paragraphes précédents est la section efficace dans le système du centre de masse. En pratique, dès que la particule cible a une masse m_2 qui n'est pas infiniment grande devant la masse m_1 des particules incidentes, le système du centre de masse ne coïncide pas avec le système du laboratoire.

Soit donc $\sigma(\chi_0)$ la section efficace différentielle dans le système du laboratoire ; cette quantité est définie par une relation analogue à (3.52), mais faisant intervenir les déviations angulaires dans le système du laboratoire, déviations que nous affectons comme précédemment de l'indice zéro.

On passe donc de $\sigma(\chi)$ à $\sigma(\chi_0)$ en écrivant l'identité :

$$\sigma(\chi_0) \sin \chi_0 d\chi_0 = \sigma(\chi) \sin \chi d\chi \quad (3.141)$$

ou encore :

$$\sigma(\chi_0) = \sigma(\chi) \frac{d(\cos \chi)}{d(\cos \chi_0)} \quad (3.142)$$

Mais on peut écrire, d'après (3.131) :

$$\frac{1}{\cos^2 \chi_0} = 1 + \frac{\sin^2 \chi}{s^2 + 2s \cos \chi + \cos^2 \chi} \quad (3.143)$$

avec $s = m_1/m_2$, soit :

$$\cos \chi_0 = \frac{s + \cos \chi}{(1 + 2s \cos \chi + s^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.144)$$

En dérivant cette expression, en la portant dans (3.142), on obtient finalement la relation de correspondance :

$$\sigma(\chi_0) = \frac{(1 + 2s \cos \chi + s^2)^{3/2}}{1 + s \cos \chi} \sigma(\chi) \quad (3.145)$$

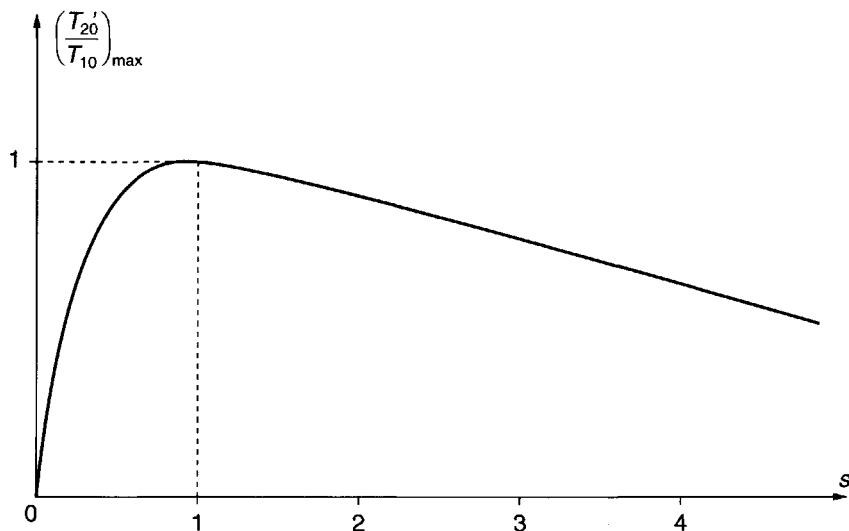


Figure 3.9 : Échange d'énergie entre deux particules dans un choc de front.
 s = masse de la particule incidente / masse de la particule cible.

A3-2 Sections efficaces de transport et déphasages

Nous définirons au chapitre 12 une suite de sections efficaces de transport électron-neutre σ_ℓ (cf. section 12.3). Les deux premières ne sont autres que les sections efficaces totales σ_0 et σ_1 définies au paragraphe précédent. Nous allons maintenant établir les formules permettant de calculer σ_0 , σ_1 et σ_2 en fonction des déphasages δ_ℓ associés aux diverses ondes partielles.

Pour cela on part de l'expression (3.81) de $\sigma(\chi)$ en fonction des déphasages :

$$\sigma(\chi) = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) a_\ell P_\ell \right|^2 \quad (3.146)$$

avec

$$a_\ell = e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell \quad (3.147)$$

et

$$k = mw\hbar \quad (3.148)$$

et on cherche à calculer les sections efficaces de transport :

$$\sigma_\ell = 2\pi \int_0^\pi [1 - P_\ell(\cos \chi)] \sigma(\chi) \sin \chi d\chi \quad (3.149)$$

a) Développement de $\sigma(\chi)$ en polynômes de Legendre

Le premier stade du calcul consiste à développer $\sigma(\chi)$ en une série de polynômes de Legendre. Comme $\sigma(\chi)$ est exprimé par la formule (3.146) sous la forme du carré d'une

telle série, il faut donc développer en somme de polynômes de Legendre le produit de deux polynômes de Legendre. La formule nécessaire a été donnée par Whittaker et Watson (cf. [265], p. 331) et s'écrit :

$$P_\ell(Z)P_{\ell'}(Z) = \sum_{r=0}^{\ell} \frac{A_{\ell-r}A_rA_{\ell'-r}}{A_{\ell+\ell'-r}} \frac{2\ell+2\ell'-4r+1}{2\ell+2\ell'-2r+1} P_{\ell+\ell'-2r} \quad (3.150)$$

avec :

$$A_0 = 1 \quad (3.151)$$

$$A_\ell = \frac{1.3.5 \dots 2-1}{\ell!} \text{ pour } \ell \geq 1 \quad (3.152)$$

En explicitant la formule (3.146), on obtient :

$$\sigma(\chi) = \frac{1}{k^2} \left[\sum_{\ell} (2\ell+1)^2 \sin^2 \delta_\ell P_\ell^2 + 2 \sum_{\ell < \ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1) \cos(\delta_\ell - \delta_{\ell'}) \sin \delta_\ell \sin \delta_{\ell'} P_\ell P_{\ell'} \right] \quad (3.153)$$

soit :

$$\begin{aligned} \sigma(\chi) = & \frac{1}{k^2} \left[\sum_{\ell} (2\ell+1)^2 \sin^2 \delta_\ell \sum_{r=0}^{\ell} \frac{A_{\ell-r}^2 A_r}{A_{2\ell-r}} \frac{4\ell-4r+1}{4\ell-2r+1} P_{2\ell-2r} \right. \\ & + 2 \sum_{\ell < \ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1) \cos(\delta_\ell - \delta_{\ell'}) \sin \delta_\ell \sin \delta_{\ell'} \times \\ & \left. \sum_{r=0}^{\ell} \frac{A_{\ell-r}A_rA_{\ell'-r}}{A_{\ell+\ell'-r}} \frac{2\ell+2\ell'-4r+1}{2\ell+2\ell'-2r+1} P_{\ell+\ell'-2r} \right] \quad (3.154) \end{aligned}$$

On peut écrire ce développement sous la forme :

$$\chi(\sigma) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell P_\ell(\cos \chi) \quad (3.155)$$

avec :

$$C_0 = \frac{1}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell \quad (3.156)$$

$$C_1 = \frac{6}{k^2} \sum_{\ell} (\ell+1) \cos(\delta_\ell - \delta_{\ell+1}) \sin \delta_\ell \sin \delta_{\ell+1} \quad (3.157)$$

$$\begin{aligned} C_2 = & \frac{1}{k^2} \sum_{\ell} \left[\frac{5\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{(2\ell-1)} \sin^2 \delta_\ell \right. \\ & + \left. \frac{15(\ell+1)(\ell+2)}{(2\ell+3)} \cos(\delta_\ell - \delta_{\ell+2}) \sin \delta_\ell \sin \delta_{\ell+2} \right] \quad (3.158) \end{aligned}$$

b) Calcul des sections efficaces de transport

En reportant dans l'intégrale (3.149) on obtient immédiatement, par suite des règles d'orthogonalité des P_ℓ :

$$\sigma_0 = 4\pi C_0 \quad (3.159)$$

$$\sigma_\ell = 4\pi \left(C_0 - \frac{C_\ell}{(2\ell+1)} \right) \quad \ell \geq 1 \quad (3.160)$$

en désignant par σ_0 la section efficace totale (et non l'expression de σ_ℓ pour $\ell = 0$ qui est identiquement nulle). Compte tenu de (3.156) et (3.157) on obtient finalement :

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell \quad (3.161)$$

$$\sigma_1 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[(2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell - 2(\ell+1) \cos(\delta_\ell - \delta_{\ell+1}) \sin \delta_\ell \sin \delta_{\ell+1} \right] \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} & \left[\frac{3(2\ell+1)(\ell^2 + \ell - 1)}{(2\ell-1)(2\ell+3)} \sin^2 \delta_\ell \right. \\ & \left. - \frac{3(\ell+1)(\ell+2)}{(2\ell+3)} \cos(\delta_\ell - \delta_{\ell+2}) \sin \delta_\ell \sin \delta_{\ell+2} \right] \end{aligned} \quad (3.163)$$

Les formules (3.162) et (3.163) peuvent s'écrire sous forme plus condensée ; en développant dans (3.162) le terme $\cos(\delta_\ell - \delta_{\ell+1})$ et en faisant quelques transformations trigonométriques, on obtient en effet :

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \frac{4\pi}{k^2} & \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\ell \sin^2 \delta_\ell - (\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell+1} \right] \right. \\ & \left. + \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \sin^2(\delta_\ell - \delta_{\ell+1}) \right\} \end{aligned} \quad (3.164)$$

La première somme étant identiquement nulle, on obtient finalement :

$$\sigma_1 = \frac{4\pi}{k^2} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \sin^2(\delta_\ell - \delta_{\ell+1}) \right\} \quad (3.165)$$

Le calcul effectué sur (3.163) donne tout d'abord :

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \frac{4\pi}{k^2} & \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\frac{3\ell(\ell-1)}{2(2\ell-1)} \sin^2 \delta_\ell - \frac{3(\ell+2)(\ell+1)}{2(2\ell+3)} \sin^2 \delta_{\ell+2} \right] \right. \\ & \left. + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{3}{2} \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{(2\ell+3)} \sin^2(\delta_\ell - \delta_{\ell+2}) \right\} \end{aligned} \quad (3.166)$$

La première somme étant identiquement nulle, on obtient :

$$\sigma_2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{3}{2} \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{(2\ell+3)} \sin^2(\delta_\ell - \delta_{\ell+2}) \quad (3.167)$$

3.7 Problèmes

P3-1 *Collisions avec un potentiel attractif en $1/r^4$

- a) Montrer que dans le cas d'un potentiel en $1/r^4$ [cf. (3.34)], il y a une valeur critique a du paramètre d'impact qui sépare les trajectoires en deux familles (spiralantes et non spiralantes). Décrire ce qui se produit pour $p = a$.
- b) Définir une valeur moyenne \bar{a} de a en posant $\mu g^2 = 2\kappa T$. Comparer cette valeur avec le rayon de Bohr a_0 (calculer numériquement le cas de Ar pour lequel on a $\alpha = 1.65 \text{ \AA}^3$, en faisant varier T de 10^2 K à 10^5 K).

P3-2 *Section efficace pour l'échange d'énergie

Montrer que par un calcul analogue à celui fait pour σ_1 [cf. (3.93)], on peut définir une section efficace pour l'échange d'énergie

$$\sigma'_1 = \frac{2\mu}{M} \sigma_1$$

avec $M = m_1 + m_2$.

P3-3 *Méthode des faisceaux mélangés

Dans la physique des gaz et des plasmas on a souvent besoin de connaître les sections efficaces de collisions des électrons des ions et des neutres dans la gamme des basses énergies relatives (énergies thermiques). Ces grandeurs sont difficiles à mesurer par la méthode standard des faisceaux croisés. Une technique plus adaptée est alors celle des faisceaux "mélangés" : on part de deux faisceaux de particules 1 et 2 monoénergétiques (masses m_1 et m_2 , énergies u_1 et u_2 dans le système du laboratoire). Ces faisceaux sont injectés parallèlement dans un espace de dérive où ils se mélangent. Les réactions (collisions) des particules 1 et 2 se produisent dans cet espace de dérive. En supposant que les vitesses des deux faisceaux sont assez voisines, montrer que l'on a :

$$\frac{u_2}{m_2} = \frac{u_1}{m_1} + \frac{\mathcal{E}}{\mu} \quad (3.168)$$

où μ est la masse réduite des couples de particules 1 et 2. Calculer l'énergie cinétique u_R du mouvement relatif de deux paricules 1 et 2 et montrer que l'on a :

$$u_R \approx Au_1 \left(\frac{\mathcal{E}}{u_1} \right)^2 \quad (3.169)$$

où A est une constante simple. Exemple : $u_1 = 10^3 \text{ eV}$, $u_2 = 1.01 \cdot 10^3 \text{ eV}$, $m_1 = m_2$.

Chapitre 4

Collisions inélastiques

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié en détail les collisions élastiques binaires. Nous verrons aux chapitres 5 et 9 que ce sont elles qui déterminent les échanges de quantité de mouvement et par conséquent les forces d'interaction macroscopiques entre les composants du gaz. Dans le présent chapitre, nous allons maintenant étudier rapidement les collisions inélastiques : ces collisions sont susceptibles de créer ou de faire disparaître des particules dans le gaz. Elles sont donc très importantes pour l'étude de la production et de la destruction des plasmas. Elles déterminent d'autre part dans une large mesure les échanges d'énergie entre les diverses espèces de particules et par conséquent leurs températures. Nous définirons d'abord les grandeurs utilisées pour les étudier : sections efficaces et taux de réaction. Nous donnerons ensuite un catalogue simplifié des divers processus de collisions inélastiques. Nous verrons plus tard (chapitres 8 et 12) comment les introduire dans la théorie cinétique des gaz ionisés.

4.2 Particules présentes dans un gaz ionisé

Niveaux d'énergie

4.2.1 Niveaux d'énergie des atomes

Un gaz ionisé peut *a priori* contenir les diverses espèces de particules suivantes :

- électrons,
- atomes,

- molécules diatomiques ou polyatomiques,
- ions positifs,
- ions négatifs atomiques ou moléculaires.

Chacune de ces particules (sauf les électrons) peut exister dans l'état fondamental ou dans toute une série d'*états excités*. La plupart des états excités ont une durée de vie très courte, de l'ordre de 10^{-8} secondes ; ce sont les états *radiatifs*, c'est-à-dire ceux qui se dépeuplent par émission d'un photon. On appelle souvent niveau de *résonance* celui des états radiatifs qui a la plus basse énergie : il se désexcite par retour au niveau fondamental. Certains états excités n'ont qu'une faible probabilité de désexcitation par émission de photon (transitions interdites) ; ils se désexcitent en général lors d'une collision avec une autre particule ; il en résulte une durée de vie relativement longue, d'autant plus que la pression est plus basse ; un tel état est appelé *métastable*.

Le tableau 4.1 indique quelques niveaux d'énergie d'excitation ainsi que l'énergie d'ionisation pour les atomes les plus courants. On y a indiqué le niveau fondamental, les premiers niveaux radiatifs et métastables. L'analyse de ce tableau fait apparaître les résultats suivants :

- Les *niveaux d'excitation et d'ionisation* sont élevés pour les gaz rares, bas pour les alcalins ; dans une même famille d'éléments ils diminuent quand le numéro atomique augmente : les niveaux les plus élevés sont finalement ceux de He (premier niveau 19.81 eV) et les plus bas ceux de Cs (premier niveau 1.39 eV).

- Il n'y a pas de *niveaux métastables* dans les alcalins. Les niveaux métastables joueront en revanche un rôle important dans Hg et dans les gaz rares (dans N, O, Cl, I, à basse température ce sont les états moléculaires qui jouent le plus grand rôle).

4.2.2 Niveaux d'énergie des molécules

La situation est plus complexe en ce qui concerne les molécules ; celles-ci possèdent en effet des degrés de liberté de vibration et de rotation. De sorte que l'énergie interne d'une molécule est la somme de trois termes :

$$u_P = E_e + E_v + E_r \quad (4.1)$$

où E_e est l'énergie électronique, E_v l'énergie de vibration et E_r l'énergie de rotation. Chacun de ces trois termes est quantifié ; on a d'autre part :

$$E_e \gg E_v \gg E_r \quad (4.2)$$

La terminologie permettant de décrire ces multiples états et la structure des spectres des molécules ont fait l'objet d'ouvrages spécialisés [293], [294].

Atome	Niveaux				
	fondamental	radiatifs		métastables	ionisation
H	$1s \ ^2S_{1/2}$	$2p \ ^2P^{\circ}_{1/2,3/2}$	10.20	$2s \ ^2S_{1/2}$	10.20
		$3p \ ^2P^{\circ}_{1/2}$	12.08		13.60
Li	$2s \ ^2S_{1/2}$	$2p \ ^2P^{\circ}_{1/2,3/2}$	1.85		
		$3s \ ^2S_{1/2}$	3.37		5.39
Na	$3s \ ^2S_{1/2}$	$3p \ ^2P^{\circ}_{1/2,3/2}$	2.10		
		$4s \ ^2S_{1/2}$	3.19		5.14
K	$4s \ ^2S_{1/2}$	$4p \ ^2P^{\circ}_{1/2,3/2}$	1.61, 1.62		
		$5s \ ^2S_{1/2}$	2.61		4.34
Cs	$6s \ ^2S_{1/2}$	$6p \ ^2P^{\circ}_{1/2,3/2}$	1.39, 1.45		
		$5d \ ^2D_{3/2,5/2}$	1.80, 1.81		3.89
Hg	$6s^2 \ ^1S_0$	$6p \ ^3P^{\circ}_1$	4.89	$6p \ ^3P^{\circ}_{0,2}$	4.67, 5.56
		$6p \ ^1P^{\circ}_1$	6.70		
		$7s \ ^3S_1$	7.73($\rightarrow m$)		10.43
N	$2p^3 \ ^3S^{\circ}_{3/2}$	$3s \ ^4P_{1/2,3/2,5/2}$	10.33	$2p^3 \ ^2D^{\circ}_{5/2,3/2}$	2.38
				$2p^3 \ ^2P^{\circ}_{3/2,1/2}$	3.57
O	$2p^4 \ ^3P_2$	$3s \ ^3S^{\circ}_1$	9.52	$2p^4 \ ^3P_{1,0}$	0.020, 0.028
				$2p^4 \ ^1D_2$	1.97
				$2p^4 \ ^1S_0$	4.19
				$3s \ ^5S^{\circ}_2$	9.14
Cl	$3p^5 \ ^2P^{\circ}_{3/2}$	$4s \ ^2P_{3/2,1/2}$	9.20, 9.28	$3p^5 \ ^2P^{\circ}_{1/2}$	0.11
				$4s \ ^4P_{5/2,3/2,1/2}$	8.92, 8.98, 9.03
I	$5p^5 \ ^2P^{\circ}_{3/2}$	$6s \ ^2P_{3/2,1/2}$	6.95, 7.93($\rightarrow m, r$)	$5p^5 \ ^2P^{\circ}_{1/2}$	0.94
				$6s \ ^4P_{5/2,3/2,1/2}$	6.77, 7.66, 7.55
He	$1s^2 \ ^1S_0$	$2p \ ^3P^{\circ}_{2,1,0}$	20.91($\rightarrow m$)	$2s \ ^3S_1$	19.82
		$2p \ ^1P^{\circ}_1$	21.20($\rightarrow m, r$)	$2s \ ^1S_0$	20.61
		$3s \ ^3S_1$	22.65($\rightarrow m$)	$3p \ ^3P^{\circ}_{2,1,0}$	23.00
		$3s \ ^1S_0$	22.81($\rightarrow m, r$)		
Ne	$2p^6 \ ^1S_0$	$3s \ ^1P^{\circ}_1$	16.84	$3s \ ^3P^{\circ}_{2,1,0}$	16.61, 16.67, 16.71
		$3p \ ^3S_1$	18.38($\rightarrow m$)		
Ar	$3p^6 \ ^1S_0$	$4s \ ^3P^{\circ}_1$	11.61	$4s \ ^3P^{\circ}_{2,0}$	11.55, 11.72
		$4s \ ^1P^{\circ}_1$	11.82		
		$4p \ ^3S_1$	12.90($\rightarrow m$)		
Kr	$4p^6 \ ^1S_0$	$5s \ ^3P^{\circ}_1$	10.03	$5s \ ^3P^{\circ}_{2,0}$	9.91, 10.56
		$5s \ ^1P^{\circ}_1$	10.64		
		$5p \ ^3S_1$	11.30($\rightarrow m$)		

Tableau 4.1 : Quelques niveaux d'énergie atomiques (eV).

 ($\rightarrow m$) Niveaux radiatifs émettant vers un niveau métastable.

 ($\rightarrow m, r$) Niveaux radiatifs émettant vers un métastable, ou le fondamental.

Cette terminologie, ainsi que les résultats les plus importants, sont décrits dans la référence [294] et dans le tableau 4.2. ΔE_v y désigne l'énergie d'excitation du premier niveau de vibration et ΔE_r celle du premier niveau de rotation.

L'analyse de ce tableau permet de faire les remarques suivantes.

Les gaz et vapeurs usuels H_2 , O_2 , N_2 , CO , CO_2 , H_2O forment des molécules relativement stables dont l'énergie de dissociation est de l'ordre de 5 eV ou plus. Les halogènes forment des molécules peu stables (énergie de dissociation entre 1.5 et 2.5 eV). Les alcalins et le mercure forment des molécules encore moins stables (énergie de dissociation inférieure à 1 eV). En fait on dit souvent que les molécules de ces vapeurs métalliques sont stables physiquement, mais chimiquement instables : cela signifie que, lorsque la vapeur est en équilibre thermodynamique à la pression de vapeur saturante dans un récipient, elle est à l'état atomique ; les pressions de vapeurs saturantes sont en effet basses et la loi de déplacement de l'équilibre favorise la formation des atomes aux basses pressions en jeu.

Le cas des gaz rares est singulier : par exemple l'état fondamental de la molécule He_2 est instable ; mais elle possède des états excités stables, ainsi qu'un état ionisé (ion moléculaire He_2^+). C'est pourquoi, dans le tableau 4.2, nous avons pris comme niveau de référence le niveau métastable $^3\Sigma_u^+$.

Les énergies d'excitation électronique des molécules sont en général de quelques eV. Le plus bas niveau est radiatif pour H_2 et les alcalins, métastable pour N_2 , O_2 , Cl_2 , I_2 , CO . Les énergies correspondantes sont supérieures à l'énergie de dissociation pour H_2 et les alcalins, inférieures pour les autres molécules. À part le cas déjà signalé de He_2 , le cas le plus singulier est celui de O_2 qui possède deux niveaux métastables d'énergie spécialement basse (0.98 et 1.64 eV).

Les énergies d'ionisation des molécules sont du même ordre de grandeur que celles des atomes les constituant.

Les énergies d'excitation de vibration des molécules vont de 0.1 à 0.5 eV pour les molécules stables ; elles sont plus faibles pour les molécules moins stables.

Les énergies d'excitation de rotation sont inférieures à 10^{-3} eV sauf pour H_2O ($\Delta E_r = 10^{-3}$ eV) et H_2 ($\Delta E_r = 1.5 \times 10^{-2}$ eV).

Il est intéressant de comparer les diverses énergies d'excitation ci-dessus à la quantité κT qui dans un gaz en équilibre thermodynamique représente, d'après la mécanique statistique classique, le double de l'énergie moyenne d'agitation thermique associée à chaque degré de liberté du système. Il suffit pour cela de se reporter aux premières colonnes du tableau 4.2. On constate alors que l'on a en général pour les gaz à molécules stables et aux

Molécule	Niveau électronique fondamental			Niveaux électroniques excités		Disso- ciation	Ioni- sation
	désignation	ΔE_v	ΔE_r	radiatifs	métastables		
H ₂	$^1\Sigma_g^+$	0.516	0.015	$^1\Sigma_u^+$ 11.18 $^3\Sigma_g^+$ 11.79($\rightarrow d$)	$^3\Sigma_u^+$ (instable) $^3\Pi_u$ 11.75	4.48	15.42
Li ₂	$^1\Sigma_g^+$	0.043	1.6×10^{-4}	$^1\Sigma_u^+$ 1.74		1.03	
Na ₂	$^1\Sigma_g^+$	0.020	4×10^{-5}	$^1\Sigma_u^+$ 1.82		0.73	
K ₂	$^1\Sigma_g^+$	0.011	2×10^{-5}	$^1\Sigma_u^+$ 1.45		0.51	
Cs ₂	$^1\Sigma_g^+$	0.005				0.45	
Hg ₂	$^1\Sigma_g^+$					0.15	
N ₂	$^1\Sigma_g^+$	0.289	5×10^{-4}	$^3\Pi_g$ 7.35($\rightarrow m$)	$^3\Sigma_u^+$ 6.17 $^1\Sigma_u^-$ 7.39 $^1\Pi_g$ 8.55	9.76	15.58
O ₂	$^3\Sigma_g^-$	0.193	4×10^{-4}	$^3\Sigma_u^-$ 6.12	$^1\Delta_g$ 0.98 $^1\Sigma_g^+$ 1.63 $^3\Sigma_u^+$ 4.43	5.08	12.21
Cl ₂	$^1\Sigma_g^+$	0.069	6×10^{-5}		$^3\Pi_u^+$ 2.27	2.47	13.2
I ₂	$^1\Sigma_g^+$	0.026	10^{-5}	$^1\Sigma_u^+$ 4.18	$^3\Pi_u$ 1.47 $^3\Pi_u^+$ 1.94	1.54	9.4
He ₂	$^1\Sigma_g^+$ (instable)			$^1\Sigma_u^+$ 0.29($\rightarrow d$)	$^3\Sigma_u^+$ 0 $^3\Pi_g$ 0.59	2.6	4.25
CO	$^1\Sigma^+$	0.267	5×10^{-4}	$^1\Pi$ 8.03	$^3\Pi$ 6.01 $^3\Sigma^+$ 6.86 $^3\Delta$ 7.66	11.11	14.00
CO ₂		0.083	5×10^{-5}	10.0		16.6	13.85
H ₂ O		0.198	10^{-3}	7.6		9.5	12.60

Tableau 4.2 : Quelques niveaux d'énergie moléculaires (eV).

($\rightarrow d$) Niveaux qui par transition radiative conduisent à un état instable vis-à-vis de la dissociation de la molécule.

($\rightarrow m$) Niveaux qui par transition radiative conduisent à un état métastable.

températures pas trop élevées :

$$\Delta E_r < \kappa T < \Delta E_v$$

Il en résulte alors que les molécules du gaz sont dans leur grande majorité au niveau de vibration zéro, mais occupent des niveaux de rotation de nombres quantiques assez élevés.

4.2.3 Ions négatifs

Certains atomes ou molécules peuvent donner des ions négatifs stables par fixation d'un électron supplémentaire. L'énergie de formation E_a d'un ion négatif est aussi appelée affinité électronique de l'atome ou de la molécule correspondante. Le tableau 4.3 donne la valeur de E_a pour quelques atomes et molécules. On y remarque que :

- les affinités électroniques sont en général faibles, de l'ordre de 1 eV ou moins, sauf pour les halogènes ;
- le cas de H_2 est intéressant car il illustre le fait que *la notion d'affinité électronique n'est pas simple dans le cas des molécules* par suite du couplage avec les vibrations. L'ensemble des phénomènes que l'on prévoit théoriquement peut être décrit au moyen du diagramme de la figure 4.1.

atome	H	Li	Na	C	O	S	F	Cl	Br	I
E_a (eV)	0.77	0.58	0.78	1.25	1.465	2.07	3.45	3.61	3.36	3.06
Molécule	H_2	O_2	O_3	OH						
E_a (eV)	-3.58	0.50	2.9	1.78						

Tableau 4.3 : Affinité électronique (en eV) de quelques atomes et molécules.

Sur celui-ci on porte en abscisse la distance r (Å) entre les deux protons et en ordonnée les énergies : les deux courbes tracées sur le diagramme représentent les énergies potentielles respectives de la molécule H_2 et de l'ion H_2^- en fonction de r . On remarque que H_2 dont l'énergie de dissociation $D(H_2)$ est égale à 4.48 eV est beaucoup plus stable que H_2^- dont l'énergie de dissociation $D(H_2^-)$ n'est que 0.15 eV. Corrélativement la distance d'équilibre des protons est beaucoup plus faible dans H_2 ($a \sim 0.8$ Å) que dans H_2^- ($b \sim 3$ Å). L'affinité électronique de H_2 est représentée par la différence d'énergie entre les états fondamentaux de H_2 et H_2^- ; c'est la différence entre les ordonnées A et B , soit 3.58 eV, avec le signe moins puisqu'il faut fournir de l'énergie pour passer de A en B . Ceci étant, on ne peut pas faire de transition directe entre A et B : d'après la règle de Franck-Condon une transition électronique dans une molécule s'effectue

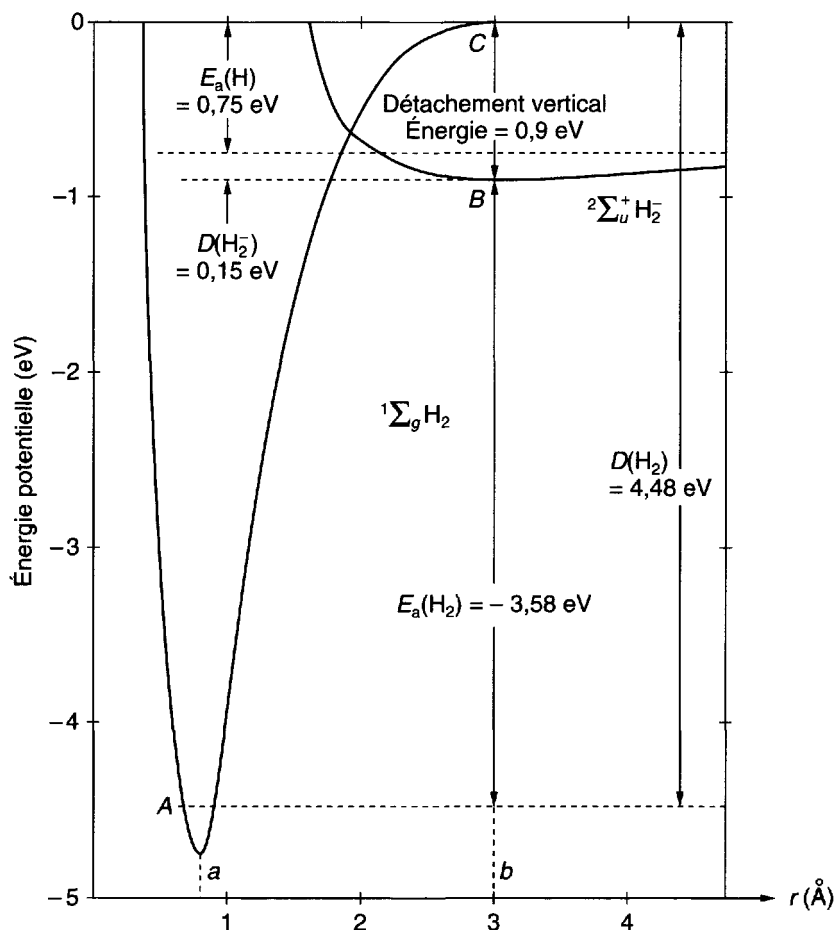


Figure 4.1 : Courbes théoriques d'énergie potentielle de H_2 et H_2^- mettant en évidence les relations entre affinité électronique et énergie de détachement vertical dans les molécules et les ions négatifs diatomiques.

sans changement de la position des noyaux. Par conséquent, si partant du point B, c'est-à-dire de H_2^- dans l'état fondamental, on désire arracher un électron pour passer à un état de H_2 , on ne peut que suivre le chemin BC ; il faut donc fournir une énergie de liaison positive apparente appelée *énergie de détachement vertical* de l'ordre de 0.9 eV. La molécule H_2 est formée dans un état de vibration très élevé, très proche de la dissociation ; au cours d'une collision ultérieure elle pourra, soit se dissocier, soit revenir au niveau fondamental en restituant une énergie voisine de 4.48 eV.

4.3 Seuils de réaction

4.3.1 Énergie de réaction

Nous considérons, dans ce qui suit, l'énergie totale d'une particule comme la somme de deux termes :

- l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mw^2$ en incluant dans ce terme seulement l'énergie de translation,

- l'énergie potentielle ou énergie interne u_P qui par définition pourra comprendre les trois termes E_e , E_v , E_r .

Lors d'une collision inélastique il y a changement des états internes des particules et de ce fait échange entre les deux espèces d'énergie : l'énergie totale du groupe de particules qui participent à la collision sera avant la collision :

$$U = U_K + U_P \quad (4.3)$$

avec

$$U_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i w_i^2 \quad (4.4)$$

$$U_P = \sum_i u_{Pi} \quad (4.5)$$

où l'indice i désigne l'une des (deux ou trois) particules qui participent à la collision. Après la collision, ces deux grandeurs sont devenues respectivement U'_K et U'_P . Comme il y a conservation de l'énergie totale, on peut écrire :

$$U'_K = U_K + Q \quad (4.6)$$

$$U'_P = U_P - Q \quad (4.7)$$

La quantité Q peut être appelée énergie de réaction. Q peut être négatif (réactions endothermiques) ou positif (réactions exoénergétiques). Les collisions inélastiques sont dites de première espèce quand $Q < 0$ et de seconde espèce ou superélastiques quand $Q > 0$.

4.3.2 Seuils de réaction

Une réaction endoénergétique ($Q < 0$) n'est évidemment possible d'après (4.6) que si $U_K > |Q|$. En fait la condition à laquelle U_K doit satisfaire est plus sévère car, comme nous allons le voir, seule une partie de U_K peut être utilisée à produire une réaction.

Désignons en effet par w_G la vitesse, avant la collision, du centre de gravité des particules qui vont entrer en collision ; on a :

$$\vec{w}_G = \frac{\sum m_i \vec{w}_i}{M} \quad (4.8)$$

où w_i est la vitesse de l'une de ces particules et $M = \sum m_i$ la masse totale. Posons :

$$\vec{w}_i = \vec{w}_G + \vec{w}_{ri} \quad (4.9)$$

où \vec{w}_{ri} est la vitesse relative de la particule i par rapport au centre de gravité. La relation (4.8) montre que ces vitesses relatives satisfont à la condition :

$$\sum_i m_i \vec{w}_{ri} = 0 \quad (4.10)$$

Compte tenu de cette condition, on peut écrire, en portant (4.9) dans (4.5), l'énergie cinétique totale sous la forme :

$$U_K = U_G + U_R \quad (4.11)$$

avec :

$$U_G = \frac{1}{2} M w_G^2 \quad (4.12)$$

$$U_R = \sum_i \frac{1}{2} m_i w_{ri}^2 \quad (4.13)$$

U_G est l'énergie cinétique du centre de gravité et U_R l'énergie du mouvement relatif. Ces relations généralisent au cas d'une collision à N corps la règle que nous avons énoncée au paragraphe 3.2 pour les collisions binaires.

Si l'on affecte maintenant d'un symbole prime les valeurs de ces mêmes grandeurs après la collision, on a d'après le théorème de conservation de la quantité de mouvement :

$$w'_G = w_G \quad (4.14)$$

En reportant (4.11) dans (4.6) U_G s'élimine et l'on a :

$$U'_R = U_R + Q \quad (4.15)$$

On voit donc que *seule l'énergie du mouvement relatif est utilisable pour produire une réaction*, et l'on déduit de (4.15), puisque $U'_R \geq 0$, que la condition nécessaire pour qu'une réaction endoénergétique se produise est :

$$U_R \geq |Q| \quad (4.16)$$

4.3.3 Collisions binaires. Cas du système du laboratoire

La formule générale (4.16) peut s'appliquer dans des cas très divers.

Considérons, par exemple, un gaz où les particules sont animées de mouvements désordonnés et considérons la possibilité qu'une certaine réaction se produise par collision binaire entre deux particules identiques ; ce seront évidemment les collisions dans lesquelles les deux particules sont animées initialement de vitesses égales et opposées qui seront les plus efficaces : pour ces collisions "de front" on aura $U_G = 0$ et la condition (4.16) sera satisfaite si l'énergie de chaque particule est supérieure à $|Q|/2$.

On considère au contraire souvent les conditions dites du *système du laboratoire* (cf. appendice A3-1). Ces conditions se réfèrent à l'expérience réelle ou idéale dans laquelle un faisceau de particules d'espèce 1 vient bombarder une cible contenant des particules d'espèce 2 dont les vitesses avant la collision sont négligeables. Dans ce système on a :

$$\vec{w}_G = \frac{m_1 \vec{w}_1}{M} \quad (4.17)$$

d'où :

$$U_G = \frac{m_1}{M} u_1 \quad (4.18)$$

où u_1 est l'énergie initiale des particules incidentes. La condition (4.16) s'écrit donc :

$$u_1 \left(1 - \frac{m_1}{M}\right) > |Q| \quad (4.19)$$

soit

$$u_1 \geq \frac{m_1 + m_2}{m_2} |Q| \quad (4.20)$$

Le seuil de réaction ainsi défini a des valeurs très différentes selon les valeurs du rapport m_1/m_2 . Il est égal à l'énergie $|Q|$ quand $m_1 \ll m_2$ (collisions électrons sur atomes), à $2|Q|$ quand $m_1 = m_2$ (collisions entre atomes identiques), et très supérieure à $|Q|$ quand $m_1 \gg m_2$ (collisions atome lourd sur atome léger).

4.4 Principaux types de collisions inélastiques

De façon générale on peut représenter la réaction qui se produit lors d'une collision inélastique par l'équation

$$1 + 2 + \dots \Rightarrow 3 + 4 + \dots \quad (4.21)$$

où 1, 2, 3, 4, spécifient la nature des particules et leur état d'énergie interne. Avant la collision il peut y avoir deux particules (collisions binaires) ou plus ; après, il peut y en avoir une, deux ou plusieurs. On utilise souvent au lieu de l'écriture ci-dessus la notation plus condensée :

$$12\dots/34\dots \quad (4.22)$$

Les types de collisions possibles sont très nombreux. Le tableau 4.4 mentionne les plus courants en indiquant pour chacun d'entre eux le schéma réactionnel, le nom généralement donné au processus, et le rôle qu'il joue en général dans la physico-chimie des gaz ionisés.

À titre d'exemple plus détaillé les tableaux 4.5 et 4.6 rassemblent quelques résultats typiques concernant les réactions les plus importantes dans l'hydrogène.

4.5 Collisions inélastiques binaires

4.5.1 Section efficace totale

La probabilité de production d'une certaine réaction par collision binaire s'évalue en faisant appel à la notion de section efficace. Rappelons la définition que nous avons donnée au paragraphe 3.3. On considère l'expérience idéale représentée sur la figure 4.2(a).

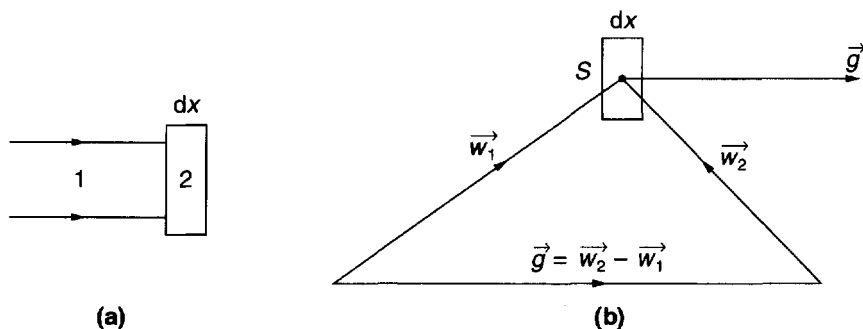


Figure 4.2 : Section efficace et taux de réaction.

- (a) Section efficace de réaction dans une expérience faisceau-cible.
- (b) Calcul d'un taux de réaction dans un gaz.

Un faisceau monocinétique de particules d'espèce 1 vient bombarder une cible d'espèce 2 ; on considère une certaine réaction $12/34\dots$: on compte le nombre dN_1 de réactions de ce type qui se produisent quand

Processus	Nom	Effet macroscopique
Gaz monoatomiques		
$e, A \Rightarrow e, A$	Collision élastique électron-atome	Mobilité électronique
$e, A \Rightarrow e, A^*$	Excitation par collision électronique	Production de métastables
$e, A \Rightarrow e, e, A^+$	Ionisation par collision électronique	Multiplication des électrons
$e, A^* \Rightarrow e, A$	Désexcitation (quenching)	Destruction des métastables
$e, A^* \Rightarrow e, e, A^+$	Ionisation en deux étapes	Multiplication des électrons
$e, A^+ \Rightarrow e, A^+$	Interaction coulombienne	Diffusion ambipolaire
$e, e, A^+ \Rightarrow e, A^+$	Recombinaison à trois corps e-e-i	Plasmas fortement ionisés
$e, A^+ \Rightarrow h\nu, A^*$	Recombinaison radiative	Plasmas fortement ionisés
$e, A_2^+ \Rightarrow e, A_2^+$	Interaction coulombienne	Diffusion ambipolaire
$e, A_2^+ \Rightarrow A^*, A$	Recombinaison dissociative	Plasmas faiblement ionisés
$e, e, A^+ \Rightarrow e, A^*$	Recombinaison à trois corps e-e-i	Plasmas fortement ionisés
$A, A \Rightarrow A, A$	Collision élastique atome-atome	Transport dans les gaz neutres
$A^*, A \Rightarrow A^*, A$	Collision élastique atome-métastable	Diffusion des métastables
$A^*, B \Rightarrow e, A, B^+$	Réaction de Penning	Ionisation dans les mélanges
$A^+, A \Rightarrow A^+, A$	Collision élastique ion-atome	Mobilité ionique
$A^+, A \Rightarrow A, A^+$	Échange de charge résonnant	Mobilité ionique
$A^+, A, A \Rightarrow A_2^+, A$	Association ionique	Production d'ions moléculaires
$A^*, A^* \Rightarrow e, A^+, A$	Réaction de Penning croisée	Destruction des métastables
$A^*, A \Rightarrow e, A_2^+$	Ionisation associative	Formation d'ions moléculaires
Processus supplémentaires dans un gaz diatomique		
$e, A_2 \Rightarrow e, A_2^v$	Excitation vibrationnelle	"Température de vibration"
$e, A_2 \Rightarrow e, A, A$	Dissociation par choc électronique	Production d'atomes
$e, A_2 \Rightarrow e, e, A^+, A$	Ionisation dissociative	Production d'ions atomiques
Processus supplémentaires dans un gaz électronégatif (par exemple O₂)		
$e, A_2 \Rightarrow A^-, A$	Attachement dissociatif	Production de A ⁻
$e, A_2, A_2 \Rightarrow A_2^-, A_2$	Attachement à trois corps	Production de A ₂ ⁻
$e, A^- \Rightarrow e, e, A$	Détachement par choc électronique	Destruction de A ⁻
$A_2^-, A_2^+ \Rightarrow A_2, A_2$	Recombinaison ion-ion	Destruction de A ₂ ⁻

Tableau 4.4 : Principaux processus de collisions.

Processus	Énergies(eV)											Réf.
	Seuil	0.03	0.1	0.3	1	3	10	30	100	10 ³	10 ⁴	
e, H ⇒ e, H	0					150	60	18				[22]
e, H ⇒ e, H*(2s)	10.2	-	-	-	-	-	-	0.46	0.37			[26]
e, H ⇒ e, H*(2p)	10.2	-	-	-	-	-	-	5.3	5.3			[26]
e, H ⇒ e, e, H ⁺	13.6	-	-	-	-	-	-	6.2	6	1.2		[20]
e, H*(2s) ⇒ e, e, H ⁺	3.4	-	-	-	-	-	85	70	30	5		[20]
e, H ₂ (σ ₁)	0	70	90	110	130	170	100	48	24	4.5		[20]
e, H ₂ ⇒ e, H ₂	0	70	90	110	130	170	100	32	8	0.5		[20]
e, H ₂ ⇒ e, H ₂ ^r (J = 0 → 2)	0.045	-	0.75	1.7	5.8	17	7					[20]
e, H ₂ ⇒ e, H ₂ ^r (J = 1 → 3)	0.074	-	0.2	1	4	11	7					[20]
e, H ₂ ⇒ e, H ₂ ^v (v = 0 → 1)	0.516	-	-	-	0.62	5	1	0.18	0.045			[20]
e, H ₂ ⇒ e, H ₂ ^v (v = 0 → 2)	1.04	-	-	-	-	3						[20]
e, H ₂ ⇒ e, H ₂ [*] (b ³ Σ _u ⁺) ⇒ H, H	8.85	-	-	-	-	-	2.1	4.6	0.07			[20]
e, H ₂ ⇒ e, H ₂ [*] (B ¹ Σ _u ⁺)	11.2	-	-	-	-	-	-	3.0	2.8			[20]
e, H ₂ ⇒ ionisation	15.4	-	-	-	-	-	-	7	10	2.2		[20]
e, H ₂ ⇒ e, e, H ₂ ⁺	15.4	-	-	-	-	-	-	6.2	8	1.8		[20]
e, H ₂ ⇒ e, e, H ⁺ , H	19.9	-	-	-	-	-	-	0.03	0.6	0.1		[20]
e, H ₂ (v = 0) ⇒ H ⁻ , H	3.70	-	-	-	-	-	0.001					[20]
e, H ₂ ^v (v = 1) ⇒ H ⁻ , H	3.20	-	-	-	-	-	0.03					[20]
e, H ₂ ⁺ ⇒ H*, H	-11.9	600	150	60	22	10						[20]
e, H ₂ ⁺ ⇒ e, H ⁺ , H	2.7	-	-	-	-	100	70	40	18	3		[20]
e, H ₂ ⁺ ⇒ e, e, H ⁺ , H ⁺	15.9	-	-	-	-	-	-	0.8	1.7	0.35		[20]
e, H ₂ ⁺ ⇒ H ⁺ , H ⁻	1.8	-	-	0.5	0.3	0.14						[20]
e, H ₃ ⁺ ⇒ H, ...	-?	500	150	40	30	20						[20]
e, H ₃ ⁺ ⇒ H ⁺ , ...	1	-	-	-	-	-	-	60	70	20		[20]
e, H ₃ ⁺ ⇒ H ₂ ⁺ , H ⁻	2.5	-	-	-	-	35	120					[20]

Tableau 4.5 : Sections efficaces pour les collisions électroniques dans l'hydrogène.

Énergie en eV, sections efficaces en 10^{-17} cm^2 , H_2 niveau de rotation, H_2^v niveau de vibration, σ_1 section efficace de transfert de quantité de mouvement.

Processus	Énergies (eV, système du centre de masse)												Réf.
	Seuil	0.03	0.1	0.3	1	3	10	30	100	10 ³	10 ⁴		
H ⁺ , H ⇒ H, H ⁺	0		470	430	383	341	293	260	222	144	44.5	[25]	
H ⁺ , H ⇒ H(2s), H ⁺	10.2	-	-	-	-	-	-			0.141	3.65	[25]	
H ⁺ , H ⇒ H(2p), H ⁺	10.2	-	-	-	-	-	-			3.05	1.79	[25]	
H ⁺ , H ⇒ H ⁺ , H [*] (2s)	10.2	-	-	-	-	-	-				1.04	[25]	
H ⁺ , H ⇒ H ⁺ , H [*] (2p)	10.2	-	-	-	-	-	-			2.8	3.65	[25]	
H ⁺ , H ⇒ e, H ⁺ , H ⁺	13.6	-	-	-	-	-	-				7.2	[25]	
H ⁻ , H ⇒ H, H ⁻	-						1020	750	460			[27]	
H ⁺ , H ⁻ ⇒ H, H	-12.8		35000	12000	5300	2500	1300	1600	2000	1000		[23]	
H ⁺ , H ⁻ ⇒ e, H ₂ ⁺	-1.9	210	88	32	12.7							[25]	
H, H ₂ ⇒ (σ ₁)	0		140	80	58	25	15	3.6	1.5	0.04		[21]	
H, H ₂ ⇒ H, H ₂ ^r (J = 0 → 2)	0.045	-	0.1	2	10	28	32	26	19	2.5		[21]	
H, H ₂ ⇒ H, H ₂ ^r (J = 0 → 2)	0.074	-	0.07	1	6	18	21	18	13	1.6		[21]	
H, H ₂ ⇒ H, H ₂ ^v (v = 0 → 1)	0.516	-	-	-	4	30	43	51	44	14		[21]	
H, H ₂ ⇒ H ⁻	12.8	-	-	-	-	-	-	0.15	0.3	0.3		[21]	
H, H ₂ ⇒ H ₂ ⁺ , ...	15.4	-	-	-	-	-	-	0.16	0.3	1.2		[21]	
H, H ₂ ⇒ H ⁺ , ...	13.6	-	-	-	-	-	-	0.02	0.1	6		[21]	
H ⁻ , H ₂ (σ ₁)	0	-	240	130	85	39	20	5	1.5	0.03		[21]	
H ⁻ , H ₂ ⇒ e, ...	0.77	-	-	-	0	24	38	45	56	110		[21]	
H, H ₂ ⁺ ⇒ H ⁺ , H ₂	-1.6						120	75	54	53	25	[25]	
H ⁺ , H ₂ ⁺ (σ ₁)	0		750	410	210	93	34	10.5	2	0.04		[21]	
H ⁺ , H ₂ ⇒ H ⁺ , H ₂ ^r (J = 0 → 2)	0.045	-	200	270	280	190	60	6	0.2			[21]	
H ⁺ , H ₂ ⇒ H ⁺ , H ₂ ^r (J = 1 → 3)	0.074	-	80	150	200	130	40	5	0.1			[21]	
H ⁺ , H ₂ ⇒ H ⁺ , H ₂ ^v (v = 0 → 1)	0.516	-	-	-	1.2	8.5	40	63	56	17		[21]	
H ⁺ , H ₂ ⇒ H ⁺ , H ₂ ^v (v = 0 → 2)	1.04	-	-	-	-	2.5	11	23	14	13		[21]	
H ⁺ , H ₂ ⇒ H ₂ ⁺ , ...	1.8	-	-	-	-	7.4	4.6	3.4	5	6	70	[21][25]	
H ⁺ , H ₂ ⇒ e, H ⁺ , H ₂ ⁺	15.4	-	-	-	-	-	-		0.03	0.55	4.3	[21][25]	
H ⁺ , H ₂ ⇒ H ⁺ , H ₂	0						90	50				[28]	
H ⁺ , H ₂ ⇒ H, H ₂ ⁺ (?)	1.6	-	-	-	-				0.8			[29]	
H ⁺ , H ₂ ⇒ H	1.6	-	-	-	-	5.5	1	2	5.5	60	80	[25]	
H ⁺ , H ₂ ⇒ H(2s)	12	-	-	-	-	-	-			0.2	2.2	[25]	
H ⁺ , H ₂ ⇒ H ⁺	18	-	-	-	-	-	-				11	[25]	
H ₂ , H ₂ (σ ₁)	0	-	180	145	100	61	23	8	1.7	0.03		[21]	
H ₂ , H ₂ ⇒ H ₂ , H ₂ ^r (J = 0, 0 → 0, 2)	0.045	-	2.5	10	30	35	14	4	0.8			[21]	
H ₂ , H ₂ ⇒ H ₂ , H ₂ ^r (J = 0, 0 → 2, 2)	0.09	-	0.01	0.7	8	40	37	14	3	0.06		[21]	
H ₂ , H ₂ ⇒ H ₂ , H ₂ ^r (J = 0, 0 → 0, 4)	0.15	-	-	0.01	1	5.5	6	2	0.3			[21]	
H ₂ , H ₂ ⇒ H ₂ ⁺ , ...	15.4	-	-	-	-	-	-	0.06	1.2	4.2		[21]	
H ₂ , H ₂ ⇒ H ⁺ , H, ...	19.9	-	-	-	-	-	-		0.01	0.5		[21]	
H ₂ ⁺ , H ₂ ⇒ H ₂ ⁺ , H ₂	0						19	12	5			[30]	
H ₂ ⁺ , H ₂ ⇒ H ₂ ⁺ , H ₂ ^v (v = 0 → 1)	0.516	-	-	-	0.16	2.5	12	15	12	5.3		[21]	
H ₂ ⁺ , H ₂ ⇒ H ₂ ⁺ , H ₂	0				21	16	13.5	10.5				[30]	
H ₂ ⁺ , H ₂ ⇒ H ₂ ⁺ , H ₂	0					117	101	85	56	54	34	[25]	
H ₂ ⁺ , H ₂ ⇒ H ₃ ⁺ , H			550	320	140	32	0.1					[21]	
H ₂ ⁺ , H ₂ ⇒ H ⁺ , H, H ₂						4	7	7	9	15.5		[21]	
H ₂ ⁺ , H ₂ ⇒ H ₂ ⁺ , ...	0		4.6	10	38	106	100	88	78	59		[21]	
H ₃ ⁺ , H ₂ ⇒ (σ ₁)	0		500	285	175	95	36	10	1.9	0.04		[21]	
H ₃ ⁺ , H ₂ ⇒ H ⁺ , ...	4	-	-	-	-	-	0.35	0.55	0.8	3.7		[21]	
H ₃ ⁺ , H ₂ ⇒ H ₂ ⁺ , ...	4	-	-	-	-	-	0.55	1.3	1.6	6.3		[21]	
H ₃ ⁺ , H ₂ ⇒ H, ...	4.5	-	-	-	-	-	0.3	1.5	5.5	37		[21]	
H ₃ ⁺ , H ₂ ⇒ H ₂ , ...	4	-	-	-	-	-	0.3	1.5	5.5	22		[21]	

Tableau 4.6 : Sections efficaces pour les collisions atomiques et moléculaires dans l'hydrogène.

Énergies en eV, sections efficaces en 10^{-17} cm^2 , H_2^r niveau de rotation, H_2^v niveau de vibration, σ_1 section efficace de transfert de quantité de mouvement.

N_1 particules de type 1 ont traversé la cible et on écrit la probabilité de réaction sous la forme

$$\frac{dN_1}{N_1} = n_2 \sigma dx \quad (4.23)$$

où n_2 est la densité des particules dans la cible et dx l'épaisseur traversée ; σ est appelée section efficace totale relative à la réaction considérée. Le qualificatif total souligne le fait que l'on a compté toutes les réactions produites sans spécifier comment les particules produites se partagent l'énergie cinétique restante et quelles sont les directions de leurs vitesses après la collision.

4.5.2 Taux de réaction

Dans l'expérience idéale que nous venons de décrire on suppose implicitement que les vitesses d'agitation thermique des particules 2 dans la cible sont négligeables devant la vitesse des particules 1 incidentes. En fait dans les problèmes de théorie cinétique la situation est différente : les particules 1 ont une fonction de distribution des vitesses $f_1(\vec{w}_1)$, les particules 2 une fonction de distribution des vitesses $f_2(\vec{w}_2)$; nous nous proposons de calculer le nombre de réactions produites par unité de temps dans un élément de volume $\underline{dr} = S dx$. Pour cela nous sélectionnons, par la pensée, les particules 1 dont la vitesse est dans \underline{dw}_1 autour de la moyenne \vec{w}_1 et les particules 2 dont la vitesse est dans \underline{dw}_2 autour de \vec{w}_2 . On a ainsi deux faisceaux de particules quasi monocinétiques qui se croisent dans le volume \underline{dr} considéré [Fig. 4.2(b)] ; le nombre de réactions produites ne dépendant pas du repère dans lequel on se place pour compter, il revient au même de se placer dans un repère accompagnant les particules 2 et de considérer que le faisceau 1 bombarde les particules 2 avec la vitesse relative $g = |\vec{w}_1 - \vec{w}_2|$. La probabilité de réaction pour une particule 1 qui traverse dx peut alors s'écrire d'après (4.23) :

$$f_2(\vec{w}_2) \underline{dw}_2 \sigma dx \quad (4.24)$$

où σ est fonction de la vitesse relative g . Le nombre de particules 1 qui traversent la cible pendant un intervalle de temps dt est :

$$f_1(\vec{w}_1) \underline{dw}_1 g S dt \quad (4.25)$$

Le nombre probable de réactions produites dans la cible par unité de temps et par unité de volume par les deux faisceaux qui se croisent est donc :

$$\frac{dN}{dr dt} = \sigma g f_1(\vec{w}_1) f_2(\vec{w}_2) \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \quad (4.26)$$

Si maintenant on tient compte de l'ensemble des particules 1 et 2 de vitesses quelconques on obtient par intégration sur \vec{w}_1 et \vec{w}_2 le taux global de réaction

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{nombre/cm}^3 \text{ s}} = \int \sigma g f_1 f_2 dw_1 dw_2 \quad (4.27)$$

On peut faire apparaître les densités n_1 et n_2 pour souligner le fait que le *taux de réaction* est proportionnel au produit $n_1 n_2$:

$$\frac{dn}{dt} = K n_1 n_2 \quad (4.28)$$

avec

$$K = \langle \sigma g \rangle = \frac{\int \sigma g f_1 f_2 dw_1 dw_2}{n_1 n_2} \quad (4.29)$$

Rappelons à nouveau que dans ces diverses formules σ est fonction de g seulement. Dans le cas d'une réaction endoénergétique $\sigma(g)$ s'annule pour les valeurs de g inférieures à la valeur de seuil définie par la relation (4.23).

Dans les calculs de physico-chimie des gaz on simplifie souvent les formules ci-dessus en faisant les deux hypothèses suivantes :

- les deux fonctions de distribution f_1 et f_2 sont deux maxwelliennes de même température T ;
- la section efficace σ est pratiquement constante sur la gamme de valeurs de g correspondant aux deux fonctions f_1 et f_2 .

Ces deux hypothèses sont souvent raisonnables pour les réactions entre particules lourdes (atomes, molécules) mais généralement complètement fausses pour les réactions produites par les électrons. Si on les suppose vérifiées, on peut alors effectuer facilement l'intégrale (4.29) (cf. problème P4-1) et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \sigma g \rangle &= \left(\frac{8\kappa T}{\pi \mu} \right)^{1/2} \int_0^\infty x e^{-x} \sigma(g) dx \\ x &= \mu g^2 / 2\kappa T \end{aligned} \quad (4.30)$$

où μ est la masse réduite du système des deux particules 1 et 2. La formule ci-dessus permet de déduire une valeur de la section efficace d'une réaction à partir de la mesure des deux densités n_1 , n_2 , de la température T et du taux de réaction macroscopique $n_1 n_2 \langle \sigma g \rangle$. La valeur ainsi déterminée est une valeur moyenne de $\sigma(g)$ sur la distribution des vitesses relatives déterminée par f_1 et f_2 . On considère aussi souvent qu'elle représente la valeur $\sigma(g_m)$ prise par σ pour la valeur moyenne

$$g_m = (8\kappa T / \pi \mu)^{1/2} \quad (4.31)$$

de la vitesse relative. En faisant alors varier T , on a déduit de façon très grossière la loi de variation de σ en fonction de g .

Donnons enfin deux ordres de grandeurs typiques :

- pour des collisions entre atomes et/ou molécules on aura typiquement :

$$g = 3 \times 10^4 \text{ cm/s}$$

$$\sigma = 3 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$$

$$\langle \sigma g \rangle \sim 10^{-11} \text{ cm}^3/\text{s}$$

- pour des collisions électrons neutres :

$$g = 6 \times 10^7 \text{ cm/s (pour } \kappa T_e = 1 \text{ eV)}$$

$$\sigma = 1.3 \times 10^{-17} \text{ cm}^2$$

$$\langle \sigma g \rangle \sim 10^{-9} \text{ cm}^3/\text{s}$$

4.6 Collisions inélastiques ternaires

Les collisions ternaires sont beaucoup plus difficiles à décrire que les collisions binaires et elles n'ont été qu'assez peu étudiées en théorie cinétique. Nous devons donc nous contenter de remarques assez simples.

Pour une réaction ternaire du type 123/45... on peut essayer de généraliser la notion de section efficace totale en écrivant une formule analogue à (4.26). Pour cela on peut en appelant $f_1(\vec{w}_1)$, $f_2(\vec{w}_2)$, $f_3(\vec{w}_3)$ les fonctions de distribution des particules 1, 2 et 3 considérer par la pensée trois faisceaux quasi monocinétiques de vitesses \vec{w}_1 , \vec{w}_2 , \vec{w}_3 extraits de ces distributions et écrire le nombre de réactions 123/45... que produisent ces faisceaux par unité de temps et de volume du gaz sous la forme :

$$\frac{dN}{dt d\tau} = k_3(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) f_1 f_2 f_3 d\vec{w}_1 d\vec{w}_2 d\vec{w}_3 \quad (4.32)$$

La quantité ainsi définie est un taux de réaction différentiel ; le coefficient k_3 est une constante de réaction différentielle. En intégrant sur \vec{w}_1 , \vec{w}_2 , \vec{w}_3 , on obtient le taux de réaction total

$$\left(\frac{dn}{dt} \right)_{123/45\dots} = K_3 n_1 n_2 n_3 \quad (4.33)$$

où

$$K_3 = \langle k_3 \rangle = \frac{\int k_3 f_1 f_2 f_3 d\vec{w}_1 d\vec{w}_2 d\vec{w}_3}{n_1 n_2 n_3} \quad (4.34)$$

est la constante de réaction totale pour la réaction ternaire 1, 2, 3/ 4, 5.... On vérifie facilement que K_3 et k_3 ont les dimensions $L^6 T^{-1}$. Les quantités correspondantes K_2 et k_2 pour une réaction binaire avaient les dimensions $L^3 T^{-1}$; remarquant que k_2 est *a priori* proportionnel à la vitesse relative g_{12} nous avons posé :

$$k_2 = \sigma_{12} g_{12} \quad (4.35)$$

Dans le cas des collisions ternaires on ne peut plus faire de façon univoque une telle décomposition.

Dans la physico-chimie des gaz on utilise souvent un modèle dit du "troisième corps stabilisateur". Pour cela on considère que la réaction 123/45... peut s'analyser comme

suit : deux des particules, 1 et 2 par exemple, produisent par une réaction primaire un complexe intermédiaire $(12)''$; ce complexe instable se redécompose normalement pour redonner les particules initiales 1 et 2. Le rôle du troisième corps 3 est donc de stabiliser le complexe $(12)''$, par exemple en le faisant passer en un état $(12)'$ d'énergie légèrement inférieure qui ne peut plus se décomposer en 1 et 2 mais éventuellement évoluer vers un état stable (12) , ou se dissocier selon un autre mode en conduisant aux particules 4, 5, ... Dans ce modèle, le taux différentiel de la réaction ternaire 123/45... peut donc s'écrire :

$$\frac{dN}{drdt} = (\sigma''_{12} g_{12} f_1 f_2 dw_1 dw_2) [P'_{12}(g_{123}) f_3 dw_3] P'_{12} \rightarrow 4, 5, \dots \quad (4.36)$$

où le premier facteur représente le taux différentiel de production des complexes $(12)''$, le deuxième la probabilité de leur stabilisation vers l'état $(12)'$ et le troisième la probabilité de la réaction unimoléculaire de dissociation $(12)' \rightarrow 4, 5, \dots$. Pour évaluer P'_{12} nous caractériserons le complexe intermédiaire $(12)''$ par sa durée de vie τ''_{12} vis-à-vis de la décomposition en 1 et 2 et sa section efficace $\sigma_s(\vec{g}_{123})$ vis-à-vis de la stabilisation en $(12)'$ par une particule 3 où \vec{g}_{123} désigne la vitesse relative de la particule 3 par rapport au centre de gravité des particules 1 et 2, avant la collision stabilisatrice. Il est alors raisonnable d'écrire pour la probabilité de stabilisation différentielle :

$$P'_{12}(\vec{g}_{123}) f_3 dw_3 = \sigma_s g_{123} f_3 dw_3 \tau''_{12} \quad (4.37)$$

En effet le deuxième membre est le nombre de particules 3 (de vitesse relative g_{123}) qui traverse une surface σ_s pendant la durée de vie τ''_{12} de chaque complexe $(12)''$ (en toute rigueur σ_s peut dépendre de l'orientation de \vec{g}_{123}). Nous obtenons donc ainsi :

$$P'_{12}(\vec{g}_{123}) = \sigma_s g_{123} \tau''_{12} \quad (4.38)$$

On remarque au passage que P'_{12} a les dimensions L^3 ; il représente donc un volume efficace d'interaction du complexe $(12)''$ avec la particule stabilisante 3 : la probabilité de stabilisation est le nombre probable de particules 3 que l'on trouve dans ce volume. On obtient donc finalement :

$$K_3 = \langle k_3 \rangle = \langle \sigma''_{12} g_{12} (\sigma_s g_{123} \tau''_{12}) P_{(12)'} \rightarrow 4, 5, \dots \rangle \quad (4.39)$$

Bien entendu les formules ci-dessus ne sont valables que si la probabilité de stabilisation est inférieure à l'unité, soit :

$$\int P'_{12}(\vec{g}_{123}) f_3 dw_3 < 1 \quad (4.40)$$

Aux fortes densités de la particule 3 cette inégalité est violée (il y a plus d'une particule 3 dans le volume d'interaction P'_{12}) ; on doit alors considérer que la probabilité de stabilisation se sature à l'unité. Le taux de la réaction ternaire se sature lui-même à la valeur indépendante de n_3 :

$$\left(\frac{dn}{dt} \right)_{123/45\dots} = K'_2 n_1 n_2 \quad (4.41)$$

où

$$K'_2 = \lim(k_3 n_3)_{n_3 \rightarrow \infty} = \langle \sigma''_{12} g_{12} P_{(12)'} \rightarrow 4, 5, \dots \rangle \quad (4.42)$$

est une pseudo-constante de réaction binaire.

La discussion précédente suggère que dans les gaz les réactions exothermiques seront très souvent ternaires, le troisième corps stabilisateur emmenant sous forme d'énergie cinétique une fraction importante de l'énergie produite, la quasi-totalité si ce troisième

corps est plus léger que les autres, c'est-à-dire en pratique un électron. Trois exemples typiques de réactions ternaires dans les gaz ionisés sont les suivantes :

$\text{He}^*, \text{He}, \text{He} \rightarrow \text{He}_2^*, \text{He}$ (formation des métastables moléculaires),

$e, e, \text{H}^+ \rightarrow e, \text{H}^*$ (recombinaison $e - e - i$),

$e, \text{He}^+, \text{He} \rightarrow \text{He}^*, \text{He}$ (recombinaison $e - i - o$).

Pour terminer, nous pouvons comme pour les collisions binaires donner des ordres de grandeur typiques pour les constantes de réaction K_3 :

- Pour des *collisions* (A, B, C) entre particules lourdes (atomes, molécules, ions,...):

$$\sigma''_{12} g_{12} \sim 10^{-11} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1},$$

$$P'_{12} \sim (10^{-7})^3 \text{ cm}^3 = 10^{-21} \text{ cm}^3,$$

$$K_3 \sim 10^{-32} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1},$$

$$\text{densité de saturation } n_3 = 10^{21} \text{ cm}^{-3}.$$

- Pour des *collisions* (e, A, B) entre électrons et particules lourdes stabilisées par une autre particule lourde :

$$\sigma''_{12} g_{12} \sim 10^{-9} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \text{ (pour } \kappa T_e = 1 \text{ eV)},$$

$$P_{45} \sim 10^{-21} \text{ cm}^3,$$

$$K_3 \sim 10^{-30} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1},$$

$$\text{densité de saturation } n_3 = 10^{21} \text{ cm}^{-3}.$$

On remarque que les densités de saturation trouvées dans ces deux cas typiques sont élevées : environ 40 fois le nombre de Loschmidt, correspondant donc à $T \sim 300 \text{ K}$ à des pressions partielles de 40 atmosphères. On voit donc que le phénomène de saturation des réactions ternaires ne s'observe pas en général dans les gaz ionisés.

4.7 Information sur les sections efficaces et les taux de réaction

Les valeurs des sections efficaces et des taux de réactions sont des données de base de la physique des gaz et des plasmas. Cet ensemble est très complexe, comme on peut le voir sur les tableaux 4.4 (qui est un catalogue très simplifié des processus) et 4.5, 4.6 qui rassemblent quelques résultats typiques concernant les réactions les plus importantes dans l'hydrogène. En principe on peut utiliser la règle de microréversibilité (cf. section 14.8 et problème P4-2) pour déduire les valeurs de la section efficace $\sigma(34/12)$ d'un certain processus, des valeurs de la section efficace $\sigma(12/34)$ du processus inverse.

Néanmoins la complexité de cet ensemble de données de base pose maintenant un problème de recherche et de traitement des informations. Il y a une trentaine d'années, il était possible de rassembler l'information nécessaire et disponible dans un livre (cf. [300]). Ce n'est plus possible aujourd'hui. L'information est maintenant collectée, traitée, évaluée et distribuée par des centres de données spécialisés, qui ont créé et entretiennent des bases de données sur ordinateur. Pour les sections efficaces utiles en physique des plasmas, les centres de données les plus actifs sont :

- NIST-JILA : Boulder US [14]
- ORNL : Oak-Ridge US [15]
- GAPHYOR : Orsay FRANCE [16]
- NIFS : Nagoya JAPON [17]
- JAERI : Tokaimura JAPON [18]

Ils sont groupés dans un réseau cordonné par l'AIEA de Vienne. Chacun de ces centres édite une série de rapports qui publient des mises à jour des bases de données. Certaines de ces bases, en particulier GAPHYOR, peuvent être consultées en ligne en utilisant les réseaux internationaux de transmission de données.

4.8 Problèmes

P4-1 Constante de réaction pour deux distributions maxwelliennes

En supposant que les particules d'espèce 1 et 2 ont toutes les deux une distribution de vitesses maxwellienne, montrer que la constante de réaction k pour une réaction donnée est reliée à la section efficace correspondante par la relation :

$$K = \left(\frac{8\kappa T}{\pi\mu} \right)^{1/2} \int_0^\infty x e^{-x} \sigma(g) dx \quad (\text{avec } x = \mu g^2 / 2\kappa T) \quad (4.43)$$

Trouver une approximation simple de k quand σ est presque constant.

P4-2 *Relation graphique entre les courbes de sections efficaces inélastique et superélastique

Considérons les deux réactions inverses :

- collision inélastique



- collision superélastique



Soit σ_{01} la section efficace pour le processus direct (4.44) et σ_{10} la section efficace pour le processus inverse (4.45). On peut montrer, à partir de considérations générales (cf. section 14.8), la loi de microréversibilité (dite aussi du bilan détaillé) :

$$v^2 \sigma_{01}(v) g_0 = (v')^2 \sigma_{10}(v') g_1 \quad (4.46)$$

où g_0 et g_1 sont les poids statistiques de He et He*, tandis que v et v' sont deux valeurs de la vitesse des électrons reliées par la loi de conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} m_e v'^2 + E_{01} \quad (4.47)$$

et que E_{01} est la différence d'énergie entre He* et He.

Montrer que la formule (4.46) conduit à une relation graphique entre les deux courbes $\sigma_{01}(u_e)$ et $\sigma_{10}(u_e)$, où u_e est l'énergie de l'électron. Montrer, en particulier, qu'il existe une relation graphique simple entre les pentes des deux courbes au seuil.

Chapitre 5

Propriétés macroscopiques des gaz faiblement ionisés

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier les propriétés des gaz faiblement ionisés dans le cadre d'une analyse macroscopique basée sur les équations hydrodynamiques et sur une description simplifiée des phénomènes de collision. Le point de départ sera la définition et l'évaluation des coefficients de transport (mobilité et diffusion des électrons et des ions). À vrai dire ces coefficients devraient être calculés de manière plus exacte au moyen des équations de la théorie cinétique microscopique : c'est ce que nous ferons au chapitre 12. L'analyse assez simple que nous faisons pour l'instant sera cependant très utile pour décrire schématiquement des situations expérimentales un peu complexes : problèmes avec conditions aux limites, couplage entre les diverses espèces de particules, production et disparition des gaz ionisés (décharges dans les gaz, recombinaison).

Dans les deux premières sections nous étudierons tout d'abord les deux coefficients de transport fondamentaux des électrons et des ions, la mobilité électrique et le coefficient de diffusion : pour les électrons en 5.2 et les ions en 5.3.

Dans la section 5.4 nous montrerons que le problème de la diffusion doit être traité en tenant compte des conditions aux limites et nous définirons les modes propres de diffusion d'une cavité. Nous en déduirons dans la sec-

tion 5.5 une analyse simple de l'amorçage et de l'entretien d'une décharge HF dans une cavité.

Nous montrerons ensuite en 5.6 que les champs de charge d'espace couplent en général la diffusion des électrons à celle des ions, et cela conduit au phénomène appelé diffusion ambipolaire. L'application de cette théorie aux colonnes cylindriques de plasma sera ensuite discutée dans les sections 5.7 et 5.8.

Nous terminerons par une analyse simple dans la section 5.9 des phénomènes de recombinaison en volume et d'attachement électronique qui conduisent à des régimes de décharge différents du régime de diffusion étudié dans les sections précédentes.

5.2 Mobilité et diffusion libre des électrons

5.2.1 Équation de transport de la quantité de mouvement des électrons

Dans un gaz faiblement ionisé, on peut écrire des équations hydrodynamiques, séparément pour chacune des composantes du gaz : électrons, ions, neutres. Celle qui nous intéresse ici est l'équation de transport de la quantité de mouvement du gaz d'électrons qui s'écrit :

$$n_e m_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \nabla \right) \vec{v}_e = n_e q_e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) - n_e m_e \nabla \varphi - \nabla \cdot \bar{\bar{\Psi}}_e + \vec{P}_e \quad (5.1)$$

Dans cette équation n_e et \vec{v}_e sont la densité et la vitesse macroscopique du fluide électronique, $\bar{\bar{\Psi}}_e$ le tenseur de pression cinétique de ce gaz, \vec{E} et \vec{B} les champs électriques et magnétiques, φ le potentiel du champ de gravitation, et \vec{P}_e le terme d'interaction par collision. Cette équation sera établie et discutée plus en détail au chapitre 9. Sa signification physique est cependant assez intuitivement compréhensible : le premier membre représente le produit *masse* \times *accélération* des électrons contenus dans une unité de volume et chacun des quatre termes du deuxième membre une force par unité de volume appliquée au gaz d'électrons :

- $n_e q_e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B})$, la force électromagnétique,
- $-n_e m_e \nabla \varphi$, la force gravitationnelle (qu'on peut en général négliger à l'échelle d'un plasma de laboratoire),
- $-\nabla \cdot \bar{\bar{\Psi}}_e$, la résultante des forces de pression (qu'on écrira souvent $-\nabla p_e$ en supposant la pression isotrope),

- \vec{P}_e la force de frottement qui, dans le cas des gaz faiblement ionisés, se réduit à la force de frottement sur les neutres \vec{P}_{eo} .

Nous montrerons au chapitre 12 que cette dernière force peut se mettre sous la forme¹ :

$$\vec{P}_{eo} = -n_e m_e \langle \overline{\nu_{eo}} \rangle \cdot (\vec{v}_e - \vec{v}_o) \quad (5.2)$$

où \vec{v}_o est la vitesse macroscopique du fluide neutre et $\langle \overline{\nu_{eo}} \rangle$ une certaine moyenne en général tensorielle de la fréquence de collision électron-neutre. En pratique nous nous placerons presque toujours dans des cas où \vec{v}_o est nulle et où $\langle \overline{\nu_{eo}} \rangle$ est un scalaire que nous écrirons simplement $\overline{\nu_{eo}}$. Dans ces conditions la force de frottement \vec{P}_{eo} peut se mettre sous la forme simple dite de Langevin :

$$\vec{P}_{eo} = -n_e m_e \overline{\nu_{eo}} \vec{v}_e \quad (5.3)$$

Mais il faut bien souligner le fait que ν_{eo} est une certaine moyenne sur les vitesses électroniques de la fréquence de collision microscopique $\nu_1(w_e)$ des électrons de vitesse w_e avec les neutres. Cette remarque met en évidence le *caractère incomplet de la description macroscopique* d'un plasma ; les coefficients des termes qui dans les équations macroscopiques sont dus aux collisions ne peuvent être clairement définis que si on suppose connu l'état microscopique du plasma.

5.2.2 Mobilité des électrons

Ayant ainsi mis le terme de collision sous la forme très simple (5.3), on peut étudier la solution de l'équation de transport (5.1) dans des cas particuliers simples ; tout d'abord, celui d'un gaz homogène indéfini dans lequel on établit un champ électrique et un champ magnétique uniformes ; si on se limite au régime stationnaire, l'équation se réduit alors à :

$$n_e q_e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) = n_e m_e \langle \overline{\nu_{eo}} \rangle \cdot \vec{v}_e \quad (5.4)$$

Cette équation en \vec{v}_e se résout facilement par projection sur trois axes de coordonnées ; dans le cas encore plus simple où \vec{B} est nul, $\langle \overline{\nu_{eo}} \rangle$ est scalaire et l'on obtient :

$$\vec{v}_e = \mu_e \vec{E} \quad (5.5)$$

où

$$\mu_e = \frac{q_e}{m_e \overline{\nu_{eo}}} \quad (5.6)$$

1. Au chapitre 12 nous utiliserons la notation ν_1 au lieu de ν_{eo} , pour des raisons qui seront expliquées alors.

est la mobilité des électrons. La théorie cinétique développée au chapitre 12 permet de calculer $\overline{\nu_{eo}}$ en fonction de la section efficace de transfert de quantité de mouvement électron-molécule (cf. problème P12-11). De façon générale la mobilité μ_e varie avec E . Plus précisément, si on désigne par n_o et T_o la densité et la température des molécules, $\mu_e n_o$ est une fonction de E/n_o et de T_o , ou de E/p si l'on suppose T_o fixée.

Le paramètre E/p_{300} (ou E/n_o) est le paramètre de Townsend. Dans les publications anciennes on utilisait la première expression E/p_{300} en supposant que la température T_o était égale à 300 K, ou sinon que p_{300} était la pression réduite à la température 300 K ; l'unité utilisée était en général le $\text{V.cm}^{-1}.\text{torr}^{-1}$. En fait le bon paramètre est E/n_o qui fait intervenir directement la densité n_o sans passer par la pression réduite, et l'unité généralement utilisée est alors le V.cm^2 . On utilise aussi pour avoir des nombres plus près de l'unité le Townsend avec :

$$1 \text{ Townsend} = 1 \text{ Td} = 10^{-17} \text{ V.cm}^2 \quad (5.7)$$

et l'on a la relation de conversion :

$$(E/n_o)_{\text{Townsend}} = 3.11 \times (E/p_{300})_{\text{V.cm}^{-1}.\text{torr}^{-1}} \quad (5.8)$$

Nous montrerons au chapitre 12 que l'on a la loi générale :

$$\mu_e = \frac{1}{n_o} f \left(\frac{E}{n_o}, T_o \right) \quad (5.9)$$

La raison pour laquelle μ_e dépend du champ électrique est que lorsque E varie, la fonction de distribution des vitesses des électrons (et en particulier leur température électronique) varie, et qu'il en résulte une variation de la fréquence de collision moyenne $\overline{\nu_{eo}}$. On pourrait donc *a priori* penser que μ_e dépend des trois paramètres E , n_o et T_o . La formule (5.9) est ce qu'on appelle une loi de similitude : elle montre que l'on peut éliminer l'un des paramètres en utilisant une représentation correcte de l'ensemble des données. En effet, elle conduit à introduire, pour exprimer les valeurs des mobilités, la *mobilité réduite* :

$$\mu_{e0} = \mu_e \frac{n_o}{n_L} \quad (5.10)$$

μ_{e0} est la valeur de la mobilité ramenée aux conditions normales de température et de pression : $n_L = 2.69 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ est la densité des molécules d'un gaz parfait dans ces conditions (nombre de Loschmidt). La mobilité réduite μ_{e0} n'est fonction que de E/n_o et de T_o .

Les variations de μ_{e0} avec E/n_o sont liées aux variations de la température électronique T_e ; lorsque E/n_o tend vers zéro, T_e tend vers

T_o et μ_{e0} tend vers une valeur limite $\mu_{e0}(0)$ qui ne dépend que de T_o ; le domaine des valeurs de E/n_o où μ_{e0} garde approximativement cette valeur limite est assez étroit. Les mobilités électroniques peuvent se mesurer [40] directement en déterminant le temps de transit d'un paquet d'électrons entre deux points donnés.

Les figures 5.1 à 5.2(b) représentent quelques résultats : 5.1 montre l'effet de la température dans le cas de He ; 5.2(a) et 5.2(b) représentent les variations de μ_{e0} en fonction de E/n_o pour He, Ne, Ar, H₂, N₂ . On y remarque que dans l'argon la mobilité passe par un maximum pour E/n_o voisin de 10^{-3} ; ce maximum est dû au fait que la section efficace σ_1 dans l'argon passe par un minimum (effet Ramsauer) lorsque l'énergie de l'électron est voisine de 0,25 eV ; le maximum observé sur μ_e correspond au passage de la température électronique par une valeur telle qu'un grand nombre d'électrons du gaz ait une énergie de l'ordre de 0.25 eV ($kT_e \sim 0.25$ eV). Le même effet s'observe avec Kr et Xe [42].

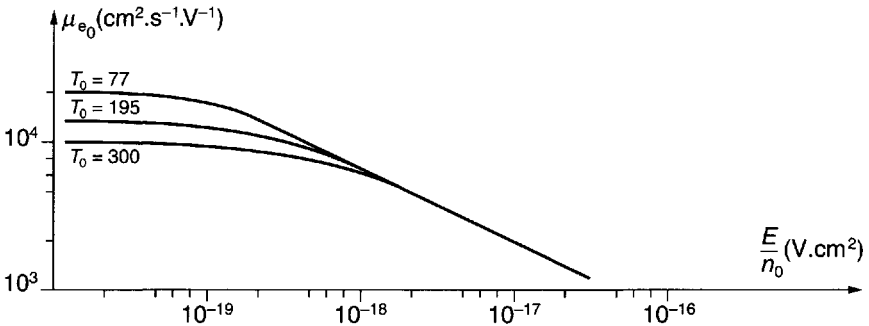


Figure 5.1 : Mobilité réduite des électrons dans He à diverses températures du gaz neutre [41].

Le tableau 5.1 donne pour divers gaz la valeur limite $\mu_{e0}(0)$ vers laquelle tend μ_{e0} lorsque E/n_o tend vers zéro. Lorsque $\mu_{e0} = \mu_{e0}(0)$ les électrons sont en équilibre thermique avec les molécules ($T_e = T_o$). On a indiqué également sous le vocable $(E/n_o)_{10\%}$ la valeur de E/n_o au-delà de laquelle, du fait de l'échauffement des électrons, on a :

$$|\mu_{e0} - \mu_{e0}(0)| > 0.1\mu_{e0}(0) \quad (5.11)$$

Le cas du néon est singulier : la valeur extrapolée $\mu_{e0}(0)$ est mal connue parce que le néon semble posséder un minimum de Ramsauer pour une énergie très voisine de zéro.

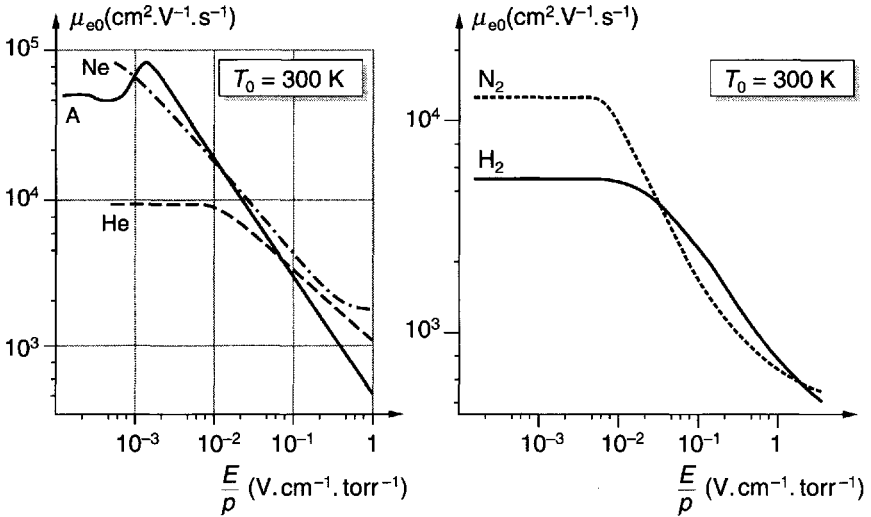


Figure 5.2 : Mobilité réduite des électrons dans divers gaz [41].

- (a) He, Ne, Ar.
(b) H₂, N₂.

Gaz	He	Ne	Ar	Kr	Xe	H ₂	N ₂	CO	CO ₂	H ₂ O
$\mu_{e0}(0)/10^3$	9.6	> 100	50	4.9	1.44	5.7	14.1	7.8	0.67	0.088
$(E/n_o)_{10\%}$	2.10^{-2}	?	10^{-3}	10^{-2}	3.10^{-2}	10^{-1}	3.10^{-2}	10^{-1}	10	30

Tableau 5.1 : Valeurs de la mobilité réduite limite $\mu_{e0}(0)$ ($\text{cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$) et de $[E/n_o]_{10\%}(\text{Td})$ pour $T_0 = 293^\circ \text{ K}$ [40, 41].

5.2.3 Diffusion libre des électrons

Supposons maintenant qu'il n'y ait pas de champ électromagnétique, qu'on puisse négliger la force de gravité mais qu'il y ait un gradient de pression électronique dans le gaz (la densité et la température des molécules sont en revanche toujours supposées uniformes). Cherchons le régime quasi stationnaire qui s'établit au bout d'un certain temps. Si on suppose de plus que le gaz est presque isotrope (hypothèse des petites perturbations), on peut en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur ignorer le terme quadratique en $(\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v}_e$ et supposer que la pression est scalaire. On

obtient ainsi l'équation :

$$n_e m_e < \overline{\overline{\nu_{eo}}} > \cdot \vec{v}_e = -\nabla \cdot \overline{\overline{\Psi}}_e = -\nabla(n_e \kappa T_e) \quad (5.12)$$

où T_e est la température cinétique des électrons. Nous supposons pour poursuivre le calcul que $< \overline{\overline{\nu_{eo}}} >$ est scalaire (hypothèse qui paraît liée au fait que l'état du gaz est supposé presque isotrope). On peut alors déduire de (5.12) l'expression du flux d'électrons :

$$n_e \overrightarrow{v}_e = -\frac{1}{m_e \overline{\overline{\nu_{eo}}}} \nabla(n_e \kappa T_e) \quad (5.13)$$

Généralement, la température électronique pourra varier d'un point à un autre du gaz ; toutefois dans de nombreux cas on fait l'hypothèse que T_e reste à peu près constant et l'équation de diffusion (5.13) se met alors sous la forme simplifiée :

$$n_e \overrightarrow{v}_e = -D_e \nabla n_e \quad (5.14)$$

où

$$D_e = \frac{\kappa T_e}{m_e \overline{\overline{\nu_{eo}}}} \quad (5.15)$$

D_e est appelé le coefficient de diffusion "libre" des électrons. La théorie cinétique permet d'explicitier la fréquence moyenne $\overline{\overline{\nu_{eo}}}$ qui figure dans cette formule. Elle est en général différente de celle qui figure dans (5.6) (cf. problème P12-11).

5.2.4 Relation d'Einstein. Température de diffusion

En formant le rapport des deux formules (5.15) et (5.6) on obtient entre les deux principaux coefficients de transport D_e et μ_e la relation :

$$\frac{D_e}{\mu_e} = \frac{\kappa T_e}{q_e} \quad (5.16)$$

Cette relation qui ne contient plus $\overline{\overline{\nu_{eo}}}$ est connue sous le nom de relation d'Einstein. Elle n'est en général qu'approchée parce qu'*a priori* les valeurs effectives $\overline{\overline{\nu_{eo}}}$ qui figurent dans les formules (5.15) et (5.6) sont différentes. Cependant dans certaines expériences on mesure directement le coefficient D_e/μ_e (on produit un paquet d'électrons, on le fait dériver sous l'action d'un champ électrique en même temps qu'il augmente de volume sous l'effet de la diffusion). On a ainsi une mesure facile d'une température T'_e définie par :

$$\frac{D_e}{\mu_e} = \frac{\kappa T'_e}{q_e} = \frac{u_e}{q_e} \quad (5.17)$$

où T'_e sera appelée la température de diffusion ; $u_e = \kappa T'_e$ est souvent appelée l'énergie caractéristique. La théorie cinétique du chapitre 12 permet de préciser dans quelle mesure T'_e diffère de la température cinétique T_e (cf. problème P12-11).

5.3 Mobilité et diffusion libre des ions

On peut faire, pour les ions, les mêmes calculs que pour les électrons en écrivant l'équation de transport de la quantité de mouvement des ions, analogue à (5.1), et en introduisant une fréquence de collision efficace $\overline{\nu}_{io}$ définie par la formule de frottement de Langevin :

$$\vec{P}_{io} = -n_i m_i \overline{\nu}_{io} \vec{v}_i \quad (5.18)$$

On peut ainsi calculer la mobilité μ_i et le coefficient de diffusion libre D_i des ions. Les formules qui expriment ces deux grandeurs sont analogues à (5.6) et (5.15).

En ce qui concerne les *mobilités ioniques* on peut montrer (cf. [43]) comme pour μ_e que l'on a en général :

$$\mu_i = \frac{1}{n_o} f \left(\frac{E}{n_o}, T_o \right) \quad (5.19)$$

ce qui conduit à définir une mobilité réduite :

$$\mu_{i0} = \mu_i \frac{n_o}{n_L} \quad (5.20)$$

La dépendance de μ_{i0} avec E/n_o est moins prononcée que celle de μ_{e0} . La figure 5.3 montre par exemple les variations de μ_{i0} en fonction de E/n_o pour le cas typique de l'ion He^+ dans He [43]. On y voit un long palier sur lequel μ_{i0} reste égal à $\mu_{i0}(0)$. Cette situation tient au fait que l'échange d'énergie avec les neutres est beaucoup plus facile pour les ions que pour les électrons, de sorte que la température ionique T_i reste voisine de T_e pour une large gamme de valeurs de E/n_o . Le tableau 5.2 donne les valeurs de $\mu_{i0}(0)$ à $T_o=300$ K pour les couples ion-gaz les plus importants [43]–[46]. On y voit que la mobilité ionique est élevée, si l'ion ou le neutre constituant le gaz sont légers (la plus forte valeur est $42.7 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ pour H^- dans H_2), et faible si l'ion et le neutre sont lourds (la plus faible valeur du tableau est $1.29 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ pour CO_3^- dans CO_2 , mais on aurait 0.56 pour Xe^+ dans Xe [45]). Dans ce tableau on a signalé d'un tiret – les cas où la mobilité n'est pas en principe mesurable parce que le potentiel de production de l'ion est supérieur au potentiel d'ionisation des neutres du

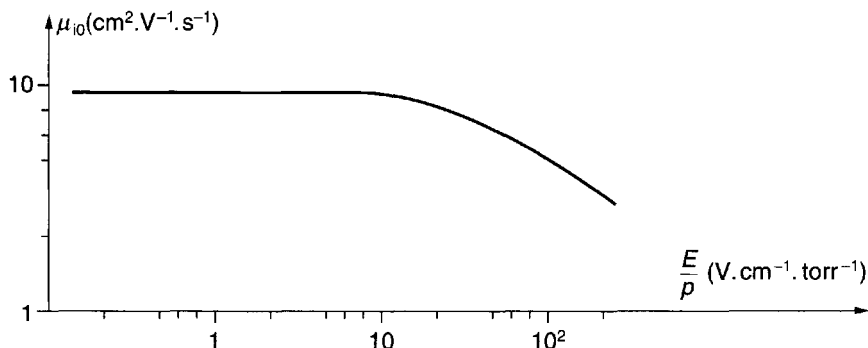


Figure 5.3 : Mobilité réduite de He^+ dans He en fonction de E/n_o [43].

gaz. Dans ces conditions, l'ion en circulant dans le gaz réagit par échange de charge sur les neutres du gaz et se transforme en un ion du gaz (par exemple He^+ circulant dans Ar se transforme très vite en Ar^+).

La théorie des mobilités ioniques est plus difficile que celle des mobilités électroniques. En effet, le modèle de Lorentz que nous développerons au chapitre 12 ne s'applique pas en général car l'on a $m_i \sim m_o$. Une théorie simplifiée a cependant été faite il y a longtemps par Langevin : elle suppose que l'interaction ion-neutre est décrite par le mécanisme du dipôle induit (loi en $1/r^4$; cf. section 3.2). On obtient ainsi [47] la formule simple :

$$\mu_{i0}(0) \text{ (cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}\text{)} = 13.85/(\alpha_o m_{io})^{1/2} = \mu_{pol} \quad (5.21)$$

où α_o est la polarisabilité des neutres du gaz en \AA^3 (tableau 5.3) et m_{io} la masse réduite du système électron-neutre en unités de masse atomique. Sur cette formule on voit que μ_{pol} est plus élevé dans les gaz ou pour les ions légers ($\sim m_{io}^{-1/2}$) et dans les gaz faiblement polarisables ($\sim \alpha_o^{-1/2}$). Ces deux résultats se vérifient facilement sur le tableau 5.2, comme nous l'avons déjà remarqué en ce qui concerne les masses, et où l'on voit en ce qui concerne les polarisabilités que, à masses comparables, les mobilités sont plus fortes dans les gaz rares (atomes à couches complètes peu polarisables) que dans les autres gaz. Il est intéressant d'examiner de façon plus quantitative la validité de la formule de Langevin. Le tableau 5.4 permet à titre d'exemple de faire cette discussion pour des ions circulant dans le néon. Pour éliminer l'effet des masses on y a porté pour chaque couple ion-Ne la quantité $\mu_{i0}(0)(m_{io})^{1/2}$ qui d'après la formule de Langevin devrait être constante et égale à $13.8/(\alpha_o)^{1/2} = 21.3$. On voit que cette règle est en général grossièrement suivie avec un écart systématique d'environ +10% à +30%. Mais on remarque d'autre part que le cas de Ne^+ , c'est-à-dire

Gaz	$IP \Rightarrow$	He 24.6	Ne 21.6	Ar 15.8	N ₂ 15.6	H ₂ 15.4	CO 14	CO ₂ 13.9	O ₂ 12.2	NO 9.25
Ions	IP, EA									
He ⁺	24.6	10.5	-	-	-	-	-	-	-	-
He ₂ ⁺	22.2	16.7	-	-	-	-	-	-	-	-
He ⁺⁺	79	18.5	-	-	-	-	-	-	-	-
Ne ⁺	21.6	19.2	4.09	-	-	-	-	-	-	-
Ne ₂ ⁺	18.3	17.5	6.13	-	-	-	-	-	-	-
Ar ⁺	15.8	21.3	7	1.52	-	-	-	-	-	-
Ar ₂ ⁺	14.1			1.83			-	-	-	-
N ⁺	14.5	19.9		3.3	3.01		-	-	-	-
N ₂ ⁺	15.6	21.0	7.0	2.25	1.86	-	-	-	-	-
N ₃ ⁺					2.26					
N ₄ ⁺	14.6				2.31		-	-	-	-
H ⁺	13.6	32.0	22.3	5.75		16.0			-	-
H ₂ ⁺	15.4	24.5					-	-	-	-
H ₃ ⁺	9	30.8				11.3				
H ⁻	0.7	40.3				42.7				
CO ⁺	14	19.8	6.9	2.24			1.75	-	-	-
C ₂ O ₂ ⁺							1.90			
CO ₂ ⁺	13.9	19.8	6.9	2.14	2.18				-	-
CO ₃ ⁻		16.9		2.40	2.39			1.29	2.51	
CO ₄ ⁻									2.40	
O ⁺	13.6	22.5		3.43					-	-
O ₂ ⁺	12.2	21.8	7.90	2.57					2.14	-
O ₄ ⁺	11								2.08	-
O ⁻	1.47	28.2						1.93	3.20	
O ₂ ⁻	0.45	21.5							2.17	
O ₃ ⁻		18.6		2.42					2.56	
NO ⁺	9.25	21.3								1.91
N ₂ O ₂ ⁺										1.77
F ⁻	3.4	29.3		3.29						
Cl ⁻	3.6	20.3	8.20	2.80	2.87					
Br ⁻	3.4	18.8	6.94	2.32					2.63	
HN ₂ ⁺		19.0		2.56	2.13					
HO ₂ ⁺		19.4			2.76					
H ₃ O ⁺		21.5		3.0		12.6				
HO ⁻	1.83	25								
Hg ⁺	10.4	19.7	5.96	1.86						
Li ⁺	5.39	24.4	10.6	10.6	4.15	12.4			3.96	
Na ⁺	5.14	21.5	8.16	8.16	2.85	12.2		1.67		
K ⁺	4.34	21.5	7.43	7.43	2.53	13.1	2.31	1.45	2.72	2.28

Tableau 5.2 : Valeurs expérimentales (cf. [43][44][45][46]) des mobilités ioniques réduites $\mu_{i0}(0)$ (en $\text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$) pour $T_o = 300^\circ\text{K}$ et $E/n_o = 0$. IP désigne les potentiels d'ionisation de l'ion ou du gaz (eV) et EA les affinités électroniques pour la formation des ions négatifs. Les tirets signalent les cas où la mobilité ne peut pas se mesurer à cause du transfert de charge (voir texte).

Neutre	He	Ne	Ar	N ₂	H ₂	CO	CO ₂	O ₂	NO
$\alpha_o(\text{\AA}^3)$	0.206	0.408	1.65	1.79	0.91	2.0	2.5	1.65	1.78

Tableau 5.3 : Polarisabilité α_o de quelques atomes et molécules neutres (\AA^3).

Ion	Li ⁺	Na ⁺	K ⁺	Cs ⁺	Hg ⁺	Ne ⁺	Ne ₂ ⁺	13.8/ $\sqrt{\alpha_o}$
$\mu_{i0}(0)\sqrt{m_{io}}$	25.3	26.8	27.6	27.4	25.8	12.9	23.7	21.3

Tableau 5.4 : Mobilité ionique et formule de Langevin dans le cas du néon.

des ions circulant dans leur propre gaz, est singulier. On voit en effet que les ions Ne^+ ont une mobilité anormalement basse (d'un facteur de l'ordre de deux) ; autrement dit la section efficace de transfert de quantité de mouvement est anormalement grande dans ce cas ; cela tient au fait que cette section efficace fait intervenir en plus des collisions élastiques Ne^+ , Ne/Ne^+ , Ne les collisions de transfert de charge symétrique² Ne^+ , Ne/Ne , Ne^+ .

La formule de Langevin prévoit enfin que $\mu_{i0}(0)$ doit être indépendant de T_o . Ce résultat est inexact : $\mu_{i0}(0)$ varie avec T_o (cf. par exemple Fig. 5.4). Ce résultat peut être associé à l'existence d'interactions ion-molécule à courte portée n'obéissant plus à la loi en $1/r^4$. On peut cependant montrer [46] que l'effet de ces interactions diminue lorsque T_o décroît et en principe $\mu_{i0}(0)$ devrait tendre vers la mobilité de Langevin μ_{pol} lorsque T_o tend vers zéro. Cette limite est en général masquée par l'apparition dans les gaz à basse température d'amas ioniques (He_3^+ , He_4^+ , ... dans l'hélium).

Les théories plus récentes des mobilités ioniques tiennent compte des forces à courte portée. L'une des plus intéressantes est celle de Viehland

2. La distinction entre les deux espèces de collision peut paraître formelle du fait du caractère indiscernable des deux noyaux Ne qui interviennent ; en fait l'expérience montre que la section efficace différentielle angulaire dans une collision symétrique A^+ , A présente dans le système du centre de gravité deux maxima assez aigus, l'un au voisinage de $\chi = 0$, l'autre au voisinage de $\chi = \pi$; il est naturel de séparer ces deux parties du même phénomène en posant :

$$\sigma_{\text{totale, élastique}} = \int_{\chi=0}^{\pi/2} \sigma(\chi) d\Omega \quad (5.22)$$

$$\sigma_{\text{totale, transfert de charge}} = \int_{\chi=\pi/2}^{\chi=\pi} \sigma(\chi) d\Omega \quad (5.23)$$

et Mason (cf. en [46] une synthèse de ses résultats). Elle conduit dans sa forme la plus simple aux formules approchées :

$$\mu_i = \frac{v_i}{E} = \frac{q_i}{m_i \nu_{io}} \quad (5.24)$$

avec :

$$\overline{\nu_{io}} = n_o \left[\frac{8}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\kappa T_{eff}}{m_i \left(1 + \frac{m_i}{m_o} \right)} \right)^{1/2} \right] \overline{\sigma_{io}(T_{eff})} \quad (5.25)$$

et :

$$\frac{3}{2} \kappa T_{eff} = \frac{3}{2} \kappa T_o + \frac{1}{2} m_o v_i^2 \quad (5.26)$$

Ces formules introduisent une nouvelle loi de similitude : alors que, d'après la théorie cinétique exacte, la mobilité réduite μ_{i0} dépend comme on l'a vu [cf. (5.19)] séparément des deux paramètres T_o et E/n_o , elle ne dépend plus dans cette approximation que du seul paramètre T_{eff} . Cette "température effective" est d'après (5.26) la somme de deux termes : $\frac{3}{2} \kappa T_o$ qui est produit par l'agitation thermique des neutres et $\frac{1}{2} m_o v_i^2$ qui est fonction de E/n_o et qui représente l'action du champ électrique.

La section efficace moyenne d'échange de quantité de mouvement $\overline{\sigma_{io}(T_{eff})}$ se calcule en principe à partir de la loi exacte de potentiel d'interaction ion-neutre ($1/r^4$ + forces à courte portée). Elle ne dépend que de T_{eff} . On peut exprimer la nouvelle loi de similitude par la formule :

$$\mu_i = \frac{1}{n_o} f(T_{eff}) \quad (5.27)$$

Cette formule n'est qu'une approximation, mais elle est assez bonne pour permettre de déduire pour un couple ion-gaz donné les valeurs de $\mu_{i0}(0)$ en fonction de T_o , d'une série de mesures assez facile à faire où l'on a fixé T_o et fait varier E/n_o . La figure 5.4 montre pour divers ions circulant dans Ar la variation du rapport $\mu_{i0}(0)/\mu_{pol}$ en fonction de T_{eff} ([44][45][46]). On y voit la convergence de $\mu_{i0}(0)$ vers μ_{pol} lorsque T_{eff} tend vers zéro. On voit aussi que pour la plupart des ions $\mu_{i0}(0)/\mu_{pol}$ croît, passe par un maximum et finit par décroître. La croissance initiale peut s'expliquer en admettant que les forces répulsives à courte portée diminuent l'effet de la force attractive en $1/r^4$ pour les valeurs moyennes de T_{eff} . Pour les fortes valeurs de T_{eff} on peut prévoir que les forces répulsives à courte portée sont dominantes ; si on admet pour elles le modèle des boules de billard on prévoit que $\mu_{i0}(0)$ doit varier comme $(T_{eff})^{-1/2}$. On voit apparaître quelques cas singuliers : Ar^+ , N_2^+ . Le cas de Ar^+ est dû à l'échange de charge : dans

le cas d'un système symétrique tel que Ar^+/Ar , $\mu_{i0}(0)$ décroît rapidement depuis μ_{pol} jusqu'à une valeur de l'ordre de $\mu_{pol}/2$ pour laquelle l'échange de charge double la valeur de $\mu_{i0}(0)$. Une discussion plus complète des autres cas singuliers est amorcée dans [43].

5.4 Modes propres et longueurs de diffusion d'une cavité

5.4.1 Hypothèses générales

Dans les deux paragraphes précédents nous avons postulé l'existence dans le gaz d'un champ électrique \vec{E} ou d'un gradient de pression ; nous avons pu ainsi, à partir des équations de transport de la quantité de mouvement, définir les deux principaux coefficients de transport, par exemple μ_e et D_e pour les électrons. Il nous faut maintenant examiner comment \vec{E} et $\nabla \bar{\Psi}_e$ peuvent être produits dans le plasma : en effet on ne peut pas, en général, considérer ces deux grandeurs comme des données ; le champ électrique en un point est en général déterminé, à la fois par les potentiels imposés aux électrodes extérieures et par les phénomènes de charge d'espace dans le plasma. Les gradients de pression non plus ne peuvent être imposés ; ils sont le résultat des processus de création et de disparition du plasma. Pour traiter un problème de diffusion il faut adjoindre à l'équation de transport de la quantité de mouvement l'équation de conservation des particules et tenir compte des conditions aux limites.

À titre de premier exemple nous discutons dans ce paragraphe le problème d'un gaz ionisé enfermé dans une cavité et nous étudions le mouvement des électrons en faisant les hypothèses suivantes :

- α) les densités de charges sont assez faibles pour que le champ électrique continu de charge d'espace soit négligeable (problème de diffusion libre) ;
- β) les électrons sont créés dans le volume du gaz par ionisation des molécules selon la loi :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \nu_I n_e \quad (5.28)$$

où ν_I est la fréquence d'ionisation ;

γ) la densité électronique tend vers zéro quand on atteint les parois du récipient ;

δ) la température électronique est constante dans tout le récipient ;

ϵ) le champ magnétique B est nul.

Discutons ces hypothèses :

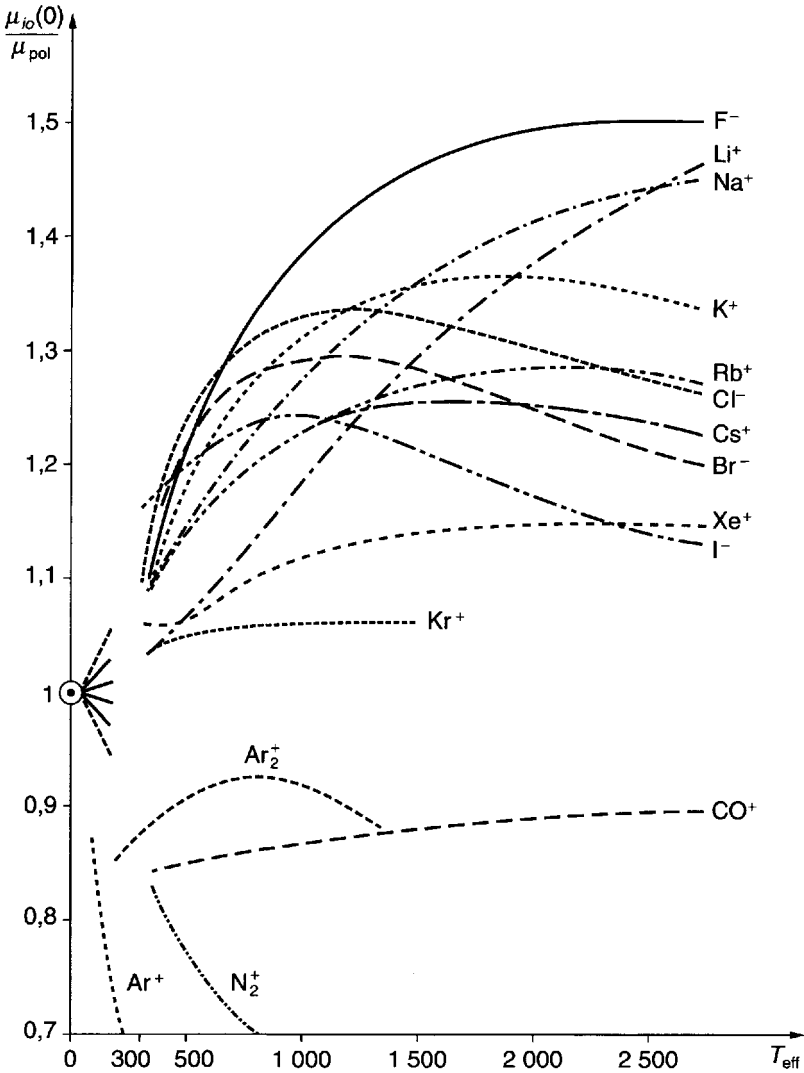


Figure 5.4 : Mobilités de divers ions dans l'argon en fonction de la température effective T_{eff} ([44, 45, 46]).

μ_{i0} mobilité réduite.

$\mu_{i0}(0)$ limite de μ_{i0} quand $E/n_o \rightarrow 0$.

μ_{pol} mobilité de Langevin = limite de $\mu_{i0}(0)$ quand $T_{eff} \rightarrow 0$.

α) Les conditions exactes qui permettent d'affirmer que le champ électrique continu est sans action sur le mouvement des électrons seront précisées dans la section 5.6 ; nous verrons que la condition essentielle est que *les dimensions du récipient soient petites devant la longueur de Debye*. Par ailleurs, le gaz peut être le siège d'un champ électrique de haute fréquence ; ce champ produit des oscillations de petite amplitude des électrons qui peuvent être négligées dans le calcul des courants macroscopiques ; cependant le rôle de ce champ HF peut être très important pour l'entretien du plasma, comme nous allons le voir ci-dessous.

β) La fréquence d'ionisation ν_I peut se calculer en principe à partir de la section efficace d'ionisation σ_I et des distributions de vitesse des électrons et des molécules. On peut en fait négliger l'agitation thermique des molécules qui sont beaucoup plus lentes que les électrons ; σ_I peut alors être considérée comme une fonction de w_e . Et d'après la formule (4.29) on a :

$$\nu_I = n_o < \sigma_I w_e > \quad (5.29)$$

ou encore :

$$\nu_I = \frac{n_o}{n_e} \int_{w_{ei}}^{\infty} \sigma_I(w_e) w_e f_e(w_e) 4\pi w_e^2 dw_e \quad (5.30)$$

où $f_e(w_e)$ est la fonction de distribution des électrons, avec :

$$\frac{1}{2} m_e w_{ei}^2 = E_i \quad (5.31)$$

w_{ei} est la vitesse minimum que doit posséder un électron pour pouvoir produire une ionisation.

Dans un gaz faiblement ionisé où les électrons sont en équilibre thermique avec les molécules, à une température voisine de la température ordinaire, il n'y a pratiquement pas d'électrons ayant une énergie supérieure à E_i ; d'après (5.30), ν_I est alors nul ; c'est le cas des plasmas de "post-décharge" (décharges pulsées, après la fin de l'impulsion) tout au moins après la relaxation thermique décrite au chapitre 12.

Dans un gaz faiblement ionisé soumis à l'action d'un champ électrique continu ou alternatif, il y a au contraire un échauffement des électrons, et il peut y avoir des électrons d'énergie supérieure à E_i ; ν_I est donc différent de zéro ; c'est ce qui se produit dans les plasmas de décharge pendant l'amorçage ou la période d'entretien de la décharge. *A priori* ν_I peut être une fonction du temps et de l'endroit considéré dans le gaz.

γ) Les électrons et les ions qui atteignent la surface extérieure du récipient y sont adsorbés et leur probabilité de recombinaison dans cet état adsorbé est très élevée. Il est difficile de se faire une image précise des

phénomènes qui se produisent sur une telle surface solide limitant le gaz ionisé. Il est néanmoins certain que par suite de la recombinaison, n_e décroît beaucoup quand on s'approche de la surface du récipient. La variation de n_e au voisinage de cette surface a l'allure représentée sur la figure 5.5. Par extrapolation on peut considérer que n_e s'annule sur une surface virtuelle légèrement en arrière de la surface réelle. L'hypothèse faite consiste donc finalement à confondre la surface du récipient avec cette surface virtuelle.

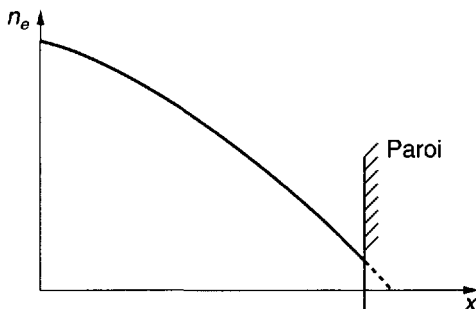


Figure 5.5 : Variation de n_e au voisinage d'une paroi.

δ) La température T_e peut varier d'un point à un autre dans le gaz, s'il existe un champ électrique \vec{E} non uniforme, ou si le refroidissement par diffusion (cf. section 12.8) joue un rôle. En revanche, si le refroidissement par diffusion est négligeable [cf. formule (12.128)] et si \vec{E} est uniforme, T_e est également uniforme ; il en est évidemment de même dans les post-décharges après la relaxation thermique (on a alors $T_e = T_o$). Nous supposons que l'on est dans l'un de ces deux cas ; on peut alors écrire l'équation de diffusion sous la forme simplifiée (5.14). D'autre part l'uniformité de T_e entraîne celle de ν_I : la fréquence d'ionisation ν_I est à chaque instant une constante dans tout le gaz.

5.4.2 Équations générales

Le problème de diffusion qu'on vient de poser se ramène donc à la solution des équations suivantes (écrites pour alléger l'écriture en supprimant l'indice e) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \vec{v} = \nu_I n \quad (5.32)$$

$$n \vec{v} = -D \nabla n \quad (5.33)$$

avec la condition aux limites :

$$n = 0 \text{ sur la surface du récipient} \quad (5.34)$$

En éliminant $n \vec{v}$ entre les deux premières, on obtient :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \nabla^2 n = \nu_I n \quad (5.35)$$

5.4.3 Évolution d'une post-décharge

Considérons le cas d'une post-décharge, c'est-à-dire posons $\nu_I = 0$. Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles (5.35) soumise à la condition (5.34), il est commode de rechercher les fonctions propres $n(r)$ de l'opérateur $D \nabla^2 n$ définies par les deux conditions :

$$D \nabla^2 n = -\nu n \quad (5.36)$$

$$n = 0 \text{ sur la surface du récipient} \quad (5.37)$$

Ce système définit une suite de fonctions propres ou modes propres $n_j(\vec{r})$ avec les valeurs propres correspondantes ν_j . Les ν_j sont positifs.

Les modes propres permettent d'étudier de façon tout à fait générale l'évolution d'une post-décharge dont on connaît la répartition de densité à un certain instant initial. En effet, ils forment une suite complète de fonctions orthogonales. On peut donc développer à tout instant la répartition de densité en une série dont les termes sont ces modes propres n_j , avec des coefficients a_j fonction du temps :

$$n(\vec{r}, t) = \sum_j a_j(t) n_j(\vec{r}) \quad (5.38)$$

Après avoir porté ce développement dans (5.35) (avec $\nu_I = 0$) on peut, par suite de l'orthogonalité des n_j , remplacer cette équation par le système :

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} = -\nu_j a_j \quad (5.39)$$

dont la solution est :

$$a_j(t) = a_j(0) e^{-\nu_j t} \quad (5.40)$$

Autrement dit, les ν_j sont les fréquences de relaxation par diffusion des modes propres. Il est commode de classer les modes par ordre de valeurs croissantes de ν_j . Le premier, celui qui a la plus faible valeur de ν_j , peut être

appelé mode fondamental, c'est le mode qui s'amortit le plus lentement. On introduit pour chaque mode propre la quantité :

$$\Lambda_j = \left(\frac{D}{\nu_j} \right)^{1/2} \quad (5.41)$$

D'après (5.36) on a :

$$\frac{\nabla^2 n_j}{n_j} = -\frac{1}{\Lambda_j^2} \quad (5.42)$$

Λ_j a donc les dimensions d'une longueur ; on l'appelle la *longueur de diffusion du mode j*.

Les expressions des modes propres et de leurs longueurs de diffusion sont calculées dans l'appendice A5-1 pour des cavités parallélépipédiques et cylindriques. On trouve qu'ils forment une suite dépendant de trois indices entiers selon les formules suivantes :

– cavités parallélépipédiques (de côtés a, b, c) :

$$n_{\ell mn} = A \sin \frac{\ell \pi x}{a} \sin \frac{m \pi y}{b} \sin \frac{n \pi z}{c} \quad (5.43)$$

$$\frac{1}{\Lambda_{\ell mn}^2} = \left(\frac{\ell \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m \pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n \pi}{c} \right)^2 \quad (5.44)$$

– cavités cylindriques (de rayon R , de hauteur h) :

$$n_{\ell mn} = J_m \left(\frac{\alpha_{\ell m} r}{R} \right) (A \cos m \varphi + B \sin m \varphi) \sin \left(\frac{n \pi z}{h} \right) \quad (5.45)$$

$$\frac{1}{\Lambda_{\ell mn}^2} = \left(\frac{\alpha_{\ell m}}{R} \right)^2 + \left(\frac{n \pi}{h} \right)^2 \quad (5.46)$$

où A et B sont des constantes et $\alpha_{\ell m}$ est la ℓ -ième racine de $J_m(x)$. On voit sur ces formules que, dans le mode fondamental, la densité est maximum au centre de la cavité et décroît régulièrement jusque sur les parois. La longueur de diffusion correspondante Λ_{111} est de l'ordre de grandeur des dimensions du récipient ; s'il se trouve que l'une des dimensions est bien plus petite que les autres (par exemple cavités cylindriques très plates ou très allongées), Λ_{111} est de l'ordre de grandeur de cette dimension. Pour une forme de cavité donnée, Λ_{111} varie proportionnellement aux dimensions de la cavité. Pour les modes supérieurs les Λ sont plus petits que les dimensions de la cavité et ce d'autant plus que les indices ℓ, m, n sont plus élevés.

Si l'on revient maintenant aux fréquences de relaxation par diffusion on peut les écrire sous la forme :

$$\nu_j = \frac{D}{\Lambda_j^2} \quad (5.47)$$

On voit donc que pour une cavité de forme donnée et un mode donné la fréquence de relaxation par diffusion est proportionnelle au coefficient de diffusion et inversement proportionnelle au carré des dimensions du récipient.

5.5 Décharge HF dans une cavité

5.5.1 Régime transitoire

Supposons maintenant qu'un champ électrique uniforme de haute fréquence soit appliqué à un plasma faiblement ionisé enfermé dans une cavité. Désignons par $E(t)$ son amplitude à l'instant t et supposons que les hypothèses faites au paragraphe précédent restent valables à tout instant (diffusion libre, $n_e = 0$ sur les parois, ν_I et T_e uniformes dans le gaz, champ magnétique nul). On peut donc à chaque instant appliquer la méthode des fonctions propres à ceci près qu'on a maintenant $\nu_I \neq 0$. Le développement (5.38) porté dans l'équation (5.35) conduit maintenant au système :

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} = (\nu_I - \nu_j) a_j \quad (5.48)$$

On peut prévoir *a priori* les trois cas mathématiques suivants :

$$\nu_I - \nu_j = 0 \quad \text{mode stationnaire} \quad (5.49)$$

$$\nu_I - \nu_j < 0 \quad \text{mode amorti} \quad (5.50)$$

$$\nu_I - \nu_j > 0 \quad \text{mode croissant} \quad (5.51)$$

Si ν_I et ν_j étaient indépendants du temps on obtiendrait $a_j = \text{Cte}$ pour un mode stationnaire et $a_j \approx e^{\alpha t}$ dans les deux autres cas, avec α positif pour un mode croissant et α négatif pour un mode amorti.

En fait, ν_I et ν_j varient tous deux avec le temps, quand E est lui-même variable ; en se reportant aux formules (5.29) et (5.15) on vérifie en effet que ν_I et ν_j sont déterminées par la fonction de distribution des électrons. Dans ces conditions, par intégration de (5.48), on obtient :

$$a_j(t) = a_j(0) \exp \left(\int_0^t [\nu_I(t) - \nu_j(t)] dt \right) \quad (5.52)$$

Les formules (5.52) permettent théoriquement d'étudier l'évolution du plasma. Pour pouvoir les utiliser il faut toutefois relier les valeurs de ν_I et ν_j à celle de E . On simplifiera grandement le problème en admettant que la relaxation thermique des électrons est plus rapide que la relaxation de n_e par diffusion et que sa multiplication par ionisation. On peut alors considérer dans (5.52) que $\nu_I(t)$ et $\nu_j(t)$ ne dépendent pas de toute l'histoire antérieure du plasma mais seulement de la valeur $E(t)$ du champ électrique à ce même instant, comme si ce champ était stationnaire.

5.5.2 Régime stationnaire

Nous sommes maintenant en mesure de rechercher à quelle condition un régime stationnaire peut s'établir, dans lequel $E(t)$ tend au bout d'un certain temps vers une limite E_0 et $n_e(r)$ vers une distribution stationnaire [Fig. 5.6(a)]. Dans cet état stationnaire ν_I et tous les ν_j sont devenus indépendants du temps ; pour que n_e reste finie on voit d'après (5.49) que l'on doit alors avoir :

$$\nu_I = \nu_{j1} \quad (5.53)$$

où ν_{j1} est la fréquence de relaxation du mode fondamental. On en déduit que les modes supérieurs ne sont pas excités puisque pour eux on a $\nu_I < \nu_j$. D'où la conclusion importante que *dans le régime stationnaire la répartition de densité est représentée par le mode fondamental de diffusion de la cavité.*

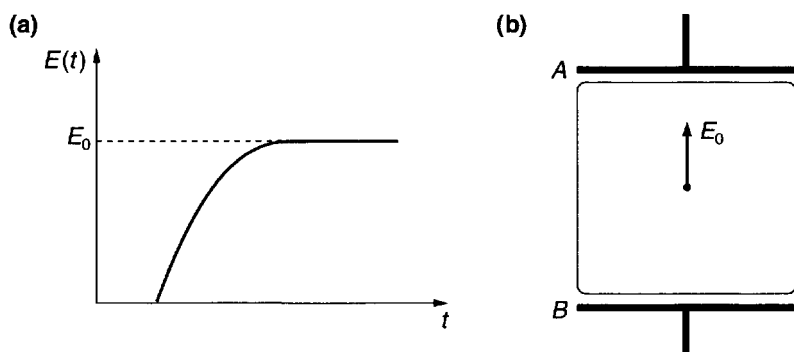


Figure 5.6 : Décharge HF contrôlée par diffusion.

- (a) Amorçage et entretien.
- (b) Décharge HF dans un récipient cylindrique.

L'interprétation de la formule (5.53) conduit d'autre part à un résultat à première vue paradoxal : cette équation est homogène par rapport à $f_e(w_e)$; par conséquent, elle fait intervenir la forme de f_e mais non la densité n_e . Or pour un gaz donné f_e dépend uniquement de E , de ω , et de la densité n_o des molécules. Si n_o et ω sont donnés, l'équation (5.53) détermine donc E_o . La densité dans le régime stationnaire est d'après cette théorie déterminée uniquement par les propriétés du générateur. À titre d'exemple on peut traiter le cas d'un récipient cylindrique placé entre deux plaques de condensateurs [Fig. 5.6(b)]. La puissance fournie par le générateur est alors d'après (12.61) :

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \sigma \cdot E_o^2 V = \frac{1}{2} \frac{q_e^2 E_o^2}{m_e} V \int \alpha_o d \left[\frac{4\pi\omega^3}{3} \frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} \right] \quad (5.54)$$

où V est le volume de la cavité. E_o étant connu, la forme de f_e est déterminée et l'équation (5.54) détermine la valeur de n_e au centre de la cavité en fonction de la puissance P fournie par le générateur.

Le régime de décharge HF dont on vient d'esquisser la théorie est appelé décharge HF contrôlée par diffusion. Rappelons les hypothèses essentielles sur lesquelles il est basé :

α) amplitude HF d'oscillation des électrons beaucoup plus petite que les dimensions du récipient

β) libre parcours moyen des électrons bien plus petit que les dimensions du récipient [cf. formule (12.128)]

γ) champ électrique uniforme dans le gaz

δ) disparition des électrons par diffusion libre et recombinaison en surface.

On a montré [344] que pour discuter la validité des hypothèses α , β , γ , il était commode de considérer un diagramme de coordonnées $n_o \lambda$ et $n_o \Lambda$ (ou $p \lambda$ et $p \Lambda$ à T_o donné) où λ est la longueur d'onde dans le vide correspondant à la fréquence du champ électrique. La figure 5.7 représente à titre d'exemple un tel diagramme construit pour H_2 ; on y voit apparaître au centre la région ABCD qui représente le domaine d'existence des régimes contrôlés par diffusion ; la condition α tombe en défaut quand on franchit la ligne BC (décharges BF contrôlées par mobilité), la condition β quand on franchit la ligne AB ; à ce sujet il faut d'ailleurs remarquer qu'à cause du facteur $(m_o/m_e)^{1/2}$ qui figure dans (12.128), le refroidissement par diffusion doit être important dans la partie du quadrilatère ABCD située près de AB ; la condition γ , tombe en défaut quand on franchit la ligne AD ($\lambda < \Lambda$).

Il faut enfin remarquer que le diagramme de la figure 5.7 ne permet pas de discuter certains effets liés aux variations de la puissance P ; lorsque P augmente, n_e croît et les phénomènes suivants pourront jouer un rôle :

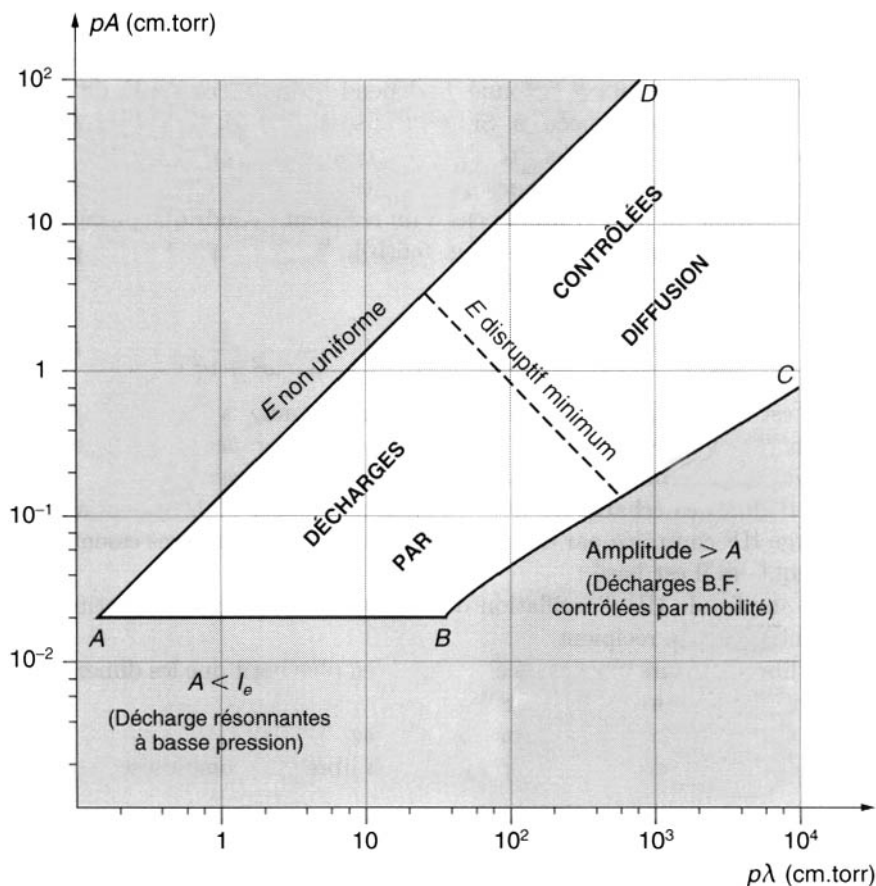


Figure 5.7 : Décharges en courant alternatif dans H_2 .

- passage de la diffusion libre à la diffusion ambipolaire,
- pénétration seulement partielle de E dans le plasma (effets de peau),
- recombinaison dans le volume du gaz.

Le premier effet ne change pas essentiellement la théorie à ceci près que dans l'expression des Λ_j , il faut remplacer D_e par un coefficient de diffusion ambipolaire, comme nous le verrons au paragraphe suivant. Les deux derniers effets, en revanche, modifient complètement les phénomènes.

5.6 Diffusion ambipolaire

5.6.1 Comparaison des coefficients de transport des électrons et des ions

Si l'on compare les mobilités et les coefficients de diffusion libre des électrons et des ions, on trouve $\mu_e \gg \mu_i$ et $D_e \gg D_i$. Dans l'hélium par exemple on a vu [cf. Fig. 5.2(a) et 5.3] que lorsque E/p tend vers zéro on a $\mu_{e0} \sim 10^4$ et $\mu_{i0} \sim 10 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$. *Les électrons sont donc plus mobiles et diffusent plus vite que les ions.*

Cela est dû essentiellement au fait que l'on a $m_e \ll m_i$; on peut le voir par un calcul d'ordre de grandeur en posant dans (5.6) et (5.15) :

$$\overline{\nu_{eo}}, \overline{\nu_{io}} \sim n_o \overline{\sigma v} \sim n_o \sigma \sqrt{\frac{\kappa T}{m}} \quad (5.55)$$

où σ est une certaine section efficace moyenne. On obtient alors :

$$\mu \sim \frac{q}{n_o \sqrt{\kappa}} \sigma^{-1} m^{-1/2} T^{-1/2} \quad (5.56)$$

$$D \sim \frac{\sqrt{\kappa}}{n_o} \sigma^{-1} m^{-1/2} T^{1/2} \quad (5.57)$$

d'où, en supposant $q_i = |q_e|$:

$$\left| \frac{\mu_e}{\mu_i} \right| \sim \frac{\sigma_{io}}{\sigma_{eo}} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2} \quad (5.58)$$

$$\frac{D_e}{D_i} \sim \frac{\sigma_{io}}{\sigma_{eo}} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{1/2} \quad (5.59)$$

A priori les sections efficaces σ_{eo} et σ_{io} sont du même ordre de grandeur³. Pour les faibles valeurs de E/p on a d'ailleurs $T_e = T_i = T_o$; en supposant alors de façon précise $\sigma_{eo} = \sigma_{io}$ on obtient :

$$\left| \frac{\mu_e}{\mu_i} \right| \sim \frac{D_e}{D_i} \sim \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \quad (5.60)$$

Pour les valeurs de E/p pas très faibles on a $T_e > T_i$ de sorte que, si l'on peut négliger les variations de σ_{eo} et σ_{io} , l'inégalité $D_e \gg D_i$ est renforcée tandis que l'inégalité $\mu_e \gg \mu_i$ est dans une certaine mesure atténuée.

3. Ceci est une hypothèse parfois assez grossière ; pour e et He^+ dans l'hélium par exemple on voit en comparant les résultats expérimentaux à la formule (5.60) qu'il faudrait plutôt penser que le rapport σ_{io}/σ_{eo} est de l'ordre de 12.

5.6.2 Coefficient de diffusion ambipolaire dans un plasma contenant une seule espèce d'ions

Nous venons de voir que les électrons diffusent plus facilement que les ions. Si donc, dans une région d'un plasma, par exemple au voisinage d'une paroi (Fig. 5.8), la densité des porteurs de charge varie, les électrons devraient, dans cette partie du plasma, diffuser plus vite que les ions. Mais alors, ils laisseraient derrière eux un surcroît d'ions rendant le plasma localement positif ; le champ électrique ainsi créé tend donc en fait à s'opposer à la diffusion des électrons ; les électrons sont retenus dans leur mouvement par la diffusion assez lente des ions : les deux catégories de particules diffusent solidairement ; c'est ce qu'on appelle le phénomène de la diffusion ambipolaire.

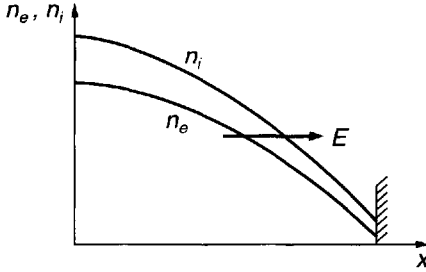


Figure 5.8 : Diffusion ambipolaire au voisinage d'une paroi.

Étudions donc un régime stationnaire dans lequel les seules forces qui apparaissent sont les gradients de pression et un champ électrique E . Ce régime est déterminé par le système d'équations suivant, écrit en supposant pour simplifier l'étude que T_e et T_i sont constantes :

$$\nabla \cdot n_e \vec{v}_e = \nu_I n_e \quad (5.61)$$

$$\nabla \cdot n_i \vec{v}_i = \nu_I n_i \quad (5.62)$$

$$n_e \vec{v}_e = n_e \mu_e \vec{E} - D_e \nabla n_e \quad (5.63)$$

$$n_i \vec{v}_i = n_i \mu_i \vec{E} - D_i \nabla n_i \quad (5.64)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = (n_e q_e + n_i q_i) / \epsilon_0 \quad (5.65)$$

Ce système d'équations n'est malheureusement pas linéaire. On ne pourra donc le résoudre en général de façon exacte que par des calculs numériques

effectués sur ordinateur. C'est pourquoi on étudie généralement le problème en faisant les deux hypothèses simplificatrices suivantes [40] :

$$\frac{n_i}{n_e} = \epsilon = \text{Cte} \quad (\text{hypothèse de proportionnalité}) \quad (5.66)$$

$$n_e \vec{v}_e = n_i \vec{v}_i \quad (\text{hypothèse de congruence}) \quad (5.67)$$

La première hypothèse est suggérée par l'étude de deux cas limites ; lorsque n_e et n_i sont très faibles, le champ E est négligeable, les deux espèces de particules diffusent librement et on a évidemment la condition (5.66) avec, comme nous le verrons plus loin, $\epsilon = D_e/D_i \gg 1$. Lorsque n_e et n_i sont au contraire élevés on conçoit que le couplage entre les deux espèces de particules doit devenir total ; on a alors $n_e = n_i$ soit $\epsilon = 1$; nous disons alors qu'on a un phénomène de *diffusion ambipolaire parfaite*. Puisque la condition (5.66) est satisfaite dans les deux cas limites, on peut espérer que, dans les cas intermédiaires où elle n'est pas *a priori* valable, elle peut fournir un modèle pas trop éloigné de la réalité.

L'hypothèse de congruence (5.67) est de son côté suggérée par le fait qu'en régime stationnaire on a d'après (5.61) et (5.62) :

$$\nabla \cdot n_e \vec{v}_e = \nabla \cdot n_i \vec{v}_i \quad (5.68)$$

Dans un écoulement plan unidimensionnel, l'équation (5.68) s'intègre immédiatement et donne la relation (5.67), à une constante près qu'il est raisonnable de supposer nulle pour que les deux flux atteignant la paroi soient égaux. Dans une cavité de forme quelconque, la relation de congruence est par contre plus stricte que la condition (5.68)⁴. Quoi qu'il en soit, si l'on admet les conditions (5.66) et (5.67) le système des équations (5.61) et (5.65) est remplacé par le système :

$$n_e \vec{v}_e = n_e \mu_e \vec{E} - D_e \nabla n_e \quad (5.69)$$

$$n_e \vec{v}_e = n_e \epsilon \mu_i \vec{E} - D_i \epsilon \nabla n_e \quad (5.70)$$

$$\nabla \cdot n_e \vec{v}_e = \nu_I n_e \quad (5.71)$$

4. Deux champs de vecteurs sont identiques s'ils ont en tout point même divergence et même rotationnel. D'après (5.68) les vecteurs $n_e \vec{v}_e$ et $n_i \vec{v}_i$ ont même divergence. On ne peut en déduire la relation de conséquence (5.67) que si l'on a de plus $(n_e \vec{v}_e) = \nabla \times (n_i \vec{v}_i)$. Cette condition est automatiquement satisfaite si chacun de ces rotationnels est séparément nul et effectivement les flux d'électrons et d'ions sont irrotationnels par raison de symétrie dans quelques cas simples (cavité entre deux plans parallèles, cylindre infiniment long, sphère).

$$\nabla \cdot \vec{E} = n_e q_e (1 - \epsilon) / \epsilon_o \quad (5.72)$$

Dans (5.72) on a supposé $q_i = -q_e$; le système des quatre équations (5.69) à (5.72) ne contient plus que trois inconnues : n_e , \vec{v}_e et \vec{E} ; *a priori* il n'est pas compatible ; effectivement on peut déterminer les inconnues en laissant tout d'abord de côté l'équation de Poisson. On obtient :

$$\vec{E} = \frac{D_e - \epsilon D_i}{\mu_e - \epsilon \mu_i} \frac{\nabla n_e}{n_e} \quad (5.73)$$

$$n_e \vec{v}_e = -D_s \nabla n_e \quad (5.74)$$

$$\nabla \cdot n_e \vec{v}_e = \nu_I n_e \quad (5.75)$$

avec :

$$D_s = \epsilon \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\epsilon \mu_i - \mu_e} \quad (5.76)$$

Les équations (5.74) et (5.75) sont identiques aux équations qui ont servi de base pour la théorie de la diffusion libre à ceci près que le coefficient composite D_s qui y figure et que nous appelons coefficient de diffusion ambipolaire est une fonction de ϵ et des quatre coefficients de transport libre μ_e , μ_i , D_e , D_i . Dans le modèle choisi ϵ est une constante ; D_s l'est donc aussi. Lorsque ϵ tend vers l'unité, D_s tend vers la valeur :

$$D_a = \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_i - \mu_e} = \frac{\mu_i D_e + |\mu_e| D_i}{\mu_i + |\mu_e|} \quad (5.77)$$

qu'on peut appeler *coefficient de diffusion ambipolaire parfaite*. L'ordre de grandeur de D_a peut s'obtenir en portant dans (5.77) les expressions approchées (5.58) et (5.59) ; il vient :

$$D_a \sim D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \quad (5.78)$$

5.6.3 Détermination du coefficient de proportionnalité. Domaine de validité de la diffusion ambipolaire parfaite

Il reste maintenant à déterminer le paramètre ϵ ; pour une valeur donnée de ϵ , donc de D_s , les équations (5.74) et (5.75), assorties de la condition $n_e = 0$ sur les parois du récipient, définissent un problème avec conditions aux limites identiques à celui étudié au paragraphe précédent. On a vu que dans un régime stationnaire, où la fréquence d'ionisation ν_I prend

une certaine valeur constante, la répartition de densité dans la cavité est représentée par le mode fondamental de diffusion de la cavité, soit :

$$n_e(\vec{r}) = n_{eo} f_1(\vec{r}) \quad (5.79)$$

où n_{eo} est une constante arbitraire ; si f_1 est normalisée à l'unité au centre de la cavité, n_{eo} représente la densité électronique d'équilibre au centre de la cavité. On considère n_{eo} comme donnée (dans l'exemple d'une décharge HF, n_{eo} est déterminé par les conditions d'excitation de la cavité ; cf. section 5.5) ; et l'on va chercher à déterminer le paramètre ϵ . Pour une répartition donnée de densité, le champ électrique est donné par la formule (5.73) qui, compte tenu de (5.79), donne :

$$\vec{E} = \frac{D_e - \epsilon D_i}{\mu_e - \epsilon \mu_i} \frac{\nabla f_1}{f_1} \quad (5.80)$$

En principe ce champ devrait satisfaire l'équation de Poisson (5.72) qui a été jusqu'à maintenant laissée de côté, soit :

$$\frac{D_e - \epsilon D_i}{\mu_e - \epsilon \mu_i} \left[\frac{\nabla^2 f_1}{f_1} - \left(\frac{\nabla f_1}{f_1} \right)^2 \right] = n_{eo} q_e (1 - \epsilon) f_1 / \epsilon_o \quad (5.81)$$

ou compte tenu de (5.42) :

$$\frac{n_{eo} q_e}{\epsilon_o} (\epsilon - 1) \frac{\mu_e - \epsilon \mu_i}{D_e - \epsilon D_i} = \frac{1}{f_1} \left[\frac{1}{\Lambda^2} + \left(\frac{\nabla f_1}{f_1} \right)^2 \right] \quad (5.82)$$

où Λ est la longueur de diffusion du mode fondamental. On voit tout de suite que cette équation ne peut être satisfaite de façon exacte puisque le premier membre est constant alors que le deuxième dépend de \vec{r} . Appelons $\epsilon(0)$ la valeur qui satisfait à l'équation (5.82) au centre de la cavité ; en ce point on a $f_1 = 1$ et $\nabla f_1 = 0$, d'où la condition :

$$\frac{n_{eo} q_e}{\epsilon_o} [\epsilon(0) - 1] \frac{\mu_e - \epsilon(0) \mu_i}{D_e - \epsilon(0) D_i} = \frac{1}{\Lambda^2} \quad (5.83)$$

On peut mettre cette équation sous une forme sans dimension en introduisant la longueur de Debye électronique λ_{Do} au centre de la cavité et la température de diffusion T'_e des électrons [cf. formule (5.17)] ; il vient alors :

$$\frac{\lambda_{Do}^2}{\Lambda^2} \frac{T'_e}{T_e} = [\epsilon(0) - 1] \frac{1 - \epsilon(0) \frac{\mu_i}{\mu_e}}{1 - \epsilon(0) \frac{D_i}{D_e}} \quad (5.84)$$

Comme les températures T_e et T'_e sont *a priori* assez voisines, on voit que pour un gaz donné $\epsilon(0)$ est essentiellement fonction du rapport λ_{Do}/Λ . Il

en est de même de D_s . La figure 5.9 représente les variations de $\epsilon(0)$ et du rapport D_s/D_e en fonction du paramètre $(\lambda_{D0}^2/\Lambda^2)(T_e'/T_e)$. On y voit, ainsi que sur la formule (5.84), que l'on tend vers le cas de la diffusion ambipolaire parfaite lorsque $\lambda_{D0} \ll \Lambda$ et vers celui de la diffusion libre lorsque $\lambda_{D0} \gg |\mu_e/\mu_i| \Lambda$.

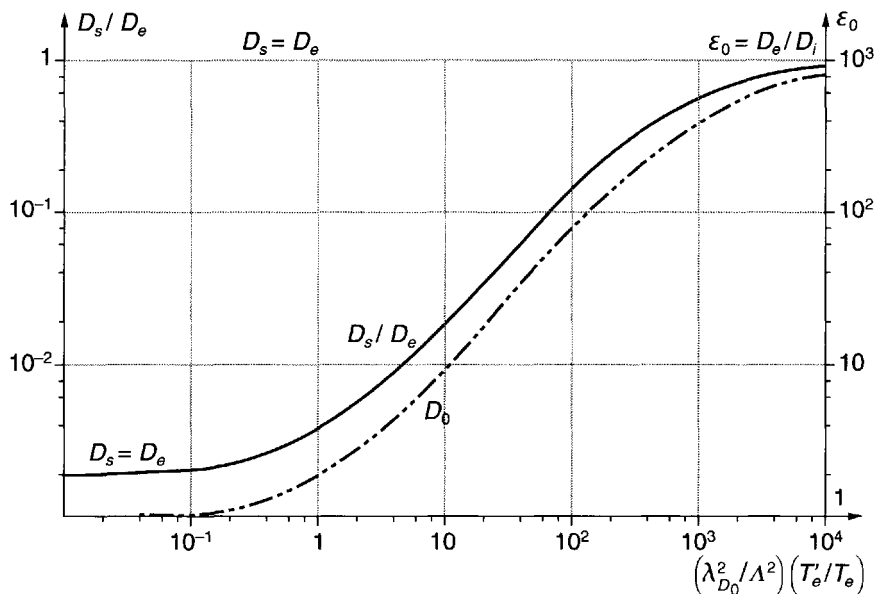


Figure 5.9 : Variation de $\epsilon(0)$ et D_s/D_e en fonction de $(\lambda_{D0}^2/\Lambda^2)(T_e'/T_e)$.

Cas particulier $\frac{D_e}{D_i} = -\frac{\mu_e}{\mu_i} = 10^3$.

On peut pour terminer discuter sommairement l'ordre de grandeur des erreurs faites avec la théorie simplifiée basée sur l'hypothèse de proportionnalité (5.66). Nous le ferons sur l'exemple simple de la diffusion entre deux plans parallèles distants de a [formules (5.43) et (5.44) avec b et c infinis]. On vérifie alors facilement que le deuxième membre de l'équation (5.82) peut s'écrire en un point d'abscisse x (origine au plan médian) sous la forme :

$$\frac{1}{\Lambda'^2(x)} = \frac{1}{\Lambda^2 \cos^3\left(\frac{\pi x}{a}\right)} \quad (5.85)$$

où $\Lambda'(x)$ est une longueur de diffusion fictive variable d'un point à un autre. Si l'on désirait satisfaire l'équation de Poisson au point d'abscisse x il suffirait de remplacer dans (5.84) Λ par Λ' ; il en résulterait une valeur

$\epsilon(x)$ différente de $\epsilon(0)$. Il est facile de voir, à partir de la forme de la figure 5.9, que la variation $\epsilon(x) - \epsilon(0)$ est faible si l'on est au voisinage d'un des deux cas limites (diffusion libre ou diffusion ambipolaire parfaite) et maximum lorsque l'on est dans la région où λ_{Do}/Λ est de l'ordre de $|\mu_e/\mu_i|^{1/4}$ (on a alors par exemple pour $x = a/4$, $\epsilon(0) \sim 30$ et $\epsilon(x) \sim 90$). Dans tous les cas on constate que $1/\Lambda'^2$ tend vers l'infini quand on se rapproche des parois : *la théorie simple de la diffusion ambipolaire n'est donc jamais valable au voisinage des parois.*

5.7 Colonnes de plasma contrôlées par diffusion

5.7.1 Formules générales et règles de similitude

Nous allons maintenant appliquer les méthodes des paragraphes précédents à l'étude des propriétés des colonnes de plasma faiblement ionisé. Nous adoptons pour cela les hypothèses suivantes (Fig. 5.10) :

- le plasma est contenu dans un tube cylindrique de rayon R , de longueur très supérieure à R ;
- la température T_o des molécules est constante dans l'espace et le temps ;
- un champ électrique stationnaire uniforme \vec{E} parallèle à l'axe du tube règne dans tout le plasma ;
- les propriétés du plasma sont homogènes dans la direction de l'axe du tube et indépendantes du temps ;
- la production des particules chargées a lieu par chocs ionisants électron-neutre à partir du niveau fondamental des neutres ;
- la disparition des particules chargées a lieu par diffusion ambipolaire parfaite et recombinaison sur les parois.

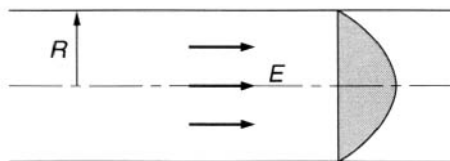


Figure 5.10 : Colonne de plasma homogène stationnaire contrôlée par diffusion.

Ces diverses conditions sont réalisées approximativement dans la colonne positive des tubes à décharge lumineuse fonctionnant à une

pression suffisante. Cependant, la théorie que nous allons développer est indépendante de la manière dont le plasma est produit ou collecté aux extrémités du tube ; elle peut donc s'appliquer à d'autres types de décharges et moyennant certaines modifications s'étendre à de nombreux autres cas (décharges d'arc, cas des basses pressions, colonnes dans un champ magnétique longitudinal, etc.).

Ceci étant, les équations exprimant nos hypothèses s'écrivent :

$$n_e = n_i \quad (5.86)$$

$$\nabla \cdot n_e \vec{v}_e = \nu_I n_e \quad (5.87)$$

$$(n_e \vec{v}_e)_\perp = -D_a \nabla n_e \quad (5.88)$$

où ν_I et D_a sont constants. On a donc :

$$D_a \nabla^2 n_e = \nu_I n_e \quad (5.89)$$

La discussion du paragraphe 5.5.2 permet de conclure qu'en régime stationnaire la distribution de densité est représentée par le mode principal de diffusion :

$$n_e = n_e(0) J_0 \left(2.4 \frac{r}{R} \right) \quad (5.90)$$

et que d'autre part la fréquence de diffusion de ce mode, donnée par la formule (5.47), doit être égale à ν_I ; d'où, compte tenu de (5.46), la condition d'entretien de la colonne de plasma :

$$\sqrt{\frac{\nu_I}{D_a}} R = 2.4 \quad (5.91)$$

On peut considérer que cette équation détermine T_e ; mais on peut d'autre part en déduire facilement des lois de similitude concernant le problème étudié ; on peut en effet écrire d'après (4.29) :

$$\nu_I = n_o \langle \sigma_I w_e \rangle \quad (5.92)$$

et d'autre part on a :

$$\frac{D_a}{D_{ao}} = \frac{n_L}{n_o} \quad (5.93)$$

où D_{ao} est le coefficient de diffusion ambipolaire parfaite réduit aux conditions normales, et n_L le nombre de molécules par cm^3 dans ces mêmes conditions. En reportant dans (5.91) il vient :

$$\sqrt{\frac{\langle \sigma_I w_e \rangle}{n_L D_{ao}}} n_o R = 2.4 \quad (5.94)$$

Or, $\langle \sigma_I w_e \rangle$ et D_{ao} ne sont fonctions que de la forme des fonctions de distributions électroniques et ioniques qui elles-mêmes sont complètement déterminées par la valeur des paramètres E/n_o et T_o . L'équation (5.94) est donc pour un gaz donné une relation entre les paramètres E/n_o , $n_o R$ et T_o ; c'est la première loi de similitude :

$$\frac{E}{n_o} = f_1(n_o R, T_o) \quad (5.95)$$

On en déduit facilement les deux autres lois de similitude :

$$T_e = f_2(n_o R, T_o) \quad (5.96)$$

$$n_e(0) = \frac{i_e}{R^2} f_3(n_o R, T_o) \quad (5.97)$$

La formule (5.97) s'obtient en calculant le courant électronique i_e dans une section droite par intégration :

$$i_e = \int_0^R 2\pi n_e q_e \mu_e E dr \quad (5.98)$$

$$= n_e(0) q_e \mu_{e0} \frac{n_L}{n_o} E \frac{2\pi R^2}{(2.4)^2} \int_0^{2.4} J_o(u) u du \quad (5.99)$$

d'où l'on déduit (5.97) avec :

$$f_3 = \frac{0.737}{n_L q_e} \frac{1}{\mu_{e0}} \frac{n_o}{E} \quad (5.100)$$

La mobilité réduite μ_{e0} étant fonction de E/n_o et de T_o , f_3 apparaît comme une fonction de E/n_o et de T_o ; mais d'après (5.95) on peut aussi bien la considérer comme une fonction de $n_o R$ et de T_o . Les trois lois de similitude (5.95), (5.96) et (5.97) peuvent finalement s'énoncer ainsi :

- *Le champ électrique E* est indépendant du courant i qui circule dans la colonne de plasma ; le quotient E/n_o est une fonction de $n_o R$ et de T_o (si on se fixe T_o on peut aussi dire que E/p est une fonction de pR).
- *La température électronique* est homogène dans toute la colonne, indépendante de i et fonction seulement de $n_o R$ et de T_o .
- *La densité $n_e(0)$ sur l'axe* est le produit de la densité de courant moyenne $i_e/\pi R^2$ par une fonction de $n_o R$ et de T_o .

5.7.2 Formules explicites pour une fréquence de collision constante

Pour calculer effectivement les trois fonctions inconnues qui figurent dans les lois de similitude (5.95)–(5.97), il faut en partant de (5.91) effectuer des calculs numériques tenant compte pour chaque gaz des propriétés des diverses sections efficaces. Il est intéressant de faire ce calcul pour le modèle simple dans lequel on suppose les sections efficaces σ_I et σ_1 représentées par les formules :

$$\sigma_I = a(u_e - E_i) \quad (5.101)$$

$$\nu_{eo} = n_o \sigma_1 w_e = Cte \quad (5.102)$$

Discutons ces hypothèses : la formule (5.101) est effectivement vérifiée près du seuil ; le tableau 5.5 indique les valeurs expérimentales de la constante a pour divers gaz. Le fait de l'utiliser dans la théorie pour une valeur quelconque de E n'introduit d'ailleurs qu'une erreur assez faible parce que, dans la colonne positive, les électrons ayant une énergie nettement supérieure à E_i sont en très petit nombre.

Gaz	Li	Cs	Hg	He	Ne	Ar	H ₂	N ₂	CO
$a(10^{-18}\text{cm}^2\text{eV}^{-1})$	75	250	23	1.3	1.6	13	5	12	10

Tableau 5.5 : Valeurs expérimentales de la constante a d'ionisation près du seuil.

L'hypothèse $\nu_1 = Cte$ est au contraire beaucoup plus restrictive ; les gaz réels n'y satisfont pas en général ; les seuls gaz qui obéissent approximativement à cette loi sont H₂ et avec une moins bonne précision He (cf. paragraphe 12.3.3).

Si l'on admet que ν_{eo} est constant, il en résulte d'ailleurs que la fonction de distribution f_e des électrons est maxwellienne ; de nombreux auteurs ont introduit directement cette propriété comme une hypothèse en considérant qu'elle était vérifiée par l'expérience ; lorsque ν_{eo} n'est pas constant, le caractère maxwellien de f_e peut être un effet dû aux interactions entre électrons (cf. discussion de la section 12.9). L'analyse détaillée de ce modèle particulier de colonne positive fait l'objet du problème P5-2. On y montre que les variations de T_e et de $(E/p)^2$ en fonction de pR peuvent être représentées par deux courbes universelles, à condition de porter pR/AT_o en abscisse et kT_e/E_i ou BT_oE/p en ordonnée. La figure 5.11 représente ces deux courbes universelles ; on y voit que T_e et E/n_o décroissent lorsque le produit pR croît, d'abord rapidement puis de plus en plus lentement. Sur ces courbes, où A et B sont deux constantes définies pour chaque gaz obéissant au modèle, on voit également que pour obtenir une forte valeur de T_e , il faut choisir une faible valeur du produit pR . Ce résultat est indépendant du modèle étudié : lorsque le produit pR est faible, les pertes par diffusion sont importantes ; pour les compenser, il faut un fort taux d'ionisation donc une forte valeur de E/n_o et T_e . Cette situation est bien connue dans la technique des lasers à gaz comme le laser à hélium-néon. Pour obtenir l'effet laser, il faut un fort taux d'excitation, c'est-à-dire une forte valeur de T_e ; on l'obtient en faisant passer la décharge dans un tube de tout petit diamètre.

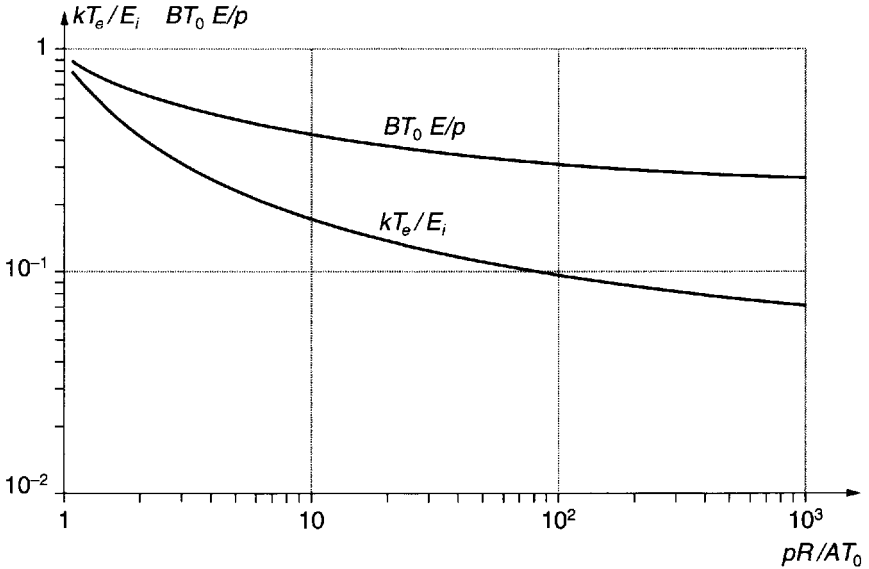


Figure 5.11 : Cas $\nu_{eo} = \text{Cte}$. Courbes universelles de variation de T_e et $(E/p)^2$ en fonction de pR .

5.8 Colonnes de plasma en régime de chute libre

5.8.1 Limite du régime de Schottky vers les basses pressions

La théorie de la colonne positive exposée dans la section précédente suppose que le libre parcours moyen des électrons et des ions est bien plus petit que le rayon du tube (régime contrôlé par la diffusion), soit :

$$1/n_o\sigma_1 \ll R \quad (5.103)$$

où σ_1 est la section efficace électron-neutre et R le rayon de la colonne. On voit que le paramètre caractéristique est à nouveau le produit $n_o R$. En choisissant pour σ_1 la valeur typique 10^{15} cm^2 , on trouve que le domaine d'existence du régime de Schottky est limité vers les basses pressions par la condition :

$$n_o R (\text{cm}^2) \gg 10^{15} \quad (5.104)$$

ou, en supposant que la température des neutres est 300 K :

$$p_o R (\text{torr cm}) \gg 3 \cdot 10^{-2} \quad (5.105)$$

Pour des diamètres de l'ordre du cm, on voit que le régime de Schottky se produit typiquement pour des pressions voisines du torr ou légèrement plus basses.

5.8.2 Régime de chute libre

Pour produire au laboratoire des colonnes de plasma faiblement collisionnel, on a cherché et réussi à faire fonctionner des tubes à décharges dans des gammes de pressions assez basses, de l'ordre de 10^{-2} torr ou plus faibles. Dans ces conditions, les libres parcours moyens des électrons et des ions sont bien plus grands que le rayon du tube, et on entre dans le régime dit de chute libre.

La théorie de la colonne est alors analogue à celle faite pour les sondes à basse pression (cf. problème P1-4) à ceci près que le plasma est ici borné par une surface isolante qui ne peut collecter aucun courant net, alors que dans le cas des sondes il est borné par une surface métallique qui peut collecter un courant positif ou négatif (plus précisément la paroi isolante du tube est équivalente à une sonde au potentiel flottant ; cf. problème P1-4).

Les idées de base de la théorie de ces colonnes à basse pression sont donc les suivantes :

- Le plasma est électriquement neutre jusqu'au voisinage de la paroi.
- La paroi est à un potentiel négatif repoussant presque tous les électrons.
- Il se forme près de la paroi une gaine ionique d'épaisseur très faible si la longueur de Debye est bien plus petite que le rayon du tube.
- Les électrons et les ions sont créés dans le corps du plasma selon la loi habituelle :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{\partial n_i}{\partial t} = \nu_I n_e \quad (5.106)$$

où ν_I est la fréquence d'ionisation.

- Les ions créés en un point quelconque du plasma "tombent en chute libre" jusqu'à la paroi sous l'effet du potentiel électrostatique $\phi(r)$ qui est accélérateur pour eux.
- Les électrons sont au contraire confinés dans le plasma par le potentiel $\phi(r)$. On admet qu'ils sont en équilibre thermodynamique à la température T_e dans ce puits de potentiel, de sorte que la densité électronique satisfait à l'équation :

$$n_e(r) = n_{e0} \exp(-q_e \phi / \kappa T_e) \quad (5.107)$$

où n_{e0} est la densité électronique dans la partie centrale du plasma. Dans la gaine, cette densité décroît donc exponentiellement et prend une valeur très faible mais non nulle au niveau de la paroi. Il en résulte un courant résiduel électronique qui équilibre le courant ionique.

- Le potentiel $\phi(r)$ self-consistent est enfin déterminé par l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \phi(r) = -(n_e(r)q_e + n_i(r)q_i) / \epsilon_0 \quad (5.108)$$

La théorie a été développée sur ces bases par plusieurs auteurs ([49], [50], [51], [52], [53]). Le paramètre critique qui s'introduit est le rapport :

$$A = \frac{\nu_I}{\nu_I + \nu_{io}} \quad (5.109)$$

où ν_I est comme précédemment la fréquence d'ionisation et ν_{io} la fréquence de collision ion-neutre pour l'échange de quantité de mouvement. Un résultat intéressant de cette théorie est la répartition radiale de la densité dans le plasma, qui est représentée sur la figure 5.12 extraite de [50]. On y a porté en abscisse le rapport r/r_b où r_b est le rayon limite du plasma (début de la gaine), c'est-à-dire en pratique celui du tube si la longueur de Debye est assez petite, et en ordonnée le rapport de la densité à la densité centrale n_0 .

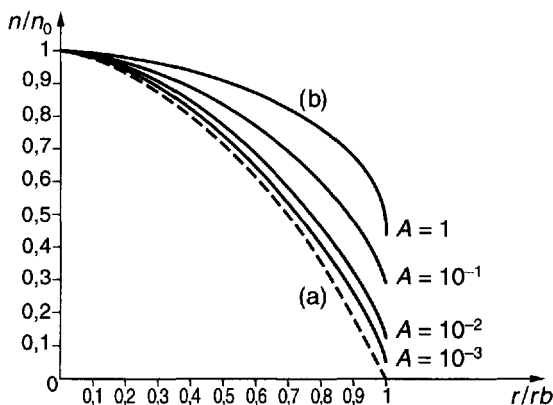


Figure 5.12 : Répartition radiale de la densité dans une colonne positive [50].

$$A = \frac{\nu_I}{\nu_I + \nu_{io}} \text{ (voir texte).}$$

(a) Limite des “hautes” pressions (régime de Schottky).

(b) Limite des basses pressions (régime de chute libre).

Le cas limite $A = 0$ (“hautes” pressions) correspond à la théorie de Schottky où n_e est donnée par la formule (5.90). L’autre limite $A = 1$ (basses pressions) correspond au régime de chute libre. On y voit que la densité reste alors finie à l’entrée de la gaine, de sorte que la répartition radiale de la densité est plus plate que dans le régime de Schottky.

5.9 Recombinaison en volume Attachement

5.9.1 Généralités

Si la densité électronique dans un plasma est suffisamment élevée, les phénomènes de recombinaison entre particules chargées dans le volume du gaz peuvent devenir importants. On a vu au chapitre 4 que les mécanismes de recombinaison sont très divers : les réactions de recombinaison peuvent être à deux ou à trois corps. Nous supposons pour l’instant que ces réactions se produisent en tout cas entre électrons et ions positifs ; cela élimine le cas des gaz électronégatifs où les ions négatifs peuvent jouer un rôle important ; ce dernier cas sera traité au paragraphe 5.9.4.

Dans ces conditions, le taux de disparition des électrons peut s'écrire :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\alpha n_e n_i \quad (5.110)$$

où α est appelé coefficient de recombinaison ; si les réactions sont effectivement des réactions binaires électron-ion, α est un vrai taux de réaction binaire ; il est alors indépendant des densités et fonction essentiellement de la température électronique T_e . Si, au contraire, des réactions à trois corps interviennent, c'est un coefficient apparent, qui est en général fonction des diverses densités en jeu (n_e , n_i , n_o) ainsi que de T_e .

Quoi qu'il en soit, on peut écrire dans un plasma neutre le terme de recombinaison sous la forme :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\alpha n_e^2 \quad (5.111)$$

C'est un terme non linéaire par rapport à la densité n_e ; son importance est d'autant plus grande que n_e est plus grand ; d'où les deux conclusions générales suivantes :

- les phénomènes de recombinaison en volume ne sont importants que dans les plasmas suffisamment denses ;
- la recombinaison en volume, lorsqu'elle est importante, tend à uniformiser spatialement la densité n_e .

5.9.2 Comparaison des pertes par diffusion et par recombinaison en volume

Pour se faire une idée des domaines de densité pour lesquels les phénomènes de recombinaison en volume sont importants, il suffit de rapprocher les formules (5.35) et (5.111). En égalant les deux valeurs de $\partial n_e / \partial t$ on obtient une condition qui va définir les densités critiques⁵, soit :

$$\alpha n_e^2 = \frac{D_a}{\Lambda^2} n_e \quad (5.112)$$

ou, compte tenu de la relation d'Einstein :

$$n_e \Lambda^2 \alpha = \frac{\kappa T_i}{q_i} \mu_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \quad (5.113)$$

5. Ce calcul n'est qu'un calcul d'ordre de grandeur parce que, en présence de recombinaisons, le terme de diffusion $D_a \nabla^2 n_e$ ne peut pas s'écrire sous la forme simple $-D_a n_e / \Lambda^2$ (cf. par exemple [48]).

ou encore, en introduisant la mobilité réduite μ_{i0} [cf. (5.20)] :

$$n_e n_o \Lambda^2 \alpha = \frac{\mu_{i0} n_L}{q_i} (\kappa T_e + \kappa T_i) \quad (5.114)$$

En pratique, les mobilités μ_{i0} sont de l'ordre de $10 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$. En introduisant cette valeur moyenne et en supposant $\kappa T_e = \kappa T_i = 2 \times 10^{-2} \text{ eV}$ (gaz en équilibre thermique à la température ordinaire), la formule ci-dessus devient :

$$n_e n_o \Lambda^2 \alpha \sim 10^{19} \quad (5.115)$$

Les coefficients de recombinaison α variant d'ailleurs entre 10^{-7} et $10^{-12} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$, on peut établir finalement le tableau 5.6 qui fournit les valeurs critiques de n_e pour quelques cas typiques.

$n_o \Lambda_2$	$p = 1 \text{ torr}$ $\lambda = 1 \text{ cm}$	$p = 10 \text{ bar}$ $\lambda = 1 \text{ mm}$
	\Downarrow	\Downarrow
$\alpha (\text{cm}^3 \text{s}^{-1})$	$n_o = 3 \cdot 10^{16}$	$n_o = 3 \cdot 10^{20}$
10^{-7}	$3 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^7$
10^{-12}	$3 \cdot 10^{14}$	$3 \cdot 10^{12}$

Tableau 5.6 : Ordre de grandeur des valeurs critiques de $n_e \text{ (cm}^{-3}\text{)}$ pour lesquelles la recombinaison en volume devient importante ($\mu_{i0} = 10 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $\kappa T_e = \kappa T_i = 2 \times 10^{-2} \text{ eV}$).

5.9.3 Évolution de la densité dans un plasma en recombinaison

a) Recombinaison dominante

Dans un plasma de post-décharge, les électrons peuvent disparaître par diffusion vers les parois et recombinaison en surface, par recombinaison ou par attachement dans le volume du gaz. Si l'on néglige diffusion et attachement, l'équation d'évolution de n_e s'écrit simplement dans un plasma neutre :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\alpha n_e^2 \quad (5.116)$$

Pour intégrer cette équation on supposera la température électronique constante. On peut alors considérer deux cas limites (cf. chapitre 4) :

- *Recombinaison radiative* :

$$\alpha = \text{Cte} \longrightarrow \frac{1}{n_e(t)} = \frac{1}{n_e(0)} + \alpha(t - t_0) \quad (5.117)$$

- *Recombinaison triple e-e-i* :

$$\alpha = kn_e \longrightarrow \frac{1}{n_e^2(t)} = \frac{1}{n_e^2(0)} + 2k(t - t_0) \quad (5.118)$$

où $n_e(0)$ désigne la densité initiale à l'instant $t = t_0$.

b) Diffusion et recombinaison en volume

Si la diffusion et la recombinaison en volume existent simultanément, l'équation d'évolution de n_e peut s'écrire dans le cas le plus simple :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - D\nabla^2 n_e = -\alpha n_e^2 \quad (5.119)$$

Cette équation différentielle non linéaire ne peut, en général, s'intégrer que numériquement.

Il est intéressant toutefois de considérer le cas expérimentalement très fréquent où la recombinaison est faible comparée à la diffusion. On peut alors admettre que la répartition de densité dans le récipient est déterminée essentiellement par la diffusion et étudier par exemple ce qui se passe quand cette répartition est voisine de celle du mode fondamental de diffusion du récipient. On a alors [cf. (5.42) et (5.47)] :

$$D\nabla^2 n_e = -\frac{D}{\Lambda^2} n_e = -\nu n_e \quad (5.120)$$

et (5.119) s'écrit :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\nu n_e - \alpha n_e^2 \quad (5.121)$$

d'où l'on déduit par intégration :

$$\frac{n_e(t)}{\nu + \alpha n_e(t)} = \frac{n_e(0)}{\nu + \alpha n_e(0)} e^{-\nu(t-t_0)} \quad (5.122)$$

5.9.4 Attachement électronique

On appelle attachement électronique les phénomènes de production d'ions négatifs qui se produisent par réaction des électrons avec les neutres dans les gaz électronégatifs (O_2 , halogènes, ...).

Les mécanismes élémentaires d'attachement d'un électron sur un atome ou une molécule ont été décrits au chapitre 4. Les propriétés détaillées de ces réactions (sections efficaces et variation de celles-ci avec l'énergie électronique) ne sont pas toujours très bien connues. Nous nous contenterons ici des quelques remarques suivantes :

- On peut définir une fréquence d'attachement ν_A par la formule :

$$\nu_A = n_o \langle \sigma_a w_e \rangle = \frac{n_o}{n_e} \int_0^\infty \sigma_a(w_e) 4\pi w_e^3 f(w_e) dw_e \quad (5.123)$$

où $\sigma_a(w_e)$ est la section efficace d'attachement pour les électrons de vitesse w_e .

- L'équation d'évolution de n_e s'écrit si l'attachement est seul présent :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\nu_A n_e \quad (5.124)$$

ce qui conduit si ν_A est constant à une décroissance exponentielle de la densité de période $1/\nu_A$.

Dans les gaz où l'attachement est important, les électrons sont très vite remplacés totalement ou partiellement par des ions négatifs. On a alors à considérer un plasma avec trois espèces de particules chargées : e, A^- , A^+ . Les formules de diffusion ambipolaire doivent alors être modifiées [48]. Enfin les phénomènes de recombinaison ion positif - ion négatif peuvent devenir importants.

5.10 Appendices

A5-1 Modes propres et longueurs de diffusion de cavités cylindriques ou parallélépipédiques

La recherche des modes propres du laplacien dans les conditions définies au paragraphe 5.4 est un problème classique que l'on rencontre dans divers domaines de la physique (résonance des cavités acoustiques ou électromagnétiques, diffusion des neutrons dans les réacteurs...). Rappelons sa solution dans deux cas particuliers.

a) Cavités parallélépipédiques

En prenant pour origine des coordonnées un sommet de la cavité, on cherche à résoudre l'équation :

$$\frac{\nabla^2 n}{n} = -\frac{1}{\Lambda^2} \quad (5.125)$$

avec $n = 0$ sur la surface de la cavité. Pour cela on cherche des solutions à variables séparées de la forme :

$$n(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (5.126)$$

En reportant cette expression dans (5.125) on obtient :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{1}{\Lambda^2} \quad (5.127)$$

qu'on résout en posant :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 \quad (5.128)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 \quad (5.129)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\gamma^2 \quad (5.130)$$

où α , β , γ sont constants.

La solution de (5.128) qui satisfait à la condition $X = 0$ pour $x = 0$ est :

$$X = A_1 \sin(\alpha x) \quad (5.131)$$

Pour que de plus elle satisfasse à la condition $X = 0$ pour $x = a$ on doit avoir :

$$\alpha = \frac{\ell\pi}{a} \quad (5.132)$$

En raisonnant de même pour Y et Z on obtient donc :

$$X = A_1 \sin\left(\frac{\ell\pi x}{a}\right) \quad (5.133)$$

$$Y = A_2 \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (5.134)$$

$$Z = A_3 \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \quad (5.135)$$

ℓ , m et n étant trois entiers quelconques ; en rapprochant ces trois résultats on obtient la formule (5.43) et en les reportant dans l'équation (5.125) on obtient pour la longueur de diffusion du mode ℓmn la formule (5.44).

b) Cavités cylindriques

On prend maintenant pour origine le centre d'une des faces circulaires de la cavité et l'on pose :

$$n(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z) \quad (5.136)$$

En reportant dans (5.125) on obtient :

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{1}{\Lambda^2} \quad (5.137)$$

La variable z étant séparée on pose :

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\gamma^2 \quad (5.138)$$

La solution de (5.138) qui satisfait à la condition $Z = 0$ pour $z = 0$ est :

$$Z = A_3 \sin(\gamma z) \quad (5.139)$$

Pour que de plus elle satisfasse à la condition $Z = 0$ pour $z = h$ on doit avoir :

$$\gamma = \frac{n\pi}{h} \quad (5.140)$$

d'où

$$Z = A_3 \sin \left(\frac{n\pi z}{h} \right) \quad (5.141)$$

En reportant ce résultat dans (5.137) et en multipliant par r^2 il vient :

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \left(\gamma^2 - \frac{1}{\Lambda^2} \right) r^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0 \quad (5.142)$$

Les variables r et φ étant maintenant séparées on pose :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \quad (5.143)$$

d'où :

$$\Phi = A_2 \cos m\varphi + B_2 \sin m\varphi \quad (5.144)$$

Pour que la fonction Φ soit uniforme il faut que m soit entier. Reportons maintenant (5.143) dans (5.142) et multiplions par R/r^2 ; il vient :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{1}{\Lambda^2} - \gamma^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (5.145)$$

Posons :

$$k^2 = \frac{1}{\Lambda^2} - \gamma^2 \quad (5.146)$$

et faisons le changement de variable :

$$x = kr \quad (5.147)$$

On obtient en divisant (5.145) par k^2 :

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(\frac{1 - m^2}{x^2} \right) R = 0 \quad (5.148)$$

qui est l'équation de Bessel classique d'ordre m . Sa solution générale est (cf. [267, p.951]) :

$$R = A_1 J_m(x) + B_1 N_m(x) \quad (5.149)$$

Pour que R reste fini pour $r = 0$, B_1 doit être nul. Pour que R s'annule pour $r = a$, ka doit être un zéro de J_m ; en désignant par $\alpha_{\ell m}$ le ℓ -ième zéro de J_m on peut donc écrire :

$$k = \frac{\alpha_{\ell m}}{a} \quad (5.150)$$

d'où finalement :

$$R = A_1 J_m \left(\frac{\alpha_{\ell m} r}{a} \right) \quad (5.151)$$

En regroupant les résultats (5.141), (5.144) et (5.151) on obtient pour le mode ℓmn l'expression (5.45). En reportant dans (5.146) les valeurs (5.140) et (5.150) de ν et K on obtient pour la longueur de diffusion $\Lambda_{\ell mn}$ la formule (5.143).

5.11 Problèmes

P5-1 Création d'un plasma par un faisceau d'électrons

a) On considère l'expérience représentée schématiquement sur la figure 5.13. Un cylindre métallique (rayon b , longueur L , $L \gg b$) est rempli d'argon (pression p_0 ,

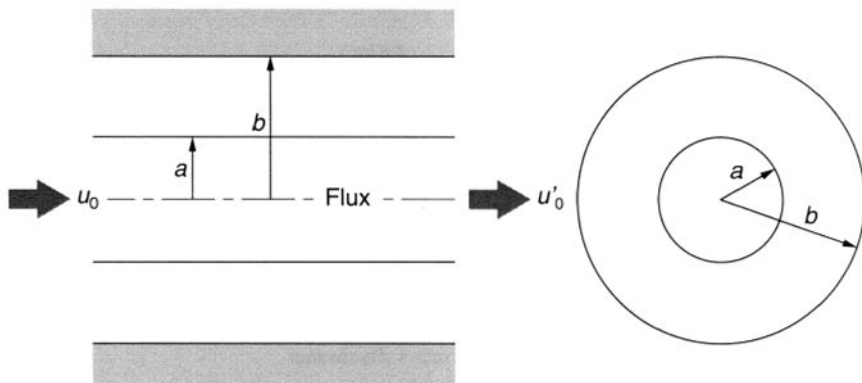


Figure 5.13 : Création d'un plasma par un faisceau d'électrons.

température T_0). Un faisceau d'électrons monoénergétiques de rayon a et de grande énergie initiale u_0 se déplace le long de l'axe de ce cylindre. Soit σ_I la section efficace de production des électrons secondaires par collisions (e , Ar) et supposons que dans le domaine d'énergie considéré ($u_0 > 10^3$ eV), σ_I soit donné approximativement par la formule

$$\sigma_I = A/u_0 \quad (5.152)$$

avec $A = 10^{-13} \text{ cm}^2 \text{ eV}$.

Trouver la condition qui doit être remplie pour que l'énergie moyenne u'_0 des électrons du faisceau quittant le système ne soit pas très différente de u_0 , c'est-à-dire

$$u'_0 = u_0(1 - \epsilon) \quad \text{avec } \epsilon \ll 1.$$

On considère un exemple numérique avec $L = 20 \text{ cm}$, $T_0 = 273\text{K}$, $u_0 = 20 \text{ keV}$ et $\epsilon = 10^{-3}$; calculer p_0 (torr).

- b) On suppose maintenant que les électrons secondaires disparaissent par diffusion et recombinaison sur les parois.
- Déterminer le taux de création α de ces électrons (nombre d'électrons par cm^3 et par seconde) en fonction du courant total i dans le faisceau.
 - En supposant que le coefficient de diffusion des électrons secondaires D est constant, déterminer la densité n_{eo} des électrons le long de l'axe du système, en régime stationnaire.
 - À titre d'application numérique, calculer α et n_{eo} , en supposant que la température des électrons secondaires est $T_e = T_0$, celle des ions $T_i = T_e = 273 \text{ K}$, leur mobilité réduite $\mu_{i0} = 1.8 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, le courant $i = 1.6 \times 10^{-7} \text{ A}$, $a = 1 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$; les autres conditions sont les mêmes qu'en (i).
 - Discuter l'hypothèse $T_e = T_0$.
 - Que faut-il changer dans la théorie précédente quand le courant i ou le rapport b/a deviennent plus grands que les valeurs précédentes ?
 - Du point de vue qualitatif, que se passe-t-il si on applique un champ magnétique parallèle à l'axe de l'expérience ?

P5-2 Colonne positive (modèle simple)

En partant du modèle simple des relations (5.101) et (5.102), montrer que l'on a les règles générales non dimensionnelles suivantes :

$$An_o R = [s^{1/2} e^{-1/s} (2 + 1/s)]^{-1/2}$$

$$B \left(\frac{E}{n_o} \right)^2 = \frac{\kappa T_e}{E_i} = s$$

$$n_e(0) = C \frac{i_e}{\pi R^2} \frac{n_o}{E}$$

avec $s = \kappa T_e / E_i$

$$A = \frac{1}{2.4} \left[-\frac{1}{\mu_{i0} n_L} \frac{2q_e a}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2E_i}{m_e} \right)^{1/2} \right]^{1/2}$$

$$B = \frac{m_o}{3E_i} \frac{q_e^2}{m_e^2 (\sigma_1 w_e)^2}$$

$$C = 2.31 \frac{m_e (\sigma_1 w_e)}{q_e^2}$$

P5-3 Diffusion ambipolaire avec plusieurs espèces d'ions

Montrer que lorsqu'un plasma contient deux espèces différentes d'ions positifs (1 et 2), les équations de diffusion ambipolaire deviennent

$$n_e(\vec{r}, t) = d_1(t) n_1(\vec{r}, t) + d_2(t) n_2(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\nabla n_e}{n_e} = \frac{\nabla n_1}{n_1} = \frac{\nabla n_2}{n_2}$$

$$n_e \vec{v}_e = n_1 \vec{v}_1 + n_2 \vec{v}_2$$

$$n_e \vec{v}_e = -D_{ae} \nabla n_e$$

$$n_1 \vec{v}_1 = -D_{a1} \nabla n_1$$

$$n_2 \vec{v}_2 = -D_{a2} \nabla n_2$$

avec

$$D_{ae} = \frac{n_1(\mu_i D_e - \mu_e D_1) + n_2(\mu_2 D_e - \mu_e D_2)}{n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2 - n_e \mu_e}$$

$$D_{a1} = \frac{n_e(\mu_1 D_e - \mu_e D_1) + n_2(\mu_2 D_1 - \mu_1 D_2)}{n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2 - n_e \mu_e}$$

$$D_{a2} = \frac{n_e(\mu_2 D_e - \mu_e D_2) + n_1(\mu_1 D_2 - \mu_2 D_1)}{n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2 - n_e \mu_e}$$

On peut trouver le calcul de ces formules dans [48].

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.

Chapitre 6

Faisceaux d'électrons : ondes et instabilités électrostatiques

6.1 Introduction

Un faisceau d'électrons constitue l'exemple le plus simple d'un plasma uniforme en équilibre susceptible de devenir instable. La source d'énergie libre du faisceau est évidemment sa vitesse. L'analyse des perturbations de petite amplitude y fait apparaître des modes électrostatiques de propagation qui sont caractérisés par une grandeur appelée "énergie d'onde". Pour certains modes l'énergie d'onde est négative. Le système peut alors développer une instabilité linéaire, lorsqu'une telle onde est couplée soit à un mécanisme de dissipation positive (comme dans une résistance ordinaire), soit à une onde d'énergie positive. Nous verrons que des couplages de ce type sont à l'origine de nombreuses instabilités tant dans les plasmas que dans les "tubes" à faisceaux électroniques (oscillateurs et amplificateurs) utilisés pour transformer l'énergie cinétique d'un faisceau électronique en énergie électromagnétique cohérente de haute fréquence.

L'étude des ondes sur un faisceau d'électrons date des années 30 où l'on a inventé de nombreux dispositifs à faisceaux d'électrons pour produire et amplifier des signaux électromagnétiques en hyperfréquences. L'analyse des ondes de charge d'espace dans les faisceaux d'électrons a été faite pour la première fois par W. C. Hahn [54] et S. Ramo [55] et publiée en 1939. Ces études s'appliquaient à un faisceau d'électrons cylindrique entouré

d'un tube métallique concentrique, et concernaient la résolution d'un problème avec conditions aux limites. On supposait que la charge d'espace des électrons dans le faisceau était neutralisée par des ions immobiles, stationnaires et que la dynamique du faisceau était à une dimension, parallèle à un champ magnétique constant et fort. Des travaux ultérieurs ont étendu la théorie à des faisceaux d'électrons placés dans un champ magnétique quelconque fini, ainsi qu'à des faisceaux d'électrons dont la charge d'espace n'est pas neutralisée. Pour faire ressortir les éléments physiques essentiels des faisceaux d'électrons de la manière la plus simple, nous nous limiterons d'abord à l'analyse des écoulements d'électrons homogènes et infinis dans toutes les directions, placés dans un champ magnétique fort. Nous analyserons ensuite succinctement les conditions aux limites pour des faisceaux cylindriques (plus réalistes) de dimensions transversales finies. Cependant nous n'axerons pas notre étude des ondes dans les faisceaux d'électrons sur les dispositifs de ce type. Nous soulignerons plutôt le rôle qu'elles jouent dans la physique des instabilités de plasma.

Dans la section 6.2 nous décrirons la dynamique linéaire des perturbations électrostatiques sur un faisceau d'électrons. On obtient ainsi l'équation de dispersion pour les "ondes rapides" et les "ondes lentes" dans un faisceau électronique.

Dans la section 6.3 nous introduirons les notions d'énergie et de flux d'énergie de perturbation ("énergie d'onde") associé à une onde stable du faisceau. L'excitation externe de ces ondes (par un champ appliqué à une tranche fine du faisceau) est décrite dans la section 6.4 où nous montrerons que cela peut conduire soit à une propagation stable des "ondes de charge d'espace", soit à leur utilisation pour l'amplification spatiale d'un signal (comme dans le klystron), soit enfin à une instabilité temporelle dans une région bornée du faisceau.

Dans la section 6.5 nous montrerons qu'en raison de l'existence d'ondes d'énergie négative sur le faisceau, l'addition d'un phénomène de dissipation positive extérieur au faisceau produit une amplification spatiale des perturbations. De plus, il peut également y avoir instabilité en l'absence de dissipation (cf. section 6.6) quand il y a couplage continu entre les ondes d'énergie positive et les ondes d'énergie négative. Ce cas, qui se produit dans les plasmas contenant plusieurs espèces de particules avec des vitesses différentes, est discuté dans le chapitre 7.

6.2 Dynamique à une dimension

6.2.1 Équations générales non linéaires

Considérons donc le modèle simple d'un écoulement d'électrons uniforme confiné par un très fort champ magnétique parallèle à sa direction, de telle sorte que la dynamique des électrons soit à *une dimension*. Supposons de plus que la densité des électrons est neutralisée par un fond continu d'ions positifs. Pour le moment, nous étudions la dynamique de relativement haute fréquence des électrons et nous négligeons le mouvement des ions, ce qui revient à supposer leur masse infinie. Pour simplifier nous nous limitons à la dynamique *non relativiste* des électrons et supposons que les seuls champs qui interviennent sont *électrostatiques*.

Les équations de la dynamique des électrons dans le modèle des plasmas froids sont l'équation de conservation des particules :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0 \quad (6.1)$$

et l'équation du mouvement :

$$m \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -eE \quad (6.2)$$

où $n(x, t)$ est la densité électronique, $v(x, t)$ la vitesse dans la direction x du mouvement, et $E(x, t)$ le champ électrique dans cette même direction. Ces équations aux dérivées partielles permettent de déterminer la densité des électrons n et la vitesse des électrons v en fonction du champ électrique E . En général elles ne sont pas linéaires ; n et v sont donc des fonctions non linéaires de E . Le champ électrique est, en fait, déterminé par les équations de Maxwell qui, dans le cas des champs électriques, se ramènent soit à l'équation de Poisson :

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} - \rho = \rho_{ext} \quad (6.3)$$

soit à l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + J = -J_{ext} \quad (6.4)$$

où ρ est la densité de charge totale :

$$\rho = -en + \rho_{io} \quad (6.5)$$

ρ_{io} la densité de charge du fond continu des ions positifs, et J la densité totale de courant :

$$J = -e\Gamma = -env \quad (6.6)$$

qui est identique à la densité de courant des électrons puisqu'on suppose les ions immobiles. Dans les équations (6.3) et (6.4), nous avons aussi inclus des sources de charge et de courant, ρ_{ext} et J_{ext} , imposées de façon *extérieure*. Remarquons que l'équation (6.1) implique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad (6.7)$$

et par conséquent les deux équations (6.3) et (6.4) ne sont pas indépendantes. Bien entendu, ρ_{ext} et J_{ext} doivent aussi vérifier une équation de conservation de la forme (6.7). L'ensemble des équations (6.1)–(6.3) ou (6.4) forme un système complet, self-consistent, d'équations dynamiques pour les électrons¹.

On peut aussi établir une équation de conservation de l'énergie pour la dynamique non-linéaire de ce modèle de plasma électronique à une dimension. En multipliant (6.4) par E et en utilisant (6.2) et (6.1) pour évaluer EJ , on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + n \frac{mv^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{mv^2}{2} \Gamma \right) = -E J_{ext} \quad (6.8)$$

où $(\epsilon_0 E^2/2)$ est la densité d'énergie du champ électrostatique, $(nmv^2/2)$ est la densité, et $(\Gamma mv^2/2)$ le flux d'énergie cinétique.

6.2.2 Modes propres du faisceau

a) Équations linéaires des champs de perturbation

Considérons donc l'état d'équilibre d'un écoulement uniforme et neutralisé d'électrons, caractérisé par sa densité électronique et sa vitesse dans la direction x , respectivement :

$$n_0 = \text{Cte} \quad ; \quad v_0 = \text{Cte} \ll c \quad (6.9)$$

Le fond continu des ions étant neutralisant, on a :

$$\rho_{e0} = -en_0 = -\rho_{io} \quad (6.10)$$

1. Dans l'équation (6.6) seul le courant électronique figure au membre de droite ; il n'y a pas de courant de neutralisation. Celui-ci est négligeable pour la dynamique que l'on étudie, qui est à une dimension et électrostatique (variation nulle de B dans le temps) ; on peut considérer J_{ext} comme un courant qui neutralise J .

et, à l'équilibre, il n'y a pas de champ électrique, $E_0 = 0$. On suppose que la vitesse des électrons a été acquise en dehors de la zone considérée, par exemple dans une région d'accélération cathode-anode, ou par toute autre méthode d'injection.

Nous étudions maintenant des petites perturbations autour de cet équilibre en posant :

$$n(x, t) = n_0 + n_1 + n_2 + \dots \quad (6.11)$$

$$v(x, t) = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (6.12)$$

$$E(x, t) = E_1 + E_2 + \dots \quad (6.13)$$

où l'on considère n_1 , v_1 et E_1 comme des perturbations du premier ordre. Le calcul au premier ordre s'effectue en portant ces expressions dans le système (6.1)–(6.6) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, tels que n_2 et $n_1 v_1$. On arrive ainsi aux *équations dynamiques linéarisées* pour le faisceau d'électrons :

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} = 0 ; \quad \Gamma_1 = n_0 v_1 + n_1 v_0 \quad (6.14)$$

$$m \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = -e E_1 \quad (6.15)$$

$$\rho_1 = -e n_1 ; \quad J_1 = -e \Gamma_1 \quad (6.16)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial x} - \rho_1 = \rho_{ext} ; \quad \epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} + J_1 = -J_{ext} \quad (6.17)$$

b) Relation de dispersion

Les équations (6.14) à (6.17) forment un système d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants qui peut être résolu en général par une transformation de Fourier-Laplace sur les champs :

$$E_1(k, \omega) = \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \, E_1(x, t) e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (6.18)$$

$$E_1(x, t) = \int_L \frac{d\omega}{2\pi} \int_F \frac{dk}{2\pi} E_1(k, \omega) e^{ikx} e^{-i\omega t} \quad (6.19)$$

On obtient alors un ensemble d'équations algébriques pour les transformées de Fourier-Laplace (fonctions spectrales) du champ. Plus simplement, en négligeant les conditions initiales et aux limites et en supposant que la variation spatio-temporelle de chaque champ est exponentielle, on peut poser :

$$E_1(x, t) = \text{Re}[E_1 e^{ikx} e^{-i\omega t}] \quad (6.20)$$

et il en résulte un système d'équations algébriques pour les amplitudes complexes du champ. À partir de (6.15) et (6.14), on obtient :

$$v_1 = \frac{-i\frac{e}{m}E_1}{(\omega - kv_0)} \quad (6.21)$$

$$n_1 = n_0 \frac{kv_1}{(\omega - kv_0)} = n_0 \frac{-i\frac{e}{m}kE_1}{(\omega - kv_0)^2} \quad (6.22)$$

La densité de charge perturbée ρ_1 et la densité de courant J_1 peuvent s'écrire en fonction de l'amplitude du champ électrique E_1 sous les formes :

$$\rho_1 \equiv -ik\epsilon_0\chi_L(k, \omega)E_1 \quad (6.23)$$

où

$$\chi_L(k, \omega) = \frac{-\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} \quad (6.24)$$

est la *susceptibilité longitudinale* du faisceau d'électrons, et

$$J_1 \equiv \sigma_L(k, \omega)E_1 \quad (6.25)$$

avec

$$\sigma_L(k, \omega) = i\omega\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} \quad (6.26)$$

sa *conductivité longitudinale* ($\omega_p^2 = e^2n_0/m\epsilon_0$ est la fréquence plasma du faisceau non perturbé). On déduit immédiatement de la forme linéarisée de (6.7) que σ_L et χ_L sont reliées par la formule :

$$\sigma_L = -i\omega\epsilon_0\chi_L \quad (6.27)$$

Finalement, à partir de l'une des équations (6.17) on obtient :

$$E_1 = \frac{\rho_{ext}/(ik\epsilon_0)}{K_L(k, \omega)} = \frac{J_{ext}/(-i\omega\epsilon_0)}{K_L(k, \omega)} \quad (6.28)$$

où :

$$\begin{aligned} K_L(k, \omega) &= 1 + \chi_L(k, \omega) = 1 + \frac{\sigma_L(k, \omega)}{-i\omega\epsilon_0} \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} \end{aligned} \quad (6.29)$$

est la *permittivité longitudinale* du faisceau d'électrons. Nous avons ainsi obtenu les champs complexes de perturbation ayant la forme (6.19) pour des champs de source extérieurs donnés.

Mais on peut aussi considérer les solutions du système (6.14)-(6.17) dites des champs libres, c'est-à-dire avec $\rho_{ext} = J_{ext} = 0$. Pour celles-ci [en supposant toujours une dépendance spatio-temporelle selon (6.20)], les solutions non triviales de l'équation (6.28), c'est-à-dire $E_1 \neq 0$, doivent satisfaire la condition [cf. aussi (1.22)] :

$$D(k, \omega) \equiv K_L(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} = 0 \quad (6.30)$$

Cette équation est appelée la *relation de dispersion* pour les perturbations électrostatiques du faisceau d'électrons.

c) Onde rapide et onde lente

La relation de dispersion peut être considérée comme une contrainte reliant le nombre d'ondes k et la fréquence ω des solutions libres. Les champs d'onde complexes, dont la dépendance spatio-temporelle est en $\exp(ikx - i\omega t)$, qui vérifient cette contrainte sont les solutions *naturelles* du système, appelées aussi modes propres (par opposition aux solutions forcées ; cf. problème P6-1). D'après (6.30) il existe deux branches à la relation de dispersion :

$$\omega - kv_0 = \pm \omega_p \quad (6.31)$$

On remarque que si k est réel, $k = k_r$, ω est aussi réel, $\omega = \omega_r$, et réciproquement. Les deux branches de (6.31) sont représentées sur la figure 6.1. Les perturbations correspondantes sont périodiques dans l'espace et dans le temps. On distingue généralement ces deux ondes progressives par leur vitesse de phase pour les valeurs positives de k_r et ω_r . Ainsi la branche :

$$\omega_r - k_r v_0 = +\omega_p ; \quad \frac{\omega_r}{k_r} = v_0 + \frac{\omega_p}{k_r} \quad (6.32)$$

est appelée "l'onde rapide" en ce sens que sa vitesse de phase, est plus grande que la vitesse du faisceau, et la branche :

$$\omega_r - k_r v_0 = -\omega_p ; \quad \frac{\omega_r}{k_r} = v_0 - \frac{\omega_p}{k_r} \quad (6.33)$$

est appelée "l'onde lente". Les deux ondes ont la même vitesse de groupe $(d\omega_r/dk_r) = v_0$, égale à la vitesse du faisceau.

Pour $v_0 = 0$, l'équation (6.29) se ramène à la fonction de permittivité et (6.30) à l'équation de dispersion pour les oscillations longitudinales d'un plasma électronique froid, dont les solutions sont $\omega = \pm \omega_p$ avec k quelconque. On obtient donc la fonction de permittivité du faisceau d'électrons

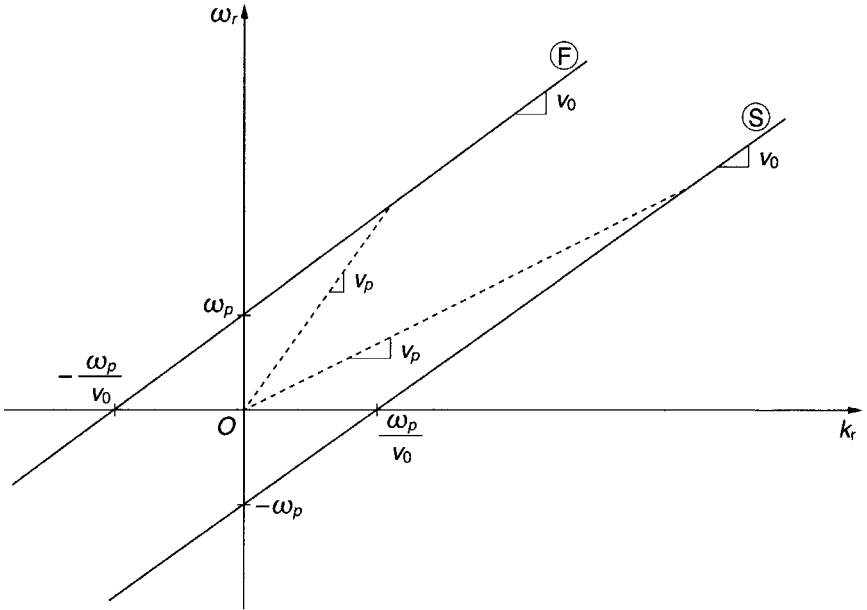


Figure 6.1 : Diagramme de dispersion des ondes sur un faisceau d'électrons.

F onde rapide (fast) ; S onde lente (slow).

$v_p = (\omega_r/k_r)$ vitesse de phase ; $v_g \equiv (d\omega_r/dk_r) = v_0$ vitesse de groupe.

et sa relation de dispersion en remplaçant ω par $\omega - kv_0$, ce qui n'est rien d'autre que l'effet Doppler (non relativiste) ; en effet le faisceau d'électrons est simplement un plasma électronique froid avec une vitesse de glissement v_0 .

Analysons cela de façon plus précise. Considérons un système de coordonnées (x', t') se déplaçant avec une vitesse constante v_0 par rapport au système du laboratoire (x, t) dans lequel est décrit le faisceau. Les coordonnées transformées, non relativistes (de Galilée), sont :

$$x' = x - v_0 t \quad (6.34)$$

$$t' = t \quad (6.35)$$

La dépendance spatio-temporelle de l'onde dans le système de coordonnées (x', t') devient :

$$\begin{aligned} \exp(ikx - i\omega t) &= \exp[ik(x' + v_0 t') - i\omega t'] \\ &= \exp[ikx' - i(\omega - kv_0)t'] \end{aligned} \quad (6.36)$$

et les transformations de k et ω sont :

$$k' = k \quad (6.37)$$

$$\omega' = \omega - kv_0 \quad (6.38)$$

Avec l'équation (6.31) on trouve :

$$\omega' = \pm \omega_p \quad (6.39)$$

qui est bien l'équation de dispersion pour les oscillations longitudinales (électrostatiques) dans un plasma froid, stationnaire.

6.3 Énergie et flux d'énergie associés aux ondes

6.3.1 Énergie et modèle linéaire

Dans le modèle des plasmas froids, la dynamique d'un faisceau est complètement décrite par le système des équations dynamiques constitué par les équations de conservation des particules, de transport de la quantité de mouvement et de Maxwell. Par combinaison entre elles on peut obtenir une équation de conservation de l'énergie. Dans cette dernière, les variables de champ apparaissent à un ordre supérieur à celui qu'elles ont dans les équations dynamiques. Ainsi, par exemple, aux équations non linéaires de la dynamique d'un faisceau d'électrons à une dimension non relativiste, (6.1), (6.2), (6.4) et (6.6), on peut associer l'équation de conservation de l'énergie (6.8)². À partir de (6.8), on a identifié la densité d'énergie et le flux d'énergie pour ce système, chacune de ces deux quantités ayant une signification physique évidente.

De la même façon, les équations dynamiques linéarisées, (6.14), (6.15) et (6.17), conduiront également à une équation de conservation, (6.57), qui permettra de définir la densité et le flux d'énergie dits de *perturbation*. Mais l'interprétation physique des différents termes de cette équation est plus subtile. Puisque les champs linéarisés ne sont qu'une partie des champs

2. Remarquons que certaines des équations dynamiques sont elles-mêmes des équations de conservation. Ainsi, (6.1) exprime la conservation locale des particules et (6.2) la (non-) conservation de la quantité de mouvement en présence d'un champ électrique. Mais, dans ces équations, les variables de champ apparaissent à un ordre inférieur à celui qu'elles ont dans l'équation de conservation de l'énergie (6.8). Remarquons également que les équations dynamiques d'ordre inférieur (6.1)-(6.6) sont fermées, c'est-à-dire que leur résolution pour les variables de champ (n , v , et E) ne nécessite pas l'équation de conservation de l'énergie (6.8) ; mais leurs solutions satisfont automatiquement celle-ci.

exacts et que la densité d'énergie et le flux d'énergie sont de degré supérieur par rapport aux champs (elles contiennent des produits des différentes variables de champ), il n'y a, en général, aucun ordre d'approximation qui soit mathématiquement cohérent entre la densité d'énergie et le flux d'énergie de perturbation et les valeurs exactes obtenues à partir de (6.8). Il n'est donc pas surprenant que l'énergie de perturbation puisse être négative alors que l'énergie totale est toujours positive. Comme nous le verrons, le concept d'énergie de perturbation négative est très utile pour identifier et comprendre les divers types d'instabilités linéaires dans les plasmas.

On peut donner une interprétation physique de la densité et du flux d'énergie de perturbation *moyennés dans l'espace et/ou dans le temps* en considérant la différence entre les énergies moyennées quand le système est perturbé ou non. C'est l'objet du paragraphe suivant. On obtiendra alors une image mathématiquement correcte en évaluant les énergies moyennées exactes à partir des champs non perturbés et perturbés au premier ordre. De toutes façons, l'équation de conservation de l'énergie de perturbation, que nous établirons ainsi, est mathématiquement correcte et indépendante de l'équation exacte de conservation de l'énergie.

6.3.2 Énergie dans les ondes rapides et lentes

La dynamique des oscillations électroniques est très différente pour les deux branches définies par l'équation (6.31). Ainsi, à partir des équations (6.22) et (6.32) on obtient pour *l'onde rapide* :

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{k_r}{\omega_p} v_1 \quad (6.40)$$

c'est-à-dire que pour $k_r > 0$, n_1 et v_1 y sont en phase. Pour *l'onde lente* on trouve au contraire :

$$\frac{n_1}{n_0} = -\frac{k_r}{\omega_p} v_1 \quad (6.41)$$

c'est-à-dire que pour $k_r > 0$, n_1 et v_1 y sont en opposition de phase. Cela est illustré sur la figure 6.2 où les oscillations périodiques (dans le temps ou dans l'espace) de la densité et de la vitesse sont représentées et comparées aux valeurs à l'équilibre n_0 de la densité et v_0 de la vitesse. On voit que pour le cas des ondes rapides, lorsqu'il y a accumulation de densité (par rapport à l'équilibre), les vitesses sont supérieures (au cas non perturbé) et que, quand la densité est inférieure, la vitesse l'est également ; il y a donc *plus* d'énergie cinétique dans le faisceau en présence de l'onde rapide que dans l'état d'équilibre. Au contraire pour l'onde lente, la densité des particules est plus élevée dans les régions de faible vitesse et réciproquement,

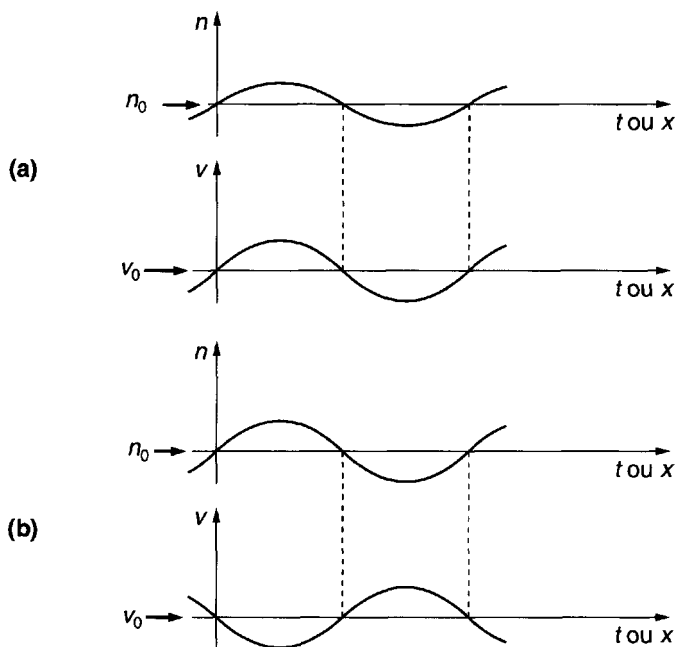


Figure 6.2 : Perturbations de la densité et de la vitesse.

n_0 et v_0 valeurs d'équilibre.

(a) Onde rapide.

(b) Onde lente.

de sorte qu'un faisceau propageant une onde lente contient moins d'énergie cinétique que le faisceau non perturbé. Autrement dit, l'excitation d'une onde rapide demande que de l'énergie soit fournie au faisceau ; c'est le cas que l'on rencontre généralement dans les phénomènes de propagation d'onde. De telles ondes sont des *ondes passives*. Au contraire l'excitation d'une onde lente nécessite une extraction de l'énergie à partir du faisceau ; une telle onde peut être appelée une *onde active*. Nous verrons dans les paragraphes suivants que les instabilités de courant dans les plasmas contenant des particules chargées en écoulement peuvent fréquemment être interprétées en termes de couplage avec ces ondes actives, mais avant de le faire il est utile d'établir sur des bases plus solides les phénomènes d'énergie dans un faisceau d'électrons propageant une onde.

6.3.3 Énergie associée aux ondes

D'un point de vue physique [cf. également l'équation (6.8)] il est clair que l'énergie contenue dans le faisceau est la somme de l'énergie cinétique des électrons et de l'énergie du champ électrostatique. Désignons les densités de ces deux formes d'énergie par :

$$U_K = n \frac{mv^2}{2} \quad (6.42)$$

et

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (6.43)$$

Dans l'état non perturbé du faisceau nous avons :

$$U_{K0} = n_0 \frac{mv_0^2}{2} \quad \text{et} \quad U_{E0} = 0. \quad (6.44)$$

En présence d'une perturbation, posons³ :

$$U_K^p = \frac{m}{2} (n_0 + n_1) (v_0 + v_1)^2 \quad (6.45)$$

et

$$U_E^p = \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 \quad (6.46)$$

Calculons maintenant ces grandeurs pour des solutions périodiques dans l'espace et le temps avec k et ω réels, reliés par la relation de dispersion (6.30). Les moyennes dans l'espace ou le temps peuvent s'écrire :

$$\langle U(x, t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} U(x, t) dt = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} U(x, t) dx \quad (6.47)$$

Ainsi, les moyennes de (6.46) et (6.45) peuvent s'exprimer au moyen des amplitudes complexes des différentes variables :

$$\langle U_E^p \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} |E_1|^2 \quad (6.48)$$

$$\langle U_K^p \rangle = n_0 \frac{mv_0^2}{2} + n_0 \frac{m \langle v_1^2 \rangle}{2} + mv_0 \langle n_1 v_1 \rangle \quad (6.49)$$

$$= U_{K0} + n_0 \frac{m |v_1|^2}{4} + \frac{mv_0}{2} \text{Re}(n_1 v_1^*) \quad (6.50)$$

3. On remarque que U_K^p n'est pas la densité d'énergie cinétique totale calculée à l'approximation du deuxième ordre par rapport aux amplitudes du champ. Pour cela on doit considérer l'expression $(n_0 + n_1 + n_2) \frac{m}{2} (v_0 + v_1 + v_2)^2 = U_K^p + n_2 (mv_0^2/2) + n_0 mv_0 v_2$ + (termes des troisième et quatrième ordres) dont l'évaluation au deuxième ordre nécessiterait la résolution d'équations non linéaires en n_2 et v_2 . Les moyennes de n_2 et v_2 contribuent en général à la moyenne de U_K (cf. problème P6-2). En définissant U_K^p on a supposé que les champs sont définis seulement par les amplitudes non perturbées et par les amplitudes perturbées au premier ordre.

où l'astérisque désigne la quantité complexe conjuguée d'une quantité. Nous pouvons maintenant former la différence entre la densité d'énergie moyenne totale en présence de la perturbation et la densité d'énergie de l'état d'équilibre, soit :

$$U_1 \equiv \langle U_E^p \rangle + \langle U_K^p \rangle - U_{K0} = \frac{\epsilon_0}{4} |E_1|^2 + n_0 \frac{m|v_1|^2}{4} + \frac{mv_0}{2} \text{Re}(n_1 v_1^*) \quad (6.51)$$

Cette quantité est la *densité d'énergie moyenne totale associée à l'onde*. On remarque que les deux premiers termes sont positifs tandis que le dernier, qui est proportionnel à v_0 , peut être soit positif, soit négatif selon la phase relative de n_1 et v_1 . En utilisant les formules (6.21) et (6.22) on peut facilement écrire U_1 en fonction d'une seule variable de champ. Si on prend comme variable la perturbation de vitesse, on peut écrire :

$$U_1 = n_0 \frac{m|v_1|^2}{4} \left[1 + \left(\frac{\omega_r - k_r v_0}{\omega_p} \right)^2 + \frac{2k_r v_0}{(\omega_r - k_r v_0)} \right] \quad (6.52)$$

et avec comme variable le champ électrique :

$$U_1 = \frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{4} \left[1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_r - k_r v_0)^2} \left\{ 1 + \frac{2k_r v_0}{\omega_r - k_r v_0} \right\} \right] \quad (6.53)$$

En évaluant la densité d'énergie moyenne totale pour les ondes satisfaisant à la relation de dispersion $D(k, \omega) = 0$, on obtient une quantité U_k que nous appellerons brièvement l'*énergie d'onde*. On trouve ainsi compte tenu de (6.31) :

$$\begin{aligned} U_K &= n_0 \frac{m|v_1|^2}{2} \left(\frac{\omega_r}{\omega_r - k_r v_0} \right)_{D=0} = \frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{2} \left(\frac{\omega_r}{\omega_r - k_r v_0} \right)_{D=0} \\ &= \pm \frac{\omega_r}{\omega_p} n_0 \frac{m|v_1|^2}{2} = \pm \frac{\omega_r}{\omega_p} \frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{2} \end{aligned} \quad (6.54)$$

où le signe plus correspond à l'onde rapide et le signe moins à l'onde lente. On voit que le signe de l'énergie d'onde est contrôlé par le dernier terme de (6.51) qui dépend de la phase relative de n_1 et v_1 . Ainsi, *l'onde rapide passive est une onde d'énergie positive* tandis que *l'onde lente active est une onde d'énergie négative*.

6.3.4 Conservation de l'énergie de perturbation

Finalement, on peut montrer que les énergies de perturbation peuvent être introduites directement à partir d'une équation de conservation déduite

des équations dynamiques linéarisées. En effet, en multipliant la deuxième équation (6.17) par E_1 , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 \right) + E_1 J_1 = 0 \quad (6.55)$$

Le premier terme est la dérivée par rapport au temps de la densité d'énergie instantanée du champ électrique de perturbation (6.46). Le deuxième peut s'interpréter à partir des équations dynamiques linéarisées (6.14) et (6.15):

$$\begin{aligned} E_1 J_1 &= -e E_1 \Gamma_1 \\ &= m \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \Gamma_1 \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(n_0 \frac{m v_1^2}{2} + m v_0 v_1 n_1 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (m v_0 v_1 \Gamma_1) \end{aligned} \quad (6.56)$$

En combinant (6.56) et (6.55) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 + n_0 \frac{m v_1^2}{2} + m v_0 v_1 n_1 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (m v_0 v_1 \Gamma_1) = 0 \quad (6.57)$$

qui peut être interprétée comme l'équation de conservation de l'énergie de perturbation du faisceau d'électrons à une dimension. On y reconnaît les densités instantanées d'énergies électrique et cinétique de perturbation :

$$U_E^s = \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 \quad (6.58)$$

$$U_K^s = n_0 \frac{m v_1^2}{2} + m v_0 v_1 n_1 \quad (6.59)$$

et le flux d'énergie cinétique de perturbation :

$$S_K^s = m v_0 v_1 \Gamma_1 \quad (6.60)$$

L'équation de conservation (6.57) est différente de l'équation de conservation non linéaire (6.8) ; en fait, (6.57) ne peut pas être déduite de l'équation (6.8) ; il s'agit d'une nouvelle équation de conservation, utilisable indépendamment. L'équation de conservation de l'énergie de perturbation (6.57), déduite des équations linéarisées, est la relation de conservation pour la dynamique du champ linéarisé ; en l'intégrant sur un volume de l'espace, on obtient les propriétés de l'énergie globale et du flux d'énergie des champs linéarisés.

Remarquons que les densités d'énergie cinétique instantanée U_K^p (6.45) et U_K^s (6.59) ne sont pas égales ; c'est une indication directe que (6.59) ne

peut pas, en général, être déduit de façon cohérente de la densité d'énergie cinétique non linéaire (6.42). La même remarque est également vraie pour les flux instantanés d'énergie (cf. problèmes P6-2 et P6-3).

Pour des champs à variation périodique dans l'espace et le temps, on peut exprimer les densités et flux moyens d'énergie en fonction des amplitudes complexes des champs :

$$\langle U_E^s \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} |E_1|^2 \quad (6.61)$$

$$\langle U_K^s \rangle = n_0 \frac{m|v_1|^2}{4} + \frac{mv_0}{2} \text{Re}(v_1 n_1^*) \quad (6.62)$$

$$\langle s_K^s \rangle = \frac{mv_0}{2} \text{Re}(v_1 \Gamma_1^*) \equiv s_1 \quad (6.63)$$

La somme de (6.61) et (6.62) est bien la densité d'énergie totale moyenne (6.51) de l'onde. Ainsi, on remarque en particulier en moyennant dans le temps que la densité (6.50) d'énergie cinétique des perturbations définie physiquement : $\langle U_K^p \rangle - U_{K_0}$ et celle (6.62) qui est déduite de l'équation de conservation de l'énergie de perturbation : $\langle U_K^s \rangle$, sont identiques. Cela donne un sens physique à la densité d'énergie de perturbation (6.59) quand elle est moyennée dans le temps. De la même façon on identifie (6.63) au flux moyen total d'énergie de perturbation [56]. En utilisant maintenant l'équation de dispersion des ondes on peut montrer que :

$$U_K = \left(\frac{v_\phi}{v_\phi - v_g} \right) \frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{2} \quad (6.64)$$

avec $v_\phi = (\omega_r/k_r)$ et $v_g = (d\omega_r/dk_r) = v_0$; cette équation est équivalente à (6.54) et conduit au même résultat pour les énergies des ondes rapides et lentes définies par (6.54). De plus, on trouve d'après (6.63) calculée pour les solutions de l'équation de dispersion :

$$S_K = v_g U_K \quad (6.65)$$

qui montre que la vitesse d'énergie est égale à la vitesse de groupe (c'est d'ailleurs une propriété générale des milieux conservatifs [361]). On voit donc que le flux d'énergie est positif pour les ondes rapides et négatif pour les ondes lentes ; mais, pour chaque onde, *la vitesse d'énergie se trouve dans la direction x positive, qui est celle de $v_0 = v_g$.*

Le concept d'énergie associée à une onde est à la fois subtil et utile. L'excitation d'une onde d'énergie négative suppose qu'une certaine énergie est perdue par le faisceau d'électrons. Clairement, cela signifie que le faisceau d'électrons se ralentit, c'est-à-dire que v_0 diminue, bien que nous

ayons supposé pour écrire les équations linéaires que v_0 est une constante ! Évidemment, l'étude du ralentissement du faisceau d'électrons nécessiterait la résolution du système des équations dynamiques non linéaires. Le concept d'onde d'énergie négative est très utile pour la compréhension des instabilités dans les plasmas contenant des particules chargées constituant un courant. De telles instabilités sont étudiées dans le chapitre 7.

Il est également utile de remarquer que le signe de l'énergie dépend du système de coordonnées dans lequel l'énergie est considérée. Ainsi, dans un système de coordonnées se déplaçant avec la vitesse v_0 des électrons on aurait simplement un plasma électronique froid et stationnaire, comme on l'a déjà remarqué à la fin de la section 6.2. Dans un tel système, dépourvu d'énergie libre, les oscillations longitudinales de plasma, $\omega' = \pm\omega_p$ et k' quelconque, ont sûrement une énergie positive, $U'_k > 0$. On peut montrer [361] que pour une transformation galiléenne (c'est-à-dire non relativiste) des coordonnées, l'action est conservée, c'est-à-dire que :

$$\frac{U_K}{\omega_r} = \frac{U'_K}{\omega'_r} \quad (6.66)$$

Si donc on sait que U'_k est positif, alors U_k est négatif pour toutes les ondes pour lesquelles $(\omega_r/\omega'_r) = \omega_r/(\omega_r - k_r v_0)$ est négatif, comme on l'a déjà montré [cf. (6.54)].

Les expressions précédemment obtenues pour la densité et le flux d'énergie de perturbation s'appliquent également aux écoulements d'électrons non uniformes (inhomogènes) dans la direction du flux. En particulier, on peut montrer que l'équation (6.57) s'applique aussi quand la densité non perturbée et la vitesse de glissement sont fonctions de x , c'est-à-dire quand $n_0 = n_0(x)$ et $v_0 = v_0(x)$ (cf. problème P6-4). La vitesse et la densité de perturbation ne sont plus alors reliées par (6.21) et (6.22). Leur variation est donnée par un système d'équations différentielles (en x), linéaires à coefficients variables (fonctions de x). On peut aussi voir cela comme un couplage continu (en x) des ondes d'énergie positive et négative qui peut conduire à l'instabilité.

Il faut enfin souligner le fait que le modèle de faisceau électronique décrit dans ce chapitre – à une dimension, non relativiste, neutralisé par des ions immobiles – contient l'essentiel de la dynamique électrostatique des ondes engendrées par des électrons en mouvement. On peut trouver un traitement relativiste de la dynamique électromagnétique de ce système dans [57] et dans la section 7.5. Ce traitement, après les modifications nécessaires pour tenir compte des effets dus à une extension géométrique finie perpendiculaire à \vec{v}_0 , et de l'étalement thermique des vitesses autour

de \vec{v}_0 , s'applique également aux faisceaux d'électrons réels (cf. par exemple [57] et [58]).

6.4 Excitation et stabilité des ondes

Pour compléter l'étude des ondes électrostatiques de petite amplitude sur un flux homogène d'électrons, considérons l'excitation de telles ondes, ou plus généralement leur interaction avec un système externe au faisceau. Puisque les ondes sur les faisceaux d'électrons transportent une énergie de perturbation positive et/ou négative, leur interaction avec les systèmes extérieurs peut être stable ou instable.

6.4.1 Grilles "dipolaires"

Pour illustrer cela, considérons un système externe idéal composé de deux grilles faiblement écartées, plongées dans le courant d'électrons. On suppose leur transparence infinie : elles ne font pas obstacle au passage des électrons [Fig. 6.3].

Supposons d'abord que la séparation entre les grilles soit infiniment petite (sans qu'elles se touchent) et qu'on applique entre elles une source de potentiel à la fréquence ω et de petite amplitude (complexe) V_1 , comme représenté sur la figure 6.3 (a). Supposons également que le flux d'électrons arrive sur les grilles sans aucune perturbation. Quels sont les champs de perturbation dans le courant d'électrons après qu'il a traversé les grilles ?

À partir de l'équation de dispersion (6.31), on remarque que pour une fréquence donnée, il existe deux ondes possibles, dont les nombres d'onde sont respectivement pour l'onde rapide ("f") et pour l'onde lente ("s") :

$$k_f = \frac{\omega_r}{v_0} - \frac{\omega_p}{v_0} \equiv k_e - k_p \quad (6.67)$$

et

$$k_s = \frac{\omega_r}{v_0} + \frac{\omega_p}{v_0} \equiv k_e + k_p \quad (6.68)$$

où l'on a introduit le nombre d'onde "électronique" : $[k_e = \omega_r/v_0]$ et le nombre d'onde de "charge d'espace" : $[k_p = \omega_p/v_0]$. En s'intéressant plus spécialement à la vitesse et à la densité de courant de perturbation, on peut écrire par superposition, et en utilisant les relations entre J_1 et v_1 déduites de (6.21) et (6.25) pour les équations de dispersion (6.32) et (6.33) des ondes rapide et lente :

$$v_1(x) = (v_f e^{-ik_p x} + v_s e^{ik_p x}) e^{ik_e x} \quad (6.69)$$

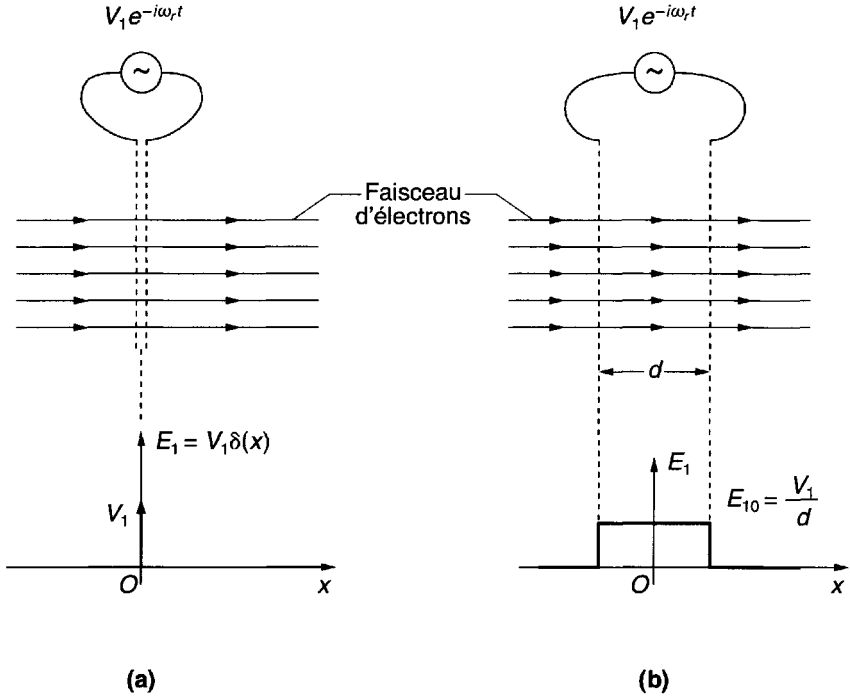


Figure 6.3 : Excitation d'un faisceau d'électrons par une tension appliquée entre deux grilles plongées dans le faisceau.

- (a) Grilles séparées par une distance infinitésimale.
 (b) Grilles séparées par une distance finie d ;
 champ électrique sans faisceau d'électrons.

$$J_1(x) = \frac{\omega_r \epsilon_0 \omega_p}{(-e/m)} (v_f e^{-ik_p x} - v_s e^{ik_p x}) e^{ik_e x} \quad (6.70)$$

où v_f et v_s sont deux amplitudes complexes déterminées par les conditions aux limites. Il est clair que l'on doit préciser deux conditions aux limites pour déterminer une solution. De plus, puisque les vitesses de groupe des deux ondes sont positives, la solution recherchée peut être obtenue en appliquant deux conditions aux limites au plan $x = 0$. On peut montrer (cf. problème P6-5) que pour des grilles extrêmement rapprochées, la tension appliquée produit une perturbation de la vitesse pour $x = 0^+$, mais qu'il n'y a pas de perturbation de la densité de courant :

$$v_1(x = 0^+) = \frac{-e}{m v_0} V_1 \quad (6.71)$$

$$J_1(x = 0^+) = 0 \quad (6.72)$$

Ces conditions déterminent les amplitudes complexes v_f et v_s . D'après la condition aux limites (6.72), l'amplitude des excitations est la même pour l'onde rapide et l'onde lente ($v_f = v_s$). La solution complète de ce problème d'excitation peut s'écrire aisément en introduisant dans le faisceau le "potentiel cinétique"⁴ :

$$U_1(x) \equiv \frac{mv_0}{-e} v_1(x) \quad (6.73)$$

et l'"admittance dynamique du faisceau" par unité de surface perpendiculaire à Ox :

$$Y_b \equiv \omega_r \epsilon_0 k_p \quad (6.74)$$

On trouve donc, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \frac{V_1}{2} (e^{-ik_p x} + e^{ik_p x}) e^{ik_e x} \\ &= V_1 \cos k_p x e^{ik_e x} \end{aligned} \quad (6.75)$$

$$\begin{aligned} J_1(x) &= Y_b \frac{V_1}{2} (e^{-ik_p x} - e^{ik_p x}) e^{ik_e x} \\ &= -iY_b V_1 \sin k_p x e^{ik_e x} \end{aligned} \quad (6.76)$$

On voit que les perturbations de faible amplitude ne propagent l'énergie que dans le sens de l'écoulement (selon \vec{v}_0), comme si le faisceau d'électrons était une ligne de transmission unidirectionnelle.

Pour visualiser l'excitation, écrivons le résultat en fonction de variables réelles dans l'espace et le temps :

$$U_1(x, t) = V_s \cos k_p x \cos(k_e x - \omega_r t + \varphi) \quad (6.77)$$

$$J_1(x, t) = Y_b V_s \sin k_p x \sin(k_e x - \omega_r t + \varphi) \quad (6.78)$$

où $V_s = |V_1|$ et où l'on suppose que le potentiel d'origine externe est de la forme $V_s(t) = V_s \cos(\omega_r t + \varphi)$. Cela est illustré sur la figure 6.4 où l'on a également représenté la perturbation de la densité électronique n_1 (cf. problème P6-6). Les caractéristiques suivantes sont particulièrement intéressantes :

- Les perturbations excitées sont stables (c'est-à-dire ne sont pas amplifiées avec x). Cela est justifié du point de vue énergétique par le fait que

4. Dans ce paragraphe U_1 désigne le potentiel cinétique (6.73) ; à ne pas confondre avec les densités d'énergie U_1 utilisées dans le paragraphe 6.3.3 comme par exemple en (6.51).

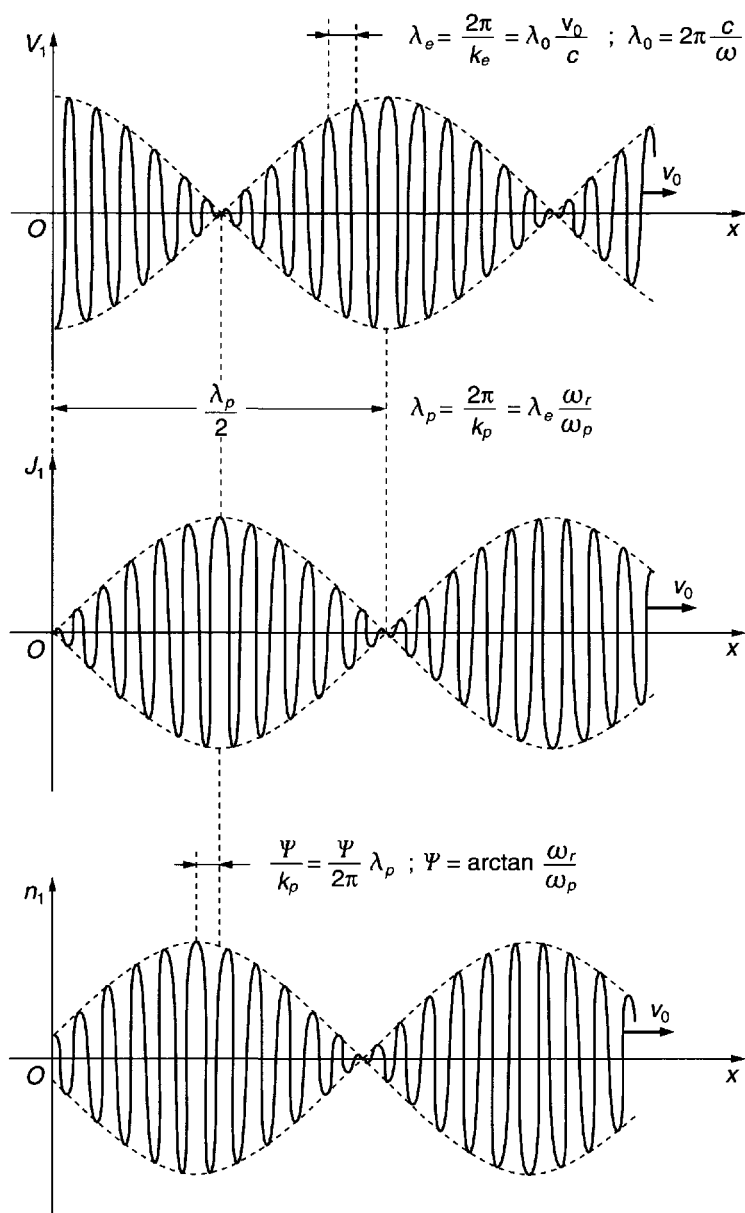


Figure 6.4 : Perturbations sur un faisceau d'électrons excité par la source de la figure 6.3(a) pour $\omega_r \gg \omega_p$.

les ondes rapide et lente sont excitées avec la même amplitude [cf. (6.75) et (6.76)]. Puisque ces ondes transportent des énergies respectivement positive et négative, la moyenne dans le temps du flux d'énergie cinétique est nulle. En effet, selon (6.63) $\langle S_K \rangle = \text{Re}(U_1 J_1^*/2)$ et puisque $U_1(x)$ et $J_1(x)$ sont déphasés de 90° , on a $\langle S_K \rangle = 0$. En raison de la conservation du flux d'énergie, il s'ensuit donc qu'il n'y a pas eu de puissance moyenne nette délivrée par la source.

- L'interférence entre les ondes excitées de même amplitude, l'une rapide et l'autre lente, donne naissance à un phénomène de battement de longueur d'onde $\lambda_p = 2\pi/k_p$. L'onde elle-même de longueur d'onde λ_e se déplace avec la vitesse v_0 dans la structure de battement ; λ_e est la distance entre les paquets d'électrons.

6.4.2 Grilles séparées par une distance finie ; faisceaux de sections transversales finies

On peut maintenant s'affranchir de l'hypothèse idéale selon laquelle les grilles sont infiniment proches. Puisque λ_e est la plus petite distance caractéristique des champs excités, on peut attendre approximativement le même type d'excitation si la distance entre les deux grilles est telle que $d \ll \lambda_e$; cela implique également que d est suffisamment petite pour que le temps de transit d'un électron (d/v_0) soit beaucoup plus petit que la période ($2\pi/\omega$) de la tension externe. D'autre part, il est plus réaliste de considérer un faisceau d'électrons ayant une section finie. Un tel faisceau, confiné par un champ magnétique fort, est aussi caractérisé approximativement par les perturbations des ondes rapide et lente avec les paquets d'électrons séparés par la distance λ_e . Cependant, en raison des dimensions transversales finies du faisceau, les forces de rappel entre les paquets sont réduites (Fig. 6.5) et les oscillations de plasma apparaissent à la "fréquence de plasma réduite" $\omega_q = R\omega_p$, où $R < 1$ est fonction de la géométrie de la section du faisceau, de la longueur d'onde et des parois s'il y en a. (Par exemple, dans un faisceau cylindrique de rayon a , on trouve [58] que R dépend faiblement de $k_x a$, et pour $a \gg \lambda_e$, $R \sim 1$.) Ainsi l'excitation d'un faisceau électronique par une tension appliquée entre deux grilles très rapprochées ($d \ll \lambda_e$) (à travers lesquelles on suppose que le faisceau passe sans être intercepté), conduit également à des solutions du type ondes de charge d'espace statiques, analogues à celles représentées sur la figure 6.4, mais avec λ_p remplacé par $\lambda_q = (2\pi v_0/R\omega_p)$.

L'excitation d'ondes stationnaires de charge d'espace montre qu'une petite tension oscillante appliquée à une grille dipolaire produit en aval de

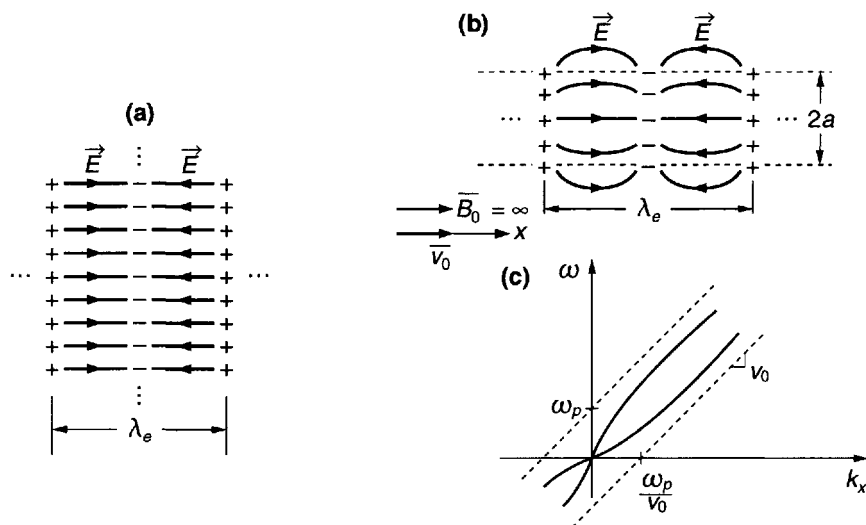


Figure 6.5 : Groupement en paquets et forces électriques de rappel dans un faisceau d'électrons.

- (a) Faisceau de dimensions transverses infinies : champ \vec{E} uniforme.
- (b) Faisceau de dimensions transverses finies ; \vec{E} débordant et plus faible.
- (c) Diagramme de dispersion du mode symétrique sur un faisceau cylindrique.

celle-ci une perturbation finie du courant dans le faisceau d'électrons⁵.

La première analyse de telles ondes de charge d'espace a été faite par W. C. Hahn [54] et S. Ramo [55] en relation avec les klystrons amplificateurs. La première vérification expérimentale de l'existence d'ondes statiques de charge d'espace a été réalisée beaucoup plus tard par C. C. Cutler et C. F. Quate [59] en relation avec des études de bruit dans les faisceaux d'électrons.

Pour des grilles séparées par une distance arbitraire [cf. Fig. 6.3 (b)], le problème des conditions aux limites est plus compliqué (cf. problème

5. On peut s'en rendre compte à partir d'une analyse purement cinématique. En traversant la grille à divers instants du cycle $2\pi/\omega_r$ de la tension appliquée, certains électrons sont accélérés et d'autres décélérés. Ceux qui ont été accélérés vont en aval de la grille rattraper ceux qui ont été freinés et ainsi forment un paquet d'électrons en mouvement, c'est-à-dire une perturbation de la densité de courant. Les forces de charge d'espace vont en fait limiter l'amplitude de cette perturbation. Pour les petites amplitudes cela conduit aussi à une suite périodique de groupement en paquets et de dispersion de ceux-ci le long du faisceau.

P6-9). Dans l'intervalle entre les deux grilles, les ondes rapides et lentes du faisceau sont couplées et il peut en résulter une instabilité (instabilité de diode de Pierce). Quand le système est stable (cf. problème P6-10), l'impédance vue par le circuit d'alimentation des grilles peut correspondre à une conductance positive ou négative (cf. problèmes P6-11 et P6-12).

6.5 Instabilité faisceau-milieu dissipatif

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré qu'un courant d'électrons peut propager deux ondes électrostatiques, l'une à énergie positive, l'autre à énergie négative, et que l'excitation stable de ces ondes dans un intervalle limité suivant la direction du faisceau donne un moyen d'amplification des signaux (klystron amplificateur). On a vu aussi qu'un faisceau limité peut aussi devenir instable sur divers modes (instabilités de diode de Pierce). Ces deux cas peuvent s'expliquer par des couplages entre l'onde d'énergie positive et l'onde d'énergie négative dans des régions limitées dans le sens longitudinal, celui de la direction du faisceau. L'instabilité peut aussi être produite par un couplage continu entre les deux ondes sur un faisceau non limité. Nous allons maintenant illustrer cela à l'aide d'un exemple simple, propice à l'analyse détaillée du champ et du flux d'énergie.

A titre d'exemple d'un couplage continu aux ondes d'un faisceau illimité, nous considérons un faisceau d'électrons plongé dans un autre milieu (que l'on peut considérer comme "extérieur" au faisceau) dont la dynamique est également déterminée par des champs électriques. La plus simple des situations intéressantes est celle d'un milieu électrique purement dissipatif. Si le faisceau est ainsi couplé à un système *extérieur* de dissipation positive, l'onde d'énergie positive va s'amortir, son énergie étant transmise au milieu extérieur dissipatif. Au contraire, l'onde d'énergie négative, en présence de ce milieu *extérieur* de dissipation positive, va s'amplifier, l'énergie fournie étant celle du faisceau dans l'état d'équilibre qui n'est pas un équilibre thermodynamique. Dans cette section, nous étudions un peu en détail ce modèle très simple.

Remarquons également que les effets cinétiques des plasmas hors d'équilibre peuvent produire une dissipation *négative* (de faible amplitude ; cf. chapitre 11). Dans de tels cas, nous montrerons que les ondes d'énergie positive couplées à une dissipation négative d'origine externe créent aussi une instabilité. Puisque les effets cinétiques sont liés au déplacement thermique des particules d'un plasma, la description de ces phénomènes est reportée au chapitre 10.

6.5.1 Équation de dispersion

Considérons donc un faisceau d'électrons qui traverse un milieu stationnaire purement dissipatif décrit par une conductivité électrique σ_0 réelle constante (indépendante de k et ω) et positive. Dans le modèle idéalisé que nous étudions, nous négligeons les collisions entre les électrons du faisceau et le milieu dissipatif. Comme dans le paragraphe précédent, on suppose que la dynamique du faisceau est à une dimension et que les champs sont purement électrostatiques. Comme la dynamique du faisceau d'électrons et celle du milieu dissipatif sont indépendantes, on écrit les expressions linéaires du courant transporté dans les perturbations du faisceau et du milieu dissipatif en fonction du champ électrique complexe E_1 sous les formes :

$$J_1^b = \sigma_L^b(k, \omega) E_1 ; \quad \sigma_L^b(k, \omega) = -i\omega\epsilon_0 \chi_L^b(k, \omega) \quad (6.79)$$

$$J_1^d = \sigma_0 E_1 ; \quad \chi^d \equiv \frac{\sigma_0}{-i\omega\epsilon_0} \equiv i \frac{\omega_\sigma}{\omega} \quad (6.80)$$

où l'indice b désigne les électrons du faisceau ("beam") ; σ_L^b et χ_L^b sont les mêmes que dans les formules (6.26) et (6.24) ; l'indice d désigne le milieu dissipatif, et $\omega_\sigma \equiv (\sigma_0/\epsilon_0)$ est la fréquence de relaxation diélectrique du milieu dissipatif. Notons que, puisque les deux milieux (faisceau d'électrons et conducteur perméable) s'interpénètrent, le champ électrique E_1 qui produit ces courants est le même pour les deux. Le couplage entre les deux milieux se produit par son intermédiaire. Autrement dit, une perturbation de la densité du faisceau d'électrons (par exemple un groupement des électrons en paquets) engendre un champ électrique qui, à son tour, produit un courant dans le milieu dissipatif ; réciproquement, un courant s'écoulant dans le milieu dissipatif produit, du fait de la résistivité du milieu, un champ électrique qui, à son tour, crée des fluctuations de densité et de courant dans le faisceau d'électrons. Le champ électrique et les courants sont donc reliés par l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} = -J_1^b - J_1^d \quad (6.81)$$

qui, pour des amplitudes de champ complexes, devient :

$$[-i\omega\epsilon_0 + \sigma_L^b(k, \omega) + \sigma_0] E_1 = 0 \quad (6.82)$$

ou

$$-i\omega\epsilon_0 [1 + \chi_L^b(k, \omega) + \chi^d] E_1 = 0 \quad (6.83)$$

ce qu'on peut écrire :

$$K_L(k, \omega) E_1 = 0 \quad (6.84)$$

où

$$K_L(k, \omega) = 1 + \chi_L^b(k, \omega) + \chi^d \quad (6.85)$$

$$= 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} + i \frac{\omega_\sigma}{\omega} \quad (6.86)$$

est la permittivité longitudinale du système global faisceau-milieu dissipatif. La relation de dispersion de ce système est donc $K_L(k, \omega) = 0$, c'est-à-dire :

$$1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} + i \frac{\omega_\sigma}{\omega} = 0 \quad (6.87)$$

Cette relation de dispersion, quoique seulement quadratique en $k(\omega)$, est du troisième degré en $\omega(k)$. Les variables $k(\omega)$ et $\omega(k)$ sont toutes les deux complexes et, par conséquent, l'équation est plus difficile à interpréter que la relation de dispersion du faisceau d'électrons tout seul. Nous allons donc considérer la situation dans laquelle le milieu dissipatif n'introduit qu'une petite perturbation sur le faisceau d'électrons.

6.5.2 Cas des faibles dissipations

Supposons donc que $|\omega_\sigma/\omega| \ll 1$. Alors, à l'ordre zéro par rapport à $|\omega_\sigma/\omega|$, l'équation (6.87) donne les solutions trouvées dans la section 6.2, l'onde rapide et l'onde lente :

$$\omega = kv_0 \pm \omega_p \equiv \omega_{F,S} \quad (6.88)$$

Au premier ordre en $|\omega_\sigma/\omega|$ l'équation de dispersion (6.87) devient :

$$\omega - kv_0 \approx \pm \omega_p \left(1 - i \frac{\omega_\sigma}{2\omega_{F,S}}\right) \quad (6.89)$$

Comme $\omega(k)$ et $k(\omega)$ sont complexes, la relation de dispersion (6.89) montre que les ondes sont soit amorties, soit amplifiées (dans le temps et l'espace), c'est-à-dire que les perturbations sont soit stables, soit instables.

Pour distinguer entre les solutions stables et instables de l'équation (6.89) on suppose d'abord que k est réel, $k = k_r$, et l'on cherche des solutions complexes de la forme $\omega(k_r) = \omega_r(k_r) + i\omega_i(k_r)$. Puisque tous les champs complexes de perturbation varient dans le temps comme $\exp(-i\omega t) = \exp(-i\omega_r t) \cdot \exp(\omega_i t)$, si $\omega_i(k_r)$ est positif pour une certaine valeur de k_r il y a instabilité, tandis que si $\omega_i(k_r)$ est négatif pour toutes les valeurs de k_r il y a stabilité. Ceci est illustré sur la figure 6.6. L'hypothèse que k est réel veut dire que nous étudions une perturbation périodique qui s'étend indéfiniment dans l'espace (depuis $x = -\infty$ jusqu'à

$x = +\infty$). Pour une telle perturbation, $\omega_i > 0$ correspond à une amplification dans le temps tandis que $\omega_i < 0$ correspond à un amortissement dans le temps. En général, les perturbations spatiales sont localisées, c'est-à-dire ont une extension finie dans l'espace. Elles peuvent être alors normalement représentées par une superposition de composantes de Fourier ayant un k réel. Le comportement asymptotique dans le temps de telles perturbations est donc le résultat de la superposition des réponses dues à toutes les valeurs instables de k_r . L'analyse conduit d'ailleurs à distinguer deux classes dans les instabilités : *absolues* et *convectives* [60]. Nous ne ferons pas ici cette étude complète de la stabilité et nous nous contentons d'établir le caractère stable ou instable du système à partir des règles données ci-dessus.

A partir de (6.89) on trouve donc pour la perturbation de *l'onde rapide*, quand $k = k_r$:

$$\omega \approx k_r v_0 + \omega_p - i \frac{\omega_p \omega_\sigma / 2}{k_r v_0 + \omega_p} \quad (6.90)$$

Puisque $\omega_i < 0$ l'onde est *stable*. Pour *l'onde lente* on obtient :

$$\omega \approx k_r v_0 - \omega_p + i \frac{\omega_p \omega_\sigma / 2}{k_r v_0 - \omega_p} \quad (6.91)$$

Pour cette onde $\omega_i > 0$ quand $k_r > \omega_p / v_0$, elle est donc *instable*. (Remarquons que dans les deux cas, puisque nous avons résolu (6.87) au premier degré en $|\omega_\sigma / \omega|$, nous devons avoir $|\omega_i| \ll |\omega_r|$.) Nous avons donc trouvé que l'onde d'énergie négative en présence d'une dissipation positive devient instable, comme nous l'avions pressenti.

La relation de dispersion (6.87) peut aussi être résolue en supposant que ω est réel, $\omega = \omega_r$, et en cherchant des solutions complexes de la forme $k(\omega_r) = k_r(\omega_r) + i k_i(\omega_r)$. L'hypothèse que ω est réel correspond à un état stationnaire dans lequel les perturbations sont des fonctions périodiques du temps dans tous les points de l'espace. Cela suppose par exemple que le faisceau est excité localement par une source entretenue à la fréquence ω_r , comme indiqué sur la figure 6.7.

Dans un milieu instable, il n'y a à vrai dire aucune garantie *a priori* de pouvoir atteindre un tel état stationnaire, et ceci doit être d'abord vérifié par l'étude de l'état transitoire (pour plus de détails, voir [60]). Dans la situation présente, où les modes du faisceau d'électrons ne sont que légèrement perturbés, il est raisonnable de supposer que les perturbations sont transportées avec la vitesse de groupe des ondes non perturbées, c'est-à-dire avec la vitesse du faisceau v_0 . Par conséquent, tout transitoire amplifié sera ultérieurement évacué par le faisceau et, pour un système de longueur finie sans réflexion, un état stationnaire peut effectivement

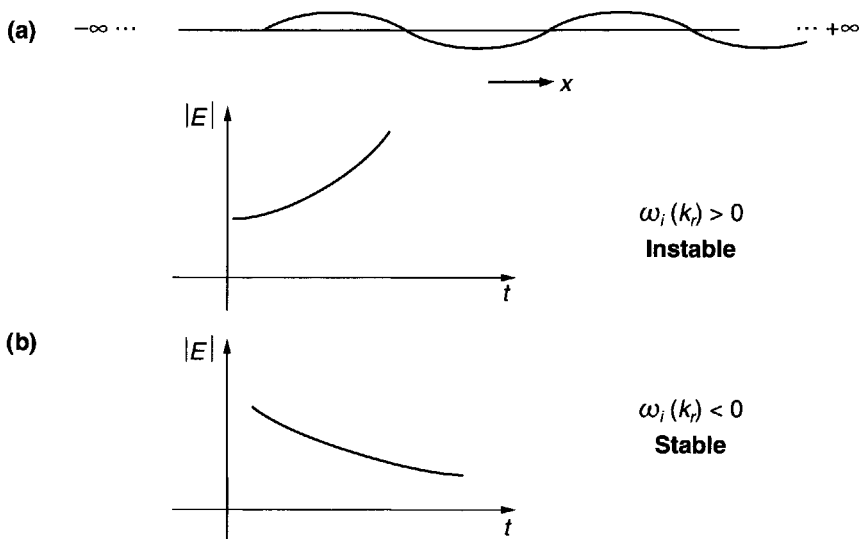


Figure 6.6 : Réponses stables et instables dans le temps à une perturbation périodique dans tout l'espace (de longueur infinie).

(a) Perturbation avec k réel : $E \sim e^{ik_r x}$.

(b) Réponses asymptotiques dans le temps : $E \sim e^{ik_r x} e^{-i\omega_r(k_r)t} e^{\omega_i(k_r)t}$.

s'établir à la fréquence réelle de la source, en n'importe quel point de l'espace.

Il y a cependant une ambiguïté sur l'interprétation des valeurs complexes de k . Cette ambiguïté ne se présentait pas pour la dépendance temporelle des perturbations périodiques dans l'espace ; en effet le temps "s'écoule" dans un sens bien défini et la stabilité ou l'instabilité était clairement définie par le comportement de $e^{\omega_i(k_r)t}$ lorsque t tend vers $+\infty$. Le choix du sens positif de l'axe Ox est en revanche arbitraire. Dans ces conditions, pour k complexe, la variation spatiale d'une perturbation complexe, donnée par $\exp(ikx) = \exp(ik_r x) \cdot \exp(-k_i x)$, peut croître ou décroître dans l'espace selon que, pour k_i donné, on fait tendre x vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Pour dissiper cette ambiguïté, on doit déterminer la direction dans laquelle les ondes sont excitées. En général cela exige une analyse plus détaillée dans le plan complexe k [60]. Dans le cas où l'onde est seulement légèrement perturbée, c'est-à-dire $|k_i| \ll |k_r|$, on peut admettre que la vitesse de groupe ($d\omega_r/dk_r$) des ondes non perturbées détermine la direction du flux d'énergie et par conséquent le côté où sont excitées les ondes.

En particulier, pour les ondes d'un écoulement d'électrons, $(d\omega_r/dk_r) = v_0$ est le même pour l'onde rapide et l'onde lente. Nous faisons donc le choix raisonnable d'orienter Ox dans le même sens que \vec{v}_0 (Fig. 6.7). Les ondes perturbées se propagent donc seulement dans la direction des $x > 0$, et c'est le comportement de $e^{-k_i x}$ quand x tend vers $+\infty$ qui nous intéresse. L'onde est stable si $k_i > 0$ et instable si $k_i < 0$ ⁶. Résolvons donc d'abord (6.87) pour l'onde rapide perturbée ; on trouve :

$$k \approx \frac{\omega_r - \omega_p}{v_0} + i \frac{\omega_\sigma}{2\omega_r} \frac{\omega_p}{v_0} \quad (6.92)$$

Puisque $k_i > 0$, on a un *amortissement spatial*, et donc une onde *stable*. Au contraire, pour l'onde lente perturbée on a :

$$k \approx \frac{\omega_r + \omega_p}{v_0} - i \frac{\omega_\sigma}{2\omega_r} \frac{\omega_p}{v_0} \quad (6.93)$$

Comme $k_i < 0$ on a maintenant une *amplification spatiale* et donc une onde *instable*. Dans les deux cas, comme nous avons résolu l'équation (6.87) au premier ordre en $|\omega_\sigma/\omega_r|$, on doit avoir $|k_i| \ll |k_r|$.

Dans les deux types de solutions, $\omega(k_r)$ et $k(\omega_r)$, de la relation de dispersion (6.87), nous avons donc établi que l'onde lente, c'est-à-dire l'onde d'énergie négative, devient instable quand elle est couplée à un milieu dissipatif. Nous avons d'autre part montré que puisque toutes les ondes (c'est-à-dire, dans ce cas, l'onde rapide et l'onde lente) ont une vitesse de groupe (v_0) unidirectionnelle, bien définie, qui éloigne de toute position fixe x les perturbations croissantes, une amplitude stationnaire sera atteinte en tout point fixe x d'un système fini, s'il n'y a pas de réflexion aux extrémités. Un tel système constitué d'un faisceau d'électrons et d'un milieu dissipatif permet donc de construire des amplificateurs stationnaires spatiaux. En fait, de tels amplificateurs à "milieu résistif" (ou plus pratiquement à "mur résistif") ont été construits il y a longtemps [61] ; leur invention était basée sur les concepts d'énergie d'onde négative et de flux d'énergie dans les courants d'électrons [56], décrits dans la section 6.3. L'instabilité d'un courant d'électrons couplé à un milieu résistif a donc été démontrée expérimentalement, et cela fournit une preuve directe de l'utilité du concept d'énergie négative dans les ondes de petite amplitude.

Remarquons enfin que la dissipation qui produit l'instabilité est extérieure au faisceau. S'il y avait un mécanisme de dissipation interne, comme par exemple des collisions des électrons du faisceau avec des neutres ou avec

6. Dans des cas plus complexes que celui traité ici, il pourrait y avoir plusieurs ondes ayant des vitesses de groupes de sens opposés. Pour les ondes ayant un $v_g < 0$, les ondes seraient excitées du côté $x < 0$, elles seraient stables si $k_i < 0$ et instables si $k_i > 0$.

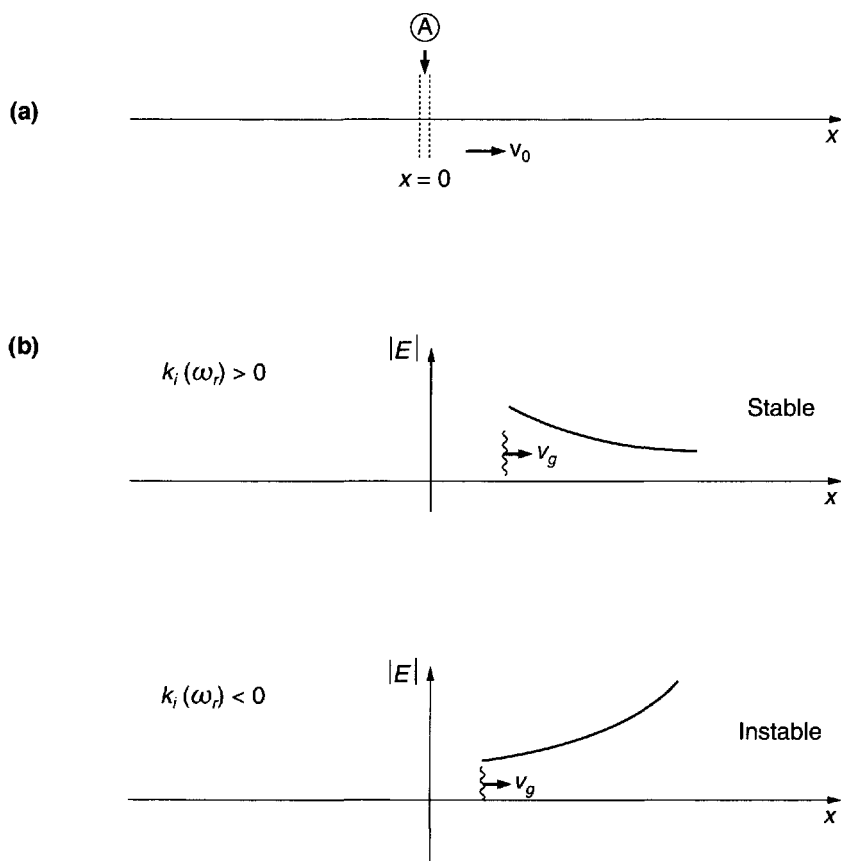


Figure 6.7 : Réponses stables et instables dans l'espace à une perturbation localisée, périodique dans le temps ($v_g = v_o > 0$).

- (a) Perturbation avec ω réel : $E \sim e^{-i\omega_r t}$, A source localisée de fréquence ω_r .
 (b) Réponses spatiales en régime permanent : $E \sim e^{ik_r(\omega_r)x} e^{-k_i(\omega_r)x} e^{-i\omega_r t}$.

les ions neutralisateurs, cela conduirait simplement à un amortissement des deux ondes (lente et rapide). Le lecteur est invité à démontrer ce résultat dans le problème P6-13 (il suffit d'ajouter dans l'équation (6.15) un terme de "frottement" de la forme $\nu m v_1$ et de résoudre l'équation de dispersion obtenue à partir de là).

6.5.3 Conservation de l'énergie avec petite dissipation

Analysons maintenant cette instabilité "résistive" d'un faisceau d'électrons à partir des énergies de perturbation. En l'absence de milieu dissipatif externe (résistif), nous avons trouvé dans la section 6.3 que les perturbations d'un faisceau d'électrons obéissent à l'équation de conservation (6.57), qu'on peut écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (6.94)$$

À partir de maintenant, nous omettons les indices s et 1 puisque nous considérons seulement les équations de conservation associées aux perturbations de faible amplitude. En présence d'un milieu dissipatif, une équation analogue peut être obtenue en multipliant (6.81) par E_1 , ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 \right) + E_1 J_1^b = -E_1 J_1^d \quad (6.95)$$

Cette équation est identique à (6.57), mais avec, au deuxième membre, un terme de perte :

$$-E_1 J_1^d = -\sigma_0 E_1^2 \equiv -p \quad (6.96)$$

où p est simplement la densité de puissance dissipée dans le milieu résistif. L'équation (6.95) peut s'écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} + p = 0 \quad (6.97)$$

qui est l'équation instantanée de conservation de l'énergie pour les perturbations du courant d'électrons en présence d'un milieu résistif externe.

Si on suppose que la dissipation du milieu résistif n'introduit qu'une petite perturbation sur les ondes du faisceau d'électrons, on peut conserver les expressions de U et S établies en l'absence de milieu résistif, mais les amplitudes complexes des champs contiennent maintenant un facteur exponentiel de croissance ou de décroissance, soit $[E_1 = \text{Re}[E_{10} \exp(i k_r x - i \omega_r t + \omega_i t)]]$. Avec $|\omega_i| \ll |\omega_r|$, la moyenne spatiale de (6.97) donne :

$$2\omega_i U_k + p_k = 0 \quad (6.98)$$

où les quantités moyennées sont évaluées pour $k = k_r$ et $\omega = \omega_r$ satisfaisant l'équation de dispersion du faisceau d'électrons (6.30). On a donc :

$$\omega_i(k_r) = \frac{-p_k}{2U_k} \quad (6.99)$$

Pour l'onde rapide cela donne :

$$\omega_i(k_r) = \frac{-\frac{1}{2}\sigma_0|E_1|^2}{2\frac{\epsilon_0|E_1|^2}{2}\frac{\omega_F}{\omega_p}} = -\frac{\omega_\sigma}{2\omega_F}\omega_p \quad (6.100)$$

qui est identique à l'équation (6.90) obtenue à partir de l'équation de dispersion. Pour l'onde lente, (6.99) donne :

$$\omega_i(k_r) = \frac{-\frac{1}{2}\sigma_0|E_1|^2}{2\left(-\frac{\epsilon_0|E_1|^2}{2}\frac{\omega_S}{\omega_p}\right)} = +\frac{\omega_\sigma}{2\omega_S}\omega_p \quad (6.101)$$

qui est aussi identique à la formule (6.91) obtenue à partir de l'équation de dispersion.

D'autre part, si on pose $E_1 = Re[E_{10} \exp(ik_r x - k_i x - i\omega_r t)]$, avec $|k_i| \ll |k_r|$, alors la moyenne de (6.97) dans le temps donne

$$-2k_i S_k + p_k = 0 \quad (6.102)$$

et donc :

$$k_i(\omega_r) = \frac{p_k}{2S_k} \quad (6.103)$$

En combinant (6.65), (6.99) et (6.103), nous obtenons donc :

$$k_i(\omega_r) = -\frac{\omega_i(k_r)}{v_g} \quad (6.104)$$

qui est en fait une relation générale pour les petites perturbations d'une onde (k_r, ω_r) dans un milieu faiblement dissipatif. Si $v_g = v_0$, l'équation (6.104) combinée avec les équations (6.100) et (6.101) donne les mêmes résultats pour k_i que ceux obtenus en (6.92) et (6.93) à partir de la résolution de l'équation de dispersion.

Finalement, en ce qui concerne la puissance *interne* dissipée par l'onde, on peut montrer (cf. [361]) que son signe dépend du système de coordonnées dans lequel on se place, comme nous l'avons montré pour l'énergie d'onde (6.66), c'est-à-dire que l'on trouve :

$$\frac{p_k}{\omega} = \frac{p'_k}{\omega'} \quad (6.105)$$

Cela explique facilement pourquoi la considération des collisions dans le modèle du faisceau d'électrons conduit à un amortissement des deux ondes d'énergie positive *et* négative (cf. problème P6-14).

6.5.4 Flux d'énergie dans l'amplificateur résistif

Les phénomènes de flux d'énergie associés aux ondes de petite amplitude d'un amplificateur spatial stationnaire, dans une interaction faisceau d'électrons – milieu résistif, sont représentés sur la figure 6.8. On voit que la source électrique stationnaire qui excite le faisceau d'électrons sur une distance infinitésimale ne lui transfère aucune énergie (cf. section 6.4) et par conséquent excite les deux ondes d'énergie positive (rapide) et négative (lente) avec des amplitudes égales. Dans l'interaction avec le milieu résistif, l'onde d'énergie positive s'amortit tandis que l'onde d'énergie négative s'amplifie, son flux d'énergie devenant de plus en plus négatif. À la sortie du milieu résistif, le signal amplifié est prélevé du faisceau d'électrons qui quitte donc le système avec un excès de flux d'énergie négative, ce qui prouve qu'il a été ralenti. Le détail de ce phénomène de ralentissement,

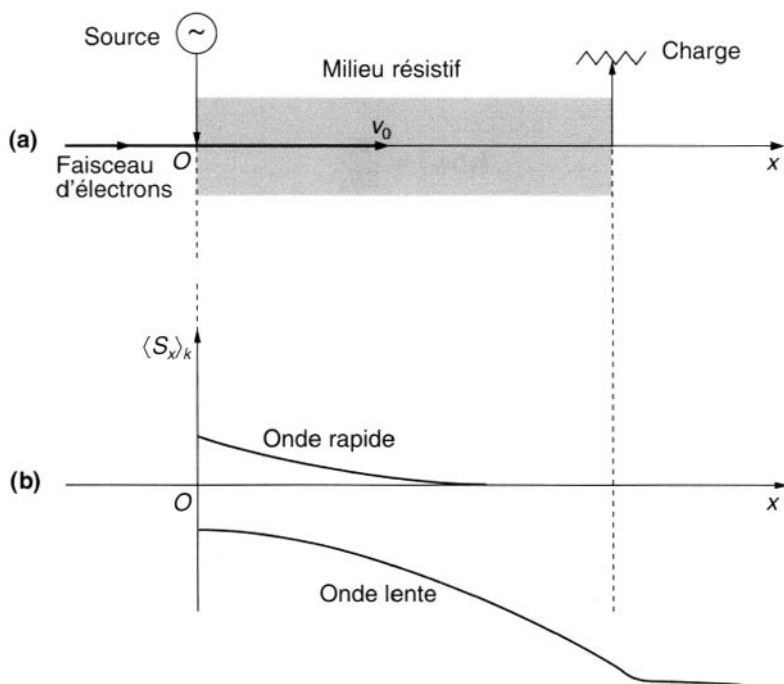


Figure 6.8 : Flux d'énergie associé aux ondes dans un amplificateur faisceau d'électrons-milieu résistif.

(a) Schéma de principe de l'amplificateur.

(b) Flux d'énergie dans l'onde rapide et l'onde lente.

c'est-à-dire la diminution de v_0 , ne peut être étudié qu'à partir d'une analyse non linéaire de l'interaction.

Plus généralement, on remarque que lorsque les perturbations autour d'un état d'équilibre sont instables et s'amplifient en utilisant l'énergie libre de celui-ci, les amplitudes des perturbations instables vont finalement devenir grandes ; par conséquent la dynamique des perturbations et le nouvel état de plus faible énergie doivent être déterminés à partir des équations dynamiques non linéaires. Les équations dynamiques linéaires ne peuvent décrire que la stabilité et l'instabilité d'un état donné pour des perturbations de petite amplitude et donc, pour les instabilités, seulement les phases initiales de l'évolution du système.

6.6 Instabilité par couplage avec un milieu réactif

6.6.1 Équation de dispersion

Il est facile de généraliser le modèle décrit dans la section 6.5. L'équation de dispersion électrostatique à une dimension pour un faisceau d'électrons circulant sans collisions dans un milieu caractérisé par la susceptibilité longitudinale $\chi_L^M(k, \omega)$ est :

$$1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} + \chi_L^M(k, \omega) = 0 \quad (6.106)$$

où ω_p est la fréquence plasma du faisceau, et v_0 la vitesse de glissement du faisceau. Il est intéressant de récrire (6.106) sous la forme :

$$(\omega - kv_0)^2 [1 + \chi_L^M(k, \omega)] = \omega_p^2 \quad (6.107)$$

qui, pour de faibles densités de faisceau ($\omega_p \rightarrow 0$), exprime un faible couplage (par le terme ω_p^2) entre les ondes dégénérées du faisceau ($\omega = kv_0$) et les ondes électrostatiques du milieu ($1 + \chi_L^M = 0$) en l'absence de faisceau.

La stabilité des modes qui en résultent est déterminée par la résolution du système (6.107) pour des valeurs complexes de $\omega(k_r) \equiv \omega_r(k_r) + i\omega_i(k_r)$. Si, pour *tout* k_r , $\omega_i(k_r) < 0$, le système est linéairement stable. Si, pour *tout* k_r , $\omega_i(k_r) > 0$, le système est linéairement instable [cf. section 6.5]. Les instabilités électrostatiques de courant dans les plasmas prennent souvent cette forme d'équations de dispersion couplées (6.106), (6.107), dont l'étude est détaillée dans le chapitre 7.

6.6.2 Bilans d'énergie

Une valeur quelconque de $\chi_L^M(k, \omega)$ peut représenter la propagation de l'énergie et/ou la dissipation dans le milieu. La conservation de l'énergie de perturbation pour un système à une dimension faisceau-milieu prend alors la forme générale :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} + p_M = 0 \quad (6.108)$$

où l'indice M se rapporte au milieu. L'effet d'une dissipation extérieure (au faisceau) a été étudié dans la section 6.5 ; supposons maintenant $p_M = 0$, c'est-à-dire que le milieu, en l'absence de faisceau, soit non dissipatif (c'est-à-dire $\Im[\chi_L^M(k_r, \omega_r)] = 0 = \Re[\sigma_L^M(k_r, \omega_r)]$, cf. problème P6-14). En supposant que les champs ont une répartition spatiale périodique, correspondant à un nombre d'onde réel k_r , et qu'ils varient dans le temps comme $\exp(-i\omega t)$ avec $\omega = \omega_r + i\omega_i$, la moyenne dans l'espace de (6.108) donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle U \rangle = 0 \quad (6.109)$$

et donc :

$$2\omega_i \langle U \rangle = 0 \quad (6.110)$$

où $\langle \rangle$ représente la moyenne spatiale. Il est clair que si l'énergie moyenne totale est positive (ou négative), alors $\omega_i = 0$ et seules les solutions dont la dépendance temporelle est purement oscillatoire sont acceptables. Donc dans un milieu non dissipatif le couplage de deux ondes à énergie de même signe donne toujours des ondes stables. Pour $\omega_i \neq 0$ la densité d'énergie totale moyennée doit s'annuler, c'est-à-dire qu'une partie doit être négative et le reste positif. Rappelons en effet que l'équation de conservation de l'énergie des perturbations fait apparaître $\langle U \rangle$ comme la somme de plusieurs termes physiquement bien définis ; certains sont essentiellement positifs, tandis que d'autres peuvent être soit positifs, soit négatifs. Si on appelle $\langle U_- \rangle$ la partie qui est négative et $\langle U_+ \rangle$ la partie restante qui est positive, la figure 6.9 montre comment, pour un système linéairement instable ($\omega_i > 0$), ces densités d'énergie de perturbation peuvent croître dans le temps tout en vérifiant (6.109). On remarque que l'augmentation de la partie positive de l'énergie est alimentée par la partie négative de l'énergie ; or cette partie négative croît également en module car elle fournit de l'énergie (par couplage avec la partie positive), devenant encore plus négative. On a ainsi une image de la conservation de l'énergie de perturbation pour une instabilité linéaire dans un système conservatif. Cependant on peut utiliser la conservation de l'énergie de perturbation pour montrer

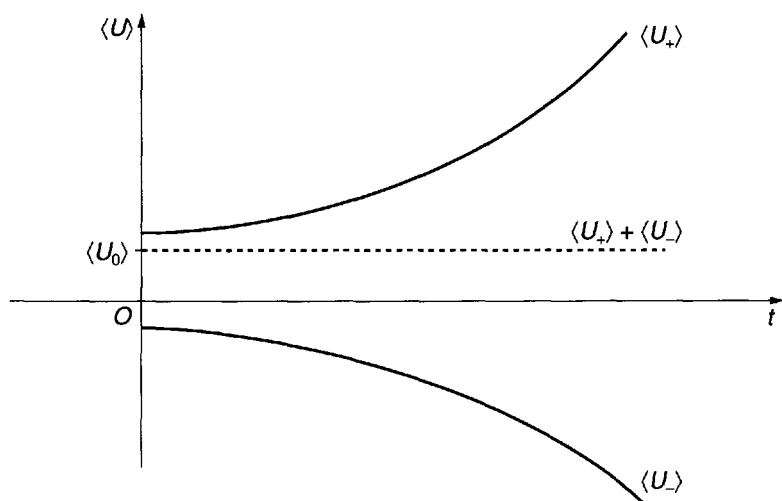


Figure 6.9 : Variations des densités d'énergie de perturbation dans un système conservatif instable.

que pour un mode instable ($\omega_i(k_r) > 0$), qui vérifie l'équation de dispersion, la densité d'énergie totale, moyennée dans l'espace, doit comporter une partie négative, c'est-à-dire :

$$[\langle U_- \rangle_k]_{\omega_i(k_r)} < 0 \quad (6.111)$$

Dans le cas le plus simple, les équations (6.109) et (6.110) suggèrent que le couplage conservatif des ondes d'énergie positive et négative conduit à une instabilité linéaire. Cela constitue la base des instabilités des modes (faiblement) couplés⁷ [361].

Dans le cas général non dissipatif des équations (6.106), (6.107), le couplage est souvent "fort" en ce sens qu'il modifie les modes des parties individuelles. Certains systèmes à couplage fort peuvent vérifier la condition (6.111) même si les parties séparées, non couplées, n'ont que des modes d'énergie positive. Cela n'est bien entendu pas le cas des équations (6.106), (6.107) pour lesquelles on a déjà montré que les ondes électrostatiques de

7. La plupart des tubes amplificateurs en hyperfréquences utilisent des interactions réparties entre un "circuit" et un faisceau d'électrons (cf. tubes à ondes progressive). On peut aussi comprendre leur fonctionnement par une analyse en termes d'un couplage faible entre des ondes d'énergie positive dans le circuit et des ondes d'énergie négative sur le faisceau [62, 63].

faisceau peuvent transporter elles-mêmes de l'énergie négative (cf. section 6.3). On montrera en revanche que c'est le cas pour des ondes électromagnétiques à couplage fort sur des faisceaux d'électrons (cf. section 7.5).

6.6.3 Milieux avec $\chi_L^M = \chi_L^M(\omega)$

Nous terminons cette section en considérant une situation électrostatique plus simple dans laquelle le milieu (en l'absence de faisceau) n'est dispersif que par rapport au temps, c'est-à-dire que $\chi_L^M = \chi_L^M(\omega)$ est indépendant de k , et le milieu ne possède donc pas de modes électrostatiques qui peuvent propager l'énergie. De la même façon que précédemment, on peut montrer la stabilité en résolvant (6.106) pour $\omega(k_r)$ complexe. Puisque la propagation est déterminée par le faisceau, on peut aussi considérer les solutions de (6.106) pour $k(\omega_r)$ complexe, que l'on peut écrire directement :

$$k = \frac{\omega_r}{v_0} \pm \frac{\omega_p}{[1 + \chi_L^M(\omega_r)]^{1/2}} \quad (6.112)$$

En l'absence de dissipation, $\chi_L^M(\omega_r)$ est réel. En supposant que l'interaction est instable [et en négligeant la valeur singulière ($|k| \rightarrow \infty$), à la résonance du milieu $\chi_L^M(\omega_r) = -1$ (cf. [60]), (6.112) montre que la croissance spatiale est obtenue pour des fréquences réelles ω_r telles que $\chi_L^M(\omega_r) < -1$. Remarquons que la relation de dispersion (6.112) montre que le faisceau est placé dans le milieu dont la fonction diélectrique est $\epsilon_0[1 + \chi_L^M(\omega_r)]$. Pour des fréquences telles que $\chi_L^M(\omega_r) > 0$ (milieu capacitif), les deux ondes de faisceau (6.31) sont modifiées mais restent stables. D'autre part, pour $\chi_L^M(\omega_r) < -1$ (milieu selfique), les deux ondes de faisceau (l'une d'énergie positive et l'autre d'énergie négative) sont fortement couplées, ce qui crée une instabilité. Ce type d'instabilité est appelé *instabilité de milieu réactif*. Quelques exemples de telles instabilités sont présentés en détail dans le chapitre 7.

6.7 Problèmes

P6-1 *Fonction de réponse longitudinale

Dans la section 6.2 nous avons considéré la solution de (6.14) à (6.17) en l'absence de toute excitation extérieure (au faisceau d'électrons) ou de conditions initiales. Nous avons ainsi obtenu les modes naturels décrits par l'équation de dispersion (6.30).

Considérons maintenant une densité de charge de perturbation imposée de l'extérieur $\rho_{\text{ext}}(x, t)$, et les conditions initiales $n_1(x, t = 0)$ et $v_1(x, t = 0)$. La densité de charge d'origine externe doit être introduite dans la loi de Poisson :

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial x} - \rho_1 = \rho_{\text{ext}} \quad (6.113)$$

et les conditions initiales doivent être prises en compte pour effectuer la transformée de Laplace de (6.14) et (6.15).

- a) Montrer que la solution des transformées de Fourier-Laplace de (6.14) et (6.15) peut s'écrire :

$$\rho_1(k, \omega) = \rho_{\text{coll}}(k, \omega) + \rho_{\text{in}}(k, \omega) \quad (6.114)$$

où la densité de charge "collective" est la même que celle trouvée en (6.23), et où la densité de charge due aux conditions initiales est :

$$\rho_{\text{in}}(k, \omega) = \frac{iqn_{\text{in}}(k, t=0)}{(\omega - kv_0)} + \frac{i\rho_0kv_{\text{in}}(k, t=0)}{(\omega - kv_0)^2} \quad (6.115)$$

où $n_{\text{in}}(k, t=0)$ et $v_{\text{in}}(k, t=0)$ sont les transformées de Fourier dans l'espace des conditions initiales $n_{\text{in}}(x, t=0)$ et $v_{\text{in}}(x, t=0)$.

- b) En introduisant la densité de charge "d'excitation" :

$$\rho_{\text{exc}}(k, \omega) = \rho_{\text{in}}(k, \omega) + \rho_{\text{ext}}(k, \omega) \quad (6.116)$$

et en utilisant (6.114), montrer que l'équation de Poisson (6.113) devient :

$$ik\epsilon_0 E_1 - \rho_{\text{coll}} = \rho_{\text{exc}} \quad (6.117)$$

et que l'expression du champ électrique perturbé en fonction de la densité de charge d'excitation est donc donnée par :

$$ik\epsilon_0 [1 + \chi_L(k, \omega)] E_1 = \rho_{\text{exc}} \quad (6.118)$$

On voit que les égalités (6.117) et (6.118) suggèrent la définition de deux fonctions de réponse longitudinales distinctes. L'une, R_L , donne l'excitation de la densité de charge collective :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{\text{coll}}(k, \omega)}{\rho_{\text{exc}}(k, \omega)} &\equiv \mathcal{R}_L(k, \omega) \\ &= \frac{-\chi_L(k, \omega)}{1 + \chi_L(k, \omega)} = \frac{1}{K_L(k, \omega)} - 1 \end{aligned} \quad (6.119)$$

et l'autre, G_L , donne le champ électrique perturbé :

$$\begin{aligned} \frac{E_1(k, \omega)}{E_{\text{exc}}(k, \omega)} &\equiv G_L(k, \omega) \\ &= \frac{1}{K_L(k, \omega)} = 1 + \mathcal{R}_L(k, \omega) \end{aligned} \quad (6.120)$$

où $E_{\text{exc}} \equiv (\rho_{\text{exc}}/ik\epsilon_0)$ est un champ électrique d'excitation effectif. On dit généralement que \mathcal{R}_L est la fonction de réponse longitudinale pour le plasma, et G_L la fonction de Green longitudinale pour le champ électrique dans le plasma. À partir de (6.120), on remarque que les solutions de l'équation de dispersion, par exemple (6.30), sont les singularités de la fonction de Green.

- c) Montrer que, pour la dynamique à une dimension du faisceau d'électrons, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_L(x, t) &= -\omega_p \sin \omega_p t \delta(x - v_0 t) u(t) \\ &= -\frac{\omega_p}{v_0} \sin \frac{\omega_p}{v_0} x \delta\left(t - \frac{x}{v_0}\right) u(x) \end{aligned} \quad (6.121)$$

où δ est la fonction de Dirac et u la fonction unitaire de Heaviside. Cela caractérise la fonction réponse longitudinale de Green du faisceau d'électrons.

- d) On suppose que $E_{\text{exc}}(x, t) = \delta(x) \cos \omega_r t u(t)$, comme dans le cas d'une excitation extérieure locale variant périodiquement dans le temps avec la fréquence ω_r . Déterminer $E_1(x, t)$ dans le faisceau d'électrons et interpréter le résultat en fonction de l'excitation des modes normaux du faisceau d'électrons. (cf. aussi section 6.4).
- e) À partir de (6.115) montrer que les conditions initiales (v_{in} et n_{in}) créent une excitation de la densité de charge :

$$\rho_{\text{in}}(x, t) = qn_{\text{in}}(x - v_0 t) - \rho_0 \frac{dv_{\text{in}}(x - v_0 t)}{dx} t \quad (6.122)$$

qui correspond à un écoulement libre balistique, d'ailleurs séculaire si $(dv_{\text{in}}/dx) \neq 0$. Donner une interprétation physique de ces résultats.

On voit donc que la réponse du faisceau d'électrons froids aux excitations extérieures peut présenter non seulement les modes normaux mais aussi des modes dits "balistiques". Ces derniers dépendent évidemment du fait que le faisceau d'électrons possède une seule vitesse v_0 , comme dans le modèle de plasma froid, ou une distribution de vitesses comme dans un plasma de température non nulle ; cette question sera considérée dans le chapitre 10.

P6-2 Développement en série de l'énergie cinétique

Dans la section 6.3 on a établi une forme très utile de la densité d'énergie cinétique en présence de perturbations dans un faisceau d'électrons froid à une dimension. La moyenne de cette densité est alors une fonction de produits ne comprenant que deux variables de champ au premier ordre. Comment cela est-il relié au développement de la densité d'énergie cinétique exacte au deuxième ordre par rapport aux amplitudes de champ ?

- a) Considérons un développement des champs $n(x, t)$ et $v(x, t)$ qui entrent dans la forme exacte de la densité d'énergie cinétique U_K (6.42), obtenue à partir de l'équation de conservation non linéaire (6.8). Soit :

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + \dots \quad (6.123)$$

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (6.124)$$

où les indices correspondent à l'ordre des amplitudes. Si on recherche une expression de U_K correcte au deuxième ordre par rapport aux amplitudes de champ, il devrait être suffisant de développer les champs au deuxième ordre. En transportant ces champs dans (6.42), calculer U_{K0} , $U_{K1}(x, t)$ et $U_{K2}(x, t)$. Comparer ces expressions à celles obtenues à partir de (6.45) pour U_K^p , où seuls les champs perturbés au premier ordre avaient été utilisés, et expliquer les différences.

- b) On suppose maintenant que les champs à l'ordre zéro (n_0 et v_0) sont constants, indépendants de l'espace et du temps et que les champs au premier ordre (n_1 et v_1) sont périodiques dans le temps et dans l'espace, de la forme $\exp[i(kx - \omega t)]$ avec k et ω réels. Dans un calcul de perturbation, on peut alors supposer que les champs du deuxième ordre (n_2 et v_2) sont proportionnels aux produits des champs du premier ordre. Montrer que la densité d'énergie cinétique moyenne au deuxième ordre est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \langle U_K \rangle \approx U_{K0} &+ \frac{m}{2} v_0^2 \langle n_2 \rangle + m n_0 v_0 \langle v_2 \rangle \\ &+ \frac{m}{2} n_0 \langle v_1^2 \rangle + m v_0 \langle v_1 n_1 \rangle \end{aligned} \quad (6.125)$$

Cette expression est différente de (6.50), comme l'explique la note de bas de page de la section 6.3.3.

- c) Reprendre les questions a) et b) pour le flux d'énergie cinétique obtenu à partir de (6.8), soit $S_K(x, t) = (m/2)v^2\Gamma$.

P6-3 Flux d'énergie cinétique de perturbation

Le flux d'énergie cinétique est obtenu à partir du terme de divergence (à une dimension) de (6.8) :

$$S_K = \frac{m}{2}v^2\Gamma \quad (6.126)$$

En supposant que les champs soient complètement déterminés par les termes d'ordre 0 et 1, c'est-à-dire $v = v_0 + v_1$ et $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$, on pose :

$$S_K^p = \frac{m}{2}(v_0 + v_1)^2(\Gamma_0 + \Gamma_1) \quad (6.127)$$

- a) Pour des solutions périodiques des champs perturbés montrer que l'on a :

$$\langle S_K^p \rangle - s_{K0} = mv_0 \langle v_1 \Gamma_1 \rangle + \frac{m}{2} \langle v_1^2 \rangle \Gamma_0 \quad (6.128)$$

où $\langle \rangle$ représente la moyenne dans le temps ou l'espace.

- b) Remarquons aussi que (6.128) n'est pas identique à la moyenne du flux d'énergie cinétique de perturbation, $\langle S_K^s \rangle$ de (6.63), obtenue à partir de l'équation de conservation de l'énergie de perturbation (6.57). Expliquer pourquoi il est utile de considérer l'expression de (6.63) comme l'expression correcte de $\langle S_K \rangle$ pour les perturbations.

P6-4 *Énergie dans un faisceau non homogène

On reprend les équations de base, (6.1), (6.2) et (6.3) ou (6.4) pour la dynamique non relativiste à une dimension, d'un plasma d'électrons froids avec $\rho_{ext} = J_{ext} = 0$. On suppose que les champs sont linéarisés autour d'un équilibre spatial non uniforme :

$$n(x, t) = n_0(x) + n_1(x, t) \quad (6.129)$$

$$v(x, t) = v_0(x) + v_1(x, t) \quad (6.130)$$

$$E(x, t) = E_0(x) + E_1(x, t) \quad (6.131)$$

- a) Montrer que l'équilibre non uniforme est régi par les équations :

$$\frac{d}{dx}(n_0 v_0) = 0 \quad (6.132)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{mv_0^2}{2} \right) = q[E_0(x) + E_{0ext}(x)] \quad (6.133)$$

$$\epsilon_0 \frac{dE_0}{dx} = [q n_0(x) + q_i n_{0i}(x)] \quad (6.134)$$

où l'on a tenu compte d'un champ électrique externe, et d'un fond continu d'ions immobiles.

- b) Montrer que les dynamiques linéarisées sont données par :

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} = 0 \quad (6.135)$$

$$m \frac{\partial v_1}{\partial t} + m \frac{\partial}{\partial x}(v_0 v_1) = q E_1 \quad (6.136)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} + J_1 = 0 \quad (6.137)$$

où $\Gamma_1 = n_0 v_1 + n_1 v_0$, et $J_1 = q \Gamma_1$.

- c) En utilisant des étapes similaires à celles de la section 6.3, déduire l'équation de conservation de l'énergie de perturbation et montrer qu'elle a une forme identique à (6.57) avec $n_0 = n_0(x)$ et $v_0 = v_0(x)$.
- d) En remarquant que l'on peut effectuer les transformées de Laplace par rapport au temps des équations (6.135) à (6.137), montrer que les équations de perturbation peuvent s'écrire sous la forme du système des deux équations différentielles couplées :

$$\left[\frac{d}{dx} - ik_e(x) \right] U_1 = \frac{J_1}{i\omega\epsilon_0} \quad (6.138)$$

$$\left[\frac{d}{dx} - ik_e(x) \right] J_1 = -i\omega\epsilon_0 k_p^2(x) U_1 \quad (6.139)$$

avec $U_1 = (m/q)v_0(x)v_1(x, \omega)$, où $v_1(x, \omega)$, et $J_1 = J_1(x, \omega)$ sont les transformées de Laplace de la vitesse et du courant de perturbation. On a posé par ailleurs $k_e(x) = \omega/v_0(x)$ et $k_p(x) = \omega_p(x)/v_0(x)$.

- e) En supposant $U_1(x) = u(x) \exp[i \int^x k_e(\xi) d\xi]$ et une expression semblable pour J_1 , montrer que (6.138) et (6.139) se combinent pour donner :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k_p^2(x) u = 0 \quad (6.140)$$

Montrer que pour certaines formes de $k_p^2(x)$, l'équation (6.140) admet des solutions à croissance spatiale de $u(x)$. [Considérer par exemple $k_p^2(x) = k_{p0}^2(1 + \epsilon \cos \beta x)$ pour lequel (6.140) devient une équation de Mathieu.]

P6-5 Conditions aux limites pour des grilles dipolaires

Considérons (Fig. 6.10) un faisceau d'électrons passant à travers deux grilles infiniment

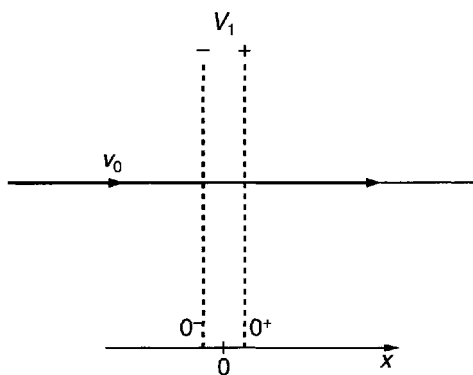


Figure 6.10 : Excitation d'un faisceau par une grille dipolaire.

proches aux bornes desquelles est appliquée une source de potentiel de petite amplitude V_1 : on suppose que le faisceau incident est homogène et stationnaire ($n = n_0, v = v_0$).

- a) Montrer que la conservation de l'énergie cinétique entre $x = 0^-$ et $x = 0^+$ donne la condition aux limites (6.71).
- b) Montrer que la deuxième condition aux limites (6.72) résulte du fait que le flux total d'électrons traversant les surfaces $x = 0^-$ et $x = 0^+$ doit être le même.

P6-6 Perturbations produites par des grilles dipolaires

On se réfère à la figure 6.3(a).

- a) En utilisant les résultats (6.73)-(6.78) pour l'excitation de v_1 et J_1 , déterminer $n_1(x, t)$, et par conséquent le décalage spatial de phase Ψ (cf. Fig. 6.4) entre les ondes stationnaires de n_1 et J_1 . Montrer que $n_1(x = 0^+)$ est fini et cohérent avec la condition aux limites $J_1(x = 0^+) = 0$.
- b) Trouver $E_1(x, t)$ et son onde stationnaire par rapport à $J_1(x, t)$. Dessiner les battements stationnaires de E_1 et les comparer à ceux de $J_1(x, t)$.

P6-7 *Le klystron amplificateur

À partir de la figure 6.4, on remarque que $U_1(x)$ et $J_1(x)$ ont une différence de phase dans l'espace de 90° . La différence de potentiel appliquée aux grilles dipolaires produit une perturbation de la vitesse pour $x = 0^+$ et il n'y a pas de perturbation du courant. Mais, pour $x > 0$, l'interférence entre les ondes excitées rapide et lente, qui se propagent toutes les deux dans la direction $+x$, crée un maximum de courant à une distance égale à un quart de la longueur d'onde de charge d'espace ($\lambda_p/4$). À cet endroit, on peut placer un autre ensemble de grilles très rapprochées et connectées extérieurement à une charge, comme le montre la figure 6.11(a). Pour des grilles extrêmement rapprochées, la densité de courant (par unité de surface des grilles) circulant dans la charge externe est égale à la perturbation de la densité de courant dans le faisceau (cf. problème P6-8). Ce courant circulant à travers la résistance R produit une différence de potentiel.

- a) Montrer que l'amplification maximale de la différence de potentiel est donnée par :

$$\frac{|V_{out}|_{max}}{|V_{in}|} = AY_b R \quad (6.141)$$

où A est une section efficace effective du système et où Y_b est donné par (6.74).

On remarque que pour $AY_b R > 1$ il y a gain, c'est-à-dire amplification de la tension. C'est le principe de l'amplification de l'onde de charge d'espace dans un klystron. À partir de (6.141) on pourrait obtenir une valeur arbitrairement grande du gain, mais on doit se rappeler que le résultat ne reste valide que si les conditions de petite amplitude sont vérifiées partout le long du faisceau. Ainsi, les relations $|J_{max}| \ll |J_0| = en_0 v_0$ et $|V_{out}| \ll V_0 = (mv_0^2/2e)$ doivent être vérifiées pour $x = (\lambda_p/4)$, ainsi que $|V_{in}| \ll V_0$ pour $x = 0$, pour que l'analyse de perturbation reste vraie. Même sous ces conditions, on peut atteindre des gains linéaires appréciables.

Du point de vue du flux d'énergie, on se rappelle que lorsqu'il n'y a pas de perturbation du faisceau entrant dans le premier groupe de grilles dipolaires ($x = 0^-$), V_{in} excite des champs de faisceau qui n'ont pas de flux d'énergie cinétique (de perturbation) net. Cependant, au deuxième ensemble de grilles dipolaires ($x = \lambda_p/4$) il y a de la puissance dissipée dans la résistance de charge R , et les excitations sur le faisceau qui quitte ces grilles doivent donc transporter de l'énergie négative ; en raison de la conservation du flux d'énergie, le flux d'énergie cinétique négative (multiplié par la surface effective

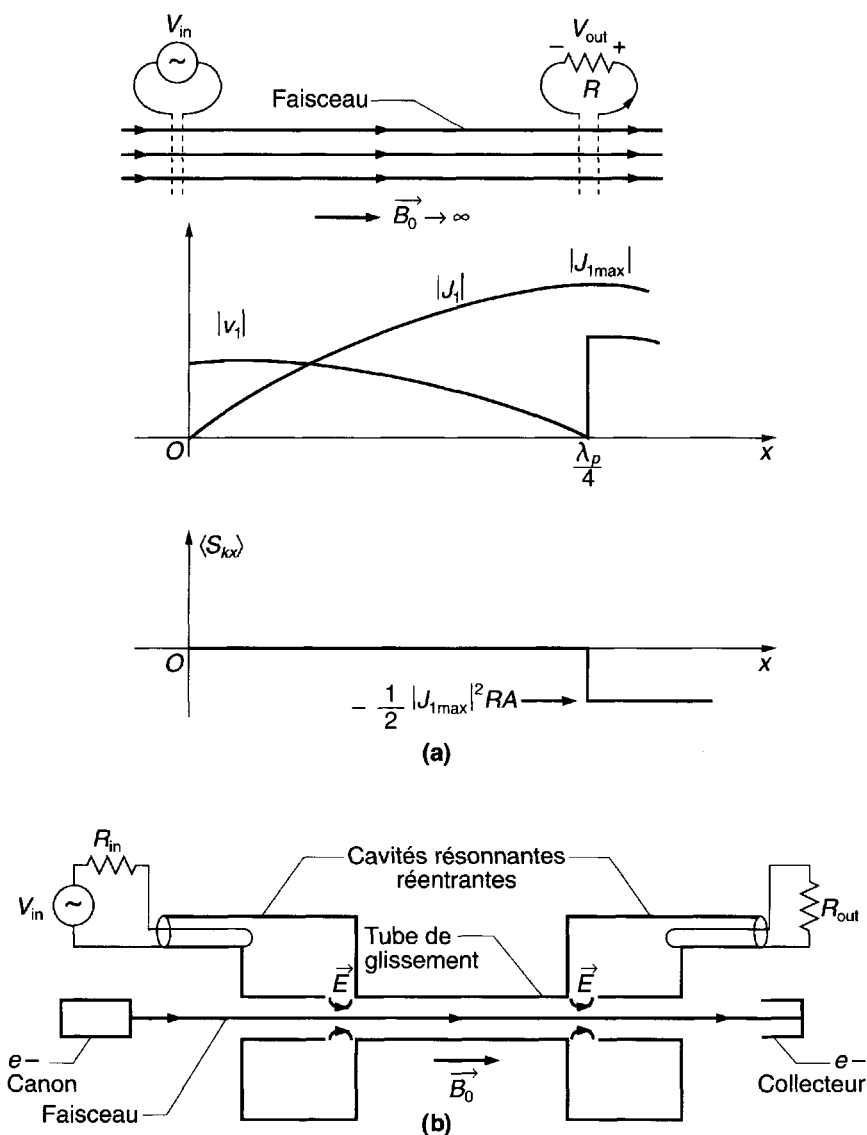


Figure 6.11 : Klystron amplificateur.

- (a) Schéma de principe ; perturbations de la densité de courant et de la vitesse ; flux d'énergie moyenne dans le temps.
 (b) Klystron amplificateur à deux cavités.

A) doit être égal à la puissance dissipée dans la résistance de charge R [cf. la partie inférieure de la figure 6.11(a)].

b) En utilisant une équation de conservation de l'énergie de perturbation qui prend en compte la moyenne dans le temps du flux d'énergie vers une résistance extérieure R attachée aux grilles dipolaires, montrer que le faisceau quittant la région doit transporter un flux d'énergie cinétique *négative* $\langle S_k \rangle = -|J_1|^2 RA/2$, où A est la section efficace du faisceau.

On remarque que dans ce modèle idéalisé de klystron, bien que la source ne délivre aucune énergie pour exciter le faisceau, la puissance de sortie est finie, c'est-à-dire que l'amplification de la puissance est infinie. En réalité, l'espace de séparation entre les grilles d'entrée est fini, la source a donc une charge finie et la sortie une charge additionnelle (cf. problèmes P6-11 et P6-12) ; le gain de puissance est par conséquent fini. Dans la pratique, aux fréquences micro-ondes, on peut réaliser l'excitation et la réception (appelées respectivement modulation et démodulation) des signaux de perturbation sur un faisceau d'électrons de section finie en faisant passer le faisceau par des ouvertures dans des cavités réentrantes (à la fréquence ω_r), comme le montre la figure 6.11(b). (On utilise en général plus de deux cavités.) Le tube de glissement est un guide d'onde à la coupure, de sorte que, d'un point de vue électromagnétique (en l'absence de faisceau), les cavités sont isolées. Le faisceau d'électrons interagit avec les champs électriques dans les ouvertures des cavités réentrantes (appelées "fentes").

Le principe de l'amplification klystron a été inventé il y a longtemps [64b], [64c]. Il était basé sur la dynamique simple des électrons en négligeant les effets de charge d'espace. Il existe des klystrons amplificateurs modernes, très puissants, qui fonctionnent aux fréquences micro-ondes (1-10 GHz) dans la gamme des mégawatts avec une grande efficacité (40-60 %). Pour comprendre cette efficacité on doit étudier la dynamique non linéaire du groupement en paquets et de la démodulation du faisceau d'électrons (cf. par exemple [65]).

P6-8 Couplage des perturbations au circuit extérieur

Dans la section 6.4 on a étudié l'excitation d'un faisceau non modulé par une différence de potentiel externe appliquée à deux grilles extrêmement rapprochées (grilles dipolaires) plongées dans le faisceau. Dans ce problème, on considère le problème inverse qui consiste à calculer le courant extérieur induit par un faisceau d'électrons modulé, dont la densité de courant est de petite amplitude à l'entrée des grilles dipolaires plongées dans le faisceau.

a) Pour une dynamique électrostatique à une dimension, montrer que la divergence du courant total est nulle :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} + J_1 \right) = 0 \quad (6.142)$$

Il s'ensuit que :

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} + J_1 = -K \quad (6.143)$$

où K est une constante (courant par unité de surface).

b) Appliquer (6.143) à la région du faisceau traversant les grilles très rapprochées représentées sur la figure 6.3 (a). En intégrant (6.143) dans la région des grilles, montrer que la représentation externe de cette région est donnée par le circuit équivalent (par unité de surface) représenté sur la figure 6.12 avec :

$$K_{\text{ind}} = -\frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} J_1 dx \quad (6.144)$$

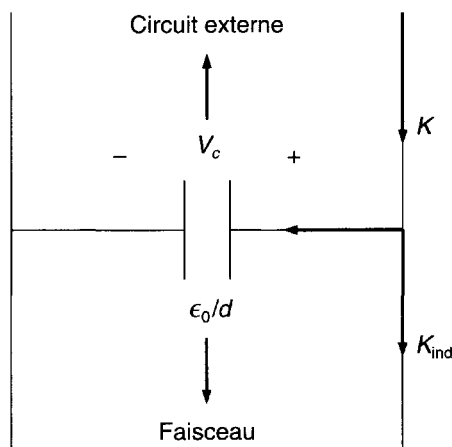


Figure 6.12 : Circuit équivalent à des grilles d'excitation.

et

$$V_c = - \int_{-d/2}^{d/2} E_1 dx \quad (6.145)$$

Montrer ensuite que pour des grilles infiniment rapprochées ($d \rightarrow 0$, c'est-à-dire, des grilles dipolaires), un faisceau entrant avec une densité de courant J_1 induit un courant externe $K = J_1$.

P6-9 *Valeurs propres pour la diode de Pierce

Considérons la dynamique à une dimension d'un faisceau d'électrons passant par deux grilles qui ne perturbent pas l'écoulement et séparées par une distance quelconque d . Le champ électrique entre les grilles ne peut plus être déterminé à l'avance ; il dépend du champ self-consistent engendré par les charges sur les grilles et du groupement en paquets du faisceau entre les grilles. On doit résoudre cela comme un *problème avec conditions aux limites* et déterminer ses fréquences caractéristiques (complexes en général). La formulation électrodynamique et la résolution de ce problème que nous exposons maintenant sont peut-être les plus simples.

Soit $\pm Q_g(t)$ la charge sur les grilles. Le flux de courant vers les grilles est alors :

$$I_s(t) = \frac{dQ_g}{dt} \quad (6.146)$$

et la densité de charge sur les grilles, dans le faisceau, est :

$$\rho_g(x, t) = \frac{Q_g(t)}{A} \left[\delta\left(x - \frac{d}{2}\right) - \delta\left(x + \frac{d}{2}\right) \right] \quad (6.147)$$

Cela peut être considéré comme une densité de charge externe dans l'équation de Poisson pour la dynamique de perturbation d'un faisceau électrostatique.

- a) Si on se limite au mouvement dans une seule direction, on a :

$$\begin{aligned} ik\epsilon_0 K_L(k, \omega) E(k, \omega) &= \rho_g(k, \omega) \\ &= \frac{I_s(\omega)}{\omega A} 2 \sin \frac{kd}{2} \end{aligned} \quad (6.148)$$

où $E(k, \omega)$ est la transformée de Fourier-Laplace du champ électrique, $K_L(k, \omega)$ la permittivité longitudinale du faisceau (6.29), et A la surface de la section du système perpendiculairement à la direction du faisceau.

- b) Montrer que la différence de potentiel entre les grilles est :

$$\begin{aligned} V(\omega) &= - \int_{-d/2}^{d/2} E(x, \omega) dx \\ &= - \int_{-d/2}^{d/2} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} E(k, \omega) \end{aligned} \quad (6.149)$$

et trouver l'impédance aux extrémités :

$$Z(\omega) = \frac{V(\omega)}{I_s(\omega)} \equiv \frac{z(\omega)}{-i\omega C_0} \quad (6.150)$$

où $C_0 = (\epsilon_0 A/d)$ est la capacitance dans l'espace libre (c'est-à-dire en l'absence de faisceau).

- c) En utilisant les résultats de b) et en intégrant selon x montrer que l'on a :

$$z(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \kappa}{\kappa} \right)^2 \mathcal{R}_L(k = \frac{2\kappa}{d}, \omega) d\kappa \quad (6.151)$$

où

$$\mathcal{R}_L(k, \omega) = \frac{1}{K_L(k, \omega)} - 1 = \frac{-\chi_L(k, \omega)}{1 + \chi_L(k, \omega)} \quad (6.152)$$

est la fonction réponse du plasma (cf. problème P6-1).

Les fréquences caractéristiques (mode normal) du système *court-circuité* sont données par $z(\omega) = 0$. Les solutions ω complexes ($\omega = \omega_r + i\omega_i$) avec $\omega_i > 0$ sont instables.

- d) En utilisant la susceptibilité d'un faisceau d'électrons froids (6.24), effectuer l'intégration de (6.151). [Note : Pour $\omega_i > 0$ l'intégrale peut être prise le long de la moitié inférieure du plan complexe κ , parallèlement à l'axe κ_r ; on peut d'autre part écrire $\sin \kappa = (e^{i\kappa} - e^{-i\kappa})/(i2)$; les intégrales résultantes peuvent alors être évaluées en fermant de façon appropriée le contour d'intégration et en évaluant les résidus des pôles intérieurs au contour.]

- e) En utilisant les résultats de d) montrer que la valeur propre de l'équation $z(\omega) = 0$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{(e^{i(\theta - \theta_p)} - 1)}{(\theta - \theta_p)^2} - \frac{(e^{i(\theta + \theta_p)} - 1)}{(\theta + \theta_p)^2} - \frac{i2\theta^2}{\theta_p(\theta^2 - \theta_p^2)} = 0 \quad (6.153)$$

ou, de façon équivalente :

$$\theta_p e^{i\theta} [(2\theta_p \cos \theta_p) \theta - i \sin \theta_p (\theta^2 + \theta_p^2)] - i\theta^2 (\theta^2 - \theta_p^2) - 2\theta_p^2 \theta = 0 \quad (6.154)$$

où $\theta = (\omega d/v_0)$ et $\theta_p = (\omega_p d/v_0)$. Les fréquences complexes caractéristiques dépendent donc du seul paramètre θ_p , qui est égal à 2π fois le rapport du temps de transit non perturbé des électrons à la période du plasma.

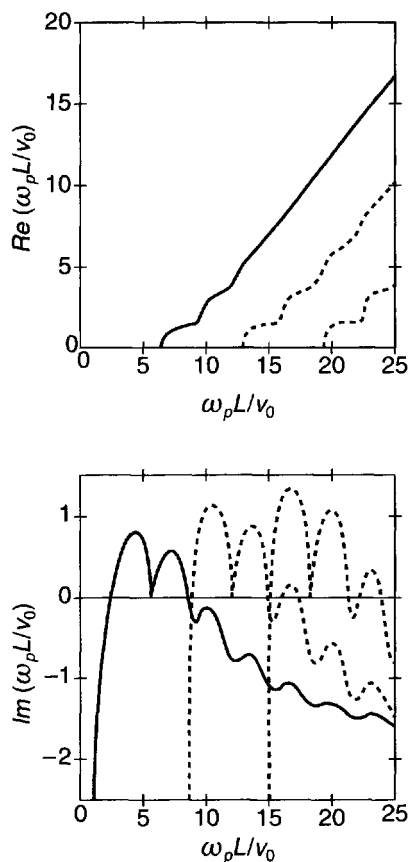


Figure 6.13 : Parties réelle et imaginaire de la fréquence normalisée θ en fonction de l'angle de transit du plasma θ_p .

On a noté $L \equiv d$ la distance entre les surfaces équipotentielles (d'après [66]).

Le problème que l'on vient d'analyser est apparu pour la première fois en relation avec la détermination des courants stables aux frontières d'un faisceau d'électrons neutralisé. Comme on ignorait la dynamique du fond neutralisant des ions, le flux à une dimension d'un faisceau d'électrons entre des surfaces équipotentielles a été analysé d'abord par J. R. Pierce [67] qui a obtenu (par d'autres moyens que ceux que l'on vient d'exposer) l'équation caractéristique (6.153). *Les modes stables* ($\omega_i < 0$) *existent seulement pour* $\theta_p < \pi$; pour ceux-ci on a en fait $\omega_r = 0$ (cf. problème P6-10).

L'ensemble des modes instables a été étudié par des méthodes de résolution numérique de l'équation (6.154), comme le montre la figure 6.13. Le même problème a

également été résolu plus récemment [68] pour le cas d'un circuit externe quelconque ; comme on pouvait le supposer, certains des modes en court-circuit (Pierce) qui étaient instables peuvent être stabilisés, tandis que d'autres qui étaient stables peuvent être déstabilisés. On s'est également intéressé récemment à l'évolution non linéaire de l'instabilité de la diode de Pierce ; les solutions non linéaires (principalement numériques) présentent des bifurcations subharmoniques et des mouvements chaotiques, y compris des attracteurs étranges [69].

P6-10 *Stabilité de la diode de Pierce

- a) En partant de l'équation caractéristique, (6.153) ou (6.154) du problème P6-9, qui donne les valeurs complexes de ω pour ω_p , v_0 et d donnés, montrer qu'il y a un ensemble discontinu de modes (marginale) stables avec $\omega = 0$ pour $\theta_p = (\omega_p d / v_0) = n\pi$ où n est un entier quelconque.
- b) Montrer que pour $\theta_p = \pi + \alpha$ avec $|\alpha| \ll 1$ on obtient un mode purement croissant :

$$\omega \approx i \alpha \frac{\pi v_0}{4 d} \quad (6.155)$$

qui a été mis en évidence pour la première fois par J.R. Pierce [67]. Montrer ensuite que pour $\theta_p < \pi$ la diode Pierce est stable, conformément aux résultats numériques de la figure 6.13 du problème P6-9.

P6-11 *Admittance de deux grilles avec charge d'espace quelconque

Après avoir établi la condition de stabilité en "court-circuit" pour un système composé de deux grilles placées dans un faisceau d'électrons (cf. problème P6-10), on peut maintenant établir l'admittance *externe* pour une fréquence réelle ω , et aussi déterminer l'admittance *électronique* (cf. Fig. 6.14).

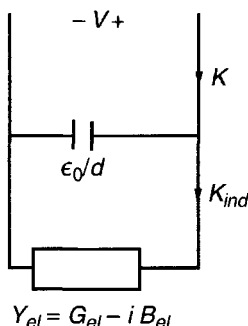


Figure 6.14 : Circuit équivalent à une paire de grilles dans un faisceau d'électrons.

- a) En se reportant au circuit équivalent (cf. Fig. 6.12) établi dans le problème P6-8, montrer que l'on a (par unité de surface de la section du faisceau) :

$$Y_{el} = i \omega c_0 + Y \quad (6.156)$$

avec :

$$Y = \frac{K}{V_c} = \frac{-i\omega c_0}{z(\omega)} \quad (6.157)$$

où $c_0 = (\epsilon_0/d)$, et où $z(\omega)$ est donné par l'égalité (6.151) du problème P6-9.

- b) En évaluant $z(\omega)$ comme dans le problème P6-9, mais maintenant pour une fréquence réelle ω , montrer que l'on a :

$$\begin{aligned} i\omega c_0 [z(\omega) - 1] &= Y_{e\ell}^w \\ &\equiv G_{e\ell}^w - iB_{e\ell}^w \end{aligned} \quad (6.158)$$

où $G_{e\ell}^w$ est donné par :

$$G_{e\ell}^w = \frac{1}{4} Y_b (|M_f|^2 - |M_s|^2) \quad (6.159)$$

avec :

$$M_w \equiv \frac{\sin(k_w d/2)}{(k_w d/2)} ; w = f, s \quad (6.160)$$

et $B_{e\ell}^w$ par :

$$-B_{e\ell}^w = \frac{1}{4} Y_b \left[\frac{\sin k_f d - k_f d}{(k_f d)^2/2} - \frac{\sin k_s d - k_s d}{(k_s d)^2/2} \right] \quad (6.161)$$

Montrer ensuite à partir des égalités (6.156) à (6.158) que

$$Y_{e\ell} = \frac{i\omega c_0 Y_{e\ell}^w}{i\omega c_0 + Y_{e\ell}^w} \equiv G_{e\ell} - iB_{e\ell} \quad (6.162)$$

Dans quelles conditions peut-on avoir $G_{e\ell} < 0$?

- c) Déterminer les conditions pour lesquelles $Y_{e\ell} \approx Y_{e\ell}^w$ (c'est-à-dire, les *conditions de faible charge d'espace*) compatibles avec la condition de stabilité établie dans le problème P6-10. Dans l'hypothèse de faible charge d'espace, on peut supposer que le champ électrique de perturbation entre les grilles est uniforme, c'est-à-dire $E_1(x) \approx V_1/d$ pour $|x| < d/2$, où V_1 est la différence de potentiel complexe de perturbation appliquée aux bornes des grilles à la fréquence ω [cf. Fig. 6.3 (b)]. Montrer que dans ces conditions, M_w en (6.160) permet de calculer les amplitudes des ondes rapide et lente excitées sur le faisceau :

$$U_1(x) = \frac{V_1}{2} (M_f e^{ik_f x} + M_s e^{ik_s x}) \quad (6.163)$$

$$J_1(x) = \frac{V_1}{2} Y_b (M_f e^{ik_f x} - M_s e^{ik_s x}) \quad (6.164)$$

En utilisant ces résultats et la conservation du flux d'énergie, montrer que l'égalité (6.159) provient du fait que $(|V_1|^2/2) G_{e\ell}^w$ est la moyenne dans le temps du flux d'énergie entre la source extérieure et le système grilles-faisceau, dans la limite de charge d'espace faible.

- d) On remarque que pour $|Y_{e\ell}^w| \gg \omega c_0$, l'expression (6.162) donne $Y_{e\ell} \approx i\omega c_0$, c'est-à-dire une susceptance purement *inductive* qui implique $Y = 0$. Déterminer les conditions pour lesquelles cela est obtenu, en accord avec la stabilité.

P6-12 Admittance de deux grilles avec charge d'espace nulle

Dans la limite de faible charge d'espace, $(\omega_p/\omega) \ll 1$, la conductance électronique d'un faisceau (par unité de surface), vue par le système externe constitué de deux grilles traversées par le faisceau, est donnée par l'équation (6.159) du problème P6-11.

a) Montrer que pour $(\omega_p/\omega) \rightarrow 0$ on a :

$$\begin{aligned} G_{el}^{(0)} &= \frac{G_0}{2} \frac{\sin k_e d/2}{k_e d/2} \left[\frac{\sin k_e d/2}{k_e d/2} - \cos k_e d/2 \right] \\ &= \frac{|J_0|}{V_0} \left[\frac{1 - \cos k_e d}{(k_e d)^2} - \frac{\sin k_e d}{2 k_e d} \right] \end{aligned} \quad (6.165)$$

où $|J_0|$ est la grandeur de la densité de courant du faisceau non perturbé, $V_0 = (mv_0^2/2e)$ est la différence de potentiel de déplacement du faisceau, et $k_e = (\omega/v_0)$. Cela est représenté sur la figure 6.15.

Pour $0 < k_e < 2\pi/d$, l'amplitude de l'excitation de l'onde rapide est plus grande que celle de l'onde lente. Ainsi, une source externe devrait fournir de l'énergie au système grilles-faisceau. D'autre part, pour $(2\pi/d) < k_e < (3\pi/d)$ la situation inverse se produit et le système grilles-faisceau pourrait fournir de l'énergie à une charge externe attachée aux grilles ; cela constitue en fait le principe du fonctionnement d'un oscillateur, appelé "monotron" qui a été inventé peu après le klystron [70].

L'oscillateur monotron est constitué d'un faisceau d'électrons traversant une seule (d'où le préfixe "mono") cavité résonnante réentrante (Fig. 6.16) dont la fente est d'une longueur appropriée ($2\pi < k_e d < 3\pi$).

Bien que le concept en soit simple, ce type d'oscillateur n'est pas très efficace et par conséquent n'est pas produit commercialement. L'analyse non linéaire montre que quand les champs augmentent pour atteindre des amplitudes appréciables, les grandes modulations de vitesse qui en résultent conduisent à une saturation non linéaire de la sortie à des niveaux de puissance relativement faibles.

Dans la même catégorie de dispositifs, le "klystron reflex" [71][72], dont nous ne décrirons pas le fonctionnement, est un oscillateur bien meilleur aux fréquences micro-ondes ; les oscillateurs micro-ondes aux puissances moyennes et fortes sont généralement du type magnétron (cf., par exemple, [73][74]).

À l'heure actuelle, divers oscillateurs et amplificateurs en ondes millimétriques (gyrotrons, peniotrons, lasers à électrons libres, ...) utilisent la dynamique particulière des faisceaux d'électrons énergétiques, parallèles ou perpendiculaires à un champ magnétique (cf. par exemple [74b]).

b) Le faisceau présente aussi une susceptance électronique, B_{el} , au circuit externe.

Utiliser le théorème de Poynting de perturbation complexe pour montrer comment la déterminer, et montrer que la susceptance est donnée par l'équation (6.161) du problème P6-11 dans la limite $(\omega_p/\omega) \ll 1$. Pour $(\omega_p/\omega) \rightarrow 0$ montrer que :

$$\begin{aligned} -B_{el}^0 &= \frac{G_0}{2} \frac{\cos(k_e d/2)}{(k_e d/2)} \left[\frac{\sin(k_e d/2)}{(k_e d/2)} - \cos(k_e d/2) \right] \\ &= G_0 \left[\frac{\sin k_e d}{(k_e d)^2} - \frac{1 + \cos k_e d}{2 k_e d} \right] \end{aligned} \quad (6.166)$$

et représenter $-B_{el}^{(0)}(k_e d)/G_0$ en fonction de $\omega_r d/v_0$ sur la figure 6.15.

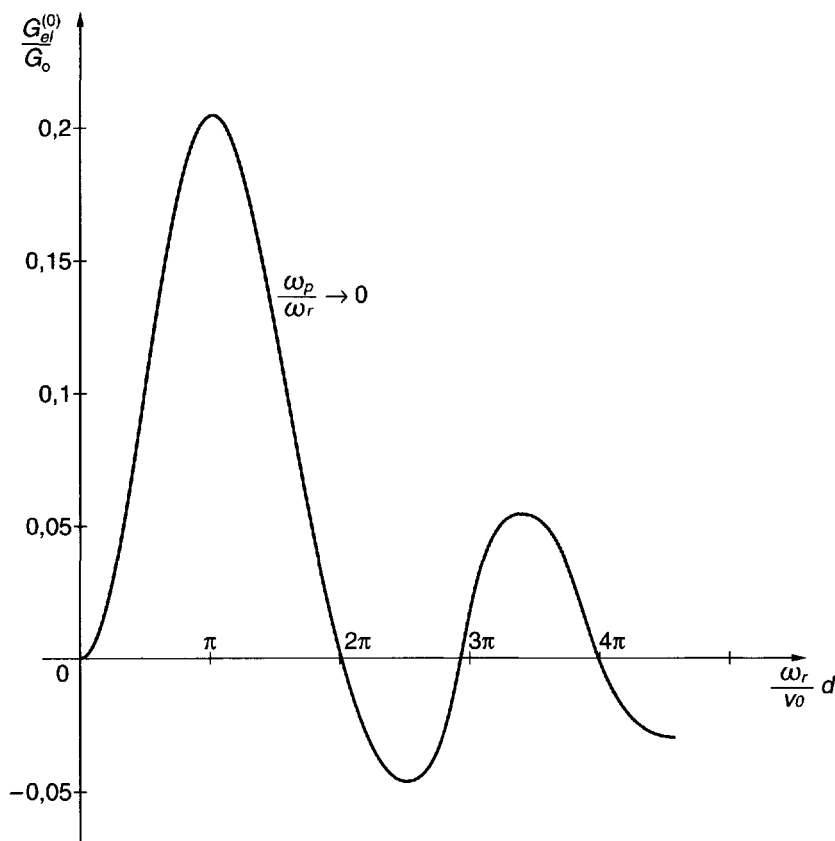


Figure 6.15 : Conductance électronique normalisée à la conductance du faisceau (par unité de surface) $G_0 = |J_0|/V_0$, en fonction de l'angle de transit.

[Remarquer que puisque nous avons défini $Y_{e\ell} = G_{e\ell} - i B_{e\ell}$, avec une susceptance capacitive ($B_{e\ell} < 0$), on a $\Im Y_{e\ell} > 0$, tandis qu'avec une susceptance inductive ($B_{e\ell} > 0$), on a $\Im Y_{e\ell} < 0$, ce qui est cohérent avec la pratique des ingénieurs électriciens qui utilisent une dépendance temporelle harmonique en $\exp(j\omega t)$ plutôt qu'en $\exp(-i\omega t)$; $i \equiv \sqrt{-1} \equiv j$.]

P6-13 Stabilité avec dissipation interne

a) Considérons la dynamique linéarisée à une dimension d'un écoulement d'électrons en présence de collisions élastiques (avec un fond continu immobile). Montrer que les équations linéarisées sont :

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} = 0 \quad (6.167)$$

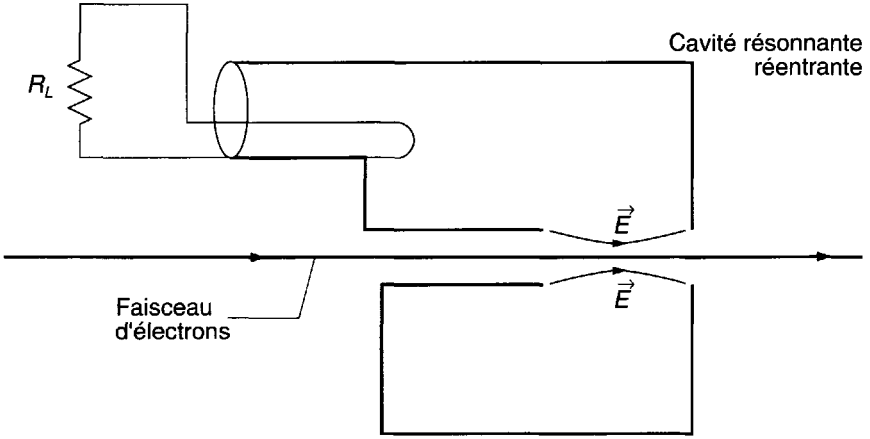


Figure 6.16 : Schéma de l'oscillateur monotron.

L'unique cavité réentrante, à longue ouverture, détermine la fréquence.

$$m \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \nu m v_1 = -e E_1 \quad (6.168)$$

où $\Gamma_1 = n_0 v_1 + n_1 v_0$, comme précédemment, et où ν est la fréquence de collisions des électrons du faisceau avec le fond continu. Comme dans la section 6.2, on suppose que la densité de charge à l'équilibre des électrons est neutralisée par un fond continu immobile d'ions positifs, et que la vitesse de glissement v_0 est constante (imposée de façon externe).

- b) Calculer la susceptibilité longitudinale, $\chi_L(k, \omega)$, et la conductivité longitudinale, $\sigma_L(k, \omega)$. Remarquer comment elles diffèrent de (6.24) et (6.26), en particulier pour $k = k_r$ et $\omega = \omega_r$, c'est-à-dire lorsque k et ω sont tous les deux réels. Établir une relation entre la partie réelle de $\sigma_L(k_r, \omega_r)$ et la partie imaginaire de $\chi_L(k_r, \omega_r)$, et discuter leur signification.
- c) Établir la relation de dispersion pour les ondes électrostatiques et montrer qu'elles sont stables. Pour $\nu \ll \omega_p$, identifier l'onde "rapide" faiblement amortie (énergie positive) et l'onde "lente" (énergie négative) et montrer qu'en présence de collisions *internes* selon le modèle de (6.168), elles sont toutes les deux stables.

P6-14 *Conservation de l'énergie avec dissipation interne

- a) En partant des équations (6.167) et (6.168) du problème P6-13, établir l'équation de conservation de l'énergie de perturbation et montrer qu'elle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} + n_0 \frac{m v_1^2}{2} + m v_0 v_1 n_1 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (m v_0 v_1 \Gamma_1) + \nu m v_1 \Gamma_1 = 0 \quad (6.169)$$

En comparant avec (6.57) identifier la densité de puissance dissipée, $p_d = \nu m v_1 \Gamma_1$. Remarquer que pour une valeur non nulle de v_0 , elle n'est pas nécessairement positive.

- b) Montrer que pour des champs périodiques dans l'espace *et* le temps, la densité moyenne de puissance dissipée $\langle p_d \rangle = \nu m \text{Re}(v_1^* \Gamma_1)/2$, est donnée par :

$$\langle p_d \rangle = \frac{|E_1|^2}{2} \text{Re}[\sigma_L(k_r, \omega_r)] \quad (6.170)$$

où $\sigma_L(k_r, \omega_r)$ est la conductivité longitudinale, obtenue dans la partie b) du problème P6-13, et évaluée pour k réel et ω réel.

- c) On remarque que pour des champs périodiques dans l'espace ou le temps, la moyenne (respectivement dans l'espace et le temps) de la densité de puissance dissipée est bien définie par $\langle p_d \rangle = \nu m \text{Re}(v_1^* \Gamma_1)/2$. Montrer, cependant, que pour $k = k_r$ réel et ω complexe $(|E_1|^2/2) \text{Re}[\sigma_L(k_r, \omega)]$ ne peut pas être identifié avec la moyenne dans l'espace de la densité de puissance dissipée. De la même façon, montrer que pour $\omega = \omega_r$ réel et k complexe $(|E_1|^2/2) \text{Re}[\sigma_L(k, \omega_r)]$ ne peut pas être identifié avec la moyenne dans le temps de la densité de puissance dissipée.
- d) A partir de (6.170), évaluer $\langle p_d \rangle_k$ pour les ondes rapide et lente faiblement amorties ($\nu \ll \omega_p$) et montrer que leurs densités de puissance moyennes de dissipation (interne) sont de signes opposés. En utilisant la formule de perturbation pour $\omega_i(k_r)$, (6.99), montrer ensuite que les collisions des particules avec un fond continu, c'est-à-dire la dissipation interne, produisent un amortissement des deux ondes. Remarquer que ces collisions internes conduisent à une puissance dissipée négative pour des ondes d'énergie négative, comme prévu par l'équation (6.105).

Chapitre 7

Instabilités de courant dans les plasmas

7.1 Introduction

Les plasmas sont généralement créés dans un état éloigné de l'équilibre thermodynamique. Dans certaines circonstances, on trouve que les perturbations d'un tel état sont instables, c'est-à-dire qu'elles ne décroissent pas mais ont tendance à créer un nouvel état du plasma, avec moins d'énergie libre, et probablement plus proche de l'équilibre thermodynamique. Bien que les collisions entre particules conduisent ultérieurement à l'équilibre thermodynamique, les transitions instables entre états du plasma ont lieu à des échelles de temps qui sont généralement plus courtes que les temps de collision typiques. Ainsi, on peut étudier de telles instabilités en utilisant des modèles de plasmas non collisionnels.

Les réserves d'énergie libre qui créent les instabilités sont d'une grande diversité et dépendent du mode de création du plasma et de son confinement. Une source d'énergie libre peut être par exemple constituée par les vitesses relatives des différentes espèces de particules. Dans un plasma uniforme, celles-ci existent soit parce que certaines particules sont injectées dans le plasma, soit lorsque le plasma est soumis à un champ électrique pulsé qui peut pénétrer dans le plasma. Les instabilités créées par de telles vitesses sont les *instabilités de courants*.

Les détails de la distribution de vitesses de chaque espèce de particules chargées peuvent jouer un rôle pour de telles instabilités, et une description basée sur la théorie cinétique des plasmas est alors nécessaire. Ces instabilités cinétiques sont traitées dans le chapitre 10. Cependant, dans

de nombreuses circonstances, les effets cinétiques sont négligeables ; ces instabilités présentent alors des taux de croissance élevés et le détail des processus physiques est très différent de celui des instabilités cinétiques. Leur évolution peut alors être décrite de façon simple par un modèle hydrodynamique de plasma froid. La croissance rapide des instabilités conduit d'ailleurs rapidement à des champs d'une amplitude appréciable et les effets non linéaires commencent à dominer l'évolution ultérieure du système. La dynamique non linéaire est assez compliquée et difficile en général à décrire analytiquement ; on peut cependant la comprendre à partir de simulations sur ordinateur dans des cas particuliers. Sans entrer dans les détails de celles-ci nous résumerons leurs résultats pour avoir une vue de l'évolution non linéaire et de la saturation des instabilités. Une brève description des phénomènes non linéaires est donnée à la fin du chapitre 10, dans la section 10.7. Pour une étude plus approfondie de la dynamique non linéaire des plasmas, nous renvoyons donc le lecteur à la section 10.7 et aux références qui y sont données.

Dans ce chapitre, nous allons considérer plusieurs types d'instabilités qui peuvent exister dans un plasma où les différentes espèces de particules chargées ont des mouvements d'ensemble les unes par rapport aux autres. Pour simplifier, nous considérerons d'abord une dynamique linéarisée à une dimension, et nous nous limiterons à des modèles de plasma froid sans collisions. Nous décrirons ainsi les instabilités électrostatiques. À la différence de l'instabilité d'un faisceau d'électrons dans un milieu résistif (section 6.5), nous trouverons que les instabilités de courant dans un plasma ne peuvent pas être considérées comme résultant d'un couplage faible entre deux types d'ondes ; les couplages sont conservatifs (non dissipatifs) et, en fait, des couplages forts, comme nous l'avons noté dans la section 6.6. Il n'y a couplage faible que si les différentes composantes du plasma sont physiquement séparées. De telles situations sont traitées dans [362], [62] et [63] qui développent le formalisme du couplage faible entre modes. Lorsque le couplage est fort, on doit s'appuyer sur une analyse de la stabilité basée sur les solutions de l'équation de dispersion avec ω complexe pour k réel. Bien que l'interprétation de $\omega(k_r)$ soit immédiate, comme déjà expliqué dans la section 6.5, le sens, s'il existe, que l'on peut donner à une valeur de $k(\omega_r)$ complexe devient incertain dans la plupart des cas. Nous verrons qu'il n'y a pas de relation simple entre $k_i(\omega_r)$ et $\omega_i(k_r)$ comme celle (6.104) trouvée dans la section 6.5.3. Les relations entre les solutions de l'équation de dispersion dans les plans complexes ω et k sont discutées dans [60].

Dans les sections 7.2-7.4 nous décrirons les instabilités de courant électrostatiques de base avec les modèles à une dimension les plus simples. Les instabilités électromagnétiques, qui nécessitent des modèles au moins à deux dimensions, sont traitées dans la section 7.5. Nous n'y décrirons

en détail que l'instabilité électromagnétique la plus simple, mais les équations dynamiques complètes, à trois dimensions, avec les effets relativistes, y seront également développées pour un plasma froid et résolues pour la propagation transverse à un faisceau d'électrons.

7.2 Instabilité faisceau-plasma

7.2.1 Équation de dispersion

Considérons un faisceau d'électrons de densité et de vitesse constantes, n_{0b} et \vec{v}_{0b} , qui traverse un plasma uniforme de densités électronique et ionique n_{0e} et n_{0i} , comme représenté sur la figure 7.1.

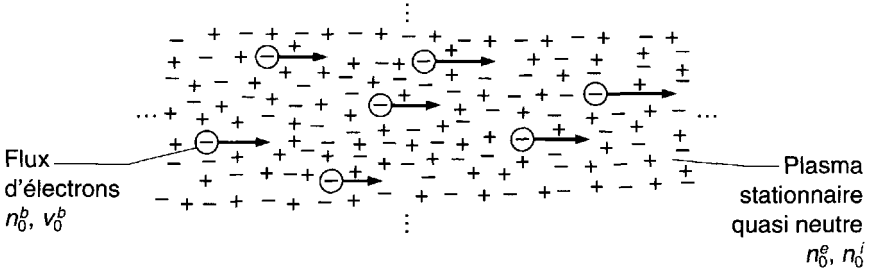


Figure 7.1 : Système faisceau-plasma à une dimension.

L'instabilité de ce système a été mise en évidence dès les premières observations d'oscillations de plasma [75], [76], [77]. Dans celles-ci, un faisceau d'électrons de faible densité traversait un plasma, et on a trouvé qu'il était responsable de l'excitation des oscillations observées.

Dans l'état d'équilibre, on suppose qu'il y a une neutralité électrique globale, c'est-à-dire $n_{0e} + n_{0b} = Z_i n_{0i}$, où $Z_i e$ est la charge d'un ion, et il n'y a donc pas de champ électrique ($E_0 = 0$). D'autre part, on ne considère que la dynamique à haute fréquence des électrons du plasma et du faisceau, et on néglige le mouvement des ions du plasma, comme s'ils avaient une masse infinie. Les équations linéarisées, à une dimension pour les électrons du plasma froid, sont alors :

$$\frac{\partial n_{1e}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_{0e} v_{1e}) = 0 \quad (7.1)$$

$$m \frac{\partial v_{1e}}{\partial t} = -e E_1 \quad (7.2)$$

où les indices inférieurs 1 sont affectés aux perturbations. De façon semblable, pour la dynamique linéarisée à une dimension, non relativiste et électrostatique, du faisceau d'électrons, on a [cf.(6.14) et (6.15)] :

$$\frac{\partial n_{1b}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_{0b}v_{1b} + n_{1b}v_{0b}) = 0 \quad (7.3)$$

$$m \left(\frac{\partial v_{1b}}{\partial t} + v_{0b} \frac{\partial v_{1b}}{\partial x} \right) = -eE_1 \quad (7.4)$$

Les deux systèmes d'équations dynamiques sont couplés par le champ électrique de perturbation qui, dans l'hypothèse électrostatique, doit obéir à l'équation de Poisson :

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial x} = -e(n_{1e} + n_{1b}) \quad (7.5)$$

où le deuxième membre est la perturbation de la densité totale de charge due au mouvement des électrons du plasma et du faisceau. À partir des équations (7.1) et (7.2), et en supposant une dépendance spatio-temporelle des amplitudes complexes en $\exp(ikx - i\omega t)$, on peut facilement calculer la susceptibilité longitudinale normalisée pour les électrons du plasma :

$$\chi_L^e = \frac{-\omega_p^2}{\omega^2} \quad ; \quad \rho_{1e} = -ik\epsilon_0 \chi_L^e E_1 \quad (7.6)$$

avec $\omega_p^2 \equiv (e^2 n_{0e}/m\epsilon_0)$, et d'après (6.24) on a pour les électrons du faisceau :

$$\chi_L^b = \frac{-\omega_b^2}{(\omega - kv_0)^2} \quad ; \quad \rho_{1b} = -ik\epsilon_0 \chi_L^b E_1 \quad (7.7)$$

avec $\omega_b^2 \equiv (e^2 n_{0b}/m\epsilon_0)$. En portant ces expressions dans la forme complexe de (7.5) on obtient :

$$K_L(k, \omega) E_1 = 0 \quad (7.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} K_L(k, \omega) &= 1 + \chi_L^e(k, \omega) + \chi_L^b(k, \omega) \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kv_0)^2} \end{aligned} \quad (7.9)$$

La relation de dispersion pour le système faisceau-plasma, $K_L(k, \omega) = 0$, peut donc s'écrire :

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kv_0)^2} = 0 \quad (7.10)$$

Elle est de la forme (6.106) et on peut attendre dans un tel système une instabilité de "milieu réactif", c'est-à-dire un couplage, instable dans l'espace quand le plasma est réactif-inductif, entre les ondes du faisceau d'énergies positive et négative. La même relation de dispersion peut s'écrire aussi sous une autre forme qui suggère mieux le couplage entre les oscillations de plasma et les ondes du faisceau :

$$(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega - kv_0)^2 = \omega_b^2 \omega^2 \quad (7.11)$$

Sous cette forme, il est évident que pour des fréquences beaucoup plus grandes que la fréquence plasma, $|\omega| \gg \omega_p$, on a principalement les ondes non perturbées du faisceau d'électrons, $(\omega - kv_0)^2 \approx \omega_b^2$, comme dans la section 6.2.2. Au contraire, à proximité et en dessous de la fréquence plasma, la relation de dispersion prédit l'instabilité, c'est-à-dire que pour k réel ($k = k_r$) ω est complexe ($\omega = \omega_r + i\omega_i$) avec $\omega_i(k_r) > 0$ (cf. Fig. 6.6 et la discussion associée dans le chapitre 6).

7.2.2 Solutions du type $\omega(k_r)$

Pour étudier les instabilités, on suppose d'abord que $k = k_r$ est réel et on résout l'équation de dispersion en recherchant des solutions du type $\omega(k_r)$ avec $\omega_i(k_r) > 0$. Pour cette recherche, il est commode d'utiliser une représentation graphique de la relation de dispersion écrite sous la forme :

$$\frac{1}{\omega_p^2} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{\delta}{(\omega - k_r v_0)^2} \equiv H(\omega) \quad (7.12)$$

où

$$\delta \equiv \frac{\omega_b^2}{\omega_p^2} = \frac{n_{0b}}{n_{0e}} \quad (7.13)$$

est le rapport de la densité du faisceau non perturbé à la densité du plasma. La fonction $H(\omega)$ est représentée graphiquement sur la figure 7.2.

On y voit que si ω_p est assez petit, il y a toujours quatre valeurs réelles de ω pour toute valeur réelle de k . Mais, si $\omega_p^2 > [1/H(\omega_0)]$, où ω_0 est déterminé par la condition $(dH/d\omega) = 0$, il n'y a alors que deux valeurs réelles de ω et les deux autres sont complexes. Puisque, pour k réel, la relation de dispersion est un polynôme à coefficients réels, les deux solutions complexes sont imaginaires conjuguées. Donc, pour $\omega_p^2 > [1/H(\omega_0)]$, l'une des solutions $\omega(k_r)$ a une partie imaginaire positive qui conduit à l'instabilité. À partir de (7.12), il est facile d'établir (cf. problème P7-1) que l'instabilité, $\omega_i(k_r) > 0$, existe dans l'intervalle des nombres d'onde réels défini par :

$$|k_r v_0| < \omega_p (1 + \delta^{1/3})^{3/2} \quad (7.14)$$

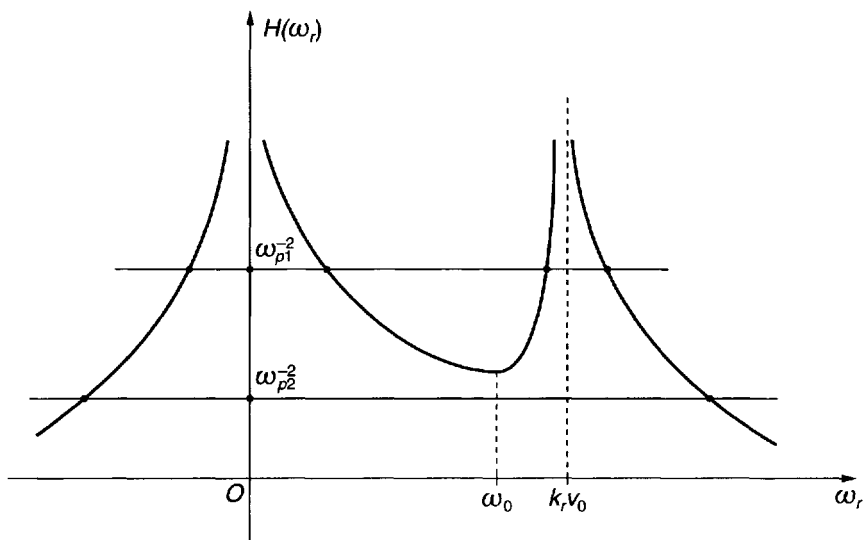


Figure 7.2 : Instabilité faisceau-plasma.

Résolution graphique de l'équation (7.12) pour deux valeurs de ω_p^2 .

Pour ω_{p2}^2 il y a deux solutions ω complexes et deux solutions ω réelles.

et pour les fréquences correspondant à la condition :

$$\omega_r < \omega_p(1 + \delta^{1/3})^{1/2} \quad (7.15)$$

On peut obtenir les expressions analytiques de la fréquence complexe dans la gamme d'instabilité de k_r pour la situation physique intéressante du point de vue pratique où $\delta \ll 1$; ce cas est fréquent car il est difficile de produire des faisceaux d'électrons de haute densité, tandis que les plasmas dans lesquels on injecte les faisceaux (ou qui peuvent être générés par eux) peuvent être de densité beaucoup plus élevée. Pour $\delta \ll 1$, la relation de dispersion (7.11) peut être résolue de façon approchée. L'interaction la plus forte, et par conséquent le taux de croissance le plus grand, peuvent être attendus quand les termes de plasma et de faisceau sont proches du synchronisme, $|\omega| \approx \omega_p \approx k_r v_0$; cela se produit [cf. (7.11)] approximativement pour :

$$(\omega - \omega_p)(\omega - k_r v_0)^2 \approx \frac{1}{2} \omega_b^2 \omega_p \quad (7.16)$$

En posant $\omega = \omega_p + \Omega = k_r v_0 + \Omega$, on trouve à partir de (7.16) :

$$\frac{\Omega}{\omega_p} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \\ -\frac{1}{2} & -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & +i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \left(\frac{\delta}{2} \right)^{1/3} \quad (7.17)$$

Il est clair que la troisième solution est la racine instable et donne pour $k_r \approx \omega_p/v_0$:

$$\frac{\omega_r}{\omega_p} \approx 1 - \frac{\delta^{1/3}}{2^{4/3}} \quad (7.18)$$

$$\frac{\omega_i}{\omega_p} \approx \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \delta^{1/3} \quad (7.19)$$

Remarquons que bien que nous ayons supposé $\delta \ll 1$ (ce qui entraîne $|\omega_i/\omega_r| \ll 1$), le taux de croissance peut être une fraction appréciable de la fréquence plasma. L'instabilité est donc très forte et se développe rapidement.

Un autre régime instable de k_r pour lequel l'équation (7.11) se résout analytiquement correspond à $|\omega| \ll \omega_p$; on trouve

$$\left. \begin{array}{l} \omega_r \approx k_r v_0 \\ \omega_i \approx k_r v_0 \delta^{1/2} \end{array} \right\} \quad (7.20)$$

qui est un taux de croissance beaucoup plus petit, et à des fréquences plus faibles que les valeurs trouvées en (7.19) et (7.18).

La relation de dispersion complète pour k réel est représentée sur la figure 7.3. La valeur maximale de k pour laquelle il y a instabilité est donnée par (7.14) et le taux maximal de croissance par (7.19). À titre d'exemple, les paramètres typiques dans les expériences de laboratoire de type faisceau-plasma sont :

$$n_{0e} = 10^{18}/\text{m}^3, \quad n_{0b} = 10^{15}/\text{m}^3, \quad v_0 = 0.1c$$

On a alors :

$$\omega_p \approx 5.64 \times 10^{10}, \quad (f_p \approx 9 \text{ GHz}), \quad \delta = 10^{-3}$$

Le taux maximal de croissance de l'instabilité est alors :

$$k_r \approx 19/\text{cm} \quad (\lambda \approx 0.33 \text{ cm})$$

avec :

$$\omega_r \approx 0.96\omega_p, \quad \omega_i \approx 0.07 \omega_p$$

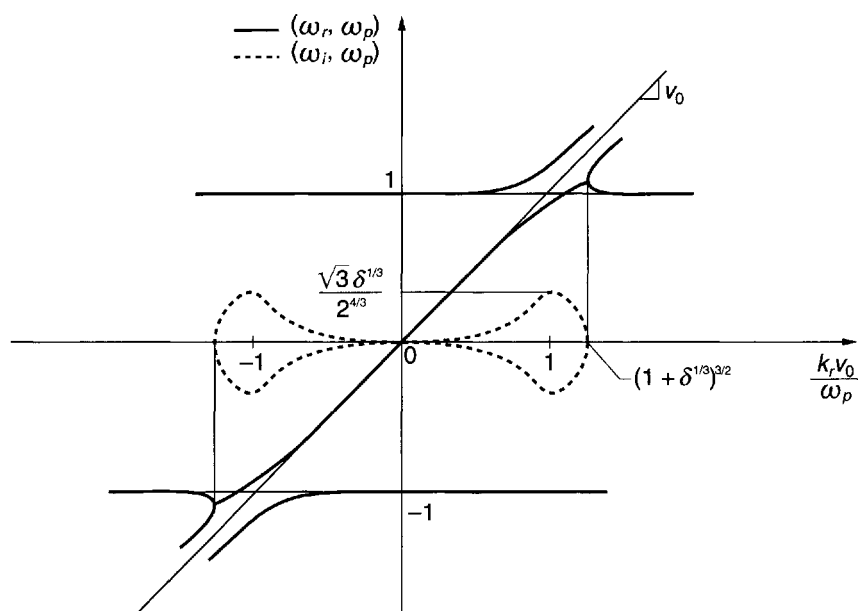


Figure 7.3 : Diagramme de dispersion d'un système faisceau-plasma.

$$\omega(k_r) = \omega_r(k_r) + i\omega_i(k_r)$$

Faisceau d'électrons de faible densité $\delta \equiv (n_{0b}/n_{0e}) \ll 1$.

c'est-à-dire une période de multiplication par e de $2\pi/\omega_i \approx 1.6 \times 10^{-9}$ s. L'instabilité se développe donc sur des longueurs d'onde très courtes par rapport à la dimension type (longueur le long de v_0) de l'expérience, et sur des temps qui sont courts par rapport aux temps de collision (par exemple de collision électron-ion dans le plasma). Cela justifie le fait qu'on a négligé les collisions. On a aussi négligé le mouvement des ions ; cela est justifié *a posteriori* puisque pour le taux de croissance maximum, on a à la fois $\omega_r \approx \omega_p \gg \omega_{pi}$ et $\omega_i > \omega_{pi}$. D'ailleurs, dans le modèle des plasmas froids, la dynamique des ions ne modifie que légèrement ω_p ; elle est significative pour les basses fréquences (en dessous de ω_{pi}) quand les effets de température deviennent également importants ; ce cas sera traité dans le chapitre 11.

7.2.3 Solutions du type $k(\omega_r)$

a) Le plasma comme milieu réactif

Une image physiquement intéressante de l'instabilité est suggérée en écrivant la relation de dispersion (7.10) sous la forme :

$$(\omega - kv_0)^2 = \frac{\omega_b^2}{(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})} = \frac{\omega_b^2}{K_L^P(\omega)} = \frac{e^2 n_{0b}}{m \epsilon_L^P(\omega)} \quad (7.21)$$

On y voit que le plasma agit comme un milieu diélectrique avec une fonction diélectrique $\epsilon_L^P(\omega) = \epsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$; le faisceau d'électrons peut être considéré comme se déplaçant dans ce diélectrique. Quand la densité de plasma est nulle on a $\epsilon_L^P = \epsilon_0$ et (7.21) redonne les deux ondes stables d'énergie positive et négative qu'on a trouvées dans la section 6.4. Pour les densités de plasma finies et les fréquences supérieures à ω_p , le plasma agit comme un diélectrique ordinaire avec $\epsilon_L^P > 0$; toute perturbation de la densité de charge du faisceau produira un champ électrique dont la direction tend à ramener vers l'état d'équilibre [Fig. 7.4(a)]. Ainsi, pour $\omega > \omega_p$ il y a stabilité et les ondes de faisceau sont seulement légèrement perturbées par le plasma.

La situation est complètement différente pour $\omega < \omega_p$ quand le plasma est tel que $\epsilon_L^P < 0$; toute perturbation de la densité du faisceau (considérée maintenant comme une charge de polarisation) produit alors un champ électrique dont la direction augmente la perturbation de la densité [Fig. 7.4(b)]. Il s'agit alors d'une situation instable ; les ondes du faisceau d'énergie positive et négative (qui composent en général une perturbation arbitraire du seul faisceau) sont fortement couplées (et modifiées) par la présence du milieu diélectrique plasma inductif-réactif. L'instabilité faisceau-plasma est donc une *instabilité de milieu réactif*.

b) Amplification spatiale des fréquences réelles

Dans cette image physique de l'instabilité faisceau-plasma, on a supposé que ω est réel, c'est-à-dire que la situation est de type quasi stationnaire (cf. Fig. 6.7 et discussion associée). On est donc tenté de résoudre l'équation de dispersion (7.10) ou (7.21) pour $k(\omega_r)$ complexe, ce qui est certainement plus facile puisque l'équation n'est que du deuxième degré en k . On obtient :

$$k = \frac{\omega_r}{v_0} \pm \frac{(\omega_b/v_0)}{(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2})^{1/2}} \quad (7.22)$$

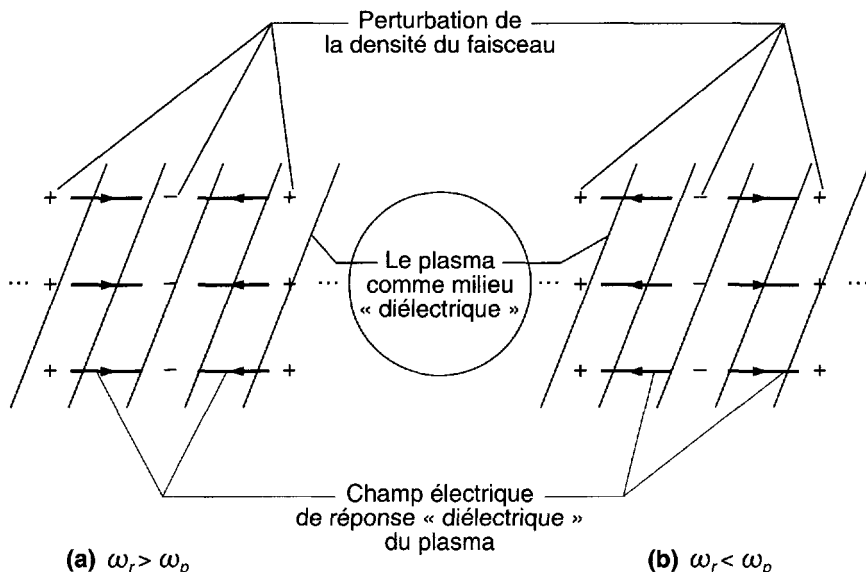


Figure 7.4 : Représentation physique de l'interaction faisceau-plasma de type "milieu réactif".

(a) Stable. (b) Instable.

Ce résultat est représenté sur la figure 7.5 où l'on voit qu'il y a un taux de croissance spatiale infini pour $\omega_r \rightarrow \omega_p^-$; d'autre part, contrairement à l'instabilité faisceau-milieu dissipatif, il n'y a pas de relation simple entre $k_i(\omega_r)$ et $\omega_i(k_r)$.

Cependant, contrairement au cas de l'interaction faisceau-milieu dissipatif, où les seules ondes sont les ondes de faisceau de même vitesse de groupe, dans l'interaction faisceau-plasma il y a aussi une onde de plasma dont la vitesse de groupe (dans le modèle de plasma froid) est nulle. Dans ce modèle, on ne peut donc pas supposer que les transitoires sont entièrement évacués par convection ; les champs vont donc croître avec le temps partout à partir de l'injection du faisceau, dans la direction de \vec{v}_0 (cf. [78], [60]).

Un état stationnaire asymptotique dans le temps peut cependant s'établir en présence de collisions dans le plasma. En supposant que celles-ci ont une fréquence $\nu \ll \omega_p$, comme c'est généralement le cas, on peut introduire cet effet comme une perturbation. En général, pour un plasma froid avec

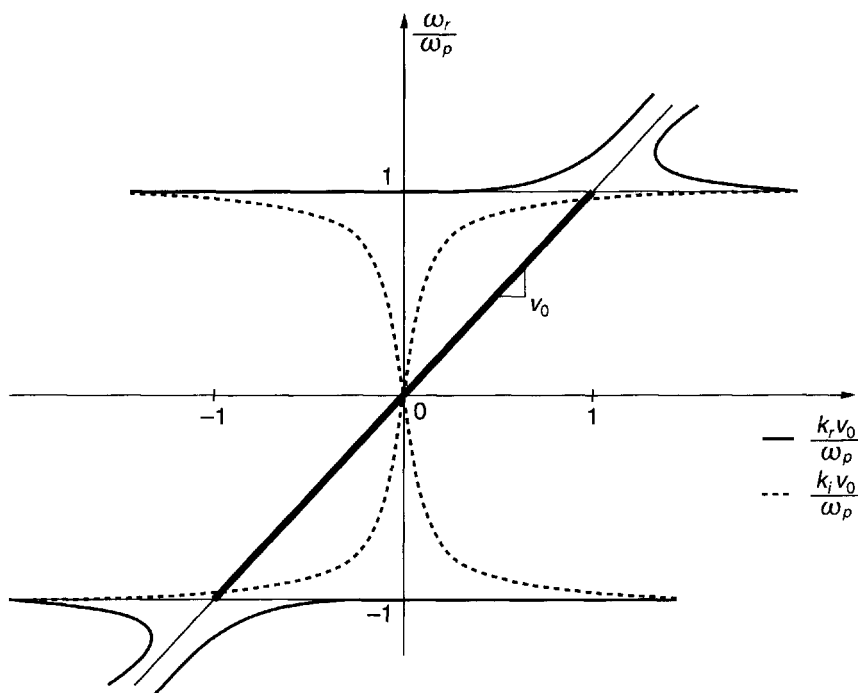


Figure 7.5 : Diagramme de dispersion de l'instabilité faisceau-plasma.

$$k(\omega_r) = k_r(\omega_r) + ik_i(\omega_r).$$

collisions on a :

$$K_L^P = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)} \quad (7.23)$$

En introduisant cette formule dans (7.21) et en résolvant par rapport à k avec $\omega = \omega_p \gg \nu$ on trouve :

$$\begin{aligned} k_r &\approx \frac{\omega_p}{v_0} \left[1 + \left(\frac{\delta \omega_p}{2 \nu} \right)^{1/2} \right] \\ k_i &\approx \frac{\omega_b}{v_0} \left(\frac{\omega_p}{2\nu} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Le comportement singulier du taux de croissance spatial lorsque $\nu \rightarrow 0$ montre cependant que d'autres effets, tels que les effets de température, doivent être pris en considération pour qu'un état stationnaire s'établisse. De toute façon, il faut étudier l'évolution vers un régime d'amplification

spatiale stationnaire pour s'assurer que la croissance temporelle des transitoires ne conduit pas le système à un nouvel état non linéaire (cf. [60]). Finalement, on peut remarquer que l'*inhomogénéité* du plasma dans la direction du faisceau peut aussi avoir un effet profond sur l'instabilité faisceau-plasma (cf. problème P7-2).

7.2.4 Aspects non linéaires de l'instabilité

L'évolution non linéaire de l'instabilité faisceau-plasma froid uniforme est extrêmement complexe et, jusqu'à maintenant, n'a pas été résolue analytiquement. On peut comprendre qualitativement quelques-uns de ses aspects à partir de la nature des ondes instables linéairement. Remarquons que les ondes linéairement instables, de basse fréquence (7.20), sont en résonance de phase avec le faisceau (c'est-à-dire que $(\omega_r/k_r) \approx v_0$) ; elles vont donc piéger les particules du faisceau et par conséquent se saturer à des amplitudes plutôt faibles. D'autre part, les ondes linéaires à croissance maximale, (7.18) et (7.19), ne sont pas en résonance de phase. Elles vont croître en amplitude jusqu'à ce que leur largeur de piégeage (cf. paragraphe 10.7.1) s'étende et piège aussi les particules du faisceau. Ces ondes, dont les fréquences caractéristiques sont proches de ω_p , vont alors se saturer à des amplitudes plus grandes et donc devenir dominantes. Cependant, les instabilités linéaires croissent à la fois dans l'espace et dans le temps (cf. [60]) et la description précédente n'est pas vraiment complète.

Les simulations sur ordinateur [78] permettent d'avoir une compréhension physique plus détaillée de ce phénomène. L'effet non linéaire principal est, premièrement, le "piégeage localisé" des électrons du faisceau dans les champs électriques de l'instabilité qui croissent dans l'espace et le temps, et, deuxièmement, le "piégeage localisé" de quelques électrons du plasma. La dynamique non linéaire des particules devient alors hautement non laminaire, avec un mélange de champs cohérents (près de l'injection du faisceau) et de champs aléatoires (loin du lieu d'injection du faisceau), et est donc difficile à traiter analytiquement. Dans l'état quasi stationnaire qui en résulte, le faisceau d'électrons est ralenti considérablement et s'étale en vitesse ; une petite partie des électrons du plasma forme une queue de haute énergie dans l'espace des vitesses, et des oscillations de champ électrique, localisées et de grande amplitude, persistent ; celles-ci peuvent enfin se coupler de façon non linéaire avec d'autres ondes du plasma (cf. paragraphe 10.7.3). Ainsi l'énergie libre initiale du faisceau d'électrons injecté est distribuée, de façon plutôt complexe, entre les particules et les ondes du plasma. Dans un plasma uniforme, le faisceau lui-même est presque complètement rendu aléatoire sur une courte distance correspondant à quelques longueurs d'onde ($2\pi v_0/\omega_p$), ce qui explique le "paradoxe de Langmuir"¹.

1. Dans ses études sur les plasmas dans les décharges gazeuses produits par des électrons émis par une cathode chaude, et accélérés par un potentiel positif, Langmuir avait observé que les électrons du faisceau, en pénétrant dans le plasma, prenaient une distribution maxwellienne déplacée, une partie de leur énergie devenant ainsi aléatoire, et tout cela sur une distance courte par rapport à leur libre parcours moyen de collision. C'est ce qu'on a appelé le "paradoxe de Langmuir" [92] et [1].

7.3 Instabilités de courant dans un plasma

Une autre situation physique dans laquelle apparaissent des instabilités de courant est celle d'un plasma neutre où les électrons sont en mouvement relatif par rapport aux ions. Cela peut se produire dans un faisceau d'électrons neutralisé par des ions, ou dans un plasma qui a été soumis à un champ électrique constant qui a placé les électrons en mouvement de dérive par rapport aux ions. La première de ces situations a été étudiée par Pierce [79] pour les amplificateurs à faisceaux d'électrons et par Budker [80], pour les accélérateurs d'électrons, tandis que le deuxième cas a été traité en détail par Buneman [81] ; cette instabilité devrait donc être baptisée "instabilité de Pierce-Budker-Buneman". En physique des plasmas, on dit plutôt "instabilité de Buneman" tout court et nous nous conformerons à cet usage.

7.3.1 Instabilité de Buneman

Pour modéliser cette instabilité, on considère un équilibre caractérisé par des électrons ayant une densité uniforme n_{0e} et une vitesse de dérive v_0 , et des ions de densité n_{0i} et de charge eZ_i ; les densités sont reliées par la condition de neutralité de charge $n_{0e} = Z_i n_{0i}$. On doit maintenant tenir compte de la dynamique des électrons et des ions. Les équations électrostatiques linéaires à une dimension des ions sont alors analogues à (7.1) et (7.2) en y remplaçant $-e$ par $Z_i e$, tandis que celles des électrons sont analogues à (7.3) et (7.4). On peut donc immédiatement écrire la fonction diélectrique longitudinale normalisée, et l'équation de dispersion :

$$K_L(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - kv_0)^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 0 \quad (7.25)$$

où $\omega_{pe}^2 = (e^2 n_{0e} / m_e \epsilon_0)$ et $\omega_{pi}^2 = (Z_i^2 e^2 n_{0i} / m_i \epsilon_0)$ sont, respectivement, les fréquences plasma électronique et ionique.

Pour trouver le domaine des valeurs réelles de k pour lesquelles (7.25) donne des solutions ω complexes, on récrit l'équation de dispersion sous la forme :

$$\frac{1}{\omega_{pe}^2} = \frac{\mu}{\omega^2} + \frac{1}{(\omega - k_r v_0)^2} \equiv H(\omega) \quad (7.26)$$

avec :

$$\mu \equiv \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} = \frac{Z_i m_e}{m_i} \quad (7.27)$$

qui sont semblables à (7.12) et (7.13). D'après (7.26) et la représentation graphique de $H(\omega)$ sur la figure 7.6, des valeurs complexes de ω pour k

réel sont obtenues quand (cf. problème P7-3) :

$$|k_r v_0| < \omega_{pe}(1 + \mu^{1/3})^{3/2} \quad (7.28)$$

et elles se situent dans le domaine de fréquences réelles :

$$\omega_r < \omega_{pe}\mu^{1/3}(1 + \mu^{1/3})^{1/2} = \omega_{pi}\mu^{-1/6}(1 + \mu^{1/3})^{1/2} \quad (7.29)$$

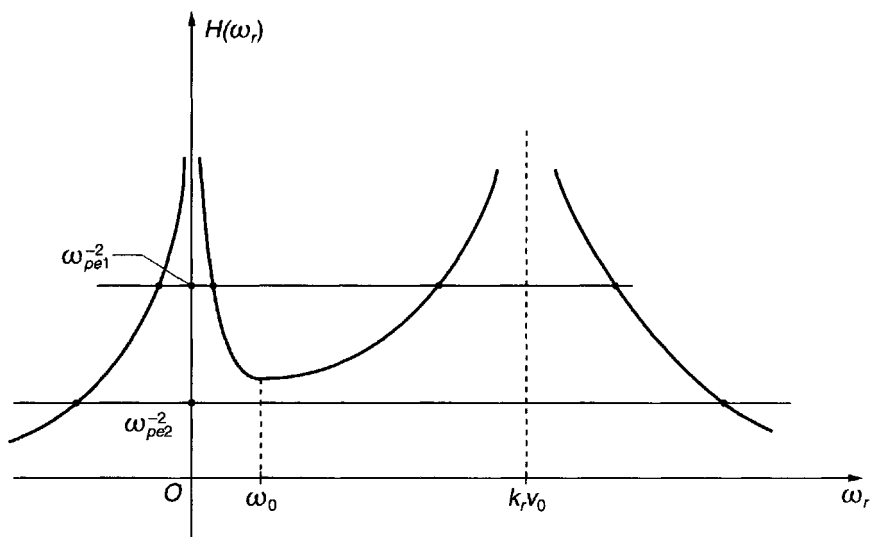


Figure 7.6 : Instabilité de Buneman.

Solution graphique de l'équation (7.26) pour deux valeurs de ω_{pe}^2 .

Pour ω_{pe2}^2 il y a deux solutions ω réelles et deux solutions complexes.

Pour obtenir une expression analytique approchée du taux de croissance maximum, de la fréquence et du nombre d'onde correspondant à ce maximum, il est commode de faire d'abord un changement de repère pour que les ions soient en mouvement par rapport à des électrons immobiles. On pose donc (puisque, dans un système de coordonnées où les électrons sont immobiles, les ions se déplacent dans la direction des x négatifs) :

$$-\omega' = \omega - k v_0$$

La relation de dispersion devient :

$$K'_L = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega'^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega' - k v_0)^2} = 0 \quad (7.30)$$

ou :

$$(\omega'^2 - \omega_{pe}^2)(\omega' - kv_0)^2 = \omega_{pi}^2 \omega^2 \quad (7.31)$$

analogue à (7.11). Pour k réel, et au voisinage des conditions de synchronisme, $|\omega'| \approx \omega_{pe} \approx k_r v_0$, (7.31) s'écrit approximativement :

$$(\omega' - \omega_{pe})(\omega' - k_r v_0)^2 \approx \frac{1}{2} \omega_{pi}^2 \omega_{pe} \quad (7.32)$$

analogue à (7.16)². Posons maintenant $\omega' \approx \omega_{pe} + \Omega \approx k_r v_0 + \Omega$; on trouve pour la racine instable (en ω) :

$$\frac{\Omega}{\omega_{pe}} = \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\mu}{2} \right)^{1/3} \quad (7.33)$$

En revenant au repère du laboratoire ($\omega = -\omega' + k_r v_0$), dans lequel les électrons se déplacent par rapport aux ions, on trouve finalement pour $k_r \approx \omega_{pe}/v_0$:

$$\omega_r \approx \frac{\mu^{1/3}}{2^{4/3}} \omega_{pe} = \frac{\omega_{pi}}{2^{4/3} \mu^{1/6}} \quad (7.34)$$

$$\omega_i \approx \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \mu^{1/3} \omega_{pe} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \frac{\omega_{pi}}{\mu^{1/6}} \quad (7.35)$$

On remarque que pour le taux maximum de croissance, on a :

$$|\omega_i| = \sqrt{3} |\omega_r|$$

c'est-à-dire que les amplitudes changent d'ordre de grandeur en quelques (\approx dix) cycles ; en ce sens, l'instabilité est beaucoup plus violente que celle du système faisceau-plasma correspondant à $|\omega_i| \ll |\omega_r|$. Pour un plasma électron-proton, on a $\mu^{-1} \approx 1836$ ($\mu^{1/3} \approx 1/12.25$ et $\mu^{1/6} \approx 1/3.5$), ce qui donne :

$$\omega_r \approx 1.39 \omega_{pi} \approx \omega_{pe}/31$$

qui est une fréquence beaucoup plus basse que celle de l'instabilité faisceau-plasma à son taux maximum de croissance.

Pour être complet, remarquons aussi que pour $|\omega| \ll \omega_{pi}$ et $k = k_r$, l'équation (7.25) peut être résolue de façon approchée et donne :

$$\omega \approx k_r v_0 \mu (1 \pm i \mu^{-1/2})$$

2. Remarquons que si on n'avait pas changé de repère, l'équation analogue à (7.31), obtenue à partir de (7.25), aurait un second membre très grand et qu'il serait alors difficile de trouver une solution approchée. Il existe bien sûr d'autres méthodes de résolution approchée de (7.25) [cf. Problème P7-4].

et donc :

$$(\omega_i/\omega_r) = \mu^{-1/2} \gg 1$$

La courbe $\omega(k_r)$ est représentée sur la figure 7.7.

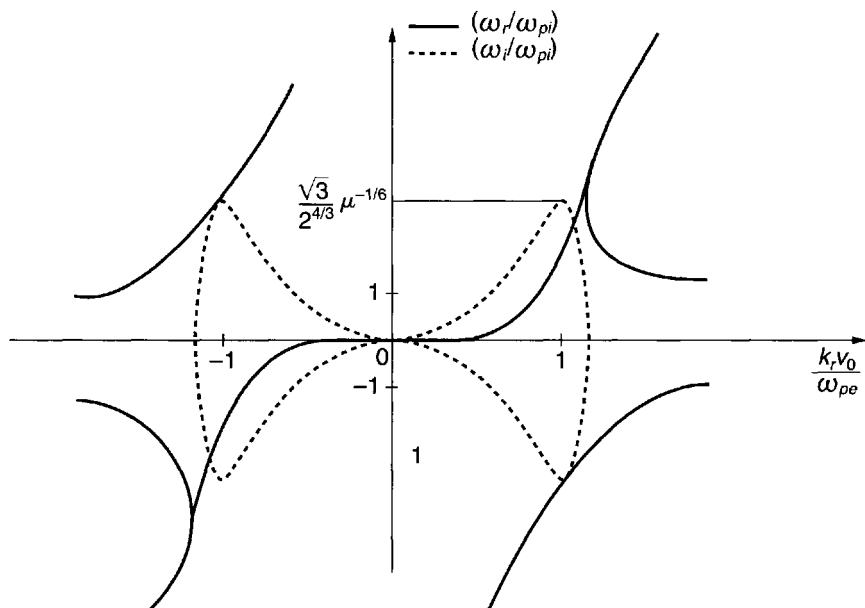


Figure 7.7 : Diagramme de dispersion de l'instabilité de Buneman.

$$\omega(k_r) = \omega_r(k_r) + i\omega_i(k_r); \mu \equiv Z_i m_e / m_i.$$

7.3.2 Aspects non linéaires

L'évolution non linéaire de cette instabilité est aussi assez complexe. Des simulations sur ordinateur montrent une évolution vers un état où les mouvements des électrons sont presque complètement désordonnés et leur vitesse considérablement réduite [81] ; on dit habituellement que le plasma instable présente une "résistivité anormale". Des simulations détaillées sur ordinateur [82], [83] montrent qu'en deux à trois périodes de multiplication par e , correspondant à (7.35), il y a un effet significatif (non linéaire) de baisse des fréquences (7.34) et (7.35), et donc un piégeage (cf. paragraphe 10.7.1) des électrons (dans les champs qui se sont développés) qui thermalise les électrons et sature l'instabilité ; il s'établit ensuite des oscillations ioniques intenses dont la fréquence est proche de ω_{pi} . Ces simulations montrent qu'environ 80% de l'énergie du faisceau se thermalise (la répartition de l'énergie des électrons devenant de type thermique), environ 10% se retrouve dans l'énergie du champ électrique turbulent, et environ 10% dans les oscillations ioniques résultantes. La thermalisation pourrait être un moyen effectif de chauffage d'un plasma (appelé "chauffage par turbulence"). En fait, il est

difficile de créer un plasma dont les électrons aient une vitesse de dérive beaucoup plus grande que leur vitesse thermique. Les expériences sur ce chauffage par turbulence n'ont eu qu'un succès partiel ; les champs turbulents conduisent aussi à une augmentation de la diffusion du plasma.

7.4 Instabilité électrostatique à deux courants

Comme dernière classe d'instabilité électrostatique de courant, nous décrivons maintenant celles où deux groupes d'électrons du plasma sont en mouvement l'un par rapport à l'autre. Elles ont été découvertes comme l'instabilité faisceau-plasma, à propos de l'excitation des oscillations de plasma [75], mais aussi étudiées plus tard et de façon indépendante, en relation avec les amplificateurs/oscillateurs à deux faisceaux [84], [85], [86], [87].

7.4.1 Faisceaux d'électrons opposés

Pour simplifier, on considère d'abord le cas de deux faisceaux d'électrons "opposés", c'est-à-dire s'interpénétrant, de même densité et de vitesses de dérive égales et *opposées*, dans un fond continu neutralisant d'ions (immobiles). Soient $(n_{e0}/2)$ et v_0 la densité et la vitesse à l'équilibre de chacun des faisceaux. Dans le cas électrostatique à une dimension, les différentes quantités vectorielles ont la disposition représentée sur la figure 7.8(a). Les équations linéarisées pour chaque faisceau sont analogues aux équations (7.3) et (7.4) avec $n_{ob} = (n_{e0}/2)$ et $v_{ob} = \pm v_0$. Par conséquent, en suivant la même méthode de calcul que pour les équations (7.7)–(7.10), on obtient la fonction diélectrique longitudinale normalisée et la relation de dispersion :

$$K_L(k_x, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2/2}{(\omega - k_x v_0)^2} - \frac{\omega_{pe}^2/2}{(\omega + k_x v_0)^2} = 0 \quad (7.36)$$

où $\omega_{pe} \equiv (e^2 n_{e0}/m\epsilon_0)^{1/2}$ est la fréquence plasma électronique totale. En posant :

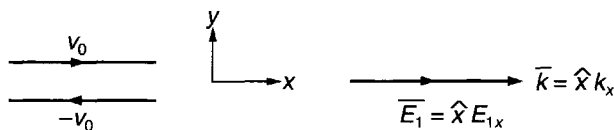
$$(\omega/\omega_{pe}) \equiv \Omega, \quad (k_x v_0/\omega_{pe}) \equiv \kappa$$

(7.36) peut s'écrire :

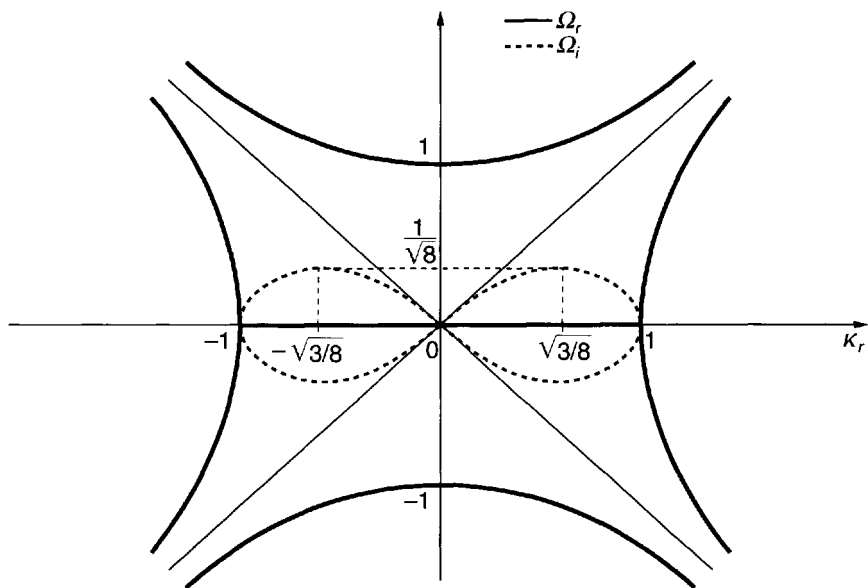
$$\frac{1}{(\Omega - \kappa)^2} + \frac{1}{(\Omega + \kappa)^2} = 2 \quad (7.37)$$

ou :

$$(\Omega^2 - \kappa^2)^2 - (\Omega^2 + \kappa^2) = 0 \quad (7.38)$$



(a)



(b)

Figure 7.8 : Instabilité électrostatique à deux faisceaux d'électrons opposés.

- (a) Champ \vec{E} et orientation du vecteur d'onde.
 (b) Courbe $\Omega(\kappa_r)$ (diagramme de dispersion).

qui est invariant quand on intervertit Ω et κ . En résolvant par rapport à $\Omega(\kappa)$ on trouve :

$$\Omega^2 = \kappa^2 + \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\kappa^2 + \frac{1}{2})^2 - \kappa^2(\kappa^2 - 1)} \quad (7.39)$$

En supposant que $\kappa = \kappa_r$ est réel, on voit que $\Omega(\kappa_r)$ admet des racines complexes (conjuguées) pour $\kappa_r^2 < 1$. Plus précisément, il y a alors deux racines

réelles et deux racines purement imaginaires. Ainsi, la racine instable correspond à une onde *purement croissante* ($\omega_r = 0$). Le taux maximum de croissance se produit pour $\kappa_r = (3/8)^{1/2}$ et on obtient $\Omega_{i\max} = (1/8)^{1/2}$. Une représentation graphique complète de $\Omega(\kappa_r)$ est donnée sur la figure 7.8(b). En raison de la symétrie de ce problème à faisceaux opposés, on peut observer que les solutions de l'équation de dispersion avec des fréquences complexes, et des nombres d'onde réels, ont ici une signification. La forme spatiale de toute condition initiale (raisonnable) – y compris le bruit – peut être décrite comme une superposition de sinusoides spatiales de différentes longueurs d'onde et amplitudes ; les fréquences complexes donnent l'évolution temporelle de chacune de ces sinusoides spatiales. Lorsque le temps tend vers l'infini, l'instabilité présente une croissance temporelle en chaque point de l'espace – qui est appelée “instabilité absolue” (cf. [60]).

7.4.2 Faisceaux parallèles

Le processus d'*amplification spatiale à deux faisceaux* apparaît quand les vitesses de dérive de deux faisceaux (en général, de densités et de vitesses à l'équilibre différentes) sont de *même* direction (nous disons simplement “parallèles” pour alléger l'écriture).

Contrairement au cas des faisceaux opposés, il est maintenant clair que toutes les perturbations du système sont emmenées par le mouvement unidirectionnel des deux faisceaux. Les perturbations instables sont donc, en même temps qu'elles croissent, transportées par convection dans la direction des faisceaux. On dit que l'on a une *instabilité convective*. Dans un système instable (c'est-à-dire dans lequel on a $\omega_i(k_r) > 0$ pour un certain domaine de valeurs de k_r) mais sans instabilité absolue, cela a maintenant un sens de considérer une excitation stationnaire locale à une certaine fréquence réelle $\omega = \omega_r$ (pour plus de détails, cf. [60]). Et comme on a supposé des perturbations en $\exp(ikx)$, le taux de croissance spatiale dans un tel système convectivement instable est donné pour $x > 0$ par $k_i(\omega_r) < 0$.

Cherchons donc les solutions k_x complexes de l'équation de dispersion pour des fréquences $\omega = \omega_r$ réelles. La relation de dispersion s'écrit :

$$\frac{k_{p1}^2}{(k_x - k_{e1})^2} + \frac{k_{p2}^2}{(k_x - k_{e2})^2} = 1 \quad (7.40)$$

avec :

$$k_{pi} = (\omega_{pi}/v_{0i}), \quad k_{ei} = (\omega_r/v_{0i}), \quad i = 1, 2$$

Posons maintenant :

$$\frac{1}{v_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_{02}} + \frac{1}{v_{01}} \right) \quad (7.41)$$

et :

$$\delta = \frac{v_0}{2} \left(\frac{1}{v_{02}} - \frac{1}{v_{01}} \right) \quad (7.42)$$

d'où :

$$k_{e1} = k_e(1 - \delta), \quad k_{e2} = k_e(1 + \delta), \quad k_e = (\omega_r/v_0)$$

Posons de plus :

$$k_x = k_e(1 + \alpha) \quad (7.43)$$

et supposons pour simplifier que :

$$k_{p1} = k_{p2} \equiv \frac{\omega_p}{v_0} \equiv k_p \quad (7.44)$$

ce qui implique la condition :

$$(\omega_{p1}/\omega_{p2}) = (v_{01}/v_{02})$$

et définit ω_p et k_p ; on trouve alors que (7.40) peut s'écrire :

$$\frac{1}{(\alpha - \delta)^2} + \frac{1}{(\alpha + \delta)^2} = \frac{1}{p^2} \quad (7.45)$$

où $p = (\omega_p/\omega_r)$ est caractéristique de la densité (de charge) à l'équilibre des électrons dans les faisceaux. On remarque que pour $\delta = 0$, c'est-à-dire pour $v_{01} = v_{02}$, (7.45) n'a que deux solutions α réelles, et les valeurs de k_x (7.43) sont alors les nombres d'onde des ondes (stables) lentes et rapides d'un seul faisceau, comme on pouvait s'y attendre. Pour $\delta \neq 0$ (7.45) est analogue à (7.37) et sa solution pour $(\alpha/p\sqrt{2}) = (\alpha k_e/k_p\sqrt{2})$ complexe, fonction de $(\delta/p\sqrt{2}) = (\omega_r/\omega_p)\delta/\sqrt{2}$, est identique aux solutions obtenues pour Ω complexe et fonction de κ_r comme le montre la figure 7.8(b). On obtient donc les nombres d'onde (7.43) complexes $k_x = k_{xr} + ik_{xi}$ en fonction de la fréquence réelle ω_r :

$$k_{xr} = k_e(1 + \alpha_r), \quad k_{xi} = k_e\alpha_i$$

Pour le nombre d'onde donnant la croissance spatiale (dans la direction des vitesses de dérive, prise pour $x > 0$), on a $\alpha_r = 0$, et donc $k_{xr} = k_e = (\omega_r/v_0)$ et $k_{xi} = k_e\alpha_i$ avec $\alpha_i < 0$.

Ainsi, les ondes croissantes dans l'espace se produisent dans l'intervalle de fréquences $0 < \omega_r < (\sqrt{2}/\delta)\omega_p$; le taux maximum de croissance est $(k_{xi})_{max} = -(k_p/2)$ et correspond à $\omega_r = (\sqrt{3}/2\delta)\omega_p$. L'amplification spatiale maximum et la fréquence à laquelle elle se produit croissent toutes les deux comme la racine carrée de la densité des faisceaux [δ ne peut pas être arbitrairement petit puisqu'on doit avoir $k_{xr}\lambda_D \ll 1$ pour que le

modèle des plasmas froids reste valable (cf. chapitre 10)]. On remarque aussi que le taux maximum de croissance par unité de longueur d'onde est $2\pi|(k_{xi})_{max}/k_{xr}| = (2\pi/\sqrt{3})\delta$.

Le diagramme de dispersion complet tiré de (7.40) est représenté sur la figure 7.9. Ces résultats exacts ont été obtenus pour le cas particulier $(\omega_{p1}/\omega_{p2}) = (v_{01}/v_{02})$. Une situation plus pratique correspondrait à deux faisceaux d'égales densités, soit $(\omega_{p1} = \omega_{p2})$. Si leur différence de vitesses est faible en valeur relative, autrement dit si $\delta \ll 1$, on peut trouver (cf. problème P7-5) une solution approchée de l'équation de dispersion qui redonne essentiellement les résultats obtenus ci-dessus.

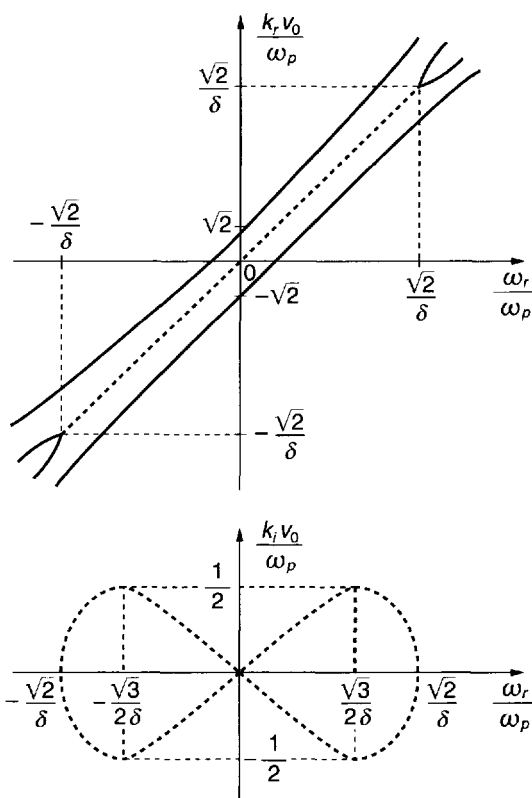


Figure 7.9 : Instabilité électrostatique à deux faisceaux d'électrons parallèles.

Diagramme de dispersion tiré de (7.40), avec la contrainte (7.44) pour des valeurs complexes de $k_x = k_r + ik_i$ en fonction de $\omega = \omega_r$ réel.

7.4.3 Faisceaux opposés, avec mouvement des ions

Revenons aux faisceaux d'électrons opposés (7.36) ; comme l'instabilité trouvée a une fréquence réelle nulle, il est discutable d'avoir négligé le mouvement des ions. Si donc on inclut la dynamique linéaire des ions froids stationnaires, on peut modifier l'équation (7.36) pour y inclure la susceptibilité des ions, ce qui donne :

$$K_L(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2/2}{(\omega - k_x v_0)^2} - \frac{\omega_{pe}^2/2}{(\omega + k_x v_0)^2} = 0 \quad (7.46)$$

où $\omega_{pi}^2 = (Z_i^2 e^2 n_{i0} / m_i \epsilon_0)$ et, d'après la neutralité de l'état non perturbé, $Z_i n_{i0} = n_{e0}$. Cette équation de dispersion est maintenant du sixième degré en ω et ne peut être résolue que numériquement. En utilisant les mêmes variables normalisées que dans la section 7.4.1, on obtient les solutions $\Omega(\kappa_r)$ représentées sur la figure 7.10.

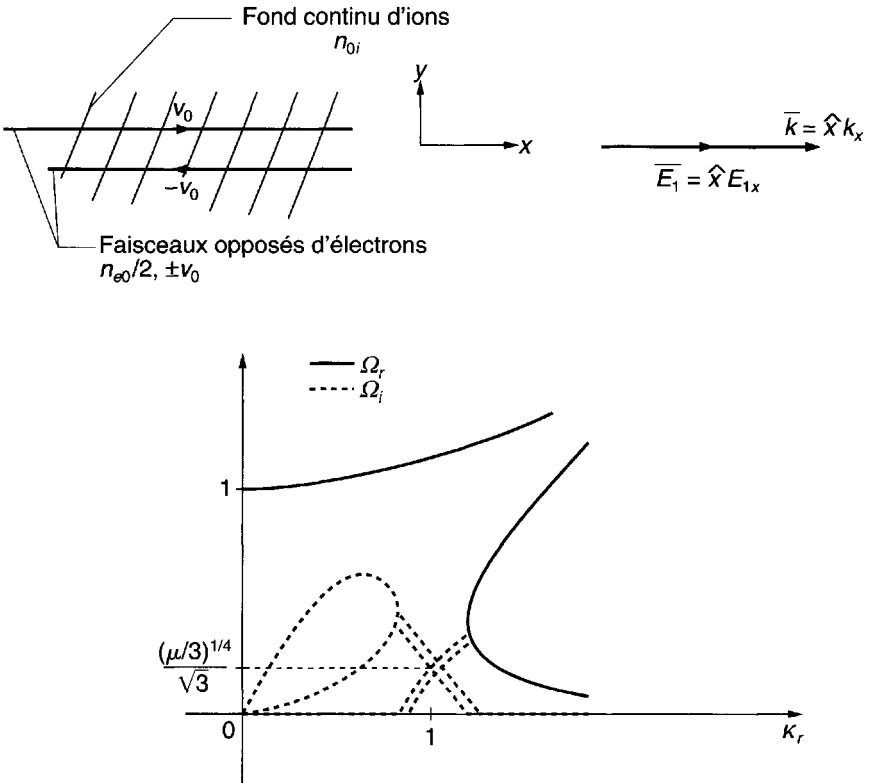


Figure 7.10 : Instabilité électrostatique à deux faisceaux d'électrons opposés avec mouvement des ions.

Équation de dispersion $\Omega(\kappa_r) = \Omega_r(\kappa_r) + i\Omega_i(\kappa_r)$

$\Omega = (\omega/\omega_{pe})$; $\kappa_r = (k_x v_0/\omega_{pe})$; $\mu = Z_i m_e/m_i$.

On remarque qu'il subsiste une branche d'ondes purement croissantes pour $\kappa_r < 1$, mais qu'il apparaît également une nouvelle branche instable avec des composantes réelles et imaginaires de Ω comparables, au voisinage immédiat de $\kappa_r = 1$, avec $\Omega \approx (\mu/3)^{1/4}(1+i)/\sqrt{2}$, c'est-à-dire :

$$\omega \approx (\omega_{pe}\omega_{pi})^{1/2}(1+i)/3^{1/4}\sqrt{2}$$

avec :

$$\mu \equiv (Z_i m_e / m_i)$$

(cf. problème P7-6). Dans le cas limite où l'on retire un des faisceaux (et on adapte la densité de l'autre pour maintenir la condition de neutralité), cette racine instable se déplace pour devenir l'instabilité de Buneman, tandis que la racine purement croissante disparaît. On remarque finalement qu'en permutant les indices e et i l'équation (7.46) devient l'équation de dispersion électrostatique pour deux faisceaux d'ions opposés dans un fond continu stationnaire d'électrons.

7.4.4 Aspects non linéaires

L'évolution non linéaire de l'instabilité à deux faisceaux d'électrons opposés dans un fond continu d'ions immobiles a été aussi simulée sur ordinateur [88]. Comme initialement, l'instabilité linéaire est non résonnante, l'énergie du champ électrique croît exponentiellement au détriment des vitesses de dérive des faisceaux, et ceux-ci présentent des oscillations de grande amplitude dans leur espace de phase (v_x, x) . Après environ 20 à 30 périodes de plasma (environ 10 à 15 fois l'inverse du taux maximum de croissance) certains électrons ont une vitesse descendant jusqu'à zéro et sont piégés (cf. paragraphe 10.7.1) par le potentiel du champ électrique croissant. Cela crée un mélange des faisceaux et rapidement, ils évoluent vers une fonction de distribution des vitesses à un seul pic autour de l'origine, avec un étalement équivalent à une demi-largeur de Gauss d'environ $2v_0$. En même temps, l'énergie du champ électrique se sature et un nouvel état quasi stationnaire est atteint.

Il semble qu'il n'y ait pas d'étude semblable pour l'amplificateur à deux faisceaux parallèles. Cependant, comme le montre notre analyse, l'amplification linéaire est très proche de l'interaction résonnante ($\omega_r/k_r = v_0$), en particulier pour δ petit, et l'on peut donc s'attendre que le piégeage sature l'amplification à des amplitudes relativement modestes.

Les simulations sur ordinateur de l'évolution non linéaire des instabilités électrostatiques dans les faisceaux opposés d'ions circulant dans un fond continu d'électrons stationnaires montrent [89] que lorsque les champs instables croissent, le fond continu des électrons est chauffé et acquiert une queue de distribution vers les hautes énergies. Un état quasi stationnaire est atteint dans un temps égal à environ dix fois le temps de croissance maximum. Les faisceaux d'ions ont alors été ralentis et présentent un étalement fini de vitesse ; la distribution de vitesse des électrons s'est aussi largement étendue et peut même dépasser les vitesses de dérive des faisceaux d'ions.

7.5 Instabilités électromagnétiques

Nous étudions maintenant les modes électromagnétiques qui peuvent aussi devenir instables dans un plasma où il y a des flux de particules chargées. Pour ces modes qui contiennent des champs électriques et magnétiques, on ne peut plus, même dans les cas les plus simples, se ramener à un problème à une dimension, dans une direction qui serait celle de tous les champs. On doit d'ailleurs utiliser alors le système complet des équations de Maxwell pour décrire l'évolution des champs. Celles-ci étant relativistes, nous écrirons aussi des équations relativistes pour décrire la dynamique des particules du plasma. Nous développerons donc dans les deux paragraphes qui suivent le modèle général relativiste en trois dimensions d'un plasma froid avec des champs électromagnétiques arbitraires, d'abord avec les équations exactes non linéaires puis avec des équations linéarisées. L'instabilité électromagnétique la plus simple sera ensuite décrite. Enfin nous établirons et discuterons l'équation de conservation relativiste de l'énergie de perturbation.

7.5.1 Modèle relativiste des plasmas froids

Rappelons les équations qui décrivent la dynamique d'un plasma froid dans un champ électromagnétique arbitraire $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Chaque espèce de particule de charge q_s , de masse m_s , est décrite par sa densité $n_s(\vec{r}, t)$ et sa vitesse de fluide $\vec{v}_s(\vec{r}, t)$, qui sont des fonctions continues de la position \vec{r} et du temps t . En négligeant les collisions et l'agitation thermique, les équations dynamiques de chaque espèce sont l'équation de conservation des particules :

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Gamma}_s = 0; \quad \vec{\Gamma}_s = n_s \vec{v}_s \quad (7.47)$$

et l'équation de transport de la quantité de mouvement :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla \right) \vec{p}_s = q_s (\vec{E} + \vec{v}_s \times \vec{B}) \quad (7.48)$$

où

$$\vec{p}_s = m_s \vec{v}_s \quad (7.49)$$

est la quantité de mouvement des particules d'espèce s . Ces équations (avec les conditions initiales ou aux limites nécessaires) permettent en principe de déterminer n_s et \vec{v}_s en fonction des champs électromagnétiques \vec{E} et

\vec{B} . À ces densités et flux de particules sont associées une densité de charge électrique :

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_s q_s n_s(\vec{r}, t) \quad (7.50)$$

et une densité de courant électrique :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_s q_s \vec{\Gamma}_s(\vec{r}, t) \quad (7.51)$$

Cette charge d'espace et ce courant produisent à leur tour des champs électromagnétiques décrits par les équations de Maxwell :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.52)$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (7.53)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (7.54)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.55)$$

Si l'on introduit dans (7.48) les champs électromagnétiques qui découlent du système (7.52)-(7.55) on a finalement une description complète self-consistante d'un plasma froid sans collisions.

Comme les équations de Maxwell sont relativistes, il nous faut utiliser aussi en général pour les particules des équations dynamiques correctes du point de vue de la relativité. On doit donc poser dans (7.48) et (7.49) :

$$m_s = \gamma_s m_{s0}, \quad \gamma_s = (1 - v_s^2/c^2)^{-1/2} = (1 + p_s^2/m_{s0}^2 c^2)^{1/2} \quad (7.56)$$

où m_{s0} est la masse au repos des particules d'espèce s . Cependant dans de nombreux cas les effets relativistes sont faibles, et on peut alors supposer que m_s est constante et égale à m_{s0} . Rappelons que les équations électrostatiques utilisées jusqu'à maintenant dans le chapitre 6 et au début du présent chapitre ne sont pas relativistes. Il est cependant relativement facile de généraliser à des faisceaux relativistes les résultats obtenus précédemment en utilisant de façon appropriée les formules (7.48), (7.49) et (7.56) (cf. problème P7-7). Pour les champs électromagnétiques satisfaisant au système complet des équations de Maxwell, nous trouverons que, dans certains cas, il faut absolument utiliser l'équation relativiste (7.48) pour obtenir des résultats corrects.

Les solutions du modèle des plasmas froids (7.47)-(7.55) doivent aussi obéir à une équation de conservation de l'énergie qui est une généralisation de l'équation (théorème) de Poynting tenant compte des densités et flux d'énergie associés aux particules matérielles (cf. problème P7-7 et [57]) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0}{2} H^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \sum_s T_s n_s \right) + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H} + \sum_s T_s \vec{\Gamma}_s) = 0 \quad (7.57)$$

où $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$; $T_s = m_s c^2 - m_{s0} c^2 = (\gamma_s - 1) m_{s0} c^2$ est l'énergie cinétique relativiste par particule d'espèce s , et $\vec{\Gamma}_s = n_s \vec{v}_s$ est le flux de ces particules. L'équation (7.57) est la généralisation de (6.8) qui avait été obtenue pour les champs électrostatiques ($\vec{B} = 0$), dans la dynamique à une dimension d'une seule espèce de particules.

Notons finalement que (7.47) et (7.48) contiennent des termes non linéaires [$n_s \vec{v}_s$, $m_s \vec{v}_s$, $(\vec{v}_s \cdot \nabla)(m_s \vec{v}_s)$, et $\vec{v}_s \times \vec{B}$] qui rendent impossible l'obtention de solutions générales des équations exactes des plasmas froids. C'est pourquoi nous étudierons plutôt le comportement des perturbations de petite amplitude de divers plasmas en équilibre.

7.5.2 Dynamique non relativiste linéarisée

Pour la description de l'instabilité électromagnétique la plus simple que nous ferons dans la section suivante, les effets relativistes sont peu importants. Nous la simplifierons en posant $m_s = m_{s0}$. Nous nous limiterons par ailleurs à des équilibres de plasmas uniformes dans l'espace et ne comportant pas de champs permanents. Dans ces conditions, chaque espèce de particules est caractérisée par une densité et une vitesse constantes n_{s0} et \vec{v}_{s0} , avec :

$$\rho_{s0} = \sum_s q_s n_{s0} = 0 \quad (7.58)$$

$$\vec{J}_{s0} = \sum_s q_s n_{s0} \vec{v}_{s0} = 0 \quad (7.59)$$

de sorte qu'il n'y a aucun champ électrique ou magnétique interne. Nous admettrons aussi qu'il n'y a aucun champ appliqué de l'extérieur, d'où finalement $\vec{E}_0 = 0$ et $\vec{B}_0 = 0$. En présence de champs de perturbation $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}_1(\vec{r}, t)$, il y a des perturbations de densités et de vitesses :

$$n_s(\vec{r}, t) = n_{s0} + n_{s1}(\vec{r}, t) ; |n_{s1}| \ll n_{s0} \quad (7.60)$$

$$\vec{v}_s(\vec{r}, t) = \vec{v}_{s0} + \vec{v}_{s1}(\vec{r}, t) ; |\vec{v}_{s1}| \ll \vec{v}_{s0} \quad (7.61)$$

En portant ces expressions dans (7.47) et (7.48) avec $m_s = m_{s0}$, et en négligeant les produits de deux termes de perturbation, on obtient les équations *linearisées, non relativistes* :

$$\frac{\partial n_{s1}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Gamma}_{s1} = 0 ; \vec{\Gamma}_{s1} = n_{s0} \vec{v}_{s1} + n_{s1} \vec{v}_{s0} \quad (7.62)$$

$$m_{s0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_{s0} \cdot \nabla \right) \vec{v}_{s1} = q_s (\vec{E}_1 + \vec{v}_{s0} \times \vec{B}_1) \quad (7.63)$$

Ce sont des équations aux dérivées partielles linéaires. On en déduit facilement les solutions n_{s1} et $\vec{\Gamma}_{s1}$, d'où les perturbations de la densité de charge d'espace :

$$\rho_1 = \sum_s q_s n_{s1} \quad (7.64)$$

et du courant :

$$\vec{J}_1 = \sum_s q_s \vec{\Gamma}_{s1} \quad (7.65)$$

qui entrent dans les équations de Maxwell déterminant les perturbations des champs :

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \quad (7.66)$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \vec{J}_1 \quad (7.67)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}_1 = \rho_1 \quad (7.68)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (7.69)$$

Bien que le système (7.62)-(7.69) puisse être résolu de façon générale sans aucune autre approximation, nous allons à titre d'exemple, dans la section suivante, analyser le cas le plus simple d'instabilité électromagnétique de courant.

7.5.3 Instabilité de type Weibel non relativiste

a) Équation de dispersion

L'instabilité la plus simple de type électromagnétique est une instabilité de basse fréquence qui découle du travail original (et plus général) de E. S. Weibel sur les instabilités électromagnétiques dans les plasmas ayant des fonctions de distributions des vitesses anisotropes [90]. On l'obtient en considérant simplement un équilibre constitué par deux faisceaux uniformes

d'électrons circulant en sens contraires (faisceaux "opposés") : les deux densités sont égales, les deux vitesses égales et opposées, et l'on suppose qu'il y a un fond continu neutralisant d'ions immobiles. On suppose de plus (et nous vérifierons *a posteriori* sur les équations de Maxwell la cohérence de ces hypothèses) que les champs de perturbation sont de structure *transverse électromagnétique* ($\vec{E}_1 \perp \vec{B}_1$), avec le champ électrique parallèle aux vitesses des faisceaux d'électrons ($\vec{E}_1 \parallel \vec{v}_0$), et à *propagation transversale* aux faisceaux ($\vec{k} \perp \vec{v}_0$) comme indiqué sur la figure 7.11(a). (On remarque que des champs électromagnétiques transverses, avec le champ électrique perpendiculaire à \vec{v}_0 , c'est-à-dire $\vec{E}_1 \perp \vec{v}_0$), n'interagiraient pas avec le mouvement des particules et seraient par suite stables, cf. problème P7-9.)

En supposant tous les champs indépendants de x et z , les équations dynamiques linéarisées (7.62) et (7.63) pour chaque faisceau d'électrons deviennent :

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_{y1}}{\partial y} = 0 \quad (7.70)$$

$$m_e \frac{\partial v_{x1}}{\partial t} = -e E_{x1} \quad (7.71)$$

$$m_e \frac{\partial v_{y1}}{\partial t} = -e(\mp v_0 B_{z1}) \quad (7.72)$$

Dans la dernière équation où il y a un double signe, le signe supérieur (−) correspond au faisceau circulant dans le sens positif de l'axe Ox et le signe inférieur (+) au faisceau circulant dans le sens négatif de Ox . Pour les ions, dont on suppose la vitesse nulle dans l'état d'équilibre, on n'a à utiliser que la projection sur Ox de (7.63).

Pour les champs électromagnétiques E_{x1} et B_{z1} , les équations de Maxwell (7.66) et (7.67) peuvent dans le domaine des basses fréquences qui nous intéresse s'écrire sous une forme approchée en négligeant le courant de déplacement (approximation *magnétoquasistatique*), soit :

$$-\frac{\partial E_{x1}}{\partial y} + \frac{\partial B_{z1}}{\partial t} = 0 \quad (7.73)$$

$$\frac{\partial B_{z1}}{\partial y} - \mu_0 J_{x1} = 0 \quad (7.74)$$

En les combinant on obtient :

$$\frac{\partial^2 E_{x1}}{\partial y^2} - \mu_0 \frac{\partial J_{x1}}{\partial t} = 0 \quad (7.75)$$

Pour obtenir l'équation d'onde de E_{x1} on doit donc, dans ce cas simple, trouver $J_{x1}(E_{x1})$.

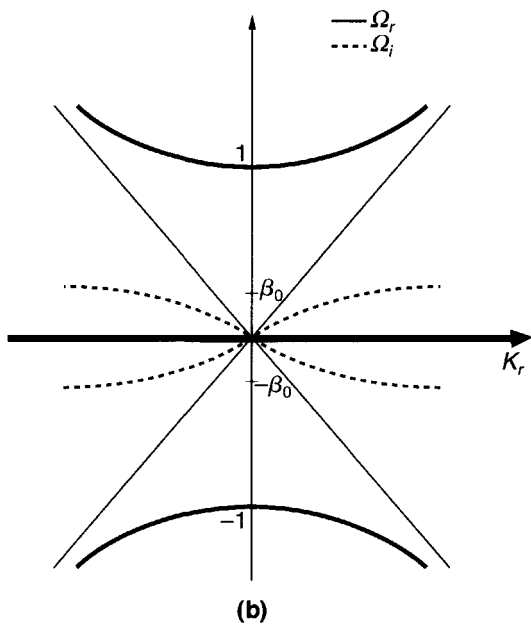
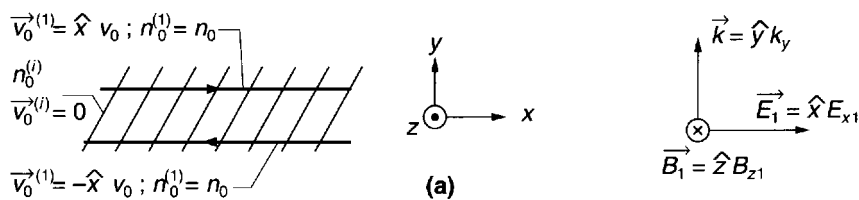


Figure 7.11 : Instabilité de Weibel à deux faisceaux opposés.

 (a) Champs \vec{E} , \vec{B} et orientation du vecteur d'onde.

 (b) Diagramme de dispersion $\Omega(K_r)$. $\Omega \equiv (\omega/\omega_p)$.

 $K \equiv (k_y c/\omega_p)$; $\beta_0 \equiv (v_0/c)$.

Comme

$$J_{x1} = \sum_{b=1,2} \left(-e \Gamma_{x1}^{(b)} \right) + e Z_i n_{0i} v_{x1}^{(i)} \quad (7.76)$$

et

$$\Gamma_{x1} = n_0 v_{x1} + n_1 v_0 \quad (7.77)$$

où les exposants (b) et (i) se rapportent aux faisceaux d'électrons et aux ions, les équations dynamiques (7.70)-(7.72) avec l'équation de Faraday (7.73) permettent de calculer $J_{x1}(E_{x1})$. Dans cette démarche on doit aussi s'assurer que l'hypothèse de champs électromagnétiques purement transverses se propageant perpendiculairement aux faisceaux d'électrons est satisfaite de façon self-consistante.

Pour résoudre le système (7.70)-(7.74), on peut supposer que toutes les grandeurs ont une dépendance spatio-temporelle (complexe) en $\exp(ik_y y - i\omega t)$. Les équations deviennent alors algébriques par rapport aux amplitudes complexes et on trouve en particulier :

$$v_{x1}^{(b)} = \frac{(e/m_e)}{i\omega} E_{x1} \quad (7.78)$$

$$v_{x1}^{(i)} = \frac{(eZ_i/m_i)}{i\omega} E_{x1} \quad (7.79)$$

$$n_1^{(b)} = n_0^{(b)} \frac{(\pm v_0)(e/m_e)}{i\omega} \left(\frac{k_y}{\omega} \right)^2 E_{x1} \quad (7.80)$$

$$n_1^{(i)} = 0 \quad (7.81)$$

On voit donc que pour deux faisceaux d'égales densités et de vitesses égales et opposées [ce qui est exigé par la condition de champs nuls à l'équilibre (7.59)], la perturbation de la densité totale de charge (7.64) est aussi nulle. D'après l'équation de Poisson (7.68) on a donc $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ et une perturbation électromagnétique purement transverse telle que nous l'avons supposée est bien self-consistante. À partir de (7.78)-(7.81), on peut maintenant exprimer la densité de courant (complexe) (7.76) en fonction de l'amplitude (complexe) de E_{x1} à travers une conductivité en posant :

$$J_{x1} = \sigma_{xx}(k_y, \omega) E_{x1} \quad (7.82)$$

avec pour expression de la conductivité :

$$\sigma_{xx}(k_y, \omega) = i\omega\epsilon_0 \left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(\frac{k_y v_0}{\omega} \right)^2 \right] \quad (7.83)$$

et $\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \approx \omega_{pe}^2 = (e^2 n_0 / m_e \epsilon_0)$. Notons que dans des plasmas comportant des écoulements, la conductivité qui relie \vec{J} et \vec{E} est en général un tenseur, soit :

$$\vec{J} = \vec{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}$$

où $\bar{\sigma}$ est un tenseur du deuxième ordre. Dans le problème simple traité ici, on n'a besoin que d'en connaître la composante xx .

Revenons maintenant à (7.75) : d'après la dépendance des grandeurs en $\exp(ik_y y - i\omega t)$, et compte tenu de (7.82) et (7.83) on obtient :

$$[-k_y^2 + i\omega\mu_0\sigma_{xx}(k_y, \omega)]E_{x1} = 0 \quad (7.84)$$

d'où la relation de dispersion :

$$k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{xx}(k_y, \omega) \quad (7.85)$$

où

$$\chi_{xx}(k_y, \omega) = \frac{\sigma_{xx}(k_y, \omega)}{-i\omega\epsilon_0} \quad (7.86)$$

est la fonction susceptibilité. Cependant, alors que dans les champs électrostatiques, la susceptibilité reliait les perturbations du champ électrique à celles de la densité de charge, on doit considérer en général, comme nous le faisons ici, qu'elle relie les perturbations du champ électrique et de la densité de courant. D'ailleurs, dans le cas que nous traitons ici, la perturbation de densité de charge est en fait identiquement nulle.

L'équation de dispersion (7.85) se résout facilement en ω^2 , ce qui donne :

$$\omega^2 \approx -\frac{\omega_{pe}^2 (v_0/c)^2}{1 + (\omega_{pe}/ck_y)^2} \quad (7.87)$$

qui, pour k_y réel, donne une instabilité purement croissante - l'instabilité de Weibel. Dans l'approximation non relativiste étudiée ici, on doit avoir $(v_0/c) \equiv \beta_0 \ll 1$, et donc $|\omega| \ll \omega_{pe}$, ce qui est cohérent avec l'approximation des basses fréquences utilisée dans les équations de Maxwell. On voit que pour les grandes longueurs d'ondes ($k_y \rightarrow 0$) le taux de croissance ($\omega_i \approx \beta_0 c k_y$) est indépendant de la densité électronique (contrairement au cas des instabilités électrostatiques) et croît linéairement avec k_y . Du côté des courtes longueurs d'onde ($k_y \rightarrow \infty$), le taux de croissance tend vers une limite proportionnelle à la racine carrée de la densité électronique ($\omega_i \approx \beta_0 \omega_{pe}$). Cependant, dans ce domaine les effets d'agitation thermique, que l'on a négligés jusqu'ici, peuvent réduire substantiellement ce taux et même supprimer l'instabilité (cf. chapitre 11).

On peut facilement abandonner l'approximation des basses fréquences en réintroduisant le courant de déplacement ($-c^{-2}\partial E_{x1}/\partial t$) au premier membre de (7.74), de sorte que (7.75) devient l'équation d'onde

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_{x1} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial J_{x1}}{\partial t} = 0 \quad (7.88)$$

En poursuivant comme précédemment et en tenant compte de (7.83) et (7.86) on obtient :

$$\omega^2 \left[1 - \frac{c^2 k_y^2}{\omega^2} + \chi_{xx}(k_y, \omega) \right] E_{x1} = 0 \quad (7.89)$$

Pour les solutions non triviales, on trouve donc l'équation de dispersion :

$$D_{Tx}(k_y, \omega) \equiv 1 - \left(\frac{ck_y}{\omega} \right)^2 + \chi_{xx}(k_y, \omega) = 0 \quad (7.90)$$

où les indices utilisés pour D signifient qu'il s'agit d'ondes transverses avec une certaine polarisation (champ E_x^1) (cf. problème P7-9 pour l'autre polarisation). Cela peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \left(\frac{ck_y}{\omega} \right)^2 &= 1 + \chi_{xx}(k_y, \omega) \\ &\equiv K_{xx}(k_y, \omega) \end{aligned} \quad (7.91)$$

où $K_{xx}(k_y, \omega)$ peut être considérée comme la fonction de permittivité pour ces ondes transverses. La relation de dispersion a donc la forme habituelle pour les ondes électromagnétiques transverses, montrant la modification de l'indice de réfraction (ck_y/ω) par la permittivité du plasma. Il faut aussi noter que la permittivité contient deux termes d'origines physiques différentes : le premier, égal à l'unité, est dû au courant de déplacement ; le second, $\chi_{xx}(k_y, \omega)$, est dû aux courants dans le plasma.

b) Solutions complètes avec ω complexe fonction de k_y réel

Pour trouver les solutions de l'équation de dispersion (7.90) de la forme ω complexe fonction de k_y réel, il est commode de poser :

$$\beta_0 \equiv v_0/c, \quad (k_y c/\omega_p) = K, \quad (\omega/\omega_p) \equiv \Omega$$

et de négliger la différence entre ω_p^2 et ω_{pe}^2 . (7.90) devient alors :

$$\Omega^4 - (K^2 + 1)\Omega^2 - \beta_0^2 K^2 = 0 \quad (7.92)$$

Il y a donc des solutions Ω imaginaires conjuguées pour toute valeur réelle, non nulle de K , et par conséquent une instabilité absolue, la même instabilité de Weibel (7.87) que nous avons trouvée ci-dessus pour les basses fréquences. La courbe de dispersion complète $\Omega(K_r)$ est représentée sur la figure 7.11(b). Le taux de croissance maximum est $\Omega_i = \beta_0$, qui est

donc bien plus petit (par un facteur de l'ordre de $\beta_0 \ll 1$) que celui des instabilités électrostatiques étudiées dans la section 7.4. Les instabilités électromagnétiques ne sont donc importantes que s'il n'y a pas d'instabilités électrostatiques, ou si celles-ci sont saturées.

Pour avoir une vue plus précise des solutions de l'équation de dispersion complète (7.90), il est aussi commode de la résoudre de façon approchée dans les deux domaines des hautes et des basses fréquences. Pour $|\omega| \gg \omega_p$, $\chi_{xx} \rightarrow 0$ et l'on obtient comme on s'y attendait la relation de dispersion $\omega \approx ck_y$ des ondes électromagnétiques dans le vide. Au contraire, pour $|\omega| \ll \omega_p$ on peut négliger dans (7.90) le terme 1 qui vient du courant de déplacement et on retrouve (7.87).

c) Mécanisme de contre-réaction [305]

Analysons maintenant l'origine physique de l'instabilité et son lien crucial avec la force de Lorentz du premier ordre $q(\vec{v}_0 \times \vec{B}_1)$. Considérons pour cela les deux faisceaux en équilibre s'écoulant en sens inverse et supposons qu'il y existe comme indiqué sur la figure 7.12 une perturbation magnétique \vec{B}_1 (due par exemple au bruit de fond).

La force $-e(\vec{v}_0 \times \vec{B}_1)$ infléchit comme on le voit les orbites non perturbées de chaque faisceau, et cela engendre une densité de courant perturbée (Γ_{x1} et $J_{x1} = -e\Gamma_{x1}$) déphasée (en y) avec la perturbation originale \vec{B}_1 , et dans une direction \vec{x} telle qu'elle engendre un champ \vec{B}_1 qui amplifie la perturbation originale. C'est ce mécanisme de contre-réaction positive qui conduit à l'instabilité.

d) Conservation de l'énergie de perturbation

Revenons à la description en basses fréquences donnée par (7.73) et (7.74). En multipliant (7.73) par $H_{z1} = B_{z1}/\mu_0$, (7.74) par $(-E_{x1})$, et en ajoutant les résultats on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0}{2} H_{z1}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (-E_{x1} H_{z1}) + E_{x1} J_{x1} = 0 \quad (7.93)$$

qui est l'équation de Poynting pour les perturbations de basses fréquences. On y voit la densité d'énergie magnétique de perturbation $U_M \equiv (\mu_0 H_{z1}^2/2)$, le flux (dans la direction y perpendiculaire aux faisceaux) d'énergie électromagnétique de perturbation $(-E_{x1} H_{z1}) \equiv S_{emy}$. [Remarquons que négliger le courant de déplacement dans (7.74) revient à négliger dans (7.93) le taux de variation de la densité électrique d'énergie de perturbation $(\epsilon_0 E_{x1}^2/2)$]. Le terme $E_{x1} J_{x1}$ peut en utilisant (7.70)-(7.73) se

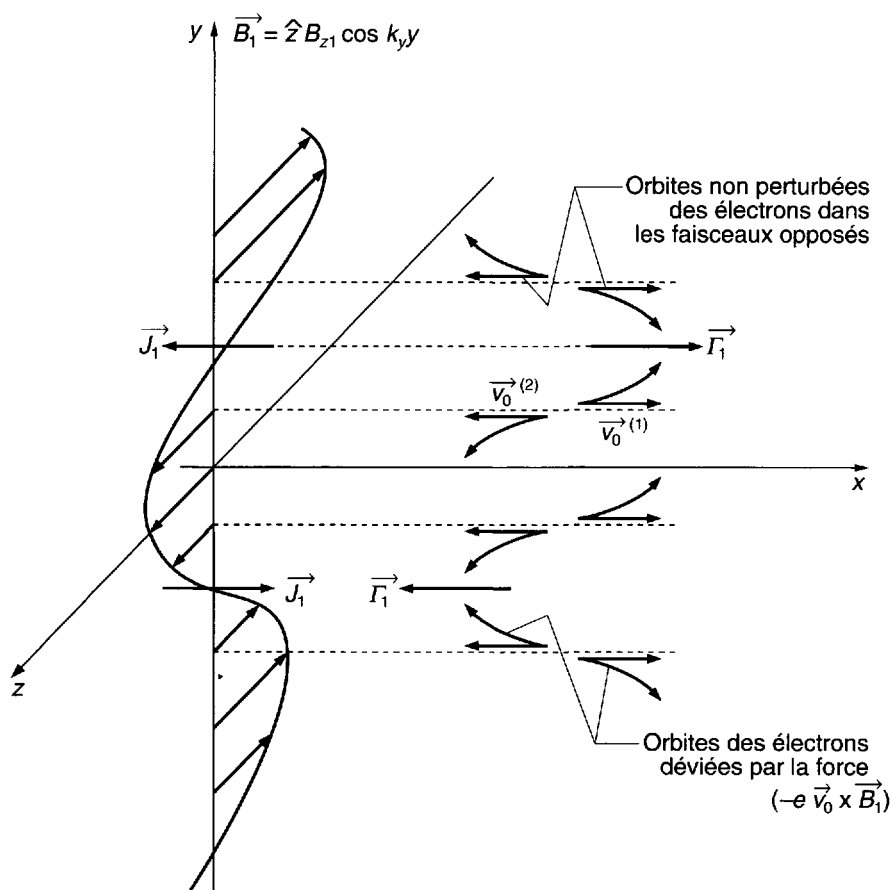


Figure 7.12 : Mécanisme de contre-réaction dans l'instabilité de Weibel [305].

Un champ magnétique de perturbation \vec{B}_1 agissant sur deux flux d'électrons opposés produit un courant électrique \vec{J}_1 qui renforce le champ \vec{B}_1 .

mettre sous la forme d'un terme de source (cf. problème P7-10). On trouve ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_M + U_K) + \frac{\partial}{\partial y}(S_{emy} + S_{Ky}) = 0 \quad (7.94)$$

avec :

$$U_K = \sum_{b=1}^2 \left[n_0^{(b)} \frac{m_e}{2} (v_1^{(b)})^2 + m_e v_0^{(b)} v_{x1}^{(b)} n_1^{(b)} \right] + n_0^{(i)} \frac{m_i}{2} (v_{x1}^{(i)})^2 \quad (7.95)$$

$$(v_1^{(b)})^2 \equiv (v_{x1}^b)^2 + (v_{y1}^b)^2 \quad (7.96)$$

et :

$$S_{Ky} = \sum_{b=1}^2 (m_e v_0^{(b)} v_{x1}^{(b)}) (n_o^{(b)} v_{y1}^{(b)}) \quad (7.97)$$

U_K et S_{Ky} peuvent donc être considérés comme la densité et le flux (dans la direction y perpendiculaire aux faisceaux) d'énergie cinétique de perturbation. Pour comprendre l'énergétique de perturbation dans l'instabilité de Weibel, considérons la moyenne spatiale de (7.94) pour des perturbations périodiques dans l'espace mais avec ω complexe (cf. section 6.6). On obtient ainsi :

$$2\omega_i [\langle U_M \rangle + \langle U_K \rangle] = 0 \quad (7.98)$$

où $\langle \rangle$ représente une moyenne spatiale. D'après (7.95) il est clair que seul le second terme peut être négatif. Pour qu'il y ait instabilité ($\omega_i > 0$) il faut :

$$\left\{ \sum_{b=1}^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} T_1^{(b)} (n_1^{(b)})^* \right] \right\}_{\omega_i(k_r)} < 0 \quad (7.99)$$

où l'on a posé $T_1^{(b)} \equiv m_e v_0^{(b)} v_{x1}^b$. Il est intéressant de noter que bien que l'instabilité de Weibel n'entraîne aucune perturbation de la densité de charge totale [$n_1^{(1)} + n_1^{(2)} = 0$, cf. (7.80)], les perturbations de densité dans chacun des deux faisceaux jouent un rôle crucial pour satisfaire (7.99) dans le mode instable (k_y réel, $\omega = i\omega_i$ avec $\omega_i > 0$). À partir de (7.78) et (7.80), on peut trouver les relations de phase qu'il y a dans le mode instable entre les perturbations de densité et de la partie $T_1^{(b)}$ de l'énergie cinétique dans chaque faisceau. Le résultat est représenté sur la figure 7.13.

On voit que, pour chacun des deux faisceaux, là où il y a plus d'électrons (que dans l'état non perturbé), leur énergie cinétique T_1 est plus petite que dans l'état non perturbé, et réciproquement. Le signe négatif de la moyenne spatiale de la densité d'énergie dans (7.99) en résulte puisque celle-ci est la différence des énergies moyennes dans l'état perturbé et dans l'état non perturbé.

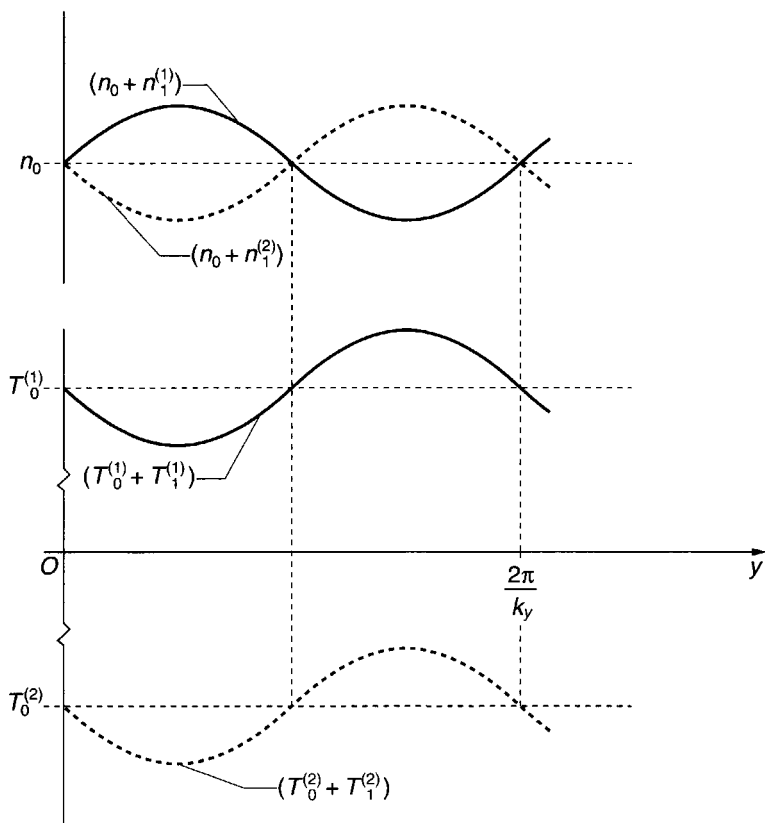


Figure 7.13 : Instabilité de Weibel à deux faisceaux opposés.

Relations de phase (spatiale) entre les perturbations $n_1^{(b)}$ de la densité et $T_1^{(b)}$ de l'énergie cinétique dans chacun des deux faisceaux.

e) Aspects non linéaires

L'évolution non linéaire de l'instabilité électromagnétique à deux faisceaux opposés a été elle aussi simulée sur ordinateur [91]. Quand l'instabilité se développe, le champ magnétique et les perturbations de vitesses croissent jusqu'à ce que la force ($ev_y B_z$) commence à faire baisser les vitesses moyennes ; les particules sont alors piégées dans des vortex dans la direction de \vec{k} ; ensuite, l'énergie du champ magnétique se sature et l'instabilité disparaît. Un état quasi statique est atteint, dans lequel la moitié environ de l'énergie cinétique initiale des faisceaux (selon Ox) est transférée à une énergie quasi thermique étalée le long de \vec{k} (c'est-à-dire selon Oy), et environ 1% de l'énergie initiale se retrouve dans l'énergie électromagnétique des champs. La fonction de distribution des vitesses

parallèles à la vitesse initiale (c'est-à-dire, selon Ox) s'est aussi considérablement étalée, mais la fonction de distribution globale reste fortement anisotrope.

7.5.4 Modèle relativiste

Cherchons maintenant à mieux comprendre l'instabilité électromagnétique de Weibel, en étudiant les ondes se propageant *transversalement à un seul faisceau*, et en analysant leur énergie de perturbation. Dans les ondes électrostatiques, nous avons défini des énergies de perturbation associées aux modes de propagation le long d'un (seul) faisceau, puis trouvé des ondes d'énergie positive ou négative. Les couplages entre elles ou avec un système extérieur nous ont conduit à une analyse des instabilités en termes d'énergies de perturbation. Nous allons maintenant transposer cette démarche aux ondes électromagnétiques en étudiant d'abord les ondes se propageant au travers d'un seul faisceau et en identifiant l'énergie de perturbation associée.

Les ondes électromagnétiques se propageant transversalement à un faisceau contiennent deux champs orthogonaux entre eux et leur analyse est par suite plus complexe que celle des ondes électrostatiques se propageant le long d'un faisceau. De plus, comme les modes ont des champs électriques ayant des composantes parallèle et perpendiculaire au faisceau, une description correcte doit partir des équations dynamiques relativistes du faisceau et du système complet des équations de Maxwell. C'est peut-être l'exemple le plus simple d'une situation où l'utilisation d'équations dynamiques non relativistes combinées avec les équations de Maxwell ne conduirait pas à des résultats corrects. Le formalisme que nous utiliserons est tiré principalement de [57].

a) Dynamique relativiste linéarisée

Partant des équations non linéaires (7.47) et (7.48) (pour alléger les notations, nous omettons ici les indices s), et compte tenu de (7.56), il est commode d'introduire les composantes de la perturbation de vitesse respectivement parallèle et perpendiculaire à \vec{v}_0 , comme indiqué sur la figure 7.14.

En linéarisant le vecteur quantité de mouvement, on trouve (cf. problème P7-11) :

$$\vec{p}_1 = m_\ell \vec{v}_{1\ell} + m_t \vec{v}_{1t} \quad (7.100)$$

avec :

$$m_\ell = \gamma_0^3 m_0, \quad m_t = \gamma_0 m_0 \quad (7.101)$$

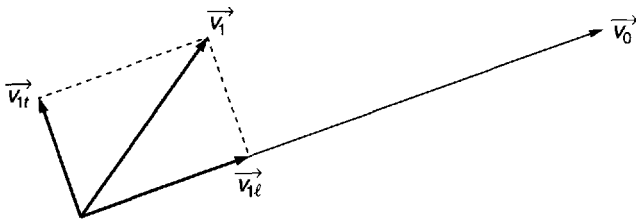


Figure 7.14 : Dynamique relativiste linéarisée d'un faisceau.

Composantes de la perturbation de vitesse \vec{v}_1 (\vec{v}_{1l}) parallèle et (\vec{v}_{1r}) perpendiculaire au vecteur vitesse non perturbé \vec{v}_0 .

$$\gamma_0 = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (7.102)$$

m_ℓ est ce qu'on appelle la *masse longitudinale* et m_t est de même la *masse transverse*. Il est clair que les équations dynamiques relativistes parallèle et perpendiculaire à \vec{v}_0 font apparaître des masses différentes. Et les équations dynamiques linéarisées s'écrivent :

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Gamma}_1 = 0; \quad \vec{\Gamma}_1 = n_0 \vec{v}_1 + n_1 \vec{v}_0 \quad (7.103)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla\right) \vec{p}_1 = q(\vec{E}_1 + \vec{v}_0 \times \vec{B}_1) \quad (7.104)$$

où l'on a supposé une vitesse constante \vec{v}_0 dans l'état non perturbé. Ces équations (écrites pour chaque espèce de particules dans le plasma) avec (7.64), (7.65) et les équations de Maxwell (7.66)-(7.69), sont évidemment générales et peuvent être résolues plus ou moins facilement.

b) Conservation de l'énergie de perturbation

Pour identifier les densités d'énergie de perturbation des modes il faut établir une équation de conservation de l'énergie de perturbation à partir des équations de la dynamique des perturbations. Pour cela, il est commode de récrire les équations dynamiques sous une nouvelle forme. Sur les équations non linéaires (7.48), (7.56) et (7.57), on remarque que l'énergie cinétique d'une particule $T = (\gamma - 1)m_0c^2$ (en omettant à nouveau les indices s) est une fonction de sa quantité de mouvement \vec{p} , c'est-à-dire que $T = T(\vec{p})$, de sorte que :

$$\delta T = \vec{v} \cdot \delta \vec{p}$$

et :

$$\nabla T = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{p} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{p})$$

En introduisant donc le *moment canonique* :

$$\vec{P} = \vec{p} + q \vec{A} \quad (7.105)$$

où \vec{A} est le potentiel vecteur, soit : $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, (7.48) peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \nabla T = q \vec{E} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{P}) \quad (7.106)$$

C'est la forme pratique de l'équation de la quantité de mouvement que nous utilisons. Après linéarisation, elle devient :

$$\frac{\partial \vec{p}_1}{\partial t} + \nabla T_1 = q \vec{E}_1 + [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{P})]_1 \quad (7.107)$$

avec :

$$T_1 = \vec{v}_0 \cdot \vec{p}_1 = m_e \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 \quad (7.108)$$

et :

$$[\vec{v} \times (\nabla \times \vec{P})]_1 \equiv \vec{v}_0 \times (\nabla \times \vec{p}_1) + \vec{v}_1 \times (\nabla \times \vec{P}_0) \quad (7.109)$$

Les équations (7.103) et (7.107), écrites pour chaque espèce, sont les versions relativistes des équations de perturbations ; on peut en déduire une équation de conservation de l'énergie de perturbation. Pour cela on part des équations de Maxwell (7.66) et (7.67), et on en déduit le théorème de Poynting (pour les perturbations) de la manière habituelle (c'est-à-dire produits scalaires de (7.66) par $\vec{H}_1 \equiv \vec{B}_1/\mu_0$, de (7.67) par $-\vec{E}_1$, et addition des équations résultantes) ; ensuite on calcule le terme $\vec{E}_1 \cdot \vec{J}_1$ à partir de (7.107) et (7.62), en fonction des termes mécaniques, et cela, autant que possible sous la forme d'une équation de conservation ; on porte finalement cette expression de $\vec{E}_1 \cdot \vec{J}_1$ dans l'équation de Poynting des perturbations. On trouve ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_e + U_m + \sum_s U_{Ks}) + \nabla \cdot (\vec{s}_{em} + \sum_s \vec{s}_{Ks}) = \sum_s R_s \quad (7.110)$$

où

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 \quad \text{et} \quad U_m = \frac{\mu_0}{2} H_1^2 \quad (7.111)$$

sont les expressions classiques des densités d'énergie électrique et magnétique dans le vide, et où

$$\vec{s}_{em} = \vec{E}_1 \times \vec{H}_1 \quad (7.112)$$

est le vecteur de Poynting, c'est-à-dire le flux d'énergie électromagnétique dans le vide ; on a de plus :

$$U_{Ks} = \frac{n_{so}}{2} \vec{v}_{s1} \cdot \vec{p}_{s1} + n_{s1} T_{s1} \quad (7.113)$$

comme expression de la densité d'énergie cinétique de perturbation, tandis que

$$\vec{s}_{Ks} = T_{s1} \vec{\Gamma}_{s1} \quad (7.114)$$

est le flux d'énergie cinétique de perturbation ; finalement :

$$R_s = \vec{\Gamma}_{s1} \cdot [\vec{v}_s \times (\nabla \times \vec{P}_s)]_1 \quad (7.115)$$

est le terme de source qui fait apparaître dans (7.110) qu'avec les variables choisies, le système des perturbations n'est pas conservatif.

En fait, nous savons que nos équations de départ décrivent un système conservatif (pas de collisions et pas d'autre degré de liberté comme l'agitation thermique). D'ailleurs, puisque la forme d'une équation de conservation (instantanée et locale) n'est pas unique, on peut penser qu'un choix plus approprié des variables permettrait de mettre aussi le membre de droite de (7.110) sous une forme conservative. Cependant nous ne poursuivons pas cette discussion. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [362] où sont développées des formulations électrodynamiques plus générales et souvent utiles de la densité et du flux d'énergie moyenne.

Nous n'étudierons ici que des cas où le terme source de droite dans (7.110) est nul de façon exacte, ou en moyenne dans le temps et/ou l'espace ; dans le premier cas, la densité et le flux locaux et instantanés d'énergie de perturbation sont bien définis et uniques ; dans le second ce sont les densités et flux d'énergie de perturbation moyennés dans l'espace et/ou le temps, de sorte que l'on a :

$$\langle U \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} |E_1|^2 + \frac{\mu_0}{4} |H_1|^2 + \sum_s \left[\frac{n_0}{4} \text{Re}(\vec{v}_1 \cdot \vec{p}_1^*) + \text{Re}(\frac{1}{2} n_1 T_1^*) \right]_s \quad (7.116)$$

où les crochets $\langle \rangle$ désignent une moyenne dans l'espace ou le temps, et où l'on a exprimé ces moyennes avec les amplitudes complexes. D'après (7.116) on voit que seul le dernier terme peut être négatif, les trois premiers étant essentiellement positifs.

On remarque que dans le cas électrostatique non relativiste et à une dimension, pour lequel R_s est certainement nul, (7.110) se réduit au résultat (6.57) obtenu dans la section 6.3, et (7.116) devient la somme des équations (6.61) et (6.62), sommées sur toutes les espèces de particules.

c) Instabilité de Weibel relativiste

Les équations relativistes correctes ne sont que légèrement différentes de (7.70)-(7.72) : m_e dans (7.71) est remplacé par la masse longitudinale

$m_{el} = \gamma_0^3 m_e$, et m_e dans (7.72) par la masse transversale $m_{et} = \gamma_0 m_e$, comme le demande la linéarisation des équations de la quantité de mouvement relativiste [cf. (7.100)-(7.104)]. La masse électronique est modifiée de façon analogue dans (7.78)-(7.80), et on obtient finalement l'équation de dispersion :

$$\omega_t^4 - (K_t^2 + 1 - \beta_0^2) \omega_t^2 - \beta_0^2 K_t^2 = 0 \quad (7.117)$$

avec $K_t = (k_y c / \omega_{pt})$, $\omega_t = (\omega / \omega_{pt})$, $\beta_0 = (v_0 / c)$, et $\omega_{pt}^2 = \omega_{pe}^2 / \gamma_0$, à comparer à la relation de dispersion non relativiste (7.92). La résolution approchée de (7.117) pour $(|\omega_t| \ll 1)$ conduit à :

$$\omega^2 \approx - \frac{\omega_{pt}^2 \beta_0^2}{1 + (\omega_{pe}^2 / c^2 k_y^2)} = - \frac{\omega_{pe}^2 \beta_0^2 / \gamma_0}{1 + (\omega_{pe}^2 / \gamma_0^3 c^2 k_y^2)} \quad (7.118)$$

qui donne le taux de croissance relativiste correct de l'instabilité de Weibel.

Ainsi, contrairement au résultat non relativiste (7.87), on trouve que pour les grandes longueurs d'onde ($k_y \rightarrow 0$) l'instabilité croît plus vite ($\omega_i \approx \beta_0 \gamma_0 c k_y$), tandis qu'aux courtes longueurs d'onde ($k_y \rightarrow \infty$), le taux de croissance tend vers une constante plus petite (à densité donnée) ($\omega_i \approx (\beta_0 / \gamma_0^{1/2}) \omega_{pe}$). Évidemment, comme nous l'avons déjà remarqué à propos de (7.87), l'instabilité est profondément modifiée (diminuée) par les effets d'agitation thermique dans ce domaine des courtes longueurs d'onde (cf. chapitre 11).

Passant maintenant à l'énergétique de perturbation de cette instabilité, on peut tout d'abord montrer (cf. problème P7-12) que la moyenne spatiale de (7.110) est nulle : $\langle \sum_s R_s \rangle = 0$. La densité moyenne d'énergie de perturbation est donc donnée par (7.116). La partie de $\langle U_p \rangle$ qui est négative est clairement le dernier terme de (7.116) lié aux deux faisceaux d'électrons opposés. On trouve comme condition d'instabilité la relation (7.99), T_1 prenant sa forme relativiste (7.108). Les résultats essentiels de ce calcul sont représentés sur la figure 7.13. On voit que les effets relativistes ne sont pas importants.

d) Ondes se propageant transversalement à un faisceau d'électrons

Considérons un faisceau d'électrons infiniment étendu de densité n_0 et de vitesse $\vec{v}_0 = \hat{x} v_0$, neutralisé par un fond continu d'ions immobiles (les modes que nous allons étudier étant de haute fréquence, il est justifié de négliger les petits mouvements des ions). Étudions de petites perturbations se propageant dans la direction y perpendiculaire au faisceau d'électrons, c'est-à-dire avec $\vec{k} = \hat{y} k_y$. Sans perte de généralité on peut supposer

que les ondes n'ont aucune dépendance en x et z . Pour une dépendance spatio-temporelle des grandeurs en $\exp(ik_y y - i\omega t)$, on trouve (cf. problème P7-13) trois modes distincts. Ceux-ci sont caractérisés par les relations de dispersion et les polarisations représentées sur la figure 7.15, soit :

- Mode TEM

$$\omega = \pm(\omega_{pt}^2 + c^2 k_y^2)^{1/2} ; E_x = 0 = E_y \quad (7.119)$$

- Mode F

$$\omega = \pm(\omega_{pt}^2 + c^2 k_y^2)^{1/2} ; \frac{E_{y1}}{E_{x1}} = \frac{\pm\beta_0}{K_t(1 + K_t^2)^{1/2}} \quad (7.120)$$

- Mode S

$$\omega = \pm\omega_{pe} ; \frac{E_{y1}}{E_{x1}} = \mp \frac{\gamma_0}{\beta_0} K_t \quad (7.121)$$

où l'on a introduit les mêmes variables normalisées $(k_y c / \omega_{pt}) = K_t$ et $(v_0 / c) = \beta_0$ que dans (7.117).

On remarque que, bien que les relations de dispersion (7.119) et (7.120) soient identiques, elles représentent des modes très différents : le premier est un mode transverse électromagnétique pur, le second ne l'est pas. Par ailleurs le mode S n'est pas électrostatique bien que son équation de dispersion corresponde à une oscillation à la fréquence plasma longitudinale. Une analyse non relativiste ne donnerait pas pour ce mode un résultat correct (cf. problème P7-14).

Finalement, on peut remarquer que les résultats obtenus ci-dessus peuvent aussi l'être par un simple changement de repère. En se plaçant dans le repère se déplaçant à la vitesse \vec{v}_0 du faisceau, on doit trouver les modes classiques d'un plasma froid : deux modes transverses avec deux polarisations orthogonales et un mode longitudinal électrostatique. En revenant au repère du laboratoire au moyen d'une transformation relativiste correcte pour \vec{k} et ω et pour les champs \vec{E} et \vec{B} , on obtient les résultats (7.119), (7.120) et (7.121) (cf. problème P7-15).

Examinons finalement les énergies de perturbation associées à ces modes. On peut montrer immédiatement que (7.115) s'annule, $R = 0$, de sorte que (7.116) donne la densité d'énergie de perturbation moyenne pour les champs. En particulier, en calculant (7.116) pour chacun des trois modes (cf. problème P7-16), on trouve :

- Pour le mode TEM, puisque $n_1 = 0$ la densité d'énergie est positive et égale à :

$$\langle U \rangle_{k\text{ TEM}} = \frac{\epsilon_0}{2} |E_z|^2 \quad (7.122)$$

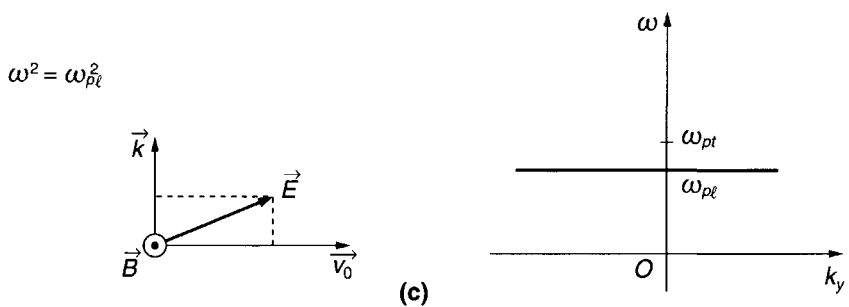
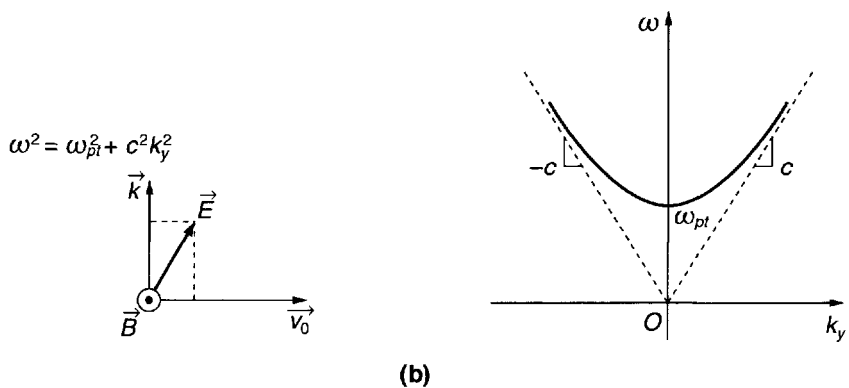
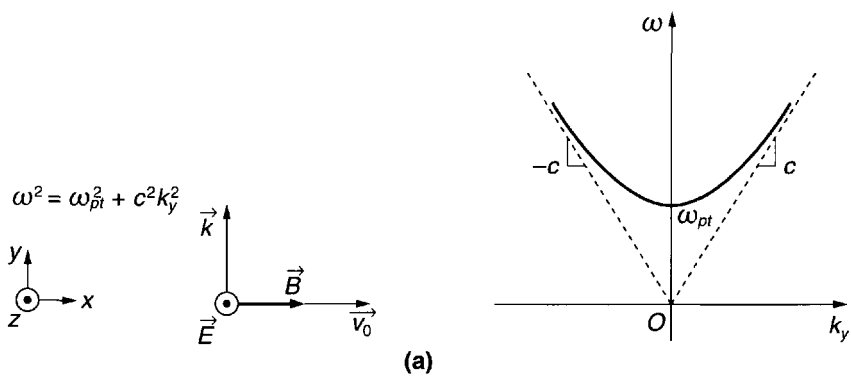


Figure 7.15 : Modes électromagnétiques à propagation transverse à un faisceau d'électrons.

Polarisations et équations de dispersion des modes :

(a) Mode TEM (7.119).

(b) Mode F (7.120).

(c) Mode S (7.121).

- Pour le mode F le dernier terme de (7.116) est positif et on a :

$$\langle U \rangle_{kF} = \frac{\epsilon_0}{2} |E_x|^2 \frac{K_t^2 + \beta_0^2}{K_t^2} \quad (7.123)$$

- Pour le mode S le dernier terme de (7.116) se trouve être négatif mais la densité moyenne totale d'énergie est :

$$\langle U \rangle_{kS} = \frac{\epsilon_0}{2} |E_x|^2 \frac{K_t^2 + \beta_0^2}{\beta_0^2} \quad (7.124)$$

et donc aussi positive.

Le fait que tous les modes soient à énergie positive peut aussi s'obtenir plus facilement par transformation de l'énergie moyenne du repère du faisceau à celui du laboratoire. En effet, en affectant à nouveau d'un prime les grandeurs dans le repère en mouvement à la vitesse \vec{v}_0 (repère du faisceau) on peut montrer [361] que l'on a en général :

$$\frac{\langle U \rangle_k}{\omega} \left[1 - \left(\frac{\vec{v}_g \cdot \vec{v}_0}{c v_0} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\langle U' \rangle_{k'}}{\omega'} \left[1 - \left(\frac{\vec{v}_g' \cdot \vec{v}_0}{c v_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (7.125)$$

où \vec{v}_g et \vec{v}_g' sont les vitesses de groupe dans les repères du laboratoire et du faisceau respectivement, et où les transformations du vecteur d'onde et de la fréquence sont données dans le problème P7-15. On remarque que dans le cas non relativiste, $c \rightarrow \infty$, (7.125) se réduit à la formule (6.66) qu'on a utilisée pour les ondes longitudinales non relativistes au paragraphe 6.3.4. Pour les ondes transversales au faisceau, puisque $\vec{k} \cdot \vec{v}_0 = 0$, on a $(\omega'/\omega) = \gamma_0$ qui est positif. Ainsi, puisqu'on a vu que l'énergie $\langle U' \rangle_{k'}$ du mode est positive dans le repère du faisceau (dans ce repère le système est un plasma froid), (7.125) montre que $\langle U \rangle_k$ est aussi positif.

Ainsi, *il n'y a pas d'onde d'énergie négative* dans la propagation transversale à un faisceau d'extension infinie. Cette situation est très différente du cas des ondes électrostatiques le long d'un faisceau (cf. section 6.3). On ne peut donc pas, comme on l'avait fait pour les ondes électrostatiques, décrire l'instabilité de Weibel dans deux faisceaux opposés par un couplage entre une onde d'énergie positive dans un faisceau et une onde d'énergie négative dans l'autre. Il nous faut, au lieu de cela, examiner le système dans son ensemble et rechercher une condition d'énergie de perturbation (6.111) conduisant à l'instabilité (cf. P7-12).

7.6 Problèmes

P7-1 Instabilité faisceau-plasma : domaine d'instabilité

- a) Partant de la relation de dispersion (7.12), montrer que $(dH/d\omega_r) = 0$ pour $\omega_r = [(k_r v_0)/(1 + \delta^{1/3})] \equiv \omega_0$ (cf. Fig. 7.2).

- b) Montrer que $H(\omega_0) = (1 + \delta^{1/3})^3 / (k_r v_0)^2$ et en déduire que l'instabilité apparaît dans les intervalles donnés par (7.14) et (7.15).

P7-2 *Instabilité faisceau-plasma avec gradient de densité

On considère un faisceau d'électrons uniforme, $\vec{v}_0 = \hat{x}v_0$ avec $v_0 = \text{Cte}$ et $n_{0b} = \text{Cte}$, s'écoulant dans un plasma d'électrons dont la densité varie avec x , $n_{0p}(x)$. On suppose la dynamique à une dimension et la neutralité de l'ensemble dans l'état non perturbé réalisée grâce à un fond continu d'ions positifs immobiles.

- a) En supposant une dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$ pour tous les champs du premier ordre, montrer que les équations dynamiques linéarisées du plasma d'électrons s'écrivent :

$$-i\omega n_{1p} + \frac{d}{dx}[n_{0p}(x)v_{1p}] = 0 \quad (7.126)$$

$$-i\omega v_{1p} = \frac{-e}{m} E_1 \quad (7.127)$$

et que pour le faisceau uniforme d'électrons les équations (7.3) et (7.4) deviennent :

$$L_x n_{1b} + n_{0b} \frac{dv_b}{dx} = 0 \quad (7.128)$$

$$L_x v_{1b} = \frac{-e}{m} E_1 \quad (7.129)$$

où, pour alléger l'écriture, on a introduit l'opérateur :

$$L_x \equiv (v_{0b} \frac{d}{dx} - i\omega) \quad (7.130)$$

- b) En utilisant l'équation de Poisson linéarisée, éliminant toutes les variables sauf la perturbation de vitesse du faisceau, et en posant pour celle-ci :

$$v_{1b}(x) = u_b(x) \exp(ix\omega/v_0)$$

montrer que l'équation différentielle déterminant $u_b(x)$ est :

$$\epsilon_p(x) \frac{d^2 u_b}{dx^2} + \frac{d\epsilon_p}{dx} \frac{du_b}{dx} + \left(\frac{\omega_b}{v_{0b}} \right)^2 u_b = 0 \quad (7.131)$$

avec $\epsilon_p(x) = 1 - \frac{\omega_p^2(x)}{\omega^2}$, où ω_b est la fréquence du faisceau d'électrons.

- c) Supposer que le plasma d'électrons non perturbé a un gradient linéaire, et désigner par $x = 0$ la position à laquelle sa fréquence plasma est égale à une fréquence réelle donnée ω , soit :

$$\omega_p^2(x) = \omega^2 + ax \quad (7.132)$$

où $a = (d/dx)\omega_p^2(x)$ est une mesure du gradient de densité. En utilisant cette relation, montrer que (7.131) devient une équation de Bessel et en écrire les solutions. Quelles conditions aux limites faut-il imposer?

- d) Déterminer la perturbation $E_1(x)$ du champ électrique, et tracer sa courbe en fonction de x ($x > 0$ et $x < 0$) pour $a > 0$ et $a < 0$. Quel est le cas instable? Expliquer physiquement pourquoi. Comparer le taux de croissance spatial asymptotique avec celui qu'on aurait pour un plasma uniforme.

P7-3 Instabilité de Buneman : domaine d'instabilité

En suivant les mêmes étapes qu'au problème P7-1, mais appliquées à (7.26), démontrer les résultats (7.28) et (7.29).

P7-4 Instabilité de Buneman : taux de croissance maximum

Une autre manière approchée (cf. [81]) d'établir le résultat (7.35) directement à partir de la relation de dispersion (7.25) est la suivante :

- a) Pour k réel, et supposant $|\omega| > \omega_{pi}$, montrer que (7.25) peut s'écrire de façon approchée sous la forme :

$$\omega - (\pm\omega_{pe} + k_r v_0) \approx \pm\omega_{pe} \frac{\omega_{pi}^2}{2\omega^2} \quad (7.133)$$

- b) Posant $\omega = |\omega|e^{i\theta}$, montrer que l'équation ci-dessus donne :

$$|\omega| \approx (\omega_{pe}\omega_{pi}^2 \cos \theta)^{1/3} \quad (7.134)$$

En déduire que ω_i est maximum pour $\theta = (\pi/3)$, ce qui donne (7.35).

P7-5 Instabilité à faisceaux parallèles : amplification spatiale

On considère la relation de dispersion (7.40) pour deux faisceaux d'électrons parallèles avec un fond continu neutralisant d'ions immobiles. On pose $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$ et $v_{01} = v + (\Delta v)$, $v_{02} = v - (\Delta v)$ où $v = (v_{01} + v_{02})/2$ est la moyenne des vitesses des deux faisceaux.

- a) Avec $k_x = (\omega_r/v) + \kappa$, et en supposant que $(\Delta v) \ll v$ et $|\kappa| \ll (\omega_r/v)$, montrer que la relation de dispersion peut s'écrire sous la forme approchée :

$$\frac{1}{(\gamma - s)^2} + \frac{1}{(\gamma + s)^2} = 1 \quad (7.135)$$

où $\gamma = (v/\omega_p)\kappa$ et $s = (\omega_r/\omega_p)(\Delta v)/v$. On remarque que (7.135) est de la même forme que (7.45) ou (7.37).

- b) À partir de (7.135) montrer que le taux de croissance spatiale maximum spatial (pour la direction $x > 0$ du mouvement des faisceaux) est $(k_i)_{\max} = -(\omega_p/2v)$ et que cela se produit pour $\omega_r = (\sqrt{3}/2)(v/\Delta v)\omega_p$. Tracer les courbes $k_r(\omega_r)$ et $k_i(\omega_r)$ pour les quatre racines de l'équation de dispersion.

P7-6 Faisceaux opposés avec mouvement des ions

Quand deux faisceaux d'électrons opposés circulent dans un fond continu d'ions immobiles, le mode instable est purement croissant ($\omega_i(k_r) > 0$ avec $\omega_r(k_r) = 0$ [cf. Fig. 7.8(b)]. Lorsqu'on tient compte de la dynamique des ions une autre branche instable apparaît avec $\omega(k_r)$ complexe et $\omega_r(k_r) \neq 0$. (cf. [93])

- a) Partant de (7.46), et utilisant les variables normalisées $\Omega = \omega/\omega_{pe}$ et $\kappa = k_x v_0/\omega_{pe}$, montrer que la relation de dispersion du sixième ordre $\Omega(\kappa_r)$ est :

$$\Omega^6 - (1 + 2\kappa_r^2 + \mu)\Omega^2 + \kappa_r^2(\kappa_r^2 - 1 + 2\mu)\Omega - \mu\kappa_r^4 = 0 \quad (7.136)$$

avec $\mu = (\omega_{pi}^2/\omega_{pe}^2) = (Z_i m_e/m_i)$.

- b) En négligeant μ par rapport aux termes d'ordre 1, ainsi que le terme en Ω^6 , montrer que (7.136) a des solutions instables pour $\kappa_r \approx 1$ données par :

$$\Omega \approx \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/4} \frac{(\pm 1 + i)}{\sqrt{2}} \quad (7.137)$$

comme on l'a vu dans la section 7.4.3.

P7-7 Dynamique relativiste électrostatique à une dimension

En supposant des champs purement électrostatiques, les équations relativistes à une dimension d'un plasma froid s'écrivent :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0 \quad (7.138)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right) p = qE \quad (7.139)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} - \rho = \rho_{\text{ext}} \quad (7.140)$$

avec $\Gamma = nv$, $p = \gamma m_0 v$ et $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Ces équations sont la généralisation relativiste de (6.1) - (6.3).

- a) En partant de l'équation de Maxwell-Ampère (6.4), établir l'équation de conservation à une dimension de l'énergie relativiste :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + nT \right) + \frac{\partial}{\partial x} (TT) = -EJ_{\text{ext}} \quad (7.141)$$

où $T = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2$ est l'énergie cinétique relativiste d'une particule. Noter que l'on a en général :

$$\frac{dT}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (7.142)$$

avec $\frac{d}{dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right)$. Montrer que dans la limite non relativiste, (7.141) se réduit à (6.8).

- b) Pour un faisceau d'électrons, neutralisé par un fond continu d'ions immobiles, montrer que la forme linéarisée de (7.139) est :

$$\gamma_0^3 m_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = qE_1 \quad (7.143)$$

où $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$, et m_0 est la masse au repos. C'est la généralisation relativiste de (6.15) ; $\gamma_0^3 m_0 \equiv m_\ell$ est parfois appelée la "masse longitudinale", car c'est elle qu'on s'attend à voir dans la dynamique relativiste à une dimension dans la direction de \vec{v}_0 . Comme la linéarisation de (7.138) et (7.140) conduit respectivement à (6.14) et (6.17) sans aucun changement, on voit que tous les résultats obtenus pour la dynamique électrostatique, à une dimension de perturbation, des faisceaux d'électrons, peuvent s'appliquer aux faisceaux relativistes (c'est-à-dire tels que $v_0 \lesssim c$) en remplaçant simplement m par m_ℓ ; par exemple $\omega_p^2 = (q^2 n_0 / \epsilon_0 m)$ devient

$$\omega_{p\ell}^2 = (q^2 n_0 / \epsilon_0 \gamma_0^3 m_0)$$

qui dépend de (v_0/c) .

- c) Déterminer l'expression relativiste correcte de la conductance électronique [dans la limite des faibles charges d'espace, $(\omega_p/\omega) \ll 1$], et montrer que la figure 6.15 (cf. problème P6-12) est donc modifiée en remplaçant $G_0/2$ par $G_0/\gamma_0(\gamma_0 + 1)$.
- d) Déterminer la condition relativiste correcte de stabilité dans le problème de la diode de Pierce (cf. problème P6-10).

P7-8 Conservation relativiste de l'énergie dans un plasma froid

- a) Établir (7.57) en partant de la démonstration classique du théorème de Poynting à partir de (7.52) et (7.53).
- b) En utilisant (7.47), (7.48) et (7.51) établir la relation :

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \sum_s \left[\frac{\partial}{\partial t} (T_s n_s) + \nabla \cdot (T_s \vec{\Gamma}_s) \right] \quad (7.144)$$

Noter que l'on a, comme dans le problème P7-7 :

$$\frac{dT}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (7.145)$$

Enfin, utiliser cette relation dans l'équation de Poynting de la partie a) et obtenir ainsi (7.57).

P7-9 *Faisceaux opposés : champs

électromagnétiques transversaux avec $\vec{E}_1 \perp \vec{v}_0$

Contrairement au cas montré sur la figure 7.11(a), on considère l'autre polarisation possible d'une onde électromagnétique par rapport à \vec{v}_0 (cf. Fig. 7.16).

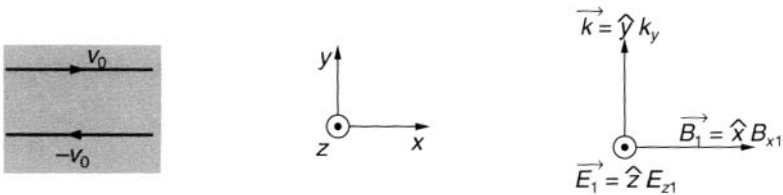


Figure 7.16 : Onde électromagnétique de polarisation stable dans un système à deux faisceaux opposés.

- a) En supposant que les champs sont indépendants de x ou z , montrer que (7.62) et (7.63) se réduisent à :

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = 0 \quad (7.146)$$

et

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} = \frac{-e}{m} E_{z1} \quad (7.147)$$

Ces champs électromagnétiques n'interagissent donc pas avec les vitesses de faisceau (comme on le voit à partir de leur polarisation par rapport à \vec{v}_0) et leur dynamique est donc la même que celle des champs dans un plasma froid stationnaire.

b) Montrer que l'on a donc :

$$J_{z1} = \sigma_{zz}(\omega) E_{z1} \quad (7.148)$$

avec :

$$\sigma_{zz}(\omega) = i\omega\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (7.149)$$

Établir la relation de dispersion de ces ondes électromagnétiques, soit :

$$D_{Tz} = 1 - \left(\frac{ck_y}{\omega} \right)^2 + \chi_{zz}(\omega) = 0 \quad (7.150)$$

avec $\chi_{zz}(\omega) = \sigma_{zz}(\omega)/(-i\omega\epsilon_0)$. Montrer qu'elles sont stables et tracer la courbe $\omega(k_{yr})$.

P7-10 Instabilité de Weibel non relativiste : conservation de l'énergie de perturbation

En partant de l'équation de Poynting appropriée (7.93), des équations (7.70)-(7.72) pour la dynamique des particules, et de l'équation de Faraday (7.73), établir les formules (7.94)-(7.97).

[Remarque. En essayant d'exprimer $E_{x1}J_{x1}$ sous la forme d'un terme de source conservatif à partir de (7.76) et (7.71), on ne fait intervenir que v_{x1} , n_1 , et leurs dérivées partielles par rapport au temps. On fait ainsi apparaître le terme $(\partial/\partial t)(m_e v_{x1}^2/2)$. Puis, en se servant de (7.70) et en transformant les autres termes de $E_x J_{x1}$, on obtient les termes $(\partial/\partial t)(m_e v_0 v_{x1} n_1)$ et $(\partial/\partial y)(s_{Ky})$. Il reste une expression qui, compte tenu de (7.71)-(7.73), fait aussi apparaître le terme $(\partial/\partial t)(m_e v_{y1}^2/2)$.]

P7-11 Linéarisation de la quantité de mouvement relativiste

La quantité de mouvement relativiste d'une particule est :

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} \quad (7.151)$$

où $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, et m_0 la masse au repos. Ainsi chaque composante de ce vecteur est fonction des trois composantes de la vitesse. Pour $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$, avec $|\vec{v}_1| \ll |\vec{v}_0|$, montrer que le moment du premier ordre de la i ème composante de \vec{p} est :

$$p_{i1} = \left(\frac{\partial p_i}{\partial v} \right)_{\vec{v}=\vec{v}_0} \cdot \vec{v}_1 \quad (7.152)$$

En déduire (7.100).

P7-12 Instabilité de Weibel relativiste : énergie de perturbation

a) En partant des équations relativistes (7.70)-(7.72), montrer que $\langle \sum_s R_s \rangle = 0$ pour les ondes se propageant transversalement à un système de deux faisceaux opposés. Identifier ainsi (7.116) à la moyenne spatiale de la densité d'énergie totale constituée de $\langle U_{em} \rangle + \langle U_K \rangle$.

- b) À partir de la relation de dispersion (7.117) des ondes instables, $\omega = i\omega_i$ avec $\omega_i > 0$, montrer que $\langle U_{em} \rangle_k > 0$ et $\langle U_K \rangle_k < 0$ et que

$$[\langle U_{em} \rangle_k + \langle U_K \rangle_k]_{\omega_i > 0} = 0 \quad (7.153)$$

comme l'impose (7.98) dans un système conservatif instable.

P7-13 *Ondes se propageant transversalement à un faisceau d'électrons

On considère un faisceau d'électrons d'extension infini, neutralisé en charge et en courant par un fond continu approprié d'ions. Dans l'état d'équilibre le faisceau d'électrons a une densité n_0 constante et une vitesse uniforme $\vec{v}_0 = \hat{x}v_0$.

- a) En négligeant le mouvement des ions, et en supposant des perturbations de la forme $\exp(ik_y y - i\omega t)$ indépendantes de x et z , montrer que les équations dynamiques relativistes linéarisées (7.103) et (7.104) deviennent :

$$n = n_0 \frac{k_y}{\omega} v_y \quad (7.154)$$

$$v_x = \frac{e}{m_\ell} \frac{E_x}{i\omega} \quad (7.155)$$

$$v_y = \frac{e}{m_t} \frac{1}{i\omega} (E_y - v_0 B_z) \quad (7.156)$$

$$v_z = \frac{e}{m_t} \frac{E_z}{i\omega} \quad (7.157)$$

- b) À partir des résultats de la partie a) et des équations de Maxwell, montrer que les solutions (modes) avec des champs E_{z1} et B_{x1} sont découplées de celles ayant des champs E_{x1} , E_{y1} et B_{z1} .
- c) Montrer que le premier type de mode avec des champs E_{z1} et B_{x1} (et donc seulement une composante de courant J_{z1}) obéissent à l'équation (7.119). Ce sont exactement les modes TEM du problème P7-9 avec ω_p changé en $(\omega_p/\gamma_0^{1/2}) \equiv \omega_{pt}$, c'est-à-dire m_e changé en $m_t \equiv \gamma_0 m_e$ la masse transverse relativiste (7.101) des électrons.
- d) Pour les autres modes, avec des champs E_{x1} , E_{y1} et B_{z1} , montrer que les densités de courant de perturbation J_{x1} et J_{y1} sont reliées aux composantes du champ électrique par la relation :

$$\begin{pmatrix} J_{x1} \\ J_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{pmatrix} \quad (7.158)$$

avec :

$$\frac{\sigma_{xx}}{i\omega\epsilon_0} = \left(\frac{\omega_{p\ell}}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\omega_{pt}}{\omega} \right)^2 \left(\frac{k_y v_0}{\omega} \right)^2 \quad (7.159)$$

$$\frac{\sigma_{xy}}{i\omega\epsilon_0} = \frac{\sigma_{yx}}{i\omega\epsilon_0} = \left(\frac{\omega_{pt}}{\omega} \right)^2 \frac{k_y v_0}{\omega} \quad (7.160)$$

$$\frac{\sigma_{yy}}{i\omega\epsilon_0} = \left(\frac{\omega_{pt}}{\omega} \right)^2 \quad (7.161)$$

En portant (7.158) dans les équations de Maxwell, trouver l'équation tensorielle de dispersion

$$\vec{D} \cdot \vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 + \chi_{xx} & \chi_{xy} \\ \chi_{yx} & 1 + \chi_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0 \quad (7.162)$$

où $\chi_{ij} = (\sigma_{ij} / -i\omega\epsilon_0)$ et les σ_{ij} sont donnés par (7.159)-(7.161). En déduire que pour les solutions non triviales, le déterminant du tenseur de dispersion \vec{D} donne la relation de dispersion

$$D_{xy} = (\Omega_t^2 - 1 - K_t^2)(\Omega_t^2 - 1 + \beta_0^2) = 0 \quad (7.163)$$

avec $\Omega_t = (\omega/\omega_{pt})$, $K_t = (k_y c/\omega_{pt})$ et $\beta_0 = (v_0/c)$. Enfin, à partir de (7.162) et (7.163), établir les propriétés des modes F et S données par (7.120) et (7.121).

P7-14 Ondes transverses à un faisceau d'électrons : analyse non relativiste

On considère seulement les modes avec E_x et E_y couplés comme dans P7-13 (d). En utilisant les équations non relativistes (7.62) et (7.63) pour la propagation transversale à un faisceau d'électrons, on trouve la relation de dispersion suivante pour ces ondes :

$$D_{xy} = [(\Omega^2 - 1) - K^2](\Omega^2 - 1) - k^2\beta_0^2 = 0 \quad (7.164)$$

où $\Omega = (\omega/\omega_p)$, $K = (ck_y/\omega_p)$, et $\beta_0 = (v_0/c)$. Tracer les courbes des solutions $\omega(K_r)$ de l'équation ci-dessus et noter qu'elle sont bien différentes des solutions relativistes correctes, (7.120) et (7.121), représentées sur la figure 7.15. Comparer les résultats de l'analyse non relativiste à ceux des formules (7.120) et (7.121) et expliquer les différences.

P7-15 Ondes transverses à un faisceau d'électrons par changement de repère

Il est montré dans la référence [361] que, si l'on affecte d'un symbole "prime" les quantités dans le repère mobile à la vitesse \vec{v}_0 , on a les formules générales de transformation :

$$\vec{k}' = \vec{k}_\perp + \gamma_0 \left(\vec{k}_\parallel - \frac{\omega \vec{v}_0}{c^2} \right) \quad (7.165)$$

$$\omega' = \gamma_0 (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_0) \quad (7.166)$$

avec $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$, les indices inférieures \parallel et \perp se référant aux directions par rapport à \vec{v}_0 . Dans le cas non relativiste $c \rightarrow \infty$ elles se réduisent aux formules plus simples de transformation galiléenne. Pour les modes électrostatiques unidimensionnels traités dans le chapitre 6, c'étaient les équations (6.37) et (6.38). En utilisant maintenant (7.165) et (7.166), on étudie cette manière d'établir les équations de dispersion relativistes correctes pour les ondes en propagation transverse à un faisceau d'électrons.

- Dans un repère mobile à la vitesse \vec{v}_0 le faisceau d'électrons est simplement un plasma froid. Rappeler les modes de propagation dans un tel plasma, leurs polarisations et leurs équations de dispersion.
- On considère maintenant ces ondes dans le repère du laboratoire où les électrons se déplacent à la vitesse constante \vec{v}_0 . En utilisant (7.165) et (7.166) et les résultats de la partie a), établir les relations de dispersion dans le système du laboratoire pour les ondes se propageant transversalement à \vec{v}_0 , et montrer qu'elles coïncident avec les formules (7.119)-(7.121).
- En utilisant la transformation relativiste pour le champ électrique :

$$\vec{E}' = \vec{E}_\parallel + \gamma (\vec{E}_\perp + \vec{v}_0 \times \vec{B}) \quad (7.167)$$

avec $\gamma = (1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$, retrouver les polarisations des modes données par (7.119)-(7.121).

P7-16 Ondes transverses à un faisceau : énergie de perturbation

- a) En se servant de l'équation de conservation (7.110) relative aux perturbations, montrer que pour toutes les ondes se propageant transversalement à \vec{v}_0 on a $R = 0$ et que (7.110) est donc bien une équation de conservation de l'énergie.
- b) À partir de (7.116) calculer les densités d'énergie des modes et montrer qu'elles sont données par (7.122)-(7.124).

Bibliographie

[RÉFÉRENCES DES CHAPITRES]

[Chapitre 1 : Gaz ionisés et plasmas]

- [1] I. Langmuir, *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.*, **14**, 627 (1928)
- [1b] M.N. Saha, *Phil. Mag.*, **40**, 472 (1920) et *Proc. Roy. Soc. London*, **A99**, 135 (1921)
- [1c] Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, **11**, 117 (1906)
- [1d] F.M. Penning, *Nature*, **118**, 301 (1926) et *Physica*, **6**, 241 (1926)
- [1e] L. Tonks, I. Langmuir, *Phys. Rev.*, **33**, 195 (1929)
- [1f] J.M. Dawson, *Phys. Rev.*, **113**, 389 (1959)
- [1g] H.M. Schneider, *Phys. Fluids*, **9**, 2298 (1966)

[Chapitre 2 : Trajectoires dans un champ magnétique]

- [2] T. G. Northrop, *The Adiabatic Motion of Charged Particles*, Interscience, New York (1963)
- [2b] R. Kulsrud, *Phys. Rev.*, **106**, 205 (1957)
- [3] A. I. Morozov, L. S. Soloviev, *Reviews of Plasma Physics*, A. Leontovich edit., **2**, 201 (1966)
- [4] E. Fermi, *Astrophys. J.*, **119**, 1 (1954)
- [5] A.L. Peratt, *Physics of the Plasma Universe*, Springer-Verlag, New York (1992)
- [6] M. Bloom, M. Rigglin, *Canadian J. Phys.*, **52**, 436 (1974)
- [7] P. Louvet, Review of Isotope separation plasma processes, *2nd Workshop on separation phenomena in liquids and gases*, Versailles (1989)

[Chapitre 3 : Collisions élastiques]

- [8] H. E. Wilhelm, *Phys. Rev.*, **187**, 382, (1969)
- [9] R. Marshak, *Ann. N. Y. Acad. Science*, **41**, 49 (1941)
- [10] L. S. Frost, A. V. Phelps, *Phys. Rev.*, **136**, 1538 (1964)
- [11] R. W. Crompton, *Aust. J. Phys.*, **22**, 715 (1969)
- [12] A. L. Gilardini, *Low energy Electron Collisions in Gases*, Wiley, New York (1973)
- [13] T.F. O'Malley, *Phys. Rev.*, **130**, 1020 (1963)

[Chapitre 4 : Collisions inélastiques]

- [14] J. W. Gallagher, *JILA Data Center*, Campus Box 440, Université du Colorado, Boulder, Colorado 80309, USA

- [15] R. A. Phaneuf, *ORNL Data Center*, Bldg. 6003, Oak Ridge National Laboratory, P. O. Box X, Oak Ridge, Tenn. 37830, USA
- [16] J.-L. Delcroix, *GAPHYOR Handbook*, **92-1**, GAPHYOR Data Center, Bat. 212, Université Paris-Sud 91405, Orsay, France (1992)
- [17] H. Tawara, *Research Information Center, Institute of Plasma Physics*, Nagoya Univ., Nagoya, 464 Japan
- [18] Y. Nakai, *Nuclear Data Center, Japan Atomic Energy Research Institute (JAERI)*, Tokai-Mura, Naka-Gun, Ibaraki-Ken 319-11, Japan
- [19] L.M. Biberman, V.S. Vorob'ev, I.T. Yakubov, *Kinetics of Nonequilibrium, Low-Temperature, Plasmas*, Consultants Bureau, Plenum, New York (1987)
- [20] H. Tawara, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **19**, 617 (1990)
- [21] A. Phelps, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **19**, 653 (1990)
- [22] T. W. Shyn, S. Y. Cho, *Phys. Rev. A*, **40**, 1315 (1989)
- [23] S. Szucs, M. Karemera, M. Terao, F. Brouillard, *J. Phys. B*, **17**, 1613 (1984)
- [24] Schiavone, *Chem. Phys. US*, **70**, 4468 (1979)
- [25] H.T. Hunter, M.I. Kirkpatrick, I. Alvarez, C. Cisneros, R.A. Phaneuf, *Atomic Data for Fusion, ORNL-6086, C. F. Barnett edit., vol. 1*, (1990)
- [26] J.P. Hansen, *Phys. Rev. A. US*, **44**, 6130, (1991)
- [27] T. Mukoyama, *Phys. Rev. A. US*, **40**, 6686, (1989)
- [28] Gravielle, *Phys. Rev. A. US*, **44**, 7299, (1991)
- [29] O Nagy, *Phys. Rev. A. US*, **43**, 5991, (1991)
- [30] H.Tawara, *Atomic data and nuclear data tables*, **32**, 235, (1985)
- [31] G.H. Smith, *Phys. Rev. US*, **44**, 5647, (1991)
- [32] J. Bitner, *Chem. Phys. Lett.*, **143**, 571 (1988)
- [33] K.A. Smith, *Int Conf. phys. électr. atom. Coll (Contr. pap.)*, 681 (1987)
- [34] T.J. Park, *J. Chem. Phys.*, **91**, 974 (1989)
- [35] S. Anderson, *J. Chem. Phys.*, **75**, 2153 (1981)
- [36] D. Madison, *Phys. Rev. A*, **43**, 304, (1991)
- [37] W.H. Soon, *Phys. Rev. A*, **43**, 723 (1991)
- [38] R.K. Jones, *Phys. Rev. A*, **31**, 2898 (1985)
- [39] E. Rille, *Phys. Rev. A*, **29**, 521, (1984)

[Chapitre 5 : Propriétés macroscopiques des gaz faiblement ionisés]

- [40] L. G. H. Huxley and R. W. Crompton, *The Diffusion and Drift of Electrons in Gases*, Wiley, New York (1974)
- [41] E. W. McDaniel, *Collision phenomena in ionized gases*, Wiley, New York (1964)
- [42] J. L. Pack, *Phys. Rev*, **127**, 2084 (1962)
- [43] E. W. McDaniel, E. A. Mason, *The Mobility and Diffusion of Ions in Gases*, Wiley, New York (1973)
- [44] H. W. Ellis, R. Y. Pai, E. W. McDaniel, E. A. Mason, L. A. Viehland, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **17**, 177 (1976)
- [45] H. W. Ellis, E. W. McDaniel, D. L. Albritton, L. A. Viehland, S. L. Lin, E. A. Mason, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **22**, 179 (1978)

- [46] H. W. Ellis, M. G. Thackston, E. W. McDaniel, E. A. Mason, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **31**, 113 (1984)
- [47] J. B. Hasted, *Physics of Atomic Collisions*, 2nd ed., American Elsevier, New York (1972)
- [48] H. J. Oskam, *Philips Research Reports*, **13**, 335 (1958)
- [49] L. Tonks, I. Langmuir, *Phys. Rev.*, **36**, 456 (1929)
- [50] S. A. Self, H. N. Ewald, *Physics of Fluids*, **9**, 2486 (1966)
- [51] H. B. Valentini, *Plasmaphysik*, **3**, 151 (1979)
- [52] M. Hoyaux, *Revue Générale de l'Électricité*, **60**, 279 et 317 (1951)
- [53] M. Hoyaux, *Arc Physics*, Springer-Verlag, New York (1968)
- [Chapitre 6 : Faisceaux d'électrons : ondes et instabilités électrostatiques]
- [54] W. C. Hahn, *Gen. Elec. Rev.* **42**, 258 (1939)
- [55] S. Ramo, *Phys. Rev.*, **56**, 276 (1939) et *Proc. IRE*, **27**, 757 (1939)
- [56] L. J. Chu. Il est admis que le concept de flux d'énergie négative (flux de puissance) dans les perturbations de petite amplitude d'un faisceau d'électrons a été présenté par L. J. Chu à la conférence annuelle de l'I.R.E. "Electron Tube Research" à Durham, NH, USA en 1951, mais n'a jamais été publié par lui. Ce fut le point de départ du développement de la théorie du flux d'énergie de perturbation pour un grand nombre de générateurs et amplificateurs hyper-fréquences qui utilisent des faisceaux d'électrons. Pour le concept d'énergie négative dans les ondes sur les faisceaux d'électrons, cf. aussi [64]
- [57] A. Bers, P. Penfield Jr., *I. R. E. Trans.*, **ED-9**, 12 (1962)
- [58] J. D. Lawson, *The Physics of Charged Particle Beams*, 2^e édition, chapitre 6 Clarendon Press, Oxford (1988)
- [59] C. C. Cutler, C. F. Quate, *Phys. Rev.*, **80**, 875 (1950)
- [60] A. Bers, "Space-Time Evolution of Plasma Instabilities : Absolute and Convective", dans *Handbook of Plasma Physics* (gen. eds. M. N. Rosenbluth and R. Z. Sagdeev), **Vol. 1**, *Basic Plasma Physics*, (vol. eds. A. A. Galeev and R. N. Sudan), Chapter 3.2, pp. 451-517, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1983)
- [61] C. K. Birdsall, G. R. Brewer, A. V. Haeff, *Proc. I. R. E.*, **41**, 865 (1953); C.K. Birdsall, J.R. Whinnery, *J. Appl. Phys.*, **24**, 314 (1953)
- [62] H. A. Haus, in *Proc. P. I. B. Symp. on Electronic Waveguides*, **Vol. VIII**, pp. 89-132, Polytechnic Press, Brooklyn, New York (1958)
- [63] W. H. Louisell, *Coupled Modes and Parametric Electronics*, Wiley, New York (1960)
- [64] P. A. Sturrock, *J. Appl. Physics*, **31**, 2052 (1960)
- [64b] A. Arsenjewja-Heil, O. Heil, *Z. Phys.*, **95**, 752 (1935).
- [64c] R. H. Varian, S. F. Varian, *J. Appl. Phys.*, **10**, 321 (1939)
- [65] J. E. Rowe, *Nonlinear Electron Wave Interaction Phenomena*, Academic Press, Boston (1965)
- [66] J. R. Cary, D. S. Lemmons, *J. Appl. Phys.*, **53**, 3303 (1982)
- [67] J. R. Pierce, *Appl. Phys.*, **15**, 721 (1944)
- [68] S. Kuhn, M. Hörhager, *J. Appl. Phys.*, **60**, 1952 (1986)
- [69] B. B. Godfrey, *Phys. Fluids*, **30**, 1553 (1987)
- [70] J. J. Miller, E. Rostas, *Helv. Phys. Acta*, **13**, 435 (1940)

- [71] J. R. Pierce, *Proc. I.R.E.*, **33**, 112 (1945)
- [72] J. R. Pierce, W. G. Sheperd, *Bell. Syst. Tech. Journal*, **26**, 460 (1947)
- [73] S. Humphries Jr., *Charged Particle Beams*, Wiley, New York (1990)
- [74] R. B. Miller, *Intense Charged Particle Beams*, Plenum Press (1982)
- [74b] V. L. Granatstein, I. Alexeff éditeurs, *High Power Microwave Sources*, Artech House, Boston (1987)

[Chapitre 7 : Instabilités de courant dans les plasmas]

- [75] D. Bohm, E. P. Gross, *Phys. Rev.*, **75**, 1851 (1949)
- [76] A. I. Akhiezer, Ya. B. Fainberg, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **69**, 555 (1949)
- [77] A. I. Akhiezer, Ya. B. Fainberg, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **21**, 1262 (1951)
- [78] J. A. Davis, A. Bers, in "Proc. Symp. on Turbulence of Fluids and Plasmas" (1968), *Microwave Research Institute Symposia Series*, Vol. **XVIII**, 87, Polytechnic Press of P. I. B. (distribué par Interscience-Wiley), Brooklyn, New York (1969)
- [79] J. R. Pierce, *Jour. Appl. Phys.*, **19**, 231 (1948)
- [80] G. I. Budker, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **107**, 807 (1956), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **1**, 218 (1957); *Sov. Phys. Dokl.*, 218 (1957)
- [81] O. Buneman, *Phys. Rev.*, **115**, 503 (1959).
- [82] O. Ishihara, A. Hirose, A. B. Langdon, *Phys. Fluids*, **24**, 452 (1981)
- [83] A. Hirose, O. Ishihara, A. B. Langdon, *Phys. Fluids*, **25**, 610 (1982)
- [84] A. V. Haeff, *Proc. I. R. E.*, **37**, 1 (1949)
- [85] A. V. Haeff, *Phys. Rev.*, **74**, 1532 (1948)
- [86] J. R. Pierce, W. B. Hebenstreit, *B. S. T. J.*, **28**, 33 (1949)
- [87] R. Q. Twiss, *Proc. Phys. Soc. (London)*, **B64**, 654 (1951)
- [88] A. Wendt, Memo No. UCC/ERL M85/45, *Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley*, Calif. 28 May 1985.
- [89] R. C. Davidson et al., *Phys. Rev. Lett.*, **24**, 579 (1970)
- [90] E. S. Weibel, *Phys. Rev. Lett.*, **2**, 83 (1959)
- [91] R. C. Davidson et al., *Phys. Fluids*, **15**, 317 (1972)
- [92] I. Langmuir, *Phys. Rev.*, **26**, 585 (1925) et *Proc. U.S. Nat. Acad. Sci.*, **14**, 627 (1928)
- [93] I. Alexeff, J. R. Roth, J. D. Birdwell, *Phys. Fluids*, **24**, 1348 (1981)

[Chapitre 8 : Équations cinétiques]

- [94] J. Yvon, *Les Corrélations et l'entropie*, Dunod, Paris (1966)
- [95] L. Boltzmann, *Leçons sur la théorie des gaz*, Gauthier-Villars, Paris (1902)
- [96] R. L. Liboff, N. Rostoker, *Kinetic Equations*, Gordon and Breach, New York (1971)
- [97] Ta-You Wu, *Kinetic Equations of Gases and Plasmas*, Addison-Wesley, Reading Mass. (1966)
- [98] R. L. Liboff, *Introduction to the Theory of Kinetic Equations*, Wiley, New York (1969)
- [99] Y. Rocard, *Thermodynamique*, Masson, Paris (1952)
- [100] J. Yvon, *La théorie statistique des fluides et l'équation d'état, Actualités scientifiques et industrielles*, **203**, Hermann, Paris (1935)
- [101] S. Harris. *An introduction to the theory of the Boltzmann equation*, Hold éditeur (1981)

- [102] Y. Pomeau, P. Résibois, *Physics Reports*, **19C-2**, 63 (1975)
- [103] Gunton, *Introduction to the theory of metastable and unstable states*, Springer Verlag, Berlin (1983)
- [104] J. P. Babuel-Peyrissac, *Équations Cinétiques des Fluides et des Plasmas*, Gordon and Breach, Paris (1974)
- [105] J. Yvon, *J. Phys.Rad.*, **19**, 733 (1958)

[Chapitre 9 : Hydrodynamique et magnétohydrodynamique]

- [106] O. Buneman, *Phys. of Fluids*, **4**, 669 (1961)
- [107] J.-L. Delcroix, J. F. Denisse, D. Quemada, *Nuclear Fusion, Suppl.*, **2**, 411 (1962)
- [108] J.A. Shercliff, *A Textbook of Magnetohydrodynamics*, Pergamon Press, Oxford (1965)
- [109] A. Schluter, Plasma in Magnetfeld, *Ann. Physik*, **6-10**, 422 (1952)
- [110] L. Spitzer, *Astrophys. J.*, **116**, 299 (1952)
- [111] L. Tonks, *Phys. Rev.*, **97**, 1443 (1955)

[Chapitre 10 : Théorie cinétique de Vlasov-Landau]

- [112] L. D. Landau, *Jour. Phys. USSR*, **10**, 25 (1946) ; reproduit dans *Collected Papers of L. D. Landau*, edited by D. ter Haar, Gordon and Breach, New York (1967)
- [113] J. Dawson, *Phys. Fluids*, **4**, 869 (1961)
- [114] L. Brillouin, *Congrès International d'Electricité, Paris 1932*, **2**, 739, Gauthier-Villars, Paris (1933)
- [115] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, chapitres IV et V, Academic Press, New York (1960)
- [116] J. D. Jackson, *Jour. Nucl. Energy, Part C*, **1**, 171 (1960)
- [117] B. D. Fried, S. D. Conte, *The Plasma Dispersion Function*, Academic Press, New York (1961)
- [118] J. H. Malmberg, C. B. Wharton, *Phys. Rev. Letters*, **17**, 175 (1966)
- [119] H. Derfler, T. C. Simonen, *Phys. Rev. Letters*, **17**, 172 (1966)
- [120] B. D. Fried, R. W. Gould, *Phys. Fluids*, **4**, 139 (1961)
- [121] A. Y. Wong, N. D'Angelo, R. W. Motley, *Phys. Rev. Letters*, **9**, 415 (1962)
- [122] R. W. Gould, *Phys. Rev. A*, **136**, 991 (1964)
- [123] G. M. Sessler, G. A. Pearson, *Phys. Rev.*, **162**, 108 (1967)
- [124] R. W. Motley, *Q-Machines*, Academic Press, New York (1975)
- [125] J. N. Hayes, *Phys. Fluids*, **4**, 1387 (1961).
- [126] A. A. Vlasov, *Zhurnal Eksp. i Teoret. Fiz.*, **8**, 291 (1938); et *Jour. Phys. (URSS)*, **9**, 25 (1945)
- [127] W. D. Jones, H. J. Doucet, and J. M. Buzzi, *An Introduction to the Linear Theories and Methods of Electrostatic Waves in Plasmas*, Plenum Press, New York (1985)
- [128] N. G. van Kampen, *Physica*, **21**, 949 (1955)
- [129] K. M. Case, *Ann. Physics*, **7**, 349 (1959)
- [130] R. J. Mason, *Jour. Math. Phys.*, **9** 868 (1968)
- [131] K. M. Case, *Phys. Fluids*, **21**, 249 (1978)
- [132] F. C. Shure, *Plasma Phys. (Jour. of Nucl. Energy, Part C)*, **6**, 1 (1964)

- [133] K. M. Case, *Phys. Fluids*, **8**, 96 (1965); J. D. Crawford et P. D. Hislop, *Ann. Phys.*, **189**, 265 (1989)
- [134] G. Bateman et M. D. Kruskal, *Phys. Fluids*, **15**, 277 (1972)
- [135] D. R. Cook, A. N. Kaufman, E. R. Tracy, et T. Flå, *Phys. Lett. A*, **175**, 326 (1993)
- [136] L. Bhatnagar, E. P. Gross, et M. Krook, *Phys. Rev.*, **94**, 511 (1954) ; E. P. Gross et M. Krook, *Phys. Rev.*, **102**, 593 (1956)
- [136b] J. M. Green, *Phys. Fluids*, **16**, 2022 (1973)
- [137] A. A. Vedenov, dans *Reviews of Plasma Physics*, Vol. 3, (édité par M. A. Lemtovich), Consultants Bureau, New York (1967), p. 248
- [138] A. Lenard et I. B. Bernstein, *Phys. Rev.*, **112**, 1456 (1958)
- [139] R. M. Kulsrud et C. S. Shen, *Phys. Fluids*, **9**, 177 (1966)
- [140] T.-Y. Huang, L. Chen, et A. Hasegawa, *Phys. Fluids*, **17**, 1744 (1974)
- [141] E. M. Epperlein, R. W. Short, et A. Simon, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 1765 (1992)
- [142] E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, (quatrième édition 1937), Cambridge Univ. Press, Cambridge, Grande-Bretagne (1988), Chapitre IV
- [143] T. M. O'Neil, *Phys. Fluids*, **8**, 2255 (1965)
- [144] V. E. Zakharov et V. I. Karpman, *Soviet Physics JETP*, **16**, 351 (1963)
- [145] W. E. Drummond et D. Pines, *Nuclear Fusion Suppl.*, **Pt. 3**, 1049 (1962) et *Ann. Phys.*, New York, **28**, 478 (1964) ; A. A. Vedenov, E. P. Velikhov et R. Z. Sagdeev, *Nuclear Fusion Suppl.*, **Pt. 2**, 465 (1962)
- [146] D. Pesme, G. Laval, R. Pellat, *J. de Phys.*, **8**, C13-213 (1977)
- [147] A. N. Kaufman, *J. Plasma Phys.*, **8**, 1 (1972)
- [148] I. B. Bernstein, F. Engelmann, *Phys. Fluids*, **9**, 937 (1966)
- [149] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, New York (1983) ; et G. M. Zaslavsky, *Chaos in Dynamic Systems*, Harwood Academic Publishers, New York (1985)
- [150] H. Poincaré, *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Paris (1892) et Dover, New York (1957)
- [151] G. M. Zaslavsky, N. N. Filonenko, *Sov. Phys. JETP*, **27**, 851 (1968) ; A. B. Rechester, T. H. Stix, *Phys. Rev. A*, **19**, 1656 (1979)
- [152] B. V. Chirikov, *Plasma Phys. (J.N.E. Pt. C)*, **1**, 253 (1960) ; *Phys. Reports*, **52**, 265 (1979)
- [153] B. V. Chirikov, USSR Academy of Sciences Report 267 (Traduit par A. T. Sanders, CERN Translation 71-40, Genève) Novosibirsk (1969) ; J. B. Taylor in Culham Lab. Prog. Report CLM-PR 12 (1969)
- [154] J. M. Greene, *J. Math. Phys.*, **20**, 1183 (1979)
- [155] A. B. Rechester, R. B. White, *Phys. Rev. Lett.*, **44**, 1586 (1980) ; A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth, R. B. White, *Phys. Rev. A*, **23**, 2664 (1981)
- [156] V. Fuchs, V. Krapchev, A. Ram, A. Bers, *Physica D*, **14**, 141 (1985) ; S. J. Tanaka, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **29**, 1067 (1987) ; A. K. Ram, A. Bers, K. Kupfer, *Phys. Lett. A*, **138**, 288 (1989)

- [157] N. J. Fisch, A. Bers, Plasma Research Report PRR 77/31, Research Laboratory of Electronics, M.I.T., Cambridge, Décembre 1977 ; aussi dans *Proc. Third Topical Conf. on RF Plasma Heating*, Calif. Inst. of Technology, Pasadena, California, Janvier 1978 ; N. J. Fisch, *Phys. Rev. Lett.*, **41**, 873 (1978), errata **42**, 410 (1979) ; *Rev. Mod. Phys.*, **59**, 175 (1987)
- [158] C. F. F. Karney, N. J. Fisch, *Phys. Fluids*, **22**, 1817 (1979) ; V. Fuchs, R. A. Cairns, M. M. Shoucri, K. Hizanidis, A. Bers, *Phys. Fluids*, **29**, 2937 (1986) ; P. T. Bonoli, R. C. Englade, *Phys. Fluids*, **29**, 2937 (1986) ; C. F. F. Karney, *Comp. Phys. Reps.*, **4**, 183 (1986)
- [159] T. Imai *et al.*, *Nucl. Fusion*, **28**, 1341 (1988)
- [160] R. Z. Sagdeev et A. A. Galeev, *Nonlinear Plasma Theory* (Révisé et édité par T. M. O'Neil et D. L. Book), W. A. Benjamin Inc., New York (1969)
- [161] R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory*, Academic Press, New York (1972)
- [162] D. J. Kaup, A. Reiman, A. Bers, *Rev. Mod. Phys.*, **51**, 915 (1979)
- [163] J. Weiland, H. Wilhelmson, *Coherent Non-Linear Interaction of Waves in Plasmas*, Pergamon Press, Oxford (1977)
- [164] W. L. Kruer, *The Physics of Laser Plasma Interactions*, Addison-Wesley Publ. Co. (1988) ; R. Pellat dans *Laser-Plasma Interaction, Les Houches 1980*, North-Holland Publ. Co. (1982) ; K. Mima et K. Nishikawa dans *Handbook of Plasma Physics*, vol. 2 (gen. eds. M. N. Rosenbluth et R. Z. Sagdeev) North Holland Phys. Publ., Amsterdam (1984), chapitre 6.5 ; H. A. Baldis, E. M. Campbell, W. L. Kruer in *Handbook of Plasma Physics*, vol. 3 (gen. eds. M. N. Rosenbluth et R. Z. Sagdeev) North Holland Phys. Publ., Amsterdam (1991), chapitre 9
- [165] B. Coppi, M. N. Rosenbluth, R. N. Sudan, *Ann. Phys.*, New York, **55**, 207 (1969)
- [166] A. Bers, D. J. Kaup, A. H. Reiman, *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 182 (1976)
- [167] S. Y. Vyshkind, M. I. Rabinovich, *Sov. Phys. JETP*, **44**, 292 (1976) ; J. Wersinger, J. Finn, E. Ott, *Phys. Fluids*, **23**, 1142 (1980) ; C. Meunier, M. Bussac, G. Laval, *Physica D*, **4**, 236 (1982)
- [168] C. C. Chow, A. Bers, A. K. Ram, *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 3379 (1992)
- [169] M. Camac, A. Kantrowitz, M. M. Litvak, R. Patrick, H. E. Petschek, *Nucl. Fusion Suppl.*, **2**, 423 (1962)
- [170] R. C. Davidson, A. N. Kaufman, *J. Plasma Phys.*, **3**, 97 (1969)
- [171] E. Ott, C. T. Dum, *Phys. Fluids*, **14**, 959 (1971)
- [172] B. B. Kadomtsev, *Plasma Turbulence*, Academic Press, Londres (1965) ; M. N. Rosenbluth, B. Coppi, R. N. Sudan, *Ann. Phys.*, New York, **55**, 248 (1969)
- [173] A. Hasegawa, *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects*, Springer-Verlag, New York (1975)
- [174] R. Z. Sagdeev, *Reviews of Plasma Physics*, édité par M. A. Leontóvich, Consultants Bureau, New York (1966)
- [175] H. Washimi, T. Taniuti, *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 996 (1966)
- [176] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1095 (1967)

- [177] V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP*, **35**, 908 (1972) et dans *Handbook of Plasma Physics*, vol. 2 (gen. eds. M. N. Rosenbluth et R. Z. Sagdeev) North Holland Phys. Publ., Amsterdam (1984), chapitre 5.3 ; S. G. Thornhill, D. ter Haar, *Phys. Reports*, **43**, 43 (1978)
- [178] D. R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons, New York (1983)
- [179] K. Nishikawa, *J. Phys. Soc. Japan*, **24**, 916 et 1152 (1968)
- [180] R. W. Gould, T. M. O'Neil, J. H. Malmberg, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 219 (1967) ; T. M. O'Neil, R. W. Gould, *Phys. Fluids*, **11**, 134 (1968)
- [181] J. H. Malmberg, C. B. Wharton, R. W. Gould, T. M. O'Neil, *Phys. Rev. Lett.*, **20**, 95 (1968)
H. Ikezi, N. Takahashi, K. Nishikawa, *Phys. Fluids*, **12**, 853 (1969)
- [182] B. D. Fried, C. L. Hendrick, J. McCune, *Phys. Fluids*, **11**, 249 (1968)
- [183] P. C. de Jager, F. W. Sluijter, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **29**, 677 (1987)
- [184] V. Heinz, *Phys. Lett. A*, **109**, 385 (1985)

[Chapitre 11 : Théorie cinétique des instabilités dans les plasmas non magnétisés]

- [185] I. B. Bernstein, *Phys. Rev.*, **109**, 10 (Appendice 1 : Théorème de Newcomb) (1958)
- [186] C. S. Gardner, *Phys. Fluids*, **6**, 839 (1963)
- [187] T. K. Fowler, *J. Math. Phys.*, **1**, 359, (1963)
- [188] T. K. Fowler, *Advances in Plasma Physics*, édité par A. Simon et W. B. Thompson, **1**, 201, Wiley-Interscience, New York (1968)
- [189] A. B. Mikhailovskii, *Theory of Plasma Instabilities*, **1**, Consultants Bureau-Plenum Publ. Corp., New York (1974)
- [190] R. C. Davidson in *Handbook of Plasma Physics*, Eds. M. N. Rosenbluth et R. Z. Sagdeev, *Volume 1 : Basic Plasma Physics*, édité par A. A. et R. N. Sudan, Chapitre 3.3, pp. 519-585, North-Holland Publ. Co. (1983)
- [191] O. Penrose, *Phys. Fluids*, **3**, 258 (1960)
- [192] H. Nyquist, *B. S. T. J.*, **11**, 126 (1932)
- [193] R. J. Briggs, in *Advances in Plasma Physics*, édité par A. Simon et W. B. Thompson, **4**, 43 John Wiley & Sons, New York (1971)
- [194] A. Jackson, *Phys. Fluids*, **3**, 786 (1960)
- [195] G. Francis, A. K. Ram, A. Bers, *Phys. Fluids*, **29**, 255 (1986)
- [196] R. J. Briggs, A. Bers, *Proceedings of the Fourth Symposium on the Engineering Aspects of MHD*, pp. 23-30, université de Californie, Berkeley, (avril 1963)
- [197] T. M. O'Neil, J. H. Malmberg, *Phys. Fluids*, **11**, 1754 (1968)
- [198] S. A. Self, M. M. Shoucri, F. U. Crawford, *Jour. Appl. Physics*, **42**, 704 (1971)
- [199] C. T. Dum, *Jour. Geophys. Res.*, **94**, 2429 (1989)
- [200] H. E. Singhaus, *Phys. Fluids*, **7**, 1534 (1964)
- [201] C. Roberson, K. U. Gentle, *Phys. Fluids*, **14**, 2462 (1971)
- [202] V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP*, **35**, 908 (1972)
- [203] P. Y. Cheung, A. Y. Uong, *Phys. Fluids*, **28**, 1538 (1985)

- [204] M. V. Goldman, *Rev. Mod. Physics*, **56**, 709 (1984)
- [205] T. E. Stringer, *Plasma Physics*, **6**, 267 (1964)
- [206] *Wave Instabilities in Space Plasmas*, édité par P. J. Palmadesso et K. Papadopoulos, Reidel, Hollande (1979)
- [207] T. Sato, H. Okuda, *Phys. Rev. Lett.*, **44**, 740 (1980)
- [208] A. Hasegawa, T. Sato, *Phys. Fluids*, **25**, 632 (1982)
- [209] R. C. Davidson, D. A. Hammer, I. Haber, C. E. Wagner, *Phys. Fluids*, **15**, 317 (1972)
- [210] R. Lee, M. Lampe, *Phys. Rev. Lett.*, **31**, 1390 (1973)
- [211] T. P. Hughes, A. T. Drobot, E. Ott, *Phys. Rev. Lett.*, **47**, 1529 (1981)

[Chapitre 12 : Théorie cinétique des gaz faiblement ionisés]

- [212] M. Bayet, J.-L. Delcroix, J. F. Denisse, *J. Phys. Rad.*, **15**, 795 (1954)
- [213] M. Bayet, J.-L. Delcroix, J. F. Denisse, *J. Phys. Rad.*, **16**, 174 (1955)
- [214] B. L. Moiseiwitsch, in *Atomic and Molecular Processes* D., R. Bates Ed., pp. 281-332, Academic Press, Londres (1962)
- [215] W. P. Allis, H. A. Haus, *J. Appl. Phys.*, **45**, 781 (1974)
- [216] W. P. Allis, *Note Technique ONERA*, **234**, Châtillon, France (1974)
- [217] E. Moreau, J. Salmon, *J. Phys. Rad.*, **21**, 217 (1960)
- [218] M. Bayet, J.-L. Delcroix, J. F. Denisse, *J. Phys. Rad.*, **17**, 923 (1956)
- [219] J. Arsac, J. Basquin, J.-L. Delcroix, J. F. Denisse, J. Salmon, *J. Phys. Rad.*, **17**, 1005 (1956)
- [220] W. P. Allis, *Handbuch der Physik*, **21**, Springer-Verlag, Berlin (1956)
- [221] D. Davydov, *Physik Zeits. Sowjetunion* **8**, 59 (1935)
- [222] H. Margenau, *Phys. Rev.*, **69**, 508 (1946)
- [223] R. Jancel, T. Kahan, *Nuovo Cimento*, **12**, 573 (1954)
- [224] L. C. Pitchford, S.V. O'Neil, J. R. Rumble, *Phys. Rev. A*, **23**, 294 (1981)
- [225] W. P. Allis, *Phys. Rev. A*, **26**, 1704 (1982)
- [226] M. A. Uman, *Phys. Rev. A*, **133**, 1266 (1964)
- [227] J. H. Jeans, *Kinetics Theory of Gases*, Londres (1925)

[Chapitre 13 : Théorie cinétique collisionnelle des plasmas]

- [228] S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 1 (1943)
- [229] S. Gasiorowicz, M. Neumann, R.J. Ridell, *Phys. Rev.*, **101**, 922 (1956)
- [230] W. McDonald, M. N. Rosenbluth, D. L. Judd, *Phys. Rev.*, **107**, 1 (1957)
- [231] W. McDonald, M. N. Rosenbluth, D. L. Judd, *Phys. Rev.*, **107**, 350 (1957)
- [232] R. S. Cohen, L. Spitzer, P. Routly, *Phys. Rev.*, **80**, 230 (1950)
- [233] L. Spitzer Jr, R. Härm, *Phys. Rev.*, **89**, 977 (1953)
- [234] A. Lenard, *Ann. Phys.*, **3**, 390, New York (1960)
- [235] A. N. Kaufman, in : *La théorie des gaz neutres et ionisés*, C. de Witt, J. F. Detoeuf Ed., Hermann, Paris et Wiley, NewYork (1960)
- [236] H. Dreicer, *Phys. Rev.*, **115**, 238 (1959)
- [237] H. Dreicer, *Phys. Rev.*, **117**, 329 (1960)
- [238] A.V. Gurevitch, *Soviet Phys. J.E.T.P.*, **12**, 904 (1961)
- [239] M.D. Kruskal, I.B. Bernstein *Phys. of Fluids*, **7**, 407 (1964)
- [240] L.A. Ferrare, K.C. Rogers *Phys. of Fluids*, **10**, 1319 (1967)

- [241] H. Knoepfel, D. A. Spong, *Nuclear Fusion*, **19**, 785 (1979)
- [242] S. I. Braginskii, in *Reviews of Plasma Physics*, Vol. 1, M.N. Leontovich Ed., Consultants Bureau (1965)
- [243] S. R. de Groot, *Thermodynamics of Irreversible Processes*, Interscience Publishers, New York, Londres (1951)

[Chapitre 14 : Plasmas et rayonnement]

- [244] G.A. Boutry, *Optique instrumentale*, Masson, Paris (1946)
- [245] B.E.A. Saleh, M.C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, Wiley, New York (1992)
- [246] T. Holstein, "Low frequency approximation to free-free transition probabilities", Scientific paper 65-1E2-Gases-P2, Westinghouse Research Labs, Pittsburgh, Penn. (1965)
- [247] H. R. Griem, "Radiation Processes in Plasmas", in *Handbook of Plasma Physics*, édité par M. N. Rosenbluth et R. Z. Sagdeev, Volume 1. *Basic Plasma Physics I*, édité par A. A. Galeev et R. N. Sudan, pp. 73-113, North-Holland, Amsterdam (1983)
- [248] J. Dawson, C. Oberman, *Physics of Fluids*, **5**, 517 (1962)
- [249] M. A. Heald, C. B. Wharton, *Plasma Diagnostics with Microwaves*, Wiley, New York (1965)
- [250] J. Oxenius, *Kinetic Theory of Particles and Photons*, Springer Series in Electrophysics, vol. 20, Springer-Verlag, Berlin (1986)
- [251] B. A. Trubnikov, *Reviews of Plasma Physics*, **7**, 345, Ed. M. A. Leontovich, Consultant Bureau, New York (1979)
- [252] D. H. Sampson, *Radiative Contributions to Energy and Momentum Transfer in a Gas*, Wiley, New York (1965)
- [253] J. Peyraud, *J. de Phys.*, **29**, 306 (1968)
- [254] Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Vol. 1, Wallace D. Hayes, Ronald F. Probstein Ed., Academic Press, New York (1966)
- [255] D. Mihalas, B.W. Mihalas, *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Oxford University Press, Oxford (1984)
- [256] G. Mainfray, C. Manus, *Rep. Prog. Phys.*, **54**, 1333 (1991)
- [257] D. Normand et al., *Optics Letters*, **15**, 1400 (1990)
- [258] S. Seznec et al., *Optics Communications*, **87**, 331 (1992)
- [259] C. Rouyer et al., *Optics Letters*, **18**, 214 (1993)
- [260] T. Katsouleas, W. B. Mori, J. M. Dawson, S. Wilks, *Conference on Femtosecond to Nanosecond High-Intensity Lasers and Applications, SPIE*, **1229**, 98 (1990)
- [261] H. S. Brandi, T. Lehner, C. Manus, G. Mainfray, *Phys. Rev. E*, **47**, 3780 (1993) ; H.S. Brandi et al., *Phys. Fluids B*, **5**, 35-39 (1993) ; G. Mainfray, C. Manus, in *Progress in Optics*, E. Wolf Ed., **32**, 313, North-Holland, Amsterdam (1993)
- [262] J. P. Watteau, et al. , *Phys. Fluids B*, **4**, 2217 (1992)
- [263] E.S. Sarachik, G.T. Schappert, *Phys. Rev. D*, **10**, 2738 (1970)
- [264] J. W. Shearer, J. Garrison, J. Wong, J. E. Swain, *Phys. Rev. A*, **8**, 1582 (1973)

[RÉFÉRENCES D'INTÉRÊT GÉNÉRAL]

[Mathématiques]

- [265] Whittaker, Watson, *Modern Analysis*, 4ème éd., Cambridge University Press, Cambridge (1958)
- [266] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York (1965)
- [267] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, édition revue et corrigée par A. Jeffrey, p. 1012, Academic Press, New York (1980)
- [268] *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, (édité par M. Abramowitz et I. Stegun) Dover Publ. Inc., New York, dixième édition corrigée (1972)
- [269] E. Jahnke, F. Emde, *Tables of Functions*, Dover, New York (1945)
- [270] V. N. Faddeyeva, N. M. Terentev, *Tables of Values of the Probability Integral for Complex Arguments*, GITTL, Moscou (1954)
- [271] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, Londres, deuxième édition corrigée, p. 277 (1952)
- [272] E. T. Copson, *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, Oxford University Press, Londres, première édition corrigée, p. 438 (1944)
- [273] B. W. Roos, "Analytic Functions and Distributions" in *Physics and Engineering*, John Wiley & Sons, New York (1969)
- [274] N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, P. Noordhoff, N. V. Groningen, Hollande (1953)
- [275] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, vol. I et II, Hermann, Paris (1951) ; I. M. Gelfand et G. E. Shilov, *Generalized Functions*, vol. I, Academic Press, New York (1964)
- [276] N. G. van Kampen et B. U. Felderhof, *Theoretical Methods in Plasma Physics*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1967)

[Mécanique et Physique statistique]

- [277] J. L. Synge, *The Relativistic Gas*, North Holland Publ. Co., Amsterdam (1957)
- [278] P. M. Morse, *Thermal Physics*, Benjamin, New York (1965)
- [279] L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, University of Texas Press, Austin (1980)
- [280] L. Landau, E. Lifshitz *Mécanique*, Editions MIR, Moscou (1966)
- [281] L. Landau, E. Lifshitz *Mécanique des Fluides*, Editions MIR, Moscou (1971)
- [282] L. Landau, E. Lifshitz, *Physique statistique*, Éditions MIR, Moscou (1967)
- [283] H. Goldstein *Classical mechanics*, édition révisée, Addison-Wesley, New York (1980)
- [284] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, Dunod, Paris (1960)
- [285] T. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw-Hill, New York (1965)
- [286] S. Chapman, T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, deuxième édition, Cambridge University Press, Cambridge (1952)

- [287] S. Chandrasekhar, *Principles of stellar dynamics*, University of Chicago Press, Chicago (1942)
- [288] E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique physique*, InterEditions, Paris (1991)

[Electromagnétisme]

- [289] H. A. Lorentz, *Theory of Electrons*, deuxième édition, Dover, New York (1952)
- [290] W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, deuxième édition, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1962)
- [291] G. Fournet, *Électromagnétisme*, Masson, Paris (1980)
- [292] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, deuxième édition, Wiley, New York (1975)

[Physique atomique et moléculaire]

- [293] H. G. Kuhn, *Atomic Spectra*, deuxième édition, Longman, Londres (1969)
- [294] G. Herzberg, *Spectra of Diatomic Molecules*, deuxième édition, Van Nostrand, New York (1961)
- [295] A. Sommerfeld, *Atombau und Spectrallinien*, Wellen Mechanik, vol. 2, Fredrick Ungar, New York (1951)
- [296] E. W. Mc Daniel, *Atomic Collisions, Electron and Photon Projectiles*, Wiley, New York (1989)

[Gaz partiellement ionisés]

- [297] J.-L. Delcroix, *Physique des Plasmas*, tome 1, Dunod, Paris (1963)
- [298] J.-L. Delcroix, *Plasma Physics*, Wiley, New York (1965)
- [299] A. R. Hochstim, *Kinetic Processes in Gases and Plasmas*, Academic Press, New York (1969)
- [300] S. C. Brown, *Basic Data of Plasma Physics*, deuxième édition, MIT Press (1967)
- [301] M. Bayet, *Physique Electronique des Gaz et des Solides*, Masson, Paris (1958)
- [302] J.-L. Delcroix, *Physique des Plasmas*, tome 2, Dunod, Paris (1966)
- [303] B. E. Cherrington, *Gaseous Electronics and Gas Lasers*, Pergamon, Oxford (1979)
- [304] R. J. Rosa, *Magnetohydrodynamic Energy Conversion*, New York (1968)

[Plasmas complètement ionisés]

- [305] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, deuxième édition, Plenum Press, New York (1984)
- [306] I. P. Shkarofsky, T. W. Johnston, M. P. Bachynski, *The Particle Kinetics of Plasmas*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1966)
- [307] D.C. Montgomery, D.A. Tidman, *Plasma Kinetic Theory*, McGraw-Hill, New York (1964)
- [308] R. Balescu, *Transport processes in plasmas, vol. 1 Classical transport theory*, North-Holland, Amsterdam (1988)
- [309] R. Balescu, *Transport processes in plasmas, vol. 2 Neoclassical transport*, North-Holland, Amsterdam (1988)

- [310] H. Alfvén, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford University Press, Oxford (1950)
- [311] D. J. Rose, M. Clark, *Plasmas and Controlled Fusion*, Wiley, New York (1961)
- [312] J.-L. Delcroix, *Introduction to the Theory of Ionized Gases*, Interscience, New York (1960)
- [313] L. Spitzer, *Physics of fully ionized gases*, deuxième édition, Wiley, New York (1962)
- [314] R. Balescu, *Statistical mechanics of charged particles*, Interscience-Wiley, Londres (1963)
- [315] G. Bekefi, *Radiation Processes in Plasmas*, Wiley, New York (1966)
- [316] W. B. Thompson, *An Introduction to Plasma Physics*, Pergamon Press, Oxford (1962)
- [317] J. G. Linhart, *Plasma Physics*, Euratom, Bruxelles (1969)
- [318] *Handbook of Plasma Physics*, M. N. Rosenbluth et R. Z. Sagdeev Ed., Volume 1 : *Basic Plasma Physics I*, édité par A. A. Galeev et R. N. Sudan, North-Holland, Amsterdam (1983)
- [319] G. Ecker, *Theory of fully Ionized Plasmas*, Academic Press, New York (1972)
- [320] D. L. Book, *NRL Plasma Formulary*, *NRL Publication 0084-4040*, Washington DC (1987)
- [321] Yu. L. Klimontovich, *Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma*, Pergamon Press, Oxford (1967)
- [322] S. Ichimaru, *Basic Principles of Plasma Physics—A Statistical Approach*, W. H. Benjamin, New York (1973)

[SUJETS SPÉCIALISÉS NON TRAITÉS DANS CE LIVRE]

[Plasmas denses à fortes corrélations]

- [323] M. Baus, J. P. Hansen, "Statistical Mechanics of simple Coulomb Systems", *Physics Reports*, **59**, 1 (1980)
- [324] C. Deutsch, Y. Furutani, M. M. Gombert, *Physics Reports*, **69**, 86 (1981)
- [325] S. Ichimaru, H. Iyetomi, S. Tanaka, *Physics Reports*, **149**, 91 (1987)
- [326] C. Deutsch, *Physica Scripta*, **T2**, 192 (1983)
- [327] Y. L. Klimontovich, *Kinetic Theory of Nonideal Gases and Nonideal Plasmas*, Pergamon Press, Oxford (1982)

[Fusion nucléaire par confinement magnétique]

- [328] M. Trocheris Ed., M. M. J. Adam et al., *La fusion thermonucléaire contrôlée par confinement magnétique*, Masson, Paris (1987)
- [329] J. G. Cordey, R. J. Goldston, R. R. Parker, *Physics Today*, n° 1, **45**, 22 (janvier 1992)
- [330] J. D. Callen, B. A. Carreras, R. D. Stambaugh, *Physics Today*, n° 1, **45**, 34 (janvier 1992)
- [331] T. J. Dolan, *Fusion Research*, 3 volumes, Pergamon Press, New York (1982)
- [332b] *World Survey of Activities in Controlled Nuclear Fusion* (1991), *Nuclear Fusion*, supplément spécial (1991), International Atomic Energy Agency, Vienne (1991)

[Fusion nucléaire par confinement inertiel]

- [332] D. Colombant, C. Deutsch, *La Recherche*, **15**, 157 (1984)
- [333] C. Deutsch, *Annales de physique*, **11**, 1 (1986)
- [334] R. C. Arnold, J. Meyer-Ter-Vehn, *Reports on Progress in Physics*, **50**, 559 (1987)
- [335] J. H. Nucholls, L. Wood, A. Thiessen, G. B. Zimmerman, *Nature*, **239**, 139 (1972)
- [336] J. D. Lindl, R. L. McCrory, M. Campbell, *Physics Today*, **45**, n° 9, 32 (septembre 1992)
- [337] W. J. Hogan, R. Bangerter, G. Kulcinski, *Physics Today*, **45**, n° 9, 42 (septembre 1992)
- [338] R. Dautray, J. P. Watteau, "Énergie thermonucléaire", in *Encyclopædia Universalis*, **22**, 580 (1990)
- [339] R. Dautray et J. P. Watteau Eds., *La fusion thermonucléaire par laser*, Commissariat à l'Énergie Atomique, Saclay (1994)

[Décharges dans les gaz]

- [340] S. C. Brown, *Introduction to Electrical Discharges in Gases*, Wiley, New York (1966)
- [341] B. E. Cherrington, *Gaseous Electronics and Gas Lasers*, Pergamon Press, Oxford (1979)
- [342] E. Badareu, I. Popescu, *Décharges électriques dans les gaz*, Dunod, Paris (1965)
- [343] S. Flugge, *Handbuch der Physik*, XXI, XXII, Springer, Berlin (1956)

[Décharges HF et microndes]

- [344] A. D. Macdonald, S. J. Tetenbaum, *Gaseous Electronics* N. Hirsh, J. J. Oskam Eds. Vol. 1 : *Electrical Discharges*, Chapitre 3, Academic Press, New York (1978)
- [345] A. B. Sa, C. M. Ferreira, S. Pasquiers, C. Boisse-Laporte, P. Leprince, J. Marec, *J. Appl. Phys.*, **70**, 1974, (1991)
- [346] J. Marec, E. Bloyet, M. Chaker, P. Leprince, P. Nghiem, *Electrical Breakdown and Discharges in Gases. NATO ASI Series B : Physics*, **89b**, 347, Plenum Press (1982)
- [347] S. Pasquiers, C. Boisse-Laporte, A. Granier, E. Bloyet, P. Leprince, J. Marec, *J. Appl. Phys.*, **65**, 1455 (1989)
- [348] M. Moisan, Z. Zakrzewski, *J. Phys. D Appl. Phys.*, **24**, 1025 (1991)
- [349] M. Moisan, A. Shivarova, A. W. Trivelpiece, *Plasma Physics*, **24**, 1331 (1982)
- [350] M. Moisan, Z. Zakrzewski, "Plasmas sustained by surface waves at Microwave and RF Frequencies", in *Radiative Processes in Discharge Plasmas, NATO ASI Series B : Physics*, **149**, Plenum Press (1982)

[Ondes dans les plasmas et effets non linéaires]

- [351] W. P. Allis, S. J. Buchsbaum, A. Bers, *Waves in anisotropic Plasmas*, MIT Press, Cambridge, Mass. (1963)
- [352] J. F. Denisse, J.-L. Delcroix, *Théorie des ondes dans les plasmas*, Dunod, Paris (1961)
- [353] J. F. Denisse, J.-L. Delcroix, *Plasma Waves*, Wiley (1963)
- [354] D. Quemada, *Ondes dans les plasmas*, Hermann, Paris (1968)

- [355] S. Pasquiers, *J. Appl. Phys.*, **69**, 7246 (1991)
- [356] R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, G. M. Zaslowski, *Nonlinear Physics from the pendulum to turbulence and chaos*, Harwood Academic Publishers (1990)
- [357] T. H. Stix, *Theory of Plasma Waves*, McGraw-Hill, New York (1962) et *Waves in Plasmas*, American Institute of Physics, New York (1992)
- [358] V. L. Ginzburg, *Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma*, North Holland, Amsterdam (1961)
- [359] A. W. Trivelpiece, *Slow-wave Propagation in Plasma Waveguides*, San Francisco Press, San Francisco (1967)
- [360] P. Vandenplas, *Electron Waves and Resonances in Bounded Plasmas*, Interscience-Wiley, New York (1968) ; J. M. Dawson, *Phys. Rev.*, **113**, 389 (1959) ; H. M. Schneider, *Phys. Fluids*, **9**, 2298 (1966)
- [361] A. Bers, Linear Waves and Instabilities, dans *Plasma Physics, Les Houches* (1972), C. de Witt and J. Peyraud, Eds., pp. 115-215, Gordon and Breach Science Publishers, Paris (1975)
- [362] G. Laval, R. Pellat, Non Linear Effects, dans *Plasma Physics, Les Houches* (1972), C. de Witt and J. Peyraud, Eds., pp. 217-291, Gordon and Breach, New York (1975)

[Gaines, sondes]

- [363] J. D. Swift, M. J. R. Schwar, *Electric Probes for Plasma Diagnostics*, Iliffe Books, Londres (1971)
- [364] P. M. Chung, L. Talbot, K. J. Jourgan, *Electric Probes in Stationary and Flowing Plasmas : Theory and Applications*, Springer Verlag, New York (1975)
- [365] K. U. Riemann, The Bohm criterion and sheath formation, *Appl. Phys.*, **24**, 493 (1991)

[Diagnostics des plasmas]

- [366] L. Marton, *Methods of Experimental Physics : Vol. 9A et 9B Plasma Physics*, Academic Press, New York, Londres (1971)
- [367] O. Auciello, D. L. Flamm, *Plasma Diagnostics, Vol. I*, Academic Press, Boston (1989)
- [368] R. H. Huddleston et S. L. Leonard Eds., *Plasma Diagnostic Techniques*, Academic Press, New York (1965)
- [369] M. A. Heald, C. B. Wharton, *Plasma Diagnostics with Microwaves*, Wiley, New York (1965)

Crédits des figures

Les figures 1.14, 1.15, 1.18, 1.19, 1.22, 1.23 et 1.24 sont tirées de l'article "Plasmas", par J.-L. Delcroix, *Encyclopædia Universalis*, 1989.

Les figures 1.26 et 1.27 sont tirées de l'article "Thermonucléaire (énergie)", par R. Dautray et J.-P. Watteau, *Encyclopædia Universalis*, 1989.

Les figures 1.29, 1.30, 1.31, 1.32, 1.33 et 1.34 sont tirées de l'article "Gazeux (état)", par J.-L. Delcroix, *Encyclopædia Universalis*, 1989.

La figure 2.10 est tirée de l'article "Magnétosphères", par M. Petit, *Encyclopædia Universalis*, 1989.

Les figures 9.1, 9.2, 9.3 et 9.4 sont tirées de l'article "Magnétohydrodynamique", par J.-L. Delcroix, *Encyclopædia Universalis*, 1989.

La figure 1.28 est tirée de *La Fusion thermonucléaire par laser*, par R. Dautray et J.-P. Watteau, Commissariat à l'Energie Atomique, 1994.

Les figures 14.8, 14.10, 14.12 et 14.13 sont tirées de *Radiation Processes in Plasmas*, par G. Bekefi, Wiley, 1966.

La figure 13.12 est tirée de *Introduction à la théorie des gaz ionisés*, par J.-L. Delcroix, Dunod, 1959.

La figure 1.17 est tirée de *Théorie des ondes dans les plasmas*, par J.-F. Denisse et J.-L. Delcroix, Dunod, 1961.

Les figures 1.2, 2.4, 2.9, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 3.2, 3.3, 3.5, 3.6, 3.8, 8.2, 9.5 et 9.6 sont tirées de *Physique des plasmas, Tome 1*, par J.-L. Delcroix, Dunod, 1963.

Les figures 1.1, 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 8.5, 8.7, 8.8, 12.1, 12.3, 12.4 et 12.5 sont tirées de *Physique des plasmas, Tome 2*, par J.-L. Delcroix, Dunod, 1966.

Nous remercions le Commissariat à l'Energie Atomique, ainsi que les éditions Dunod, *Encyclopædia Universalis* et Wiley, de nous avoir autorisés à reproduire ces figures.

Index

Cet index concerne les deux volumes de l'ouvrage. Les nombres en caractères romains se réfèrent aux pages du volume 1, ceux en italique à celles du volume 2.

Abréviations

e électron(s)
i ion(s)
o neutre(s)
AP approximation
B champ magnétique
EM électromagnétique
ES électrostatique
ET équilibre thermodynamique
ETL équilibre thermodynamique local
F faisceau
F onde rapide (fast)
L longitudinal(es)
 μ moment magnétique orbital
PF plasma froid
QMV quantité de mouvement
T température
T transverse(s)
TEM transverse électromagnétique

Atomes et molécules

Ar 172, 183, 205, 210, 212, 327
Br 186
C 186
Cl 182, 186
Cl₂ 185
CO 172, 185, 206, 210
CO₂ 172, 185, 206, 210
Cs 172, 183, 211
Cs₂ 185
F 186, 210
H 183, 186, 193
He 172, 182, 206, 210, 211, 327

He₂ 185
Hg 172, 183, 210
Hg₂ 185
HO 186
H₂ 172, 185, 186, 193, 206, 210, 297
H₂O 172, 185, 206
H₃N 172
H₄C 172
I 183, 186
I₂ 185
K 183, 210, 211
K₂ 185
Kr 172, 183, 206
Li 172, 183, 186, 210, 211
Li₂ 185
N 172, 183
Na 172, 183, 186, 211
Na₂ 185
Ne 172, 183, 206, 210, 297
NO 172, 210
N₂ 172, 185, 206, 210
N₂O 172
O 172, 183, 186
O₂ 172, 185, 186, 210
Xe 172, 206

A

Adiabaticité
 rapport d' 95-97
 spatiale 102
 temporelle 102, 138
Affinité électronique 186
Application standard 201
Attachement

évolution de n_e 238
mécanismes 192

B

Balistiques (modes) 115
Bases de données 199
BGK (Bhatnagar, Gross, Krook)
cf. Équation, Collisions
Bremsstrahlung
cf. Rayonnement
inverse (absorption) 460

C

Caractéristiques (Lagrange) 112, 224
Causalité (principe de) 126
Cavité 215
Centre guide 88
Champ de rayonnement
dans le vide 430
dans un plasma 437
états quantiques 432
Champ électrique critique
échauffement des e 313, 342, 382
Champ magnétique
convection (MHD) 68
diffusion (MHD) 68
Champs d'une particule
de convection 405
de rayonnement 405
non relativiste 406
Chaos
spatio-temporel 210
Chaotique (dynamique) 198
Chapman et Cowling (formule) 306,
339
Chauffage par turbulence 312
Chirikov (condition) 200
Chirikov-Taylor cf. Application
Choc acoustique ionique 212
Classification des plasmas
bremsstrahlung $e - i$ 419
densité, température 9
interactions radiatives 49
longueurs fondamentales 33
par rapport aux ondes 46
Coefficients de transport,
espace des vitesses
additivité 359, 390
déplacement 354, 388
diffusion 354, 390, 392

dispersion angulaire 355, 361
dispersion longitudinale 355
ions suprathermiques 366
ralentissement 355
des e 359
des i 360

Coefficients radiatifs

absorption 442, 449
émission 442, 449
extraction 441
injection 441

Collision(s)

cohérentes, incohérentes 154
coulombienne(s) 36, 150, 347
coupure de Debye 164, 348
déviation 158
divergence de σ_1 164
impact critique 150, 349
lointaines 165, 350
 $\ln \Lambda$ 39, 167, 367
proches 37, 166, 350
élastique(s) 141
déphasages 160
déviation, 37, 148, 291
effet Ramsauer 172
masse réduite 144
mouvement relatif 145
ondes partielles 160
paramètre d'impact 36, 146
sphères dures 152, 158, 165,
294
spiralante ($\varphi \approx 1/r^4$) 180
système du laboratoire 174
théorie quantique 159
inélastique(s) 181
catalogue 192
complexe intermédiaire 198
équations cinétiques 430
hydrogène 193, 194
ternaires 197
troisième corps 197
modèles en dynamique linéaire
BGK 182, 229
Fokker-Planck 183
Lenard-Bernstein 185, 229
relaxation 181
Vedenov 184
probabilité 156
simples, multiples 155
Colonne positive
lois de similitude 230

régime
 chute libre 234
 Schottky 233, 235, 245
 Commutation d'opérateurs 337
 Compression
 adiabatique 109, 95
 magnétique 109
 Compton (diffusion) 49, 211, 448, 460
 stimulée 465, 471
 Conductivité électrique 100, 301
 effet Hall 126, 301
 gaz faiblement ionisés 301
 magnétorésistance 126, 301
 plasmas 166, 379
 courant continu 40
 longitudinale de Vlasov 142
 Lorentz 379, 399
 plasmas froids 125
 plasmas intermédiaires 329
 Spitzer 40, 380, 383
 Conductivité thermique 57
 gaz faib. ionisés 324
 plasmas 386, 399
 Conservation cf. Équat. de transport
 Constantes du mouvement 122, 117
 Convergence développement en fonc-
 tions sphériques 299
 Coordonnées tournantes 128
 Corrélations
 définition 411
 équilibre (ET) 40
 hydrodynamique des 100
 plasmas 26, 41
 Couplage(s) d'ondes
 phases aléatoires 210, 230
 résonnant 206
 entre anisotropies 298, 336
 Courant électrique
 création cf. Current drive
 déplacement 102
 diamagnétisme 81
 magnétisation 91
 toroïdal cf. Current drive
 Current drive
 LHCD (tokamak) 59
 modèle de Fisch 205, 230
 Cyclotron (vecteur rotation) 86
 cf. aussi Résonance, Fréquences

D

Dawson (modèle multifaisceaux) 149

Décharge(s) dans les gaz 10, 65
 claquage laser 73
 étincelle 72
 hautes fréquences 73, 221
 luminescente 68
 régime d'arc 70
 régime de Townsend 68
 Degré d'ionisation 5
 Demi-flux radiatifs 434
 Densité
 d'énergie radiative 433
 dans espace des phases 3
 de QMV radiative 433
 des photons 433
 double 29, 10, 11
 et partie isotrope de f 332
 Dérive(s) 103
 courbure magnétique 115
 électrique 94, 115, 138
 gradient de B 116, 139
 gravitationnelle 97, 115
 vitesses macroscopiques 81
 Diamagnétisme 58, 91, 79
 et dérives 118, 139
 Diffusion
 ambipolaire 223
 deux espèces d'ions 243
 parfaite 226
 coefficient de 207, 321
 des électrons
 libre (gaz neutre) 207, 316
 plasmas intermédiaires 343
 longueurs de diffusion 218
 modes propres 217
 cf. aussi Modes propres
 quasi linéaire : cf. Quasi linéaire
 thermique
 gaz faiblement ionisés 322
 Diode de Pierce 343
 Dispersion (relation) 15, 41, 438
 cf. aussi Ondes, Instabilités
 Dispersion (tenseur de) 274
 Distance moyenne e - e 33, 349
 Doppler (effet) 191

E

Échauffement des électrons
 équilibre 310, 311, 341
 Échelles de temps
 dynamique d'un plasma 40
 théorie de la diffusion 317

- Échos de plasma
 - spatial 218
 - temporel 216
- Écoulement libre 114, 222, 223
- Effondrement 215
- Einstein
 - processus radiatifs 451
 - relation D/ν 209
- Elliptiques (points) 191
- Émission
 - spontanée 449
 - stimulée 449
- Émissivité spectrale des e 451
- Énergie
 - cinétique moyenne 332
 - d'interaction 29
 - d'onde 256, 259, 148, 151, 152, 154
 - de corrélation 30
 - de Fermi 35
 - de perturbation 257
 - de réaction 188
 - libre 297
 - potentielle d'un plasma 81
- Entropie 118
- Épaisseur de peau
 - collisionnelle 228
 - non collisionnelle 170
 - anormale 170
- Équation de Balescu 374, 377
- Équation de BGK 183
- Équation de Boltzmann 371, 376
 - caractère local 23
 - collisions inélastiques 29, 31, 38
 - démonstration 17
 - fonctions sphériques 335, 340
 - invariants 24, 42
 - irréversibilité 25
 - photons 446, 448, 457
 - sans second membre 15
- Équation de Fokker-Planck 183, 373, 378, 398, 399
 - modèle de Lenard-Bernstein 185
 - lois de conservation 228
 - modèle de Vedenov 185
- Équation de Landau 374, 377, 378, 395, 398
- Équation de Liouville
 - à une particule 15
 - plasmas 7, 34
 - variables \vec{r} et \vec{w} 7
 - variables conjuguées 4
- Équation de Vlasov 16, 374, 375
 - cf. aussi Vlasov
 - entropie 118
 - équilibres inhomogènes 223
 - incompressibilité du fluide 108
 - relativiste 120
 - réversibilité 108, 216
 - théorème de Liouville 108
- Équations cinétiques
 - gaz 1
 - locales ou non locales 371
 - mélanges 27
 - plasmas 370
- Équations de Maxwell 437
- Équations de Lagrange 122
- Équations de transport
 - chaleur 53
 - charge électrique 60
 - courant électrique 62
 - dissipation interne 295
 - dissipation petite 274
 - énergie 250, 274, 295, 323, 345, 121
 - cinétique relativiste 120-121
 - interne totale 53
 - non relativiste 52, 224, 232
 - perturbation 257, 329, 345, 233, 283
 - PF non relativiste 248
 - PF relativiste 322, 343, 344, 348
 - potentielle 52, 100
 - radiative 447
 - entropie 119
 - flux de QMV 53, 92
 - grandeur A 48
 - masse 60
 - particules 50
 - pression cinétique 53, 93
 - QMV 204, 51, 122
 - globale 61
 - non relativiste 224
 - radiative 447
 - relativiste 122
 - température cinétique 54
 - termes d'interaction 49, 59, 84
 - B.B.G.K.Y. 88
 - corrélations 86
 - gaz quasi homogène 88
 - réciprocité 88
 - Vlasov 49
- Étendue (faisceaux lumineux) 443

Eulerienne (description) 112

F

Faisceau(x) d'électrons 245

couplage au circuit extérieur 287

création d'un plasma 242

dissipation interne 294

dynamique en dimension 247

équations linéaires 248

équations non linéaires 247

fonction de réponse 280

effet Doppler 252

énergie

cinétique de perturbation 283

développement en série 282

d'onde 257

faisceau non homogène 283

excitation par deux grilles

admittance 291, 293

dipolaires 261, 284

espacées 265

maxwelliens

ondes peu amorties 284

modes propres (naturels) 251

onde lente 251

onde rapide 251

Fermeture

équations hydrodynamiques

adiabatique 54

Euler 55

Navier-Stokes 56

plasmas froids 54

système B.B.G.K.Y. 14

Fluide quasi continu 36

Flux dans l'espace des vitesses

gaz faiblement ionisés

effet Joule 303

refroidissement (collisions) 307

plasmas

collisions lointaines 368, 371

Flux

chaleur

et anisotropies de f 334

tenseur 45

vecteur 47, 323

énergie 276

cinétique 47, 323

d'ondes 225

radiative 433

entropie 119

photons 433

QMV

radiative 433

tenseur 46

Fokker-Planck

cf. Equation, Collisions

Fonction de réponse longitudinale 129

Fonction Z de dispersion 163, 218, 227

Fonction(s) de distribution

anisotropies 292, 330

approximation régulière 345

bi-maxwellienne 240

d'équilibre 117, 118, 223

de révolution

autour de \vec{k} 274

autour d'un axe 334

double 10

Druvesteyn 314, 342

Lorentz-Cauchy 134, 269

réponse à excitation initiale
225

maxwellienne 75, 290, 312

déplacée 42

imposée (collisions $e-e$) 326

relativiste 158, 226

normalisée 128

partie isotrope 292, 331

photons 431

réduite à une dimension 171

simple 9

Fonctions propres

laplacien 219, 239

opérateur de Boltzmann 293, 337

opérateurs de rotation 337

Force d'interaction 143

Frenet (trièdre de) 131

Fréquence(s)

attachement 238

collisions 6, 367

constante 232

$e-h\nu$ 461

$e-i$ 38

$e-o$ 203, 294

expérimentales 296

moyenne 342

potentiel $1/r^s$ 295

coupure 42

cyclotron 86, 96

fondamentales ω_p et ν_{coll} 367

ionisation 213

plasma 13, 367

rebondissement (piégeage) 192

Fusion nucléaire

confinement
 inertiel 61
 magnétique 58, 106, 78
 critère de Lawson 57
 par laser, attaque indirecte 64
 paramètre β 58, 91
 réactions de fusion 53
 température de Post 57

G

Gaines 24, 78
 Gaunt (facteur) 421, 426
 Gaz de Lorentz
 électrons-neutres 290
 imparfait 306, 316
 parfait 292
 photons-électrons 448
 Gaz faiblement ionisés 51, 287
 Gel du plasma dans B 105
 Gradient, champ de vecteurs 130
 Grands hydrodynamiques
 définitions 44
 radiatives 433, 439
 équilibre (ET) 436, 439
 rayonnement isotrope 435
 Gyrotron 293

H

Hamiltonien
 particule chargée 134, 32
 plasma (semi-relativiste) 33
 Hydrodynamique radiative 447
 Hyperboliques (points) 191

I

Impédance d'un plasma 17, 180
 Impulsion solitaire 212
 Indice de réfraction (rayons) 440
 Instabilité(s)
 absolue 315
 convective 315
 critères cf. Penrose
 distributions anisotropes 274
 explosive 208
 paramétriques 208
 à deux courants 216
 Rayleigh-Taylor 64
 saturation 211, 261
 Instabilité(s) électromagnétique(s)

F opposés, T anisotropes 286
 purement croissante 279
 Weibel non relativiste
 AP magnétoquasistatique 324
 effets non linéaires 332
 dispersion 327, 328, 273, 276
 domaine d'instabilité 280
 énergie de perturbation 329
 évolution non linéaire 332, 282
 F opposés, T anisotropes 277
 mécanisme contre-réaction 329
 plasma froid 323
 plasmas, T anisotrope 282
 Weibel relativiste
 dispersion 337
 énergie de perturbation 345
 Instabilité(s) électrostatique(s)
 Buneman 261
 avec agitation thermique 261
 dispersion 309, 312
 domaine d'instabilité 309, 340
 évolution non linéaire 312, 268
 plasmas froids 263
 régime acoustique ionique 265
 régime cinétique 264
 taux de croissance 311, 342
 de courant 297, 309
 deux faisceaux e opposés
 dispersion 313
 domaine d'instabilité 314
 évolution non linéaire 317
 instabilité absolue 315
 maxwelliens 285
 modèle plasma froid 315
 mouvement des ions 317, 342
 deux faisceaux e parallèles
 amplification spatiale 315, 342
 dispersion 315-317
 domaine d'instabilité 318
 évolution non linéaire 319
 deux faisceaux i 320
 diode de Pierce 267, 288, 291
 faisceau e -plasma 254
 agitation thermique 254
 chaud-chaud 258
 chaud-froid 256, 284
 évolution non linéaire 308, 261
 froid-chaud 260
 froid-froid 309
 solutions $\omega(k_r)$ 301, 225
 faisceau e -plasma (froid-froid)
 amplification spatiale 305

collisions 306
 croissance maximum 303
 dispersion 299-301, 307
 domaine d'instabilité 340
 effets non linéaires 308
 gradient de densité 341
 plasma=milieu réactif 305
 solutions $k(\omega_r)$ 305
 solutions $\omega(k_r)$ 301
 faisceau-milieu dissipatif 267
 onde lente instable 270
 onde rapide stable 270
 faisceau-milieu réactif 276, 306
 bilans d'énergie 278
 dispersion temporelle pure 280
 Pierce-Budker-Buneman 309
 Intensité du rayonnement 430, 439
 équilibre (ET) 436, 440
 lumière naturelle 431
 Invariant(s) adiabatique(s) 104, 120
 action longitudinale 121, 140
 de flux global 121
 μ orbital 90, 109, 121
 Ionisation cf. Degré, Saha
 Ionosphère 10
 Ions négatifs 186

J

Joule (effet)
 avec un champ B 341
 gaz faiblement ionisés 305

K

KAM cf. Tores
 Kirchhoff (loi) 451
 Klystron
 amplificateur 285
 reflex 293
 Kortweg-de Vries (équation) 213

L

Lagrange cf. Équations
 Lagrangienne (description) 112
 Landau
 amortissement 43, 147, 154, 157,
 158, 159, 160, 174
 collisions 183
 coupure relativiste 226
 non linéaire 211

contour 134
 dissipation 143
 Langevin (formule) 203
 Langmuir
 paradoxe 308
 sonde 78
 Larmor (formule) 48, 408
 Lasers
 à électrons libres 293
 de puissance 63
 Legendre
 fonctions 292, 330
 polynômes 293, 369, 393
 Libre parcours moyen
 collisions proches 36, 349
 Liénard-Wiechert (potentiels) 403
 Limite centrale (théorème) 77
 Longueur(s)
 d'interaction $e-h\nu$ 461
 d'interaction $h\nu-e$ 460
 Debye 21, 227, 333, 156, 349
 écran 29
 Landau 21, 349
 Rosseland 457
 Lorentz cf. Gaz

M

Magnétohydrodynamique
 approximation 324
 gaz faiblement ionisés 73
 liquides 66
 plasmas 75
 Magnétoquasistatique (AP) 324
 Manley-Rowe (relations) 208, 230
 Margenau : cf. Échauffement
 Maxwellianisation $e-e$ 395
 Métastables (états) 182, 184
 Méthode régressive (Yvon) 1, 375
 Microchamps et macrochamps 437
 Microréversibilité 200, 31, 450
 Milieu faiblement dissipatif
 relation $k_i(\omega_r)-\omega_i(k_r)$ 275
 Miroir(s) magnétique(s)
 cône de perte 113
 de révolution 123, 132
 force de freinage 139
 rapport de miroir 112
 Mobilité
 électronique 203, 300
 effet Ramsauer 205
 expérimentales 205

loi de similitude 204, 314
 plasmas intermédiaires 343
 réduite 204, 315
 ionique 208
 Langevin 208
 loi de similitude 212
 réduite 208
 Modes propres
 cavité cylindrique 240
 cavité parallélépipédique 239
 Moléculaire (régime) 36
 Moment
 de Lagrange p_φ 124
 μ orbital cf. Invariant(s)
 Monotron 293, 295

N

Newcomb-Gardner (stabilité) 232
 perturbations électrostatiques
 plasmas anisotropes 239
 plasmas isotropes 236
 perturbations quelconques 234
 Niveaux d'énergie
 atomes 181
 molécules 182
 Nyquist (méthode de) 242

O

Ohm (loi d') généralisée 64
 gaz partiellement ionisés 98
 plasmas binaires 101
 plasmas multiples 97
 Onde(s)
 acoustique ionique 42, 160, 188,
 207, 214
 champs 226
 active (énergie négative) 255
 Alfvén 43, 71
 hybride basse 206
 longitudinales ES 170
 plasmas anisotropes 275, 285
 passive (énergie positive) 255
 plasma e 12, 42, 155, 207, 214
 champs 226
 dispersion 227
 méthode van Kampen-Case
 227
 plasma i 161
 pseudo-sonore
 cf. Onde acoustique ionique

sifflleurs 44
 TEM 17, 42, 167, 208, 285
 plasmas anisotropes 275, 285
 transverse à un faisceau
 analyse non relativiste 347
 changement de repère 347
 dispersion 337, 338, 346, 277
 énergies de perturbation 337
 modes TEM, F, S 338, 346
 polarisations 338

Orbites

adiabatiques 101, 103
 liées et non liées 134
 liées provisoirement 135

Oscillations de gaine 16

P

Paquets d'ondes 194
 cohérentes
 mouvement d'une particule
 198
 séparatrices 199
 temps d'autocorrélation 196
 Paramètre
 de plasma 30
 de Townsend E/n_0 204
 Particules résonnantes 143
 échange d'énergie avec onde 151
 Partie principale d'une intégrale 136
 Peniotron 293
 Penrose (conditions) 244, 247
 distributions avec un minimum
 251
 nécessaires et suffisants 284
 plasma équ. à un F 248, 284
 Permittivité
 longitudinale
 faisceau e 250
 plasma 130
 plasma froid 19
 tenseur de 273
 Photons thermiques moyens 437
 Piégeage dans une onde 189
 effet des collisions 194
 électrons
 passant 191
 piégés 191
 Planck (formule) 436
 Plasmas
 astrophysiques et géophysiques 9
 cinétiques classiques 35, 349

corrélés classiques 36
 de laboratoire 10
 froids (modèles) 100
 EM non relativiste linéarisé 322
 EM relativiste 320
 ES relativiste 343
 intermédiaires 53, 325
 matériels ou radiatifs 459
 théorie collisionnelle 345
 Plemelj (formules) 136
 Poincaré (section de) 201
 Polarisabilité atomique 209
 Pondéromotrice (force) 214
 Post-décharge 217
 Potentiels d'interaction
 électron-neutre 149
 neutre-neutre 150
 Prandtl magnétique 70
 Pression
 cinétique 44
 et anisotropies de f 333
 de radiation 455
 inter-particulaire 35, 50
 interne (Van der Waals) 52
 magnétique (et tension) 70, 79
 Pseudo-période 104, 119
 Puissance dissipée 126, 139, 142, 230

Q

Quasi hélicoïdal (mouvement) 103
 Quasi linéaire (théorie)
 gaz faiblement ionisé
 conductivité électrique 309
 plasmas 195
 collisions 204
 diffusion résonnante 197, 229
 ondes cohérentes 198
 phases aléatoires 195

R

Rayon d'orbite 92
 Rayon lumineux 439
 Rayonnement
 bremsstrahlung 413
 bremsstrahlung $e-i$ 49
 Born 421, 428
 dispersion du plasma 426
 facteur de Gaunt 421, 426
 longueur d'absorption 429

 puissance totale 421
 spectre 423
 théorie quantique 427
 trajectoires rectilignes 422
 bremsstrahlung $e-o$ 414
 correction quantique 416
 dispersion du plasma 418
 émissivité spectrale des e 416
 puissance totale 416
 cyclotron 48
 corrections relativistes 413
 description quantique 412
 distribution spectrale 411
 longueur d'absorption 429
 puissance totale 410
 d'une particule chargée
 distribution spectrale 408
 puissance totale 408
 des plasmas 401
 longueurs d'absorption 460
 synchrotron 49, 413

Réaction

 constante de 197
 taux de 195
 pour maxwelliennes 200
 ternaire
 constante de 197
 saturée pseudo-binaire 198

Rebondissement (piégeage) 145, 192

Recombinaison

 coefficient de 236
 en surface 215
 en volume 237
 mécanismes de 191

Refroidissement des électrons

 collisions 306
 diffusion 319
 mécanismes 306

Relaxation

 anisotropies 294
 courant électrique 65
 $e-e$ 365
 $e-i$ 355, 365
 $e-o$ 52
 $i-e$ 365
 $i-i$ 365
 par diffusion 219
 partie isotrope de f_e 307
 photons-matière 453
 temps de (plasmas) 363

Résonance

 cyclotron 43, 127

électronique 140
 ionique 130
 hybride
 basse 46
 haute 46
 Reynolds (nombre de)
 hydrodynamique 70
 magnétique 69
 Rosenbluth (formules) 357, 369, 389
 Runaways (*e* emballés) 381, 382

S

Saha (formule) 7, 77
 Schrödinger (équation) 215
 Section efficace
 absorption de photons 450
 collision élastique *e-o* 170
 de réaction 191
 différentielle
 élastique 154
 inélastique 30, 38
 méthodes de mesure 169, 180
 Rutherford 158, 161, 327, 361
 totale 162
 transport 177
 énergie 180
 QMV 164, 293
 Séculaire (terme)
 échauffement des électrons 304
 particules résonnantes 152
 Séparatrice (orbite) 191
 cf. aussi Paquets
 Seuil de réaction 188
 Siffleurs : cf. Onde(s)
 Soliton 212, 214
 de Langmuir 215
 Sphériques (fonctions) 292, 330
 cf. aussi Legendre
 Standard map cf. Application
 Stefan (constante) 437
 Subsoniques (mouvements) 62
 Susceptibilité électrique
 équilibre
 anisotrope 273
 isotrope 167, 227
 longitudinale
 cinétique 128, 171
 collisions 182, 228
 faisceau *e* 250, 300
 faisceau froid 150
 plasma 128, 226

 plasma froid 300
 plasma de Lorentz-Cauchy 224
 prolongement analytique 134
 tenseur 167, 227
 Système B.B.G.K.Y.
 équation de f_1 12, 34, 371
 équation de f_{12} 14

T

Température
 Boltzmann (2 niveaux) 450
 cinétique 9
 cinétique en eV 9
 de diffusion 207
 de rayonnement 445
 électronique 343
 Thomson (diffusion) 448, 460
 Tokamak 205
 Tores de KAM 201
 Townsend (unité) 204
 Trajectoires
 B uniforme 85
 cycloïdales 95
 dans une onde
 espace de phase 191
 Transfert radiatif
 approximations
 classique pour les *e* libres 452
 diffusion 455
 ETL complet 456
 ETL partiel 454
 quasi-statique pour $h\nu$ 453
 conductivité therm. radiative 456
 équation de transfert 443
 fonction source 443
 profondeur optique 443
 Transformation
 conforme 242
 Fourier-Laplace
 domaine de convergence 126
 Lorentz 96
 Transitions libre-libre 451
 Tube de force 105
 Turbulence
 faible 212
 forte de Langmuir 215

V

Van Kampen, Case
 modes 175, 228

- approximation WKB 180
 - orthogonalité 180, 228
 - spectre continu et discret 179
 - relation avec Landau 177
 - Variables fluides globales 58
 - Viscosité 57
 - Vitesse
 - d'Alfvén 44
 - d'énergie 259, 438
 - de fluide et anisotropies 332
 - de groupe 259, 147, 151, 174, 439
 - de piégeage 191
 - du son 43
 - Vlasov-Maxwell (modèle de) 107
 - cf. aussi équation de Vlasov
 - propriétés 108-122
 - Vlasov-Maxwell en 3 dimensions 164
 - cf. aussi Ondes
 - Vlasov-Poisson en 1 dimension 122
 - collisions 181
 - effets non linéaires 188
 - évolution asymptotique 138
 - excitation externe 139
 - fonction de Green 130
 - Fourier-Laplace 124
 - linéarisé 123
 - modes faiblement variables 145
 - modes naturels 129, 145-148, 162
 - non linéaire 123
 - perturbations spatiales périodiques 131
 - relation de dispersion 129
 - réponse linéaire 127
 - réponses forcées 129
- Z**
- Zakharov (modèle) 214

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.

L O U I S - J E A N
avenue d'Embrun, 05003 GAP cedex
Tél. : 92.53.17.00
Dépôt légal : 39 – Février 1994
Imprimé en France

